



УНИВЕРЗИТЕТ “СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”-СКОПЈЕ
Факултет за електротехника и информациски технологии



Институт за математика и физика

Јасмина Буралиева

**Временско-фреквенциска анализа и вејвлет
теорија со примена**

- магистерски труд -

Скопје, 2011 година

Ментор:

Доц. д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева

Факултет за електротехника и информациски технологии-Скопје

Членови на комисија:

1. Проф. д-р Марија Кујумџиева-Николоска, претседател

Факултет за електротехника и информациски технологии-Скопје

2. Доц. д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева, ментор

Факултет за електротехника и информациски технологии-Скопје

3. Проф. д-р Анета Бучковска, член

Факултет за електротехника и информациски технологии-Скопје

Датум на одбрана:

Датум на промоција:

Научна област: Применета математика

УНИВЕРЗИТЕТ “СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ” - СКОПЈЕ

Факултет за електротехника и информациски технологии

Институт за математика и физика

Временско-фреквенциска анализа и вејвлет теорија со примена

Апстракт

Во овој магистерски труд е даден детален преглед на две теории, временско-фреквенциската анализа и вејвлет теоријата, со посебен осврт на нивните предности во однос на класичната Фуриеова анализа. Направена е детална анализа на основните структури на временско-фреквенциската анализа и вејвлет теоријата, како и нивна споредба при примената во одредени математички и инженерски области.

Покрај ова, во магистерскиот труд се проучува примената на вејвлет алатките во обработка на сигнали, како и примената на вејвлетите во решавање обични и парцијални диференцијални равенки.

Клучни зборови

временско-фреквенциски поместувања, Short-time Фуриеова трансформација, рамки, Габор рамки, Габор коефициенти, вејвлет, вејвлет трансформација, вејвлет редови, вејвлет коефициенти, вејвлет рамки.

UNIVERSITY SS CYRIL AND METHODIUS – SKOPJE
Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies
Institute of mathematics and physics

Time-frequencies analysis and wavelet theory
with application

Abstract:

In this master thesis is given a detailed overview of two theories, time-frequencies analysis and wavelet theory with special twist to their advantages over classical Fourier analysis. It involves detailed analysis of the basic structures of time-frequencies analysis and wavelet theory, and also comparison between them in the application in certain mathematical and engineering fields.

In addition, in this master thesis we study the application of wavelet tools in signal processing and application of wavelets in solving ordinary and partial differential equations.

Key words:

time-frequency shifts, short-time Fourier transform, frames, Gabor frames, Gabor coefficients, wavelets, wavelet transform, wavelet series, wavelet coefficients, wavelet frames.

Благодарност

Содржина

Вовед	1
1 Елементи од Фуриеова анализа	4
1.1 Дефиниција на Фуриеова трансформација	5
1.2 Основни операции	7
1.3. Фуриеови редови	12
1.4. Поасонова формула за сумирање	13
1.5. Гаусова функција	15
2 Short–time Фуриеова трансформација	18
2.1 Временско–фреквенциска анализа и принцип на неопределеност	18
2.1.1 Музичка партитура како метафора за временско-фреквенциската анализа	18
2.1.2 Принцип на неопределеност	22
2.2 Short-time Фуриеова трансформација	25
2.2.1 Дефиниција и особини на STFT	25
2.2.2 Ортогонални релации и инверзна формула	29
2.2.3 Lieb-ов принцип на неопределеност	32
3 Дискретна временско–фреквенциска репрезентација: Габор рамки	34
3.1 Теорија на рамки	36
3.2 Габор рамки	42
3.3 Безусловна конвергенција	44
4 Вејвлет трансформација и вејвлет рамки	48
4.1 Непрекината вејвлет трансформација	48
4.2 Дискретна вејвлет трансформација и вејвлет редови	58
4.3 Мултирезолуциска анализа (МРА)	61
4.4 Вејвлети и глаткост на функции	63

Содржина

4.5	Оператор на апроксимација и оператор за детали	66
4.6	Скални и вејлет филтри	69
5	Примена на вејлет методи за решавање диференцијални равенки и во обработка на сигнали	71
5.1	Вејлет-Галеркин метод за обични диференцијални равенки	71
5.2	Вејлет-Галеркин метод за парцијални диференцијални равенки	73
5.3	Обработка на сигнали	74
5.3.1	Алгоритам за декомпозиција и реконструкција	75
5.3.2	Врска со обработка на сигнали	77
	Литература	81

Вовед

Временско-фреквенциската анализа е модерна гранка на хармониската анализа која ги спојува оние делови од математиката што ја користат структурата на транслацијата и модулацијата (или на временско-фреквенциското поместување) за анализа на функции и оператори. Таа е форма на локалната Фуријеова анализа која ги проучува времето и фреквенцијата истовремено и симетрично. Временско-фреквенциската анализа почнува да се развива со теоретското откривање и развивање на теоријата на информации и анализата на сигнали. Во 1946 година, D. Gabor ја вовел short-time Фуриеовата трансформација (STFT), која е позната под името Габор трансформација или Фуријеова трансформација со прозорец, користејќи ја Гаусовата функција како прозорец функција. Во своите почетоци временско-фреквенциската анализа била изучувана и развивана како дел од инженерството, а како независна математичка област почнува да се развива околу 1980 година, благодарение на работата на G. Janssen кој се смета за татко на математичката временско-фреквенциска анализа. Од 1990 година, временско-фреквенциската анализа интензивно се развива благодарение на појавувањето и развивањето на вејвлет теоријата, и денес овие две теории се развиваат паралелно.

Вејвлет теоријата често пати се смета како подобрување на Фуриеовата анализа и алтернатива на временско-фреквенциската анализа. Формалната теорија на вејвлети започнува да се развива во 1980 година. Во 1982 година францускиот геофизичар J. Morlet го вовел поимот “wavelet” што значи мало бранче, и вејвлет трансформацијата ја применил како нова алатка во анализата на сеизмичките сигнали. Веднаш потоа, францускиот теоретски физичар A. Grossmann ја проучил и инверзната формула за вејвлет трансформацијата. Во 1984 година, заедничката соработка на Morlet и Grossmann допринела за детално математичко истражување на непрекинатата вејвлет трансформација и нејзина различна примена, иако слични резултати веќе биле откриени од Calderon, Littlewood, Paley и Franklin во раните 20-ти години од минатиот век. Сепак новото откривање на старите концепти овозможило развивање на нов метод за декомпозиција на функции, односно сигнали. Како поголемо достигнување во вејвлет теоријата се смета конструкцијата на неортогонален развој од страна на Daubechies, Grosssman и Meyer во 1986 година. Во текот на 1985-86 година соработката помеѓу Meyer и Lemarie довела до конструкција на глатки ортонормирани вејвлет бази во просторите R и R^n . Во 1989 година Meyer и Mallat ја воведуваат мултирезолуциската анализа како ефективна алатка за конструкција на ортогонални вејвлет бази. Battle и Lemarie независно еден од друг предложиле конструкција на сплајн ортогонални вејвлети кои експоненцијално опаѓаат. Инспирирана од работата на Meyer, во 1988 година Daubechies дала голем придонес во вејвлет теоријата со конструирање на фамилии од ортонормирани вејвлети со компактен носач.

Денес временско-фреквенциската анализа и вејвлет теоријата претставуваат интер-дисциплинарни истражувачки области кои имаат широка примена во анализа на сигнали, теорија на комуникации и обработка на слики. Покрај ова, тие поврзуваат многу различни области од теоретска и применета математика како што се Фуријеова анализа, комплексна анализа, некомутативна хармониска анализа на Хајзенбергова група, теорија на репрезентации, теорија на парцијални диференцијални равенки и псевдо-диференцијални оператори, алгебри на оператори и нумеричка анализа.

Основна цел на овој магистерски труд е изучувањето на овие две теории и нивната примена, пред се во решавање на обични и парцијални диференцијални равенки, како и во обработка на сигнали. Во магистерскиот труд се дава детален преглед на овие теории, со посебен осврт на нивните предности во однос на класичната Фуриеова анализа при примена во одредени математички и инженерски области. Една од посуштинските придобивки од овие две теории, а која е многу значајна и корисна во обработка на сигнали е следнава: класичната Фуриеова анализа користи две комплементарни репрезентации за опишување на функциите: самата функција и нејзината Фуриеова трансформација. Во анализа на сигнали, функцијата го опишува временското однесување, додека пак нејзината Фуриеова трансформација го опишува фреквенциското однесување на сигналите. Генерално тешко е да се определат карактеристиките на функцијата од карактеристиките на нејзината Фуриеова трансформација, и обратно. За разлика од Фуриеовата анализа, временско-фреквенциската анализа користи репрезентации кои ги комбинираат информациите за временското и фреквенциското однесување на функцијата (сигналот). Идеалната временско-фреквенциска репрезентација на сигналот $f(x)$ го дава фреквенцискиот спектар во секој момент x . Но, основната пречка при примената на овие идеални репрезентации е принципот на неопределеност кој го прави концептот на истовремени фреквенции невозможен.

За разлика од временско-фреквенциската анализа каде што како параметри се јавуваат времето и фреквенцијата, во вејвлет теоријата како параметри се јавуваат времето и скалата, па поради тоа таа е позната и како временско-скална анализа. Иако вејвлет теоријата не користи експлицитно временско-фреквенциски репрезентации на сигналите, сепак таа проучува репрезентации кои имаат некои особини за локализација на фреквенциите. Во магистерскиот труд се проучени сличностите и разликите на овие две теории кои се важни при нивната примена во конкретни проблеми од инженерството.

Магистерскиот труд е организиран во 5 поглавја.

Во првото поглавје даден е преглед на најзначајните дефиниции и резултати од Фуриеовата анализа. Исто така, воведени се некои основни оператори кои претставуваат значајни алатки при натамошното изучување на временско-фреквенциската анализа и вејвлет теоријата, и изнесени се нивните особини.

Во второто поглавје интуитивно е објаснета основната идеја и целите на временско-фреквенциската анализа, преку нејзина аналогија со музиката. Исто така нагласена е и главната мотивација за воведување на временско-фреквенциската анализа: надминување на недостатоците на Фуриеовата анализа при обработка на одредени сигнали. Проучен е принципот на неопределеност на Heisenberg-Pauli-Weyl кој претставува основна пречка за добивање на идеална временско-фреквенциска анализа. Покрај тоа, анализирана е најбитната линеарна и непрекината временско-фреквенциска репрезентација, short-time Фуриеовата трансформација (STFT), и изнесени се нејзините особини, ортогоналните релации, инверзната формула, како и неравенството на Lieb кое претставува принцип на неопределеност за овој вид трансформација.

Во третото поглавје изнесени се неколку природни идеи за дискретизација на инверзната формула за STFT кои водат кон теоријата на Габор редови и Габор рамки. Детално е проучена општата теорија на рамките, кои претставуваат обопштување на ортонормираните бази, преку воведување на некои важни оператори и проучување на нивните особини. Посебно внимание е посветено на специјалната теорија на Габор

рамки, како дискретна временско-фреквенциска репрезентација. Покрај тоа, анализиран е поимот безусловна конвергенција кој е соодветен поим за конвергенција на неортогонални редови во Хилбертови простори, како и еден од најважните типови на конвергенција во Банаховите простори.

Во четвртото поглавје проучена е непрекината вејвлет трансформација, со посебен осврт на нејзините особини, ортогоналните релации, Парсеваловата формула, инверзната формула, нејзините предности во однос на STFT и резултатите кои даваат карактеризација на Холдер непрекинатите функции. Исто така, проучени се дискретните вејвлет репрезентации: вејвлет редовите и вејвлет рамките. Притоа направена е детална споредба на основните структури на временско-фреквенциската анализа со вејвлет теоријата. Изнесени се и основните принципи на мулти-резулциската анализа (МРА) како основна алатка за конструкција на ортогонални вејвлет бази. Покрај тоа, проучена е зависноста меѓу глаткоста на функциите и локализацијата на нивната вејвлет трансформација или нивните вејвлет коефициенти, преку интерпретација на резултати кои даваат карактеризација на Липшидсовите класи на функции со помош на вејвлети. Дефинирани и анализирани се операторот за апроксимација и операторот за детали за Хар вејвлетот, како и за произволна скална функција.

Во последното поглавје разгледана е примената на вејвлет алатките во решавање на обични и парцијални диференцијални равенки, а посебно е нагласена улогата на вејвлетите во подобрување на класичниот Галеркин метод. Покрај тоа, изнесена е дел од примената на ортогоналните вејвлети во обработка на сигнали преку проучување на алгоритмите за декомпозиција и реконструкција и нивната примена во процесот на филтрирање на сигнали.

Глава 1

Елементи од Фуријеова анализа

Во оваа глава ќе ги изнесеме основните дефиниции и резултати за Фуријеовата трансформација и Фуријеовите редови [1].

За математичарите функцијата f над R^d , $d \in N$ е комплексна функција од реална променлива $x \in R^d$. За инженерите, во случај кога $d = 1$, променливата $x \in R$ често претставува време, а $f(x)$ претставува амплитуда на напон или електрично поле во време (момент) x , и тогаш f е сигнал. Ако пак $d = 2$, $f(x_1, x_2)$ претставува интензитет на светлината или бојата во точка (пиксел) $(x_1, x_2) \in R^2$, и во тој случај f е слика.

Понатаму ќе работиме во R^d просторот. Нека $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)$ е вектор од R^d , $\int_{R^d} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d$ е Лебегов интеграл над R^d и $|E| = \int_{R^d} \chi_E(x) dx$ е мера на мерливо множество $E \subseteq R^d$.

Да се потсетиме, ако $1 \leq p < \infty$ тогаш

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

е L^p норма на $f \in L^p(R^d)$. $L^p(R^d)$ е Банахов простор² од сите мерливи функции f кои имаат конечна L^p норма. За $p = 2$ се добива просторот $L^2(R^d)$ кој е Хилбертов простор³ во кој скаларен производ помеѓу $f, g \in L^2(R^d)$ е дефиниран со $\langle f, g \rangle = \int_{R^d} f(x) \bar{g}(x) dx$. За инженерите нормата $\|f\|_2^2$ претставува енергија на сигнал $f \in L^2(R)$ или на слика $f \in L^2(R^2)$.

За $p = \infty$, $L^\infty(R^d)$ е просторот од есенцијално ограничени мерливи функции со норма $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in R^d} |f(x)|$. Ако $f \in L^\infty(R^d)$ е непрекината функција, тогаш $\|f\|_\infty = \sup_{x \in R^d} |f(x)|$.

¹ Функцијата $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ се нарекува **карактеристична функција на множество E** .

² Нека X е нормиран линеарен простор со норма $\|\cdot\|$. Дефинираме растојание (метрика) помеѓу било кои две точки $x, y \in X$ на следниов начин $d(x, y) = \|x - y\|$. Ако (X, d) е комплетен метрички простор, тогаш X се нарекува **Банахов простор**.

³ Нека X е линеарен простор со скаларен производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Дефинираме растојание (метрика) помеѓу било кои две точки $x, y \in X$ на следниов начин $d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$. Ако (X, d) е комплетен метрички простор, тогаш X се нарекува **Хилбертов простор**.

1.1 Дефиниција на Фуријеова трансформација

Фуријеовата трансформација на функцијата $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ е дефинирана со

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \omega} dx, \quad (1.1)$$

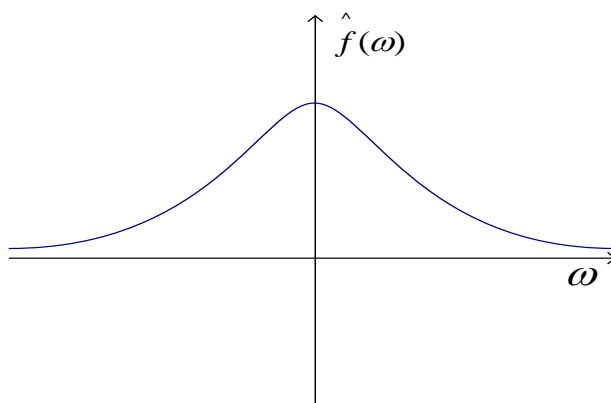
каде што скаларен производ помеѓу две d -торки $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ се дефинира како $x \cdot \omega = \sum_{i=1}^d x_i \omega_i$. Кога сакаме да нагласиме дека Фуријеовата трансформација е линеарен оператор⁴, ја користиме ознаката $\mathcal{F}f$ наместо \hat{f} . За инженерите $\omega \in \mathbb{R}$ е фреквенција, а Фуријеовата трансформација $\hat{f}(\omega)$ претставува амплитуда на фреквенцијата. Јасно е дека важи

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \omega} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) e^{-2\pi i x \cdot \omega}| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

од каде добиваме $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Риман-Лебеговата лема (Riemann-Lebesgue) го подобрува ова неравенство.

Лема 1.1.1. (Риман-Лебегова лема). Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, тогаш \hat{f} е рамномерно непрекината функција и важи $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\omega)| = 0$.

Нека $C_0(\mathbb{R}^d)$ е ознака за Банахов простор од непрекинати функции кои се анулираат во $\pm \infty$. На слика 1.1 прикажан е график на функција која се анулира во $\pm \infty$. Тогаш од лема 1.1.1 следува дека за Фуријеовата трансформација важи $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$.



слика 1.1

Теорема 1.1.2. (Планшерелова теорема) Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ тогаш $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

⁴ Еден оператор L се нарекува **линеарен** ако за сите функции f, g и скалари k, k_1, k_2 важи $L(f + g) = Lf + Lg$ и $L(kf) = kLf$ (или $L(k_1 f + k_2 g) = k_1 Lf + k_2 Lg$).

Во анализата на сигнали, Планшереловата теорема се интерпретира како “Фуријеовата трансформација ја зачувува енергијата на сигналот”.

Како последица од Планшереловата теорема, \mathcal{F} се проширува до унитарен оператор⁵ над просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$ ($\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$) и притоа да биде задоволена Парсеваловата (Parseval) формула

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \text{ за секое } f, g \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.2)$$

Значи, за $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, Фуријеовата трансформација \hat{f} се дефинира точкасто преку формулата (1.1) и таа припаѓа во просторот $C_0(\mathbb{R}^d)$, додека пак за $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ можеме да ја дефинираме Фуријеовата трансформација \hat{f} преку апроксимација и таа исто така припаѓа во $L^2(\mathbb{R}^d)$. Нека $X \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ е секаде густ потпростор⁶ од $L^2(\mathbb{R}^d)$. Избираме низа $\{f_n\}$, $f_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ така што $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$. Тогаш \hat{f}_n е добро дефинирана со (1.1), бидејќи $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Заради Планшереловата теорема важи $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$, од каде следува дека $\{\hat{f}_n\}$ е Кошиева низа во $L^2(\mathbb{R}^d)$. Просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$ е комплетен, па затоа постои единствена граница \hat{f} во $L^2(\mathbb{R}^d)$ така што $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \hat{f}$.

Ако ја споредиме дефиницијата на скаларен производ во просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$ со дефиницијата на Фуријеовата трансформација, забележуваме дека Фуријеовата трансформација претставува скаларен производ помеѓу функцијата f и чистите фреквенции $e^{2\pi i x \cdot \omega} = \cos 2\pi x \cdot \omega + i \sin 2\pi x \cdot \omega$, т.е. $\hat{f}(\omega) = \langle f(x), e^{2\pi i x \cdot \omega} \rangle$.

Фуријеовата трансформација за $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ е дефинирана со (1.1) само ако $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, а во општ случај се дефинира преку лимес исто како во просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$. Притоа важи следнава теорема:

Теорема 1.1.3 (теорема на Hausdorff-Young) Нека $1 \leq p \leq 2$ и нека p' е такво што $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогаш $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ и $\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$.

⁵ Нека X и Y се Хилбертови простори и A е оператор од X во Y , т.е. $X \supset D_A \xrightarrow{A} Y$. Нека со D^* го означиме множеството $D^* = \{y \in Y \mid \exists z \in X, \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle \text{ за секое } x \in D_A\}$. Пресликувањето $A^* : Y \supset D^* \xrightarrow{A^*} X$ се нарекува **адјунгиран оператор** на операторот A . Ако за операторот A важи $A = A^*$, тогаш тој се нарекува **самодјунгиран оператор**.

Унитарен оператор е ограничен линеарен оператор над Хилбертов простор X ($U : X \rightarrow X$) за кој важи $UU^* = 1 = U^*U$, каде што U^* е адјунгиран оператор за U , а I е идентичниот оператор над X .

⁶ За потпросторот Y од просторот X велиме дека е **густ потпростор** од X ако важи $\bar{Y} = X$, т.е. затварачот на Y е целиот простор X .

1.2 Основни операции

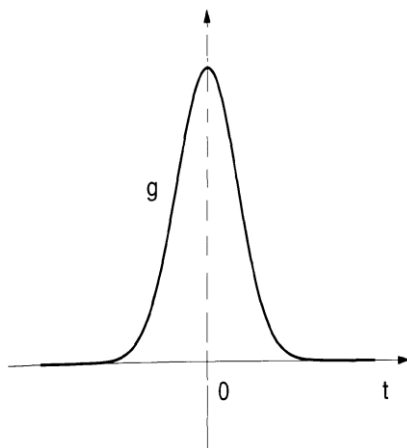
а) Транслација и модулација

Нека $x, \omega \in \mathbb{R}^d$. За функција f ги дефинираме следниве оператори:

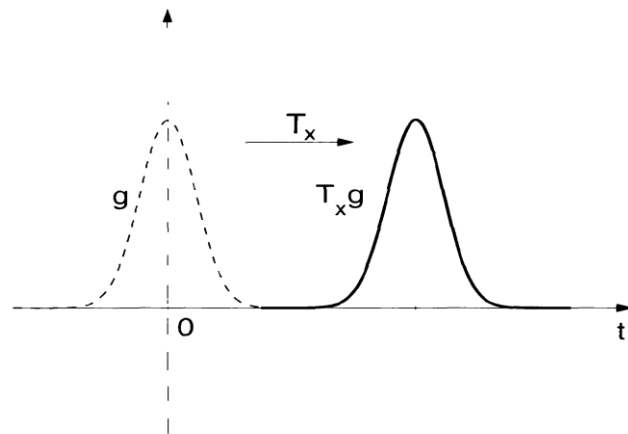
$$T_x f(t) = f(t - x) \quad (1.3)$$

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t). \quad (1.4)$$

T_x претставува **транслација** или **поместување** на функцијата f за фактор x . На слика 1.2 е прикажана функција g т.н. функција-свонче, додека пак на слика 1.3 е прикажана транслација на оваа функција за фактор x .



слика 1.2



слика 1.3

M_ω претставува **модулација** на функцијата f за фактор ω .

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t) = \cos(2\pi \omega \cdot t) f(t) + i \sin(2\pi \omega \cdot t) f(t).$$

На слика 1.4 е прикажан реалниот дел на модулацијата за фактор ω на функцијата-свонче g .

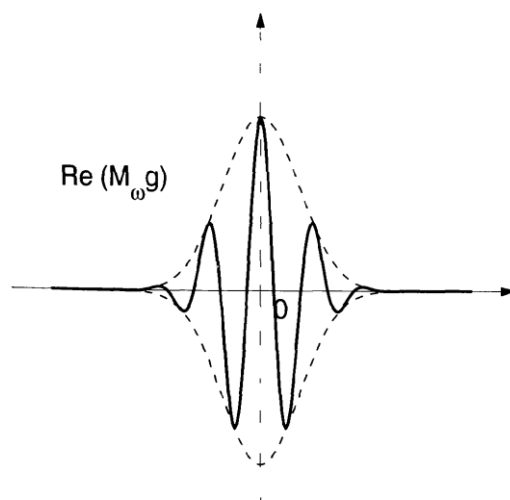
Операторите во облик $T_x M_\omega$ или $M_\omega T_x$ се нарекуваат **временско-фреквенциски поместувања**. Притоа важи релацијата

$$T_x M_\omega f(t) = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x f(t) \quad (1.5)$$

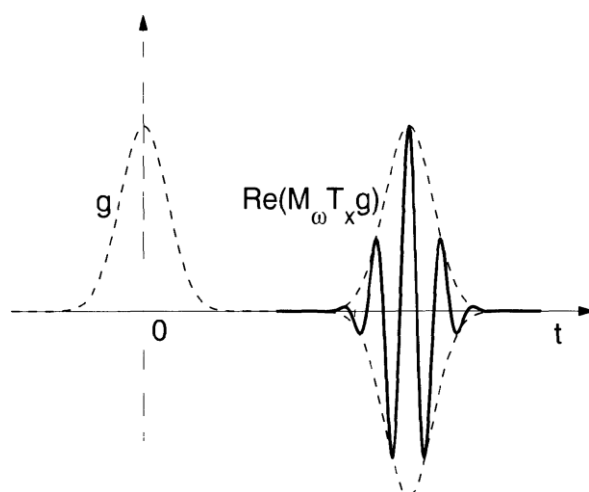
која претставува канонична комутативна релација. Равенството (1.5) се покажува со помош на следниве едноставни пресметки:

$$\begin{aligned} T_x M_\omega f(t) &= (M_\omega f)(t - x) = e^{2\pi i \omega \cdot (t - x)} f(t - x) = e^{-2\pi i x \cdot \omega} e^{2\pi i \omega t} f(t - x) = \\ &= e^{-2\pi i x \cdot \omega} e^{2\pi i \omega t} T_x f(t) = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x f(t). \end{aligned}$$

Од равенството (1.5) следува дека операторите T_x и M_ω комутираат ако и само ако $x \cdot \omega \in \mathbb{Z}$.



слика 1.4



слика 1.5

На слика 1.5 е прикажан реалниот дел од временско-фреквенциско поместување на функцијата-свонче g .

Ќе спомнеме неколку особини на временско-фреквенциските поместувања:

- Временско-фреквенциските поместувања се изометрии⁷ над L^p , $1 \leq p \leq \infty$, односно важи $\|T_x M_\omega f\|_p = \|f\|_p$.
- $(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f}$. (1.6)
- $(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f}$. (1.7)

Равенствата (1.6) и (1.7) се покажуваат со директно користење на дефиницијата за транслација, модулација и Фуријеова трансформација. Навистина,

⁷ Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) се метрички простори. Пресликувањето $f: X \rightarrow Y$ што го зачувува растојанието, т.е. важи $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$, $\forall x, y \in X$ се нарекува **изометрија**.

$$(T_x f(\xi))^\wedge = \int T_x f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt = \int f(t-x) e^{-2\pi i t \xi} dt = \int f(m) e^{-2\pi i (m+x)\xi} dm = e^{-2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) = M_{-x} \hat{f}(\xi)$$

$$(M_\omega f(\xi))^\wedge = \int M_\omega f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt = \int f(t) e^{2\pi i t \omega} e^{-2\pi i t \xi} dt = \int f(t) e^{-2\pi i t (\xi - \omega)} dt = \hat{f}(\xi - \omega) = T_\omega \hat{f}(\xi)$$

Формулата $(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f}$ ни покажува зошто модулациите се нарекуваат фреквенциски поместувања. Со комбинација на последниве две равенства ја добиваме една од најважните формули во временско-фреквенциската анализа:

$$(T_x M_\omega f(\xi))^\wedge = M_{-x} (M_\omega f(\xi))^\wedge = M_{-x} T_\omega \hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i x \omega} T_\omega M_{-x} \hat{f}(\xi). \quad (1.8)$$

Оваа формула го опишува дејството на Фуриеовата трансформација врз временско-фреквенциското поместување.

б) Конволуција

Конволуција на две функции $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ е функција дефинирана со

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy. \quad (1.9)$$

За конволуцијата важи:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad (1.10)$$

и

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}. \quad (1.11)$$

Неравенството (1.10) се добива ако се употреби теоремата на Фубини (Fubini), дефиниција на конволуција, како и апсолутна вредност од интеграл, т.е.

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| |g(x-y)| dy \right) dx \\ &\stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| dy \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| dx \right) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

Равенството (1.11) пак се добива со користење на дефиницијата на Фуријеова трансформација, дефиниција на конволуција како и теорема на Фубини, т.е.

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-2\pi i y \omega} e^{-2\pi i (x-y)\omega} dx \\ &\stackrel{\text{Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \omega} dy \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\omega} dx \right) \\ &= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Од неравенството (1.10) следува дека со конволуцијата, просторот $L^1(\mathbb{R}^d)$ е Банахова алгебра, т.е. важи:

- 1) $L^1(\mathbb{R}^d)$ е Банахов простор,
- 2) $L^1(\mathbb{R}^d)$ е алгебра со конволуција дефинирана со (1.9), т.е. важат следниве особини:

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad (f + g) * h = f * h + g * h,$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h, \quad k(f * g) = (kf) * g = f * (kg)$$

за сите скалари $k \in \mathbb{C}$ и функции $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

$$3) \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Равенството (1.11) заедно со Риман-Лебеговата лема ни кажува дека Фуриевата трансформација претставува пресликување од $L^1(\mathbb{R}^d)$ во (густа) подалгебра од $C_0(\mathbb{R}^d)$ со точкастото множење.

Како и Фуриевата трансформација, така и конволуцијата може да се прошири и во други функционални простори и притоа важи следнава теорема:

Теорема 1.2.1 (теорема на Young) Ако $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ и $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, тогаш $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, каде што $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ и важи $\|f * g\|_r \leq (A_p A_q A_r)^d \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. (A_p е наречена Вабенко-

Вескнер константа и е дефинирана со $A_p = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p^{\frac{1}{p}}} \right)^{1/2}$, каде што $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$.)

в) Инволуција и рефлексija

$$\text{Оператор на инволуција } * \text{ се дефинира со } f^*(x) = \overline{f(-x)}. \quad (1.12)$$

$$\text{Оператор на рефлексija } I \text{ се дефинира со } If(x) = f(-x). \quad (1.13)$$

Релацијата $(f^*)^\wedge = \widehat{\widehat{f}}$ покажува како дејствува Фуриевата трансформација врз инволуција, додека релацијата $(If)^\wedge = I \widehat{f}$ ни покажува како дејствува Фуриевата трансформација врз рефлексija.

Со помош на овие две операции, инволуција и рефлексija, конволуцијата на две функции можеме да ја запишеме на следниов начин:

$$(f * g)(x) = \langle f, T_x g^* \rangle \quad (1.14)$$

ако двете страни на равенството се дефинирани. Равенството (1.14) се покажува со користење на дефинициите за скаларен производ, инволуција, транслација и конволуција, т.е.

$$\langle f, T_x g^* \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{T_x g^*(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{g^*(y-x)} dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \overline{g(x-y)} dy = (f * g)(x).$$

г) Фуријеова трансформација и изводи

Ќе разгледаме некои релации помеѓу Фуриевата трансформација на функција и нејзините парцијални изводи. Нека е даден мулти-индекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\omega \in \mathbb{R}^d$.

Ги користиме следниве ознаки: $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\omega^\alpha = \prod_{j=1}^d \omega_j^{\alpha_j}$, $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$ е ознака за парцијален извод и $X^\alpha f(x) = x^\alpha f(x)$ за операторот на множење.

Важат следниве формули кои лесно се покажуваат:

$$(D^\alpha f)^\wedge(\omega) = (2\pi i \omega)^{|\alpha|} \hat{f}(\omega), \quad (1.15)$$

$$((-2\pi i x)^{|\alpha|} f)^\wedge(\omega) = D^\alpha \hat{f}(\omega). \quad (1.16)$$

Горните две равенствата можат да се запишат со помош на оператори на следниов начин $\mathcal{F} D^\alpha = (2\pi i)^{|\alpha|} X^\alpha \mathcal{F}$ и $\mathcal{F} X^\alpha = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}$, соодветно.

д) Инверзна формула

Следнава теорема ни ја дава инверзната формула која овозможува да ја најдеме функцијата f ако е позната нејзината Фуријеова трансформација.

Теорема 1.2.2. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ тогаш

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \cdot \omega} d\omega \text{ за секое } x \in \mathbb{R}^d. \quad (1.17)$$

Со други зборови

$$\mathcal{F}^{-1} = I\mathcal{F}, \quad (1.18)$$

каде што I е операторот на рефлексива.

Ако инверзната формула во просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$ ја запишеме како скаларен производ помеѓу Фуријеовата трансформација на функцијата f и чистите фреквенции $e^{-2\pi i x \cdot \omega}$, т.е. $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \cdot \omega} d\omega = \langle \hat{f}(\omega), e^{-2\pi i x \cdot \omega} \rangle$, тогаш заклучуваме дека инверзната

формула и Планшереловата теорема се еквивалентни.

Навистина, да претпоставиме дека важи Планшереловата теорема. Бидејќи \mathcal{F} е унитарен оператор, \mathcal{F}^{-1} е еднаков со адјунгираниот оператор \mathcal{F}^* . Ако Фуријеовата трансформација ја разгледаме како интегрален оператор⁸ со јадро $K(\omega, x) = e^{-2\pi i x \cdot \omega}$, т.е.

$\mathcal{F} f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} K(\omega, x) f(x) dx$, тогаш адјунгираниот оператор \mathcal{F}^* е интегрален оператор со

јадро $\overline{K(\omega, x)} = e^{2\pi i x \cdot \omega}$. Тогаш следува инверзната формула.

Спротивно, да претпоставиме дека инверзната формула важи за сите функции $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ за кои $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Тогаш

$$(f * f^*)(0) = \int f(x) f^*(0-x) dx = \int f(x) \overline{f(-x)} dx = \int f(x) \overline{f(x)} dx = \|f\|_2^2,$$

⁸ Нека K е мерлива функција над \mathbb{R}^{2d} . Тогаш **интегрален оператор** L_K со јадро K е формално дефиниран со $L_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) dy$ кога интегралот постои.

и $(f * f^*)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{f}^*(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \overline{\hat{f}(\omega)} = |\hat{f}(\omega)|^2 \in L^1(R^d)$ бидејќи \hat{f} е ограничена заради лема 1.1.1. Тогаш равенствата

$$\|f\|_2^2 = (f * f^*)(0) = \int (f * f^*)^\wedge(\omega) d\omega = \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{f}\|_2^2$$

ја дават Планшереловата теорема.

г) Глаткост

Лема 1.2.3. $D^\alpha f \in L^2(R^d)$ за секое $|\alpha| \leq n$ ако и само ако $\int_{R^d} |\hat{f}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^n d\omega < \infty$.

Доказ: Заради едноставност ќе покажеме за $d=1$.

Нека важи $\int_R |\hat{f}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^n d\omega < \infty$. Од (1.15) и теорема 1.1.2 имаме

$$\|D^\alpha f\|_2^2 = \|(D^\alpha f)^\wedge\|_2^2 = \int_R |(2\pi i \omega)^\alpha \hat{f}(\omega)|^2 d\omega = (2\pi)^{2\alpha} \int_R |\omega|^{2\alpha} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.19)$$

Заради неравенството $|\omega|^{2\alpha} \leq (1 + |\omega|^2)^\alpha \leq (1 + |\omega|^2)^n$ и од условот на лемата, за (1.19) добиваме

$$\|D^\alpha f\|_2^2 \leq (2\pi)^{2\alpha} \int_R (1 + |\omega|^2)^n |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty \Rightarrow D^\alpha f \in L^2(R).$$

Обратно, нека $D^\alpha f \in L^2(R)$ за секое $\alpha \leq n$. Постои константа $c > 1$ така што важи

$$\frac{1}{c} (1 + |\omega|^2)^n \leq \sum_{\alpha \leq n} |\omega^\alpha|^2 \leq c (1 + |\omega|^2)^n. \quad (1.20)$$

Па заради (1.19), (1.20), условот на лемата и теорема на Фубини имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_R |\hat{f}(\omega)|^2 (1 + |\omega|^2)^n d\omega &\leq \int_R |\hat{f}(\omega)|^2 \sum_{\alpha \leq n} |\omega^\alpha|^2 d\omega \\ &= \sum_{\alpha \leq n} \int_R |\omega^\alpha|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{\alpha \leq n} \frac{1}{(2\pi)^{2\alpha}} \|D^\alpha f\|_2^2 < \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

Оваа лема ја дава врската помеѓу глаткоста на функцијата f и опаѓањето на нејзината Фуријеова трансформација \hat{f} .

1.3. Фуријеови редови

Периодичните функции се анализираат со помош на Фуријеови редови. Претпоставуваме дека функција f дефинирана над R^d е Z^d периодична, т.е. важи $f(x) = f(x+k)$ за секое $k \in Z^d$. Бидејќи секоја Z^d периодична функција е еднозначно определена со нејзината рестрикција на $[0,1]^d$, таа може да се идентификува со функција над $[0,1]^d$. Z^d периодична функција исто така може да се разгледува како

функција над d -димензионалниот торус $T^d := R^d \setminus Z^d$. И покрај тоа што тоа се концептски различни објекти, Z^d периодичните функции над R^d ќе ги идентификуваме со нивните рестрикции на $[0,1]^d$ или со нивните проекции на $T^d = R^d \setminus Z^d$.

Познато е дека фамилијата од експоненцијални функции $e^{2\pi i n \cdot x}, n \in Z^d$ над $T^d = R^d \setminus Z^d$ или над $[0,1]^d$ претставува ортонормирана база за $L^2(T^d)$. Овој факт е даден со наредната теорема која претставува Планшерелова теорема за торус.

Теорема 1.3.1 (Планшерелова теорема) Нека $f \in L^2(T^d)$ и нека

$$\hat{f}(n) = \int_{[0,1]^d} f(x) e^{-2\pi i n \cdot x} dx \quad (1.21)$$

е нејзиниот n -ти Фуриев коефициент. Тогаш функцијата f може да се развие во Фуриев ред

$$\sum_{n \in Z^d} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x} \quad (1.22)$$

кој конвергира по норма во $L^2(T^d)$ кон функцијата f и важи

$$\int_{[0,1]^d} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(T^d)}^2 = \sum_{n \in Z^d} |\hat{f}(n)|^2. \quad (1.23)$$

Забелешка 1.3.2.

1. Во инженерството се вели дека периодичните сигнали имаат дискретен спектар Z^d .
2. Фуриевите коефициенти се точно Фуријеова трансформација на компактна група T^d . Овој факт го потврдува користењето на иста ознака за Фуријеови коефициенти и Фуријеова трансформација. Ако е потребно да се нагласи над кој простор е земена L^2 нормата, тогаш означуваме $\|f\|_{L^2(R^d)}$ или $\|f\|_{L^2(T^d)}$.
3. Ако $\sum_{n \in Z^d} |\hat{f}(n)| < \infty$ тогаш Фуриеовиот ред (1.22) апсолутно конвергира кон функцијата $f(x)$ за секое $x \in R^d$ и $f(x)$ е рамномерно непрекината функција. Со $A(T^d)$ ќе го означиме множеството од сите апсолутно конвергентни редови. Нормата во овој простор е дефинирана со $\|f\|_A = \sum_{n \in Z^d} |\hat{f}(n)|$. Тогаш $A(T^d)$ е Банахова алгебра со точкастото множење.

1.4. Поасонова формула за сумирање

Поасонова формула за сумирање ги поврзува Фуриеовиот ред со Фуриевата трансформација над R^d [1], [7].

Лема 1.4.1. Ако $f \in L^1(R^d)$ тогаш за секое $\alpha > 0$ важи

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{[0, \alpha]^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x + \alpha k) \right) dx. \quad (1.24)$$

Доказ: Бидејќи транслатираните кубови $\alpha k + [0, \alpha]^d$ се дисјунктни (тие се преклопуваат само на границите, а тоа се множества со мера 0), тие формираат поделба на \mathbb{R}^d и важи

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{\alpha k + [0, \alpha]^d} f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_{[0, \alpha]^d} f(t + \alpha k) dt = \int_{[0, \alpha]^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x + \alpha k) \right) dx.$$

Бидејќи $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, сумата и интегралот можат да си ги заменат местата заради теоремата на Фубини. ■

Следното тврдење претставува стандардна Поасонова формула за сумирање, преку која Фуријеовиот ред се претставува како сума од периодични функции.

Тврдење 1.4.2. Нека за некое $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ важи $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-d-\varepsilon}$ и $|\hat{f}(\omega)| \leq C(1 + |\omega|)^{-d-\varepsilon}$. Тогаш

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x + n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}. \quad (1.25)$$

Равенството важи точкасто за секое $x \in \mathbb{R}^d$ и двете суми апсолутно конвергираат за секое $x \in \mathbb{R}^d$.

Доказ: Да забележиме дека левата страна на равенството (1.25), $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x + n)$ е

\mathbb{Z}^d -периодична функција. Уште повеќе, бидејќи $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ како последица на нејзино опаѓање, следува дека $f(x + n) \in L^1(\mathbb{T}^d)$, па $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Ги разгледуваме Фуријеовите коефициенти на функцијата φ и го применуваме равенството (1.24):

$$\hat{\varphi}(n) = \int_{[0, 1]^d} \varphi(x) e^{-2\pi i n \cdot x} dx = \int_{[0, 1]^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(x + k) e^{-2\pi i n \cdot x} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i n \cdot x} dx = \hat{f}(n).$$

Бидејќи $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)| < \infty$, φ има апсолутно конвергентен Фуријеов ред

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varphi}(n) e^{2\pi i n \cdot x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{2\pi i n \cdot x}$$

што е бараното равенство (1.25). ■

Забелешка 1.4.3.

1. Условите кои се дадени во тврдењето 1.4.2. за опаѓање на f и \hat{f} се потребни заради апсолутна конвергенција на двете суми во равенството (1.25) и за да формулата (1.25) важи по точки. Оваа формула важи по точки и за послаби услови за f и \hat{f} [7].

2. Ако се замени апсолутната конвергенција на φ во доказот на (1.25) со конвергенција во $L^2(\mathbb{R})$, а точкастото равенство со равенство скоро секаде, добиваме послаба, но корисна верзија на Поасоновата формула за сумирање:

Ако $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} f(x+n) \in L^2(T^d)$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$, тогаш (1.25) важи скоро секаде.

1.5. Гаусова функција

Гаусовата функција игра важна улога во временско-фреквенциската анализа и затоа ќе наведеме неколку нејзини основни особини.

Дефиниција 1.5.1. Нека $\varphi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$, $x \in \mathbb{R}^d$ е ознака за ненормализирана Гаусова функција со ширина $a > 0$.

Тврдење 1.5.1 (Фуријеова трансформација на Гаусовата функција)

За сите $a > 0$, $\hat{\varphi}_a(\omega) = a^{d/2} \varphi_{1/a}(\omega)$. (1.26)

Специјално, за $a = 1$ се добива $(e^{-\pi x^2})^\wedge = e^{-\pi \omega^2}$.

Доказ: Ќе ги примениме формулите (1.15) и (1.16). Најпрво ќе покажеме во димензија $d = 1$.

$$\varphi'_a(x) = -2\pi x a^{-1} \varphi_a(x) \quad (1.27)$$

Од (1.16) добиваме

$$\frac{d}{d\omega} \hat{\varphi}_a(\omega) = (-2\pi i x \varphi_a)^\wedge(\omega),$$

па од (1.27) следува

$$\frac{d}{d\omega} \hat{\varphi}_a(\omega) = \left(i a \frac{d}{dx} \varphi_a \right)^\wedge(\omega).$$

Користејќи го (1.15) се добива

$$\frac{d}{d\omega} \hat{\varphi}_a(\omega) = i a (2\pi i \omega) \hat{\varphi}_a(\omega).$$

Диференцијалната равенка $\frac{d}{d\omega} \hat{\varphi}_a(\omega) = -2a\pi\omega \hat{\varphi}_a(\omega)$ има решение $\hat{\varphi}_a(\omega) = C e^{-\pi a \omega^2}$.

Константата е определена од $C = \hat{\varphi}_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2/a} dx = \sqrt{a}$ и со тоа тврдењето го докажавме за $d = 1$.

За $d > 1$, забележуваме дека Фуријеовата трансформација над \mathbb{R}^d го зачувува производот, т.е. важи $\mathcal{F} \left(\prod_{j=1}^d f_j(x_j) \right) = \prod_{j=1}^d \hat{f}_j(\omega_j)$. Бидејќи $\varphi_a(\omega) = \prod_{j=1}^d e^{-\pi x_j^2/a}$ над \mathbb{R}^d , (1.26) следува од изведувањата за $d = 1$. ■

Во некои случаи Гаусовата функција φ_c се дефинира со комплексен параметар $c \in \mathbb{C}$. Ако $c^{-1} = a_0 + ib_0$, тогаш за Гаусовата функција добиваме $\varphi_c = e^{-\pi ib_0 x^2} e^{-\pi a_0 x^2}$. За инженерите функцијата φ_c претставува производ од Гаусовата функција со придушените осцилации $e^{-\pi ib_0 x^2}$. Фуријеовата трансформација на Гаусовата функција со комплексен параметар $c = a + ib$, $a > 0$ е $\hat{\varphi}_c(\omega) = c^{d/2} \varphi_{1/c}(\omega)$, каде што квадратниот корен е избран да има позитивен реален дел.

Тврдење 1.5.2 (Временско-фреквенциско поместување на Гаусовата функција)

За секое $a > 0$ и $x, u, \omega, \eta \in \mathbb{R}^d$ важи

$$\langle T_x M_\omega \varphi_a, T_u M_\eta \varphi_a \rangle = \left(\frac{a}{2}\right)^{d/2} e^{\pi i(u-x)(\eta+\omega)} \varphi_{2a}(u-x) \varphi_{\frac{2}{a}}(\eta-\omega).$$

Доказ: Најпрво ќе го определиме скаларниот производ помеѓу Гаусова функција и временско-фреквенциско поместување на Гаусова функција:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_a, M_\omega T_x \varphi_a \rangle &= \langle \varphi_a(t), M_\omega T_x \varphi_a(t) \rangle = \langle e^{-\pi t^2/a}, M_\omega T_x e^{-\pi t^2/a} \rangle = \langle e^{-\pi t^2/a}, e^{2\pi i \omega t} e^{-\pi(t-x)^2/a} \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi t^2/a} e^{-2\pi i \omega t} e^{-\pi(t-x)^2/a} dt = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \omega t} e^{(-2\pi^2 + 2\pi x \cdot x^2 \pi)/a \pm \pi^2/2a} dt = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \omega t} e^{-\pi x^2/2a} e^{-2\pi(t-x/2)^2/a} dt = \\ &= e^{-\pi x^2/2a} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \omega t} T_x \varphi_a(t) dt = \varphi_{2a}(x) \left(T_x \varphi_a(t) \right)^\wedge(\omega) = \varphi_{2a}(x) M_{-\frac{x}{2}} \hat{\varphi}_a(\omega) \\ &= e^{-\pi i \omega x} \left(\frac{a}{2}\right)^{d/2} \varphi_{2a}(x) \varphi_{\frac{2}{a}}(\omega). \end{aligned}$$

Во последното равенство го користевме равенството (1.6), $(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f}$ и тврдењето

1.5.1. Заради тоа што

$$M_{-\omega} T_{u-x} M_\eta = e^{-2\pi i \eta(u-x)} M_{-\omega} M_\eta T_{u-x} = e^{-2\pi i \eta(u-x)} M_{\eta-\omega} T_{u-x}$$

добиваме

$$\begin{aligned} \langle T_x M_\omega \varphi_a, T_u M_\eta \varphi_a \rangle &= \langle M_\omega \varphi_a, T_{u-x} M_\eta \varphi_a \rangle = \langle \varphi_a, M_{-\omega} T_{u-x} M_\eta \varphi_a \rangle = \\ &= \langle \varphi_a, e^{-2\pi i \eta(u-x)} M_{\eta-\omega} T_{u-x} \varphi_a \rangle = e^{2\pi i \eta(u-x)} \left(\frac{a}{2}\right)^{d/2} e^{-\pi i(u-x)(\eta-\omega)} \varphi_{2a}(u-x) \varphi_{\frac{2}{a}}(\eta-\omega) = \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^{d/2} e^{\pi i(u-x)(\eta+\omega)} \varphi_{2a}(u-x) \varphi_{\frac{2}{a}}(\eta-\omega). \blacksquare \end{aligned}$$

Тврдење 1.5.3 ([1], Лема 1.5.3). За секое $a > 0$, множеството $\{T_x M_{\omega} \varphi_a \mid x, \omega \in \mathbb{R}^d\}$ е покривка⁹ на секаде густ потпростор од $L^2(\mathbb{R}^d)$.

⁹ Нека V е векторски простор над полето \mathbb{R} . Ако $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ е конечно подмножество од V тогаш **покривка** е множеството $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}$.

Глава 2

Short-time Фуриева трансформација

2.1 Временско-фреквенциска анализа и принцип на неопределеност

Во ова поглавје ќе го дискутираме поимот и целите на временско-фреквенциската анализа [1]. Најпрво интуитивно ќе објасниме што се подразбира под временско-фреквенциска анализа. Како мотивација ќе ја користиме анализата на сигнали и аналогијата на временско-фреквенциската анализа со музиката.

Иако неформалното и интуитивното опишување на целите на временско-фреквенциската анализа е прифатливо, сепак не секогаш соодветниот математички модел се поврзува со интуицијата бидејќи од него потекнуваат контра-интуитивни пречки во форма на принцип на неопределеност.

2.1.1 Музичка партитура како метафора за временско-фреквенциската анализа

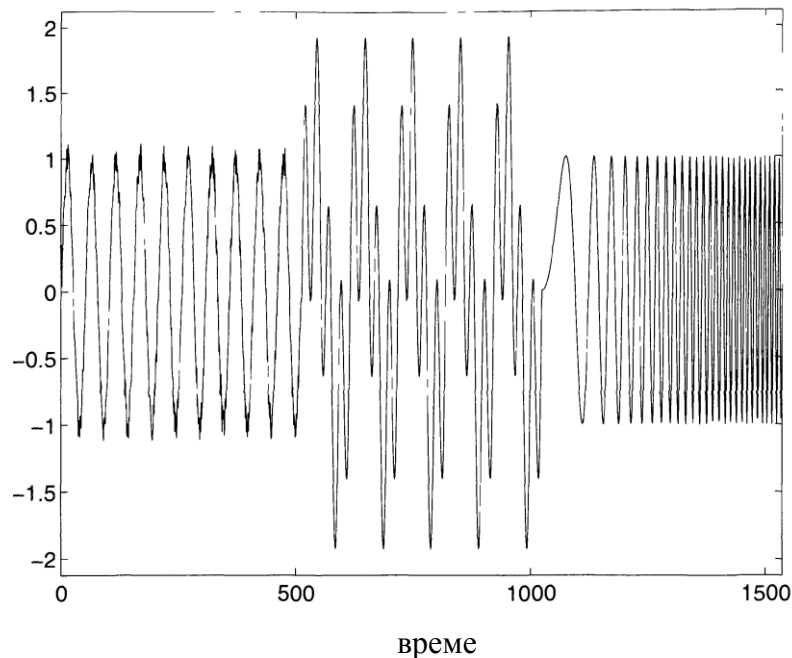
Ако се познати вредностите $f(x)$ за секое $x \in \mathbb{R}^d$, тогаш можеме комплетно да ги определиме сите особини на функцијата f , како и на функцијата \hat{f} , бидејќи Фуриевата трансформација е инјекција. Но, не секогаш можеме да ги определиме точните особини на \hat{f} , набљудувајќи ја само функцијата f . На пример, доста тешко е од функцијата f да се определи дали $\hat{f} \in L^p$ кога $p \neq 2$. За одговорот на ова прашање постои длабока математичка теорија таканаречена Littlewood–Paley теорија. Концепциски, f и \hat{f} можеме да ги сметаме како две различни, еквивалентни репрезентации на ист објект f . Секоја од овие репрезентации ја содржи истата информација, но секоја од нив ни дава различни особини на f .

Во временско-фреквенциската анализа бараме репрезентација која ги комбинира особините на f и \hat{f} во една функција, таканаречена временско-фреквенциска репрезентација. Нека f е дел од некоја музичка партитура. Физички гледано, $f(x)$ може да биде амплитуда на вибрациите на мембраната на звучникот во време $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, f го опишува временското однесување на сигналот и ние би можеле да забележиме некој ритмичен тип на музика преку f . Мелодијата на музиката или клучот не можат да се откријат преку f . Од друга страна пак, ако ги разгледаме доминатните гранични фреквенции на \hat{f} , ние би можеле да го откриеме тоналитетот на музиката, но ниту ритмот ниту мелодијата можеме да ги откриеме преку \hat{f} .

Иако f и \hat{f} ги содржат сите можни информации, сепак ни една од нив не ги дава релевантните информации. Под релевантни информации се мисли на оние информации

кои можат да бидат слушнати со уво. Во било кое време увото може да забележи од кои фреквенции е составен звукот, ја препознава нивната јачина и е способно за групирање на одредени фреквенции и разликување на различни инструменти. Можеби ова е големо поедноставување, односно делот на препознавање на мелодијата, ритмот и квалитетот на звукот се должи на работата на мозокот и секако од нивото на познавање на поединецот. Сепак увото прима чист сигнал f и го обработува во репрезентација што дава истовремена информација и за времето и за фреквенцијата која ја нарекуваме музика.

На слика 2.1 е даден мулти-компонентен сигнал f , додека пак на слика 2.2 е дадена неговата Фуриеова трансформација.



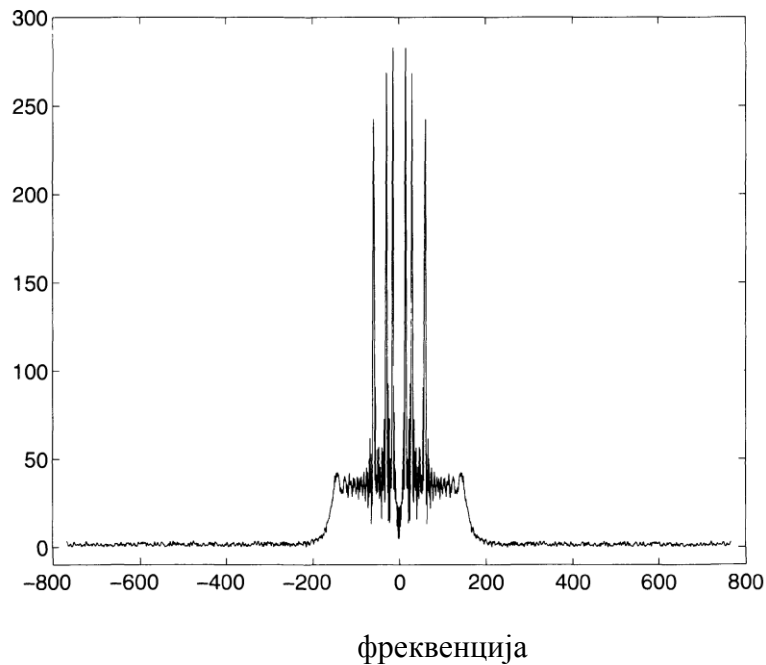
слика 2.1 Мулти-компонентен сигнал

Забележуваме дека сигналот f содржи три сегменти:

- првиот сегмент опфаќа чиста фреквенција со шум,
- вториот сегмент претставува суперпозиција на две фреквенции,
- третиот сегмент претставува придушени осцилации.

Дискретната Фуриеова трансформација содржи две доминантни фреквенции, но притоа информацијата за временското однесување на f се губи. За покомплицирани сигнали, ниту f ниту \hat{f} даваат релевантна временско-фреквенциската информација.

Целта на временско-фреквенциската анализа е да ја копира улогата на увото за да се добие временско-фреквенциска репрезентација на сигналите. Идеалната временско-фреквенциска репрезентација дава информација за фреквенцијата ω која се појавува во произволно дадено време x . Временско-фреквенциската анализа се обидува да ја комбинира локалната информација за моменталниот фреквенциски спектар со глобалната информација за временското однесување на f .



слика 2.2 Фуријеова трансформација на мулти-компонентниот
сигнал од слика 2.1

f и \hat{f} се функции од една променлива, додека пак заедничката временско-фреквенциска репрезентација $Vf(x, \omega)$ е функција од две променливи x и ω . Притоа $Vf(x, \omega)$ ја мери амплитудата на фреквенцијата ω во време x .

Во музиката, фреквенцијата ω претставува тон, додека пак Фуријеовата трансформација $\hat{f}(\omega)$ е застапеност на тонот ω . Но, $\hat{f}(\omega)$ не го дава редоследот на тоновите. Во пракса, композиторот го решава овој проблем преку симболична временско-фреквенциска репрезентација-запис со помош на ноти (слика 2.3). Навистина, во записот со ноти, композиторот определува точно кои ноти треба да бидат отсвирени во точно дадено време и од кој инструмент. Хоризонталната оска го претставува временското однесување, додека пак вертикалната оска е поделена на различни инструменти кои го претставуваат фреквенцискиот спектар, односно кои фреквенции (ноти) се застапени.

Музиката претставува корисна аналогија за да илустрираме неколку други концепти на временско-фреквенциската анализа:

а) Запишувањето на нотите претставува анализа на сигналот f преку релевантна временско-фреквенциска репрезентација. Обрато, свирењето на музиката претставува синтеза или реконструкција на оригиналниот сигнал од неговата временско-фреквенциска репрезентација. Општата рамка на анализата на сигнали содржи три главни чекори: анализа, обработка (процесирање) и синтеза на сигналот кои се објаснети на страна 31.

б) Музичките ноти ја утврдуваат должината, јачината и комбинацијата на фреквенциите. Нотите се најмалите неделиви единици (таканаречени "атоми") од музиката. Записот со ноти може да се разгледува како декомпозиција на музиката на

временско-фреквенциски атоми. Во математиката, декомпозиција на атоми претставува развој на функција во однос на соодветни атоми (функции).

в) За музички сигнал земен од бесконечно димензионален простор, записот со ноти содржи конечен број информации. Очигледно е дека записот со ноти е само апроксимација на музичкиот сигнал и дека релацијата помеѓу запис со ноти и музиката не може да биде инјекција. Сепак, од сите можни репрезентации на f , записот со ноти е најефикасната апроксимација на суштинските временско-фреквенциски особини на f . Математички тоа значи дека ќе ги изучуваме апроксимативните особини на функциите преку временско-фреквенциски атоми.



слика 2.3 Временско-фреквенциска репрезентација на музичка партитура

Иако записот со ноти е сугестивна метафора за временско-фреквенциската анализа, со ниеден математички модел не може да се добие идеална временско-фреквенциска анализа. Голем број математички неравенства, кои се наречени принципи на неопределеност, претставуваат основна пречка за концептот на фреквенција во даден момент, т.е. за идеална временско-фреквенциска анализа. Во груба форма принципите на неопределеност покажуваат дека:

“Функцијата f и нејзината Фуриеова трансформација неможат да се разгледуваат на произволни мали множества.”

Како последица на овие принципи на неопределеност, било која формална дефиниција за фреквенциски спектар во даден момент станува проблематична поради следниве причини: Со цел да се определи фреквенцискиот спектар на сигнал во момент x , потребно е да го разгледаме f барем во тек на краток период $[x - \delta, x]$, $\delta > 0$. Потоа земаме Фуриеова трансформација на $f_{inst} = f \cdot g_x$, каде што g_x е некоја функција со

носач во $[x - \delta, x]$, т.е. $g_x = \chi_{[x-\delta, x]}$. Заради принципот на неопределеност носачот на \hat{f}_{inst} не може да биде мал и зависи од δ (ова ќе биде објаснето подоцна). Според тоа нема смисла да зборуваме за фреквенција во момент x . Но тоа не значи дека поимот за фреквенција во даден момент е чиста фикција. Инженерската литература нуди неколку приоди за овој концепт. За многу специјални класи на сигнали овие приоди добро функционираат. На пример, за сигналот на слика 2.1 јасно е кои фреквенции се јавуваат во даден момент. Проблеми и неточни заклучоци настануваат вообичаено кога дефиницијата за фреквенција во даден момент се проширува за произволни сигнали.

Во продолжение ќе разгледаме еден принцип на неопределеност.

2.1.2 Принцип на неопределеност

Во математиката, принципите на неопределеност се неравенства во кои се јавуваат f и \hat{f} . Постојат повеќе принципи на неопределеност, но ние ќе разгледаме класичен принцип на неопределеност во димензија $d=1$, кој е познат како неравенство на Heisenberg-Pauli-Weyl.

Теорема 2.1.1. *Ако $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $a, b \in \mathbb{R}$ се произволни, тогаш важи*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 dx \right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2. \quad (2.1)$$

Во (2.1) важи равенство акко f е производ на функциите $T_a M_b \varphi_c(x) = e^{2\pi i b(x-a)} e^{-\pi(x-a)^2/c}$ за некои $a, b \in \mathbb{R}$ и $c > 0$.

Најпрвин, ќе разгледаме апстрактен принцип на неопределеност за самоадјунгирани оператори над Хилбертов простор. За два линеарни оператори A и B дефинираме комутатор на следниов начин:

$$[A, B] = AB - BA. \quad (2.2)$$

Лема 2.1.2. *Нека A и B се (по можност неограничени) самоадјунгирани оператори над Хилбертов простор \mathcal{H} . Тогаш*

$$\|(A-a)f\| \|(B-b)f\| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]f, f \rangle|$$

за сите $a, b \in \mathbb{R}$ и за секоја функција f во доменот на AB и BA . Равенство важи ако и само ако $(A-a)f = ic(B-b)f$ за некое $c \in \mathbb{R}$.

Доказ: Користејќи ја дефиницијата за комутатор на два линеарни оператори и самоадјунгираноста на истите имаме

$$\begin{aligned} \langle [A, B]f, f \rangle &= \langle ((A-a)(B-b) - (B-b)(A-a))f, f \rangle = \\ &= \langle (A-a)(B-b)f, f \rangle - \langle (B-b)(A-a)f, f \rangle = \\ &= \langle (B-b)f, (A-a)^* f \rangle - \langle (A-a)f, (B-b)^* f \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle (B-b)f, (A-a)f \rangle - \langle (A-a)f, (B-b)f \rangle = \\ &= 2i \operatorname{Im} \langle (B-b)f, (A-a)f \rangle. \end{aligned}$$

Принципот на неопределеност следува со користење на Коши-Шварцовото неравенство¹⁰:

$$|\langle [A, B]f, f \rangle| \leq 2|\langle (B-b)f, (A-a)f \rangle| \quad (2.3)$$

$$\leq 2\|(B-b)f\| \|(A-a)f\|. \quad (2.4)$$

Равенство во (2.3) важи ако и само ако $\langle (B-b)f, (A-a)f \rangle$ е чисто имагинарен број, додека пак равенство во (2.4) важи ако и само ако $(A-a)f = \lambda(B-b)f$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Од двата услови се добива дека $\lambda = ic$, $c \in \mathbb{R}$. ■

За доказ на теорема 2.1.1 ја користиме лема 2.1.2 која ќе ја примениме за операторите множење и диференцирање, $Xf(x) = xf(x)$ и $Pf(x) = \frac{1}{2\pi i} f'(x)$, соодветно. Примената на овие оператори е природна, бидејќи тие се генератори на групите на модулација и транслација, т.е. важи $\left. \frac{d}{d\omega} M_{\omega} f \right|_{\omega=0} = 2\pi i Xf$ и $\left. \frac{d}{dx} T_x f \right|_{x=0} = -2\pi i Pf$. Овие два оператори се уште и самоадјунгирани.

Доказ на теорема 2.1.1.

Да претпоставиме дека f е во доменот на операторите X, P, XP и PX . Тогаш комутаторот на операторите X и P применет на f е

$$\begin{aligned} [X, P]f(x) &= XPf(x) - PXf(x) = x \frac{1}{2\pi i} f'(x) - P(xf(x)) \\ &= x \frac{1}{2\pi i} f'(x) - \frac{1}{2\pi i} (xf'(x) + f(x)) = -\frac{1}{2\pi i} f(x). \end{aligned}$$

Тргуваме од десната страна на неравенството (2.1) кое треба да го докажеме. Притоа ја користиме лема 2.1.2, горното изведување и Коши-Шварцовото неравенство, па добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2 &= \frac{1}{4\pi} |\langle f, f \rangle| = \frac{1}{4\pi} |\langle -2\pi i [X, P]f, f \rangle| = \frac{1}{2} |\langle [X, P]f, f \rangle| \\ &\leq \|(X-a)f\|_2 \|(P-b)f\|_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заради Планшереловата теорема и особината (1.15) имаме

¹⁰ **Коши-Шварцово неравенство.** Нека X е линеарен простор во кој е дефиниран скаларен производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогаш $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, $\forall x, y \in X$. Равенство важи ако и само ако x и y се линеарно зависни.

$$\begin{aligned} \|(P-b)f\|_2 &= \|\mathcal{F}((P-b)f)\|_2 = \|\mathcal{F}(Pf - bf)\|_2 = \left\| \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi i} f'(x) - bf(x)\right) \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{2\pi i} (f'(x))^\wedge - b(f(x))^\wedge \right\|_2 = \left\| \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \omega \hat{f}(\omega) - b\hat{f}(\omega) \right\|_2 \\ &= \|(\omega - b)\hat{f}(\omega)\|_2 = \left(\int_{R^d} (\omega - b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Равенство во (2.5) важи ако и само ако $(P-b)f = ic(X-a)f$ за некое $c \in R$.

$(P-b)f = ic(X-a)f \Leftrightarrow Pf - bf = icxf - icaf \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} f' - bf = icxf - icaf$, па ја добиваме диференцијалната равенка

$$f' - 2\pi i b f = -2\pi i c(x-a)f,$$

чии решенија се $T_a M_b \phi_{1/c}$. Бидејќи $f \in L^2(R)$ потребно е $c > 0$. ■

За да се запише принципот на неопределеност во стандарна форма, за $f \in L^2(R)$ со норма $\|f\|_2 = 1$ ги воведуваме следниве ознаки

$$\Delta_f x = \min_{a \in R} \left(\int_R (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

и

$$\Delta_f \omega = \min_{b \in R} \left(\int_R (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \quad a, b \in R.$$

Се покажува дека ако $\Delta_f x < \infty$, тогаш $\Delta_f x$ е минимално за $\bar{x} = \int_R x |f(x)|^2 dx$, слично

ако $\Delta_f \omega < \infty$, тогаш $\Delta_f \omega$ е минимално за $\bar{\omega} = \int_R \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$.

Во анализата на сигнали ($d = 1$), $\Delta_f x$ е мерка за должината на сигналот, додека пак во поширока смисла $\Delta_f x$ е должина на носач и \bar{x} е очекуваната вредност на сигналот. Слично, $\Delta_f \omega$ е мерка за ширината на опсег на сигналот центрирана околу средна фреквенција $\bar{\omega}$. Со овие ознаки, принципот на неопределеност преминува во следнава форма:

$$\text{Ако } \|f\|_2 = 1 \text{ тогаш } \Delta_f x \cdot \Delta_f \omega \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (2.6)$$

Во анализата на сигнали, принципот на неопределеност го прави концептот на фреквенција во даден момент невозможен. Идеална временско-фреквенциска анализа не може да постои во форма што беше предложена преку метафората со музиката. За да видиме зошто, да претпоставиме дека сакаме да определиме моментален фреквенциски спектар на сигнал f во време x , врз основа на познавањето на сигналот f на

интервалот $I = [x - \delta, x]$ за мало $\delta > 0$. За таа цел правиме рестрикција на f (преку множење со глатка cut-off функција) на сегмент $I = [x - \delta, x]$ и земаме Фуриеова трансформација на функцијата $f|_I$. Тогаш $\Delta_{f|_I} x$ е од ред δ , па од неравенството во (2.6) следува $\Delta_{f|_I} \omega \geq \frac{1}{4\pi\delta}$ за $\delta > 0$ многу мало. Кога $\delta \rightarrow 0$ тогаш $\Delta_{f|_I} \omega$ е многу големо, односно колку се приближуваме до x толку добиваме поголема ширина на опсег на фреквенции, па идејата дека одредени фреквенции се лоцирани во време x го губи значењето.

2.2 Short-time Фуриеова трансформација

Видовме дека идеалната временско-фреквенциска анализа се соочува со препрека во форма на принцип на неопределеност. Сепак, примерот со музиката покажува дека погодна и употреблива форма на временско-фреквенциската анализа сеуште постои.

Во ова поглавје најпрво ќе разгледаме линеарна и непрекината временско-фреквенциска репрезентација, т.е. short-time Фуриеова трансформација (често ќе ја користеме кратенката STFT) [1]. STFT можеме да ја сметаме за математичка аналогија на музиката. Теоријата на временско-фреквенциската анализа скоро целосно се базира на STFT, бидејќи голем број други временско-фреквенциски репрезентации можат да се изразат преку STFT.

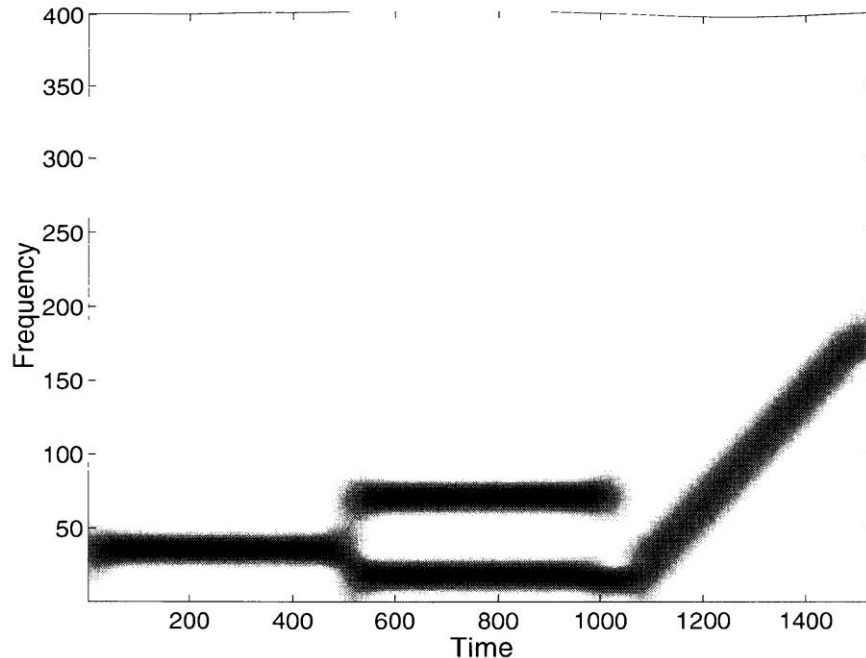
2.2.1 Дефиниција и особини на STFT

Како што веќе нагласивме, со цел да добиеме фреквенциски спектар на сигналот f во време x , правиме рестрикција на f на некој мал интервал околу точката x (преку множење со глатка cut-off функција g) и земаме Фуриеова трансформација на таа рестрикција. На тој начин ја добиваме short-time Фуриеовата трансформација.

Дефиниција 2.1.3. Нека $g \neq 0$ е дадена функција таканаречена **прозорец**. Тогаш **STFT** на функцијата f во однос на функцијата g е дефинирана како

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt, \text{ за } x, \omega \in \mathbb{R}^d. \quad (2.7)$$

На сликата 2.4 е прикажана апсолутна вредност на STFT на мулти-компонентиот сигнал од слика 2.1. Како прозорец се зема свонче функцијата од слика 1.2. Степенот на обоеност е пропорционален со големината на $|V_g f|$, така што црните реони ја покажуваат главната временско-фреквенциска концентрација на f . Забележуваме дека STFT јасно разделува три компоненти на сигналот од слика 2.1:



слика 2.4 STFT на мулти-компонентниот сигнал од слика 2.1

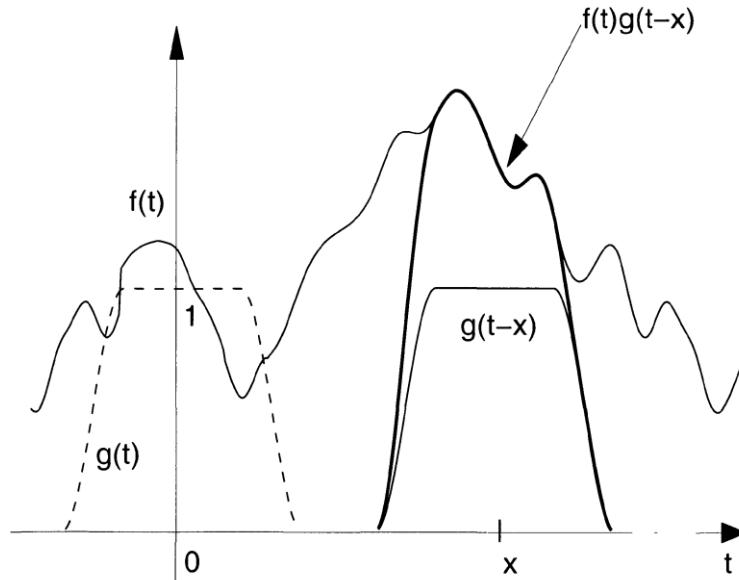
1. Првиот сегмент одговара на чистата фреквенција.
2. Двете гранки во вториот сегмент ја претставуваат суперпозицијата на две фреквенции.
3. Третиот сегмент ги претставува придушените осцилации со линеарно растење на фреквенцијата.

Забелешка 2.1.4.

1. Ако g е функција со компактен носач¹¹ кој е центриран околу координатниот почеток, тогаш $V_g f(x, \cdot)$ е Фуриеова трансформација на сегмент на f центриран во околина на точката x . Бидејќи x е променлива, прозорецот g се лизга по x -оската во различни положби. Заради тоа STFT често се нарекува “лизгачка прозорец Фуриеова трансформација”. Ова можеме да го видиме на слика 2.5. $V_g f(x, \omega)$ може да се разгледува како мерка за амплитудата на фреквенцискиот опсег околу ω во време x . Во таа смисла $V_g f(x, \cdot)$ претставува замена за невозможниот фреквенциски спектар во време x .
2. Во анализа на сигнали, најчесто во димензија $d = 1$ или $d = 2$, R^{2d} се нарекува **временско- фреквенциска рамнина**.
3. STFT претставува линеарна функција во однос на функцијата f и конјугирано линеарна функција во однос на прозорецот g . Вообичаено прозорецот g се зема

¹¹ Затварачот на множеството $\{x : f(x) \neq 0\}$ се нарекува **носач** на функцијата f . Ако носачот е компактно множество, велиме дека f има компактен носач.

фиксен и $V_g f$ се разгледува како линеарно пресликување од функцији дефинирани над R^d во функцији дефинирани над R^{2d} .



слика 2.5 STFT $V_g f$

Ќе разгледаме некои основни особини на STFT. Во наредната лема се дадени некои еквивалентни форми на STFT.

Лема 2.1.5. ([1], Лема 3.1.1) *Ако $f, g \in L^2(R^d)$ тогаш $V_g f$ е рамномерно непрекината функција над R^{2d} и важи*

$$V_g f(x, \omega) = \left(f \cdot T_x \bar{g} \right)^\wedge(\omega) \quad (2.8)$$

$$= \langle f, M_\omega T_x g \rangle \quad (2.9)$$

$$= \langle \hat{f}, T_\omega M_{-x} \hat{g} \rangle \quad (2.10)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} \left(\hat{f} \cdot T_\omega \bar{\hat{g}} \right)^\wedge(-x) \quad (2.11)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} V_{\hat{g}} \hat{f}(\omega, -x) \quad (2.12)$$

$$= e^{-2\pi i x \cdot \omega} (f * M_\omega g^*)(x) \quad (2.13)$$

$$= (\hat{f} * M_{-x} \hat{g}^*)(\omega) \quad (2.14)$$

$$= e^{-\pi i x \cdot \omega} \int_{R^d} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{g}\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-2\pi i t \cdot \omega} dt. \quad (2.15)$$

Од лемата можеме да видиме дека STFT може да се запише на повеќе начини. Во (2.8) и (2.11) STFT е запишана како Фуриеова трансформација на f и \hat{f} , согласно основната идеја за нејзината дефиниција. Во (2.13) и (2.14) STFT е запишана како конволуција, а во (2.9) и (2.10) STFT е запишана како скаларен производ помеѓу f и временско-фреквенциското поместување на g , односно помеѓу \hat{f} и временско-фреквенциското поместување на \hat{g} , соодветно. Формулата (2.12) претставува фундаментално равенство во временско-фреквенциската анализа. Таа ги комбинира f и \hat{f} во заедничко временско-фреквенциска репрезентација.

Домен на STFT:

Во дефиниција 2.1.3 не го потенциравме доменот на функциите f и g . Ако $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ тогаш неравенството

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)T_x \bar{g}(t)| dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |T_x \bar{g}(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \|f\|_2 \|T_x \bar{g}\|_2 < \infty$$

е Холдеровото¹² (Hölder) неравенство за $p = q = 2$ и важи заради тоа што $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, па $\bar{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $T_x \bar{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Од горното неравенство следува дека

$f \cdot T_x \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, па според тоа $V_g f(x, \omega) = \widehat{(f \cdot T_x \bar{g})}(\omega)$ (равенство 2.8) е дефинирана

по точки. Ако направиме обопштување, т.е. ако $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ и $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, $p > 1, p' > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, тогаш повторно поради неравенството на Холдер важи $f \cdot T_x \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, па STFT е повторно дефинирана по точки.

Следнава карактеристика понекогаш се нарекува коваријантна карактеристика на STFT.

Лема 2.1.6. Нека $V_g f$ е дефинирана. Тогаш важи

$$V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega) = e^{-2\pi i u \cdot \omega} V_g f(x - u, \omega - \eta) \quad (2.16)$$

за $x, \omega, u, \eta \in \mathbb{R}^d$. Специјално,

$$|V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega)| = |V_g f(x - u, \omega - \eta)|.$$

Доказ: Со замена на комутативната релација $M_{-\eta} T_{-u} M_\omega T_x = e^{2\pi i u \cdot \omega} M_{\omega - \eta} T_{x - u}$ во дефиницијата на STFT имаме

$$V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega) = \langle T_u M_\eta f, M_\omega T_x g \rangle = \langle f, M_{-\eta} T_{-u} M_\omega T_x g \rangle$$

¹² **Холдерово неравенство.** Нека $f \in L^p([a, b])$ и $g \in L^q([a, b])$, каде што $p > 1, q > 1$ и важи

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Тогаш } \int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

$$\begin{aligned} &= \langle f, e^{2\pi i u \cdot \omega} M_{\omega-\eta} T_{x-u} g \rangle = e^{-2\pi i u \cdot \omega} \langle f, M_{\omega-\eta} T_{x-u} g \rangle \\ &= e^{-2\pi i u \cdot \omega} V_g f(x-u, \omega-\eta). \end{aligned}$$

Според тоа $|V_g(T_u M_\eta f)(x, \omega)| = |e^{-2\pi i u \cdot \omega} V_g f(x-u, \omega-\eta)| = |V_g f(x-u, \omega-\eta)|$. ■

2.2.2 Ортогонални релации и инверзна формула

STFT има неколку слични особини со Фуријеовата трансформација. Наредната теорема за скаларен производ помеѓу две short-time Фуријеови трансформации одговара на Парсеваловата формула за Фуријеовата трансформација и често се користи.

Теорема 2.1.7 (Ортогонална релација за STFT) ([1], Теорема 3.2.1) *Ако $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ тогаш $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ за $j=1,2$ и важи*

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2d})} = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}. \quad (2.17)$$

Последица 2.1.8. *Ако $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ тогаш*

$$\|V_g f\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Специјално, ако $\|g\|_2 = 1$ тогаш

$$\|f\|_2 = \|V_g f\|_2 \text{ за } \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d). \quad (2.18)$$

Во тој случај STFT е изометрија од $L^2(\mathbb{R}^d)$ во $L^2(\mathbb{R}^{2d})$.

Од равенството (2.18) добиваме дека функцијата f е комплетно определена со $V_g f$. Уште повеќе, ако $\langle f, M_\omega T_x g \rangle = 0, \forall x, \omega \in \mathbb{R}^d$ тогаш $f = 0$, т.е. за секој фиксен прозорец $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, множеството $\{M_\omega T_x g | x, \omega \in \mathbb{R}^d\}$ е покривка за секаде густ потпростор од $L^2(\mathbb{R}^d)$. Прашањето како можеме да го добиеме f од $V_g f$ е одговорено во наредната последица која покажува дека ортогоналната релација ја имплицира инверзната формула за STFT.

Последица 2.1.9 (Инверзна формула за STFT) ([1], Последица 3.2.3) *Претпоставуваме дека $g, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $\langle g, \gamma \rangle \neq 0$. Тогаш за $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ важи*

$$f = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma \, d\omega dx. \quad (2.19)$$

Забелешка 2.1.10.

1. Од инверзната формула (2.19) можеме да видиме дека f може да се претстави како непрекината суперпозиција од временско-фреквенциски поместувања и STFT како тежинска функција. Оваа инверзна формула е слична на инверзната формула за

Фуријеовата трансформација, $f(x) = \int_{R^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \cdot \omega} d\omega$. Но, во Фуријеовата инверзија, за елементарните функции $e^{2\pi i x \cdot \omega}$ важи $e^{2\pi i x \cdot \omega} \notin L^2(R^d)$, додека пак во STFT инверзија елементарните функции $M_{\omega} T_x \gamma \in L^2(R^d)$.

2. Нека A_g е линеарен оператор дефиниран со $A_g F = \iint_{R^{2d}} F(x, \omega) M_{\omega} T_x g \, dx d\omega$. Се покажува дека A_g е ограничен оператор од $L^2(R^{2d})$ во $L^2(R^d)$. Ќе покажеме дека A_g е адјунгиран оператор на STFT (STFT претставува оператор од $L^2(R^d)$ во $L^2(R^{2d})$).

$$\begin{aligned} \langle A_g F, h \rangle &= \int_{R^d} (A_g F)(t) \bar{h}(t) dt = \int_{R^d} \left(\iint_{R^{2d}} F(x, \omega) M_{\omega} T_x g(t) dx d\omega \right) \bar{h}(t) dt \\ &= \iint_{R^{2d}} F(x, \omega) dx d\omega \int_{R^d} M_{\omega} T_x g(t) \bar{h}(t) dt = \iint_{R^{2d}} F(x, \omega) \overline{\langle h, M_{\omega} T_x g \rangle} dx d\omega \\ &= \iint_{R^{2d}} F(x, \omega) \overline{V_g h} dx d\omega = \langle F, V_g h \rangle = \langle V_g^* F, h \rangle, \end{aligned}$$

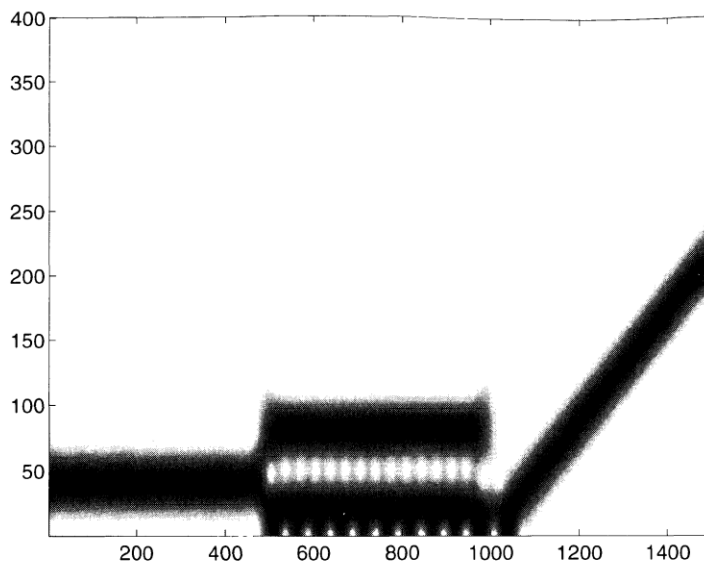
каде што $h \in L^2(R^d)$ и $F \in L^2(R^{2d})$. Според тоа $V_g^* = A_g$. Па инверзната формула (2.19) гласи

$$\frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} V_{\gamma}^* V_g = 1. \quad (2.20)$$

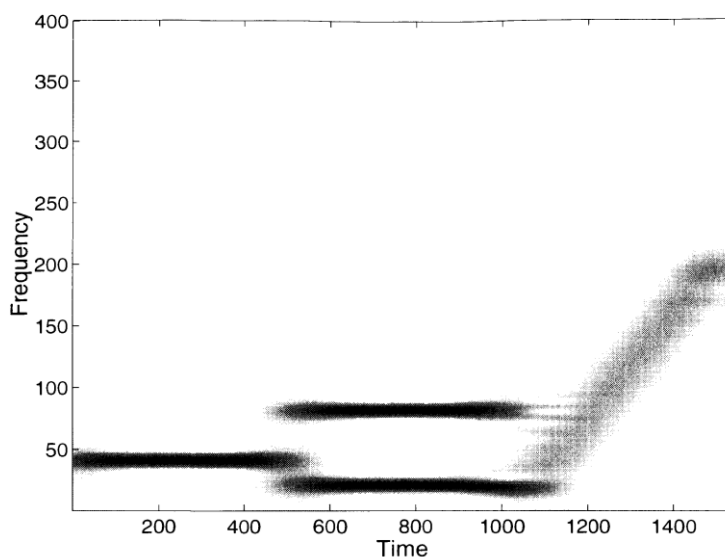
Јасно е дека функцијата $V_g f$ и особините на пресликувањето $f \rightarrow V_g f$ зависат од изборот на прозорецот g . На наредните слики е прикажана зависноста на STFT од прозорецот. На двете слики е дадена STFT на мулти-компонентниот сигнал од слика 2.1.

На сликата 2.6 прозорецот е свонче функција со мал носач и голем спектар. Па забележуваме дека STFT има добра временска резолуција, која јасно се гледа во јасната поделба на трите компоненти на сигналот. Од друга страна пак, широките фреквенциски групи и мешањето на деловите во вториот сегмент ја покажуваат слабата фреквенциска резолуција на оваа STFT.

За разлика од претходната слика, на слика 2.7 е прикажана STFT на истиот мулти-компонентен сигнал од слика 2.1, но со свонче функција со голем носач и мал спектар. Во тој случај STFT обезбедува јасна фреквенциска резолуција во секој сегмент од сигналот. Но, временската резолуција е обична, премините меѓу сегментите се бледи и придружувањето е лошо лоцирано.



слика 2.6 STFT на мулти-компонентниот сигнал од слика 2.1 во однос на “краток” прозорец



слика 2.7 STFT на мулти-компонентниот сигнал од слика 2.1 во однос на “долг” прозорец

Шематски временско-фреквенциската анализа на сигнали содржи три чекори:

Анализа: За даден сигнал (или слика) f се пресметува неговата STFT ($V_g f$) во однос на соодветен прозорец g и таа се интерпретира како заедничка временско-фреквенциска информација за f .

Процесирање: $V_g f(x, \omega)$ се трансформира во некоја нова функција $F(x, \omega)$. Типичен чекор во процесирањето е скратување (сечење) на $V_g f$ во реон каде што се сомневаме дека нешто интересно се случува.

Синтеза: Процесираниот сигнал (или слика) потоа се реконструира користејќи ја модифицираната инверзна формула каде што наместо $V_g f(x, \omega)$ се