Вовед во Фуриева анализа

Банско, јуни 2010

Јасмина Буралиева

Дефиниција на некои простори

- L^p , $1 \le p < \infty$ простор со норма $\|f\|_p = \left(\int_{R^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$

- L^1, простор со норма $\|f\|_1 = \left(\int_{R^d} |f(x)| dx \right)$

- L^2 , простор со норма $\|f\|_2 = \left(\int_{R^d} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$

Врска Банахов- Хилбертов простор

Фуриева трансформација и Риман Лебегова лема

L^1 простор : $f \in L^1(R^d)$

1. Ако d=1 тогаш $f \in L^1(R)$ сигнал
2. Ако d=2 тогаш $f \in L^1(R^2)$ интензитет на светлината или боите(слика)

<u>Дефиниција на фуриева трансформација</u>

$$F : L^1(R) \to C_0(R)$$

со $\hat{f}(w) = \int_R f(x) e^{-2\pi i x w} dx$

<u>Риман Лебегова лема</u> :

Ако $f \in L^1(R)$ тогаш $\hat{f}$ е рамномерно непрекината и $\lim_{|w| \to \infty} \left|\hat{f}(w)\right| = 0$.

Планшерелова теорема

$\|f\|^2{}_2 = \int_R |f(x)|^2 dx < \infty$ енергија на сигнал f .

Планшерелова теорема :

Ако $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ тогаш $\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2$.

Во анализата на сигнали Планшереловата теорема ни кажува дека Фуриевата трансформација ја задржува енергијата на сигналот f .

Основни операции

Транслација

$x, w \in R$

$T_x f(t) = f(t-x)$ транслација на функцијата f за x

Модулација

$M_w f(t) = e^{2\pi iwt} f(t)$ модулација на f за w.

Временско фрекфентни поместувања

$T_x\ M_w$ и $M_w\ T_x$ временско фрекфентни поместувања

- Комутативност $T_x M_w f(t) = e^{-2\pi i x w} M_w T_x$

Фуриева трансформација врз :

- транслација $(T_x f)^{\wedge} = M_{-x} \hat{f}$
- модулација $(M_w f)^{\wedge} = T_w \hat{f}$
- временско фрекфентното поместување

$$(T_x M_w f(\xi))^{\wedge} = M_{-x}(M_w \hat{f}(\xi)) = M_{-x} T_w \hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i x w} T_w M_{-x} \hat{f}(\xi)$$

Конволуција : $f, g \in L^1(R)$ е функција дефинирана со $(f * g)(x) = \int_R f(y) g(x-y)\,dy$

Својства :

- $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$
- $(f * g)^{\wedge} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Теорема на Young, Извод, инверзна функција

Теорема (Young) : Ако $f \in L^p(R)$ и $g \in L^q(R)$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$ тогаш $f * g \in L^r(R)$ и $\|f * g\|_r \le (A_p A_q A_r)\|f\|_p \cdot \|g\|_q$ каде што $A_p = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Фуриева трансформација врз парцијалнен извод на функција

$$(D^\alpha f)^\wedge(w) = (2\pi i w)^\alpha \hat{f}(w) \qquad D^\alpha \hat{f}(w) = ((-2\pi i x)^\alpha f)^\wedge(w)$$

Инверзна формула

Теорема : Ако $f \in L^1(R)$ и $\hat{f} \in L^1(R)$ тогаш $f(x) = \int_R \hat{f}(w) e^{2\pi i x w} dx$ за секое $x \in R$.

Во анализа на сигнали : суперпозиција на чисти фрекфенции.

Лема : $D^\alpha f \in L^2(R)$ за секое $|\alpha| \le n,$ акко $\int_R \left|\hat{f}(w)\right|^2 (1+|w^2|)^n dw < \infty$

глаткост на оригиналот f и опаѓањето на $\hat{f}$.

Теорема на Gauss

Дефиниција : Нека $\varphi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$ е ознака за ненормализирана Гаусова функција со дилатација a>0 во R^d .

Лема : Фуриева трансформација на Гаусова функција.За сите a>0

$$\hat{\varphi}_a(w) = a^{d/2}\varphi_{1/a}(w)$$

За $a=1$ имаме $(e^{-\pi x^2})^{\wedge} = e^{-\pi w^2}$.

Гаусовата функција φ_c се дефинира и со комплексен параметар $c \in C$

Ако $c^{-1} = a_0 + ib_0$ тогаш $\varphi_c = e^{-\pi i b_0 x^2} e^{-\pi a_0 x^2}$ Гаусовата функција .

Лема (Временско фрекфентна промена на Гаусовата функција)

За сите a>0 и за сите $x,u,w,n \in R^d$ имаме $< T_x M_w \varphi_a, T_u M_n \varphi_a > = \left(\frac{a}{2}\right)^{d/2} e^{\pi i(u-x)(n+w)} \varphi_{2a}(u-x)\varphi_{\frac{2}{a}}(n-w)$

Нотен запис во споредба со временско фрекфентна анализа

Музика :

мелодија , ритам , тоналитет.

Ноти се неделиви единици во музиката

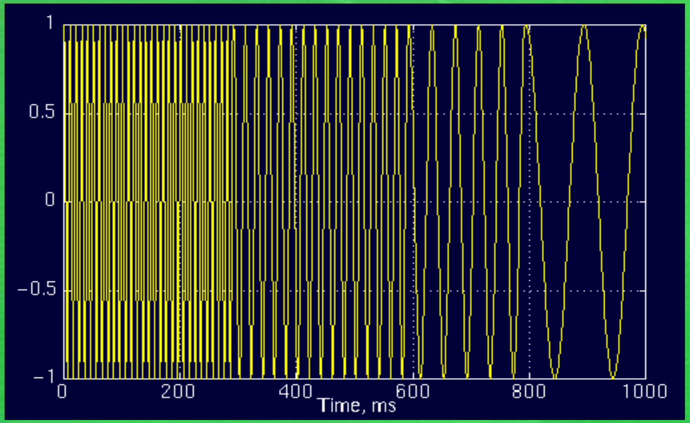
должина, јачина

Увото :

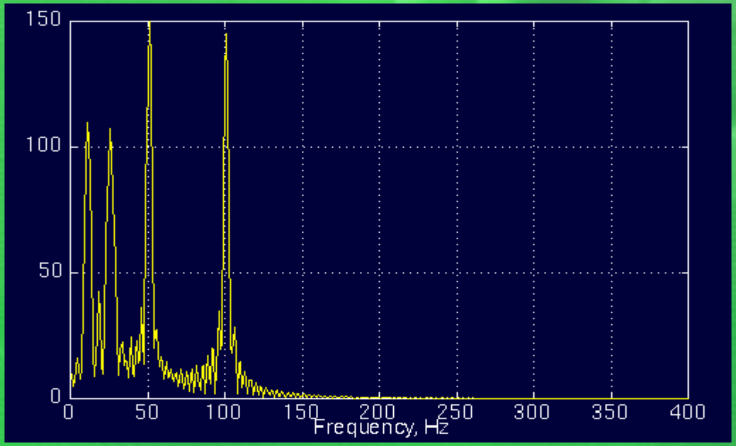
1) Забележува од кои фрекфенции е претставен звукот
2) Препознава јачина
3) Разликува инструменти

f и $\hat{f}$ не ја даваат мелодијата и ритамот на музиката.

Сигнал во време



Фуриева трансформација



Принципи на неопределеност

Теорема : Ако $f \in L^2(R)$ и $a,b \in R$ се произволни тогаш

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\left|f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int (w-b)^2\left|\hat{f}(w)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\pi}\left\|f\right\|_2^2$$

За $f \in L^2(R)$ со $\left\|f\right\|_2 = 1$ дефинираме стандардни отстапувања :

$$\Delta_f x = \min_{a\in R}\left(\int_R (x-a)^2\left|f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \Delta_f w = \min_{b\in R}\left(\int_R (w-b)^2\left|\hat{f}(w)\right|^2 dw\right)^{\frac{1}{2}}$$

мерка за траење на сигнал мерка за фрекфентен опсег на сигнал

Принцип на неопределеност :

Ако $\left\|f\right\|_2 = 1$ тогаш $\Delta_f x \cdot \Delta_f w \geq \frac{1}{4\pi}$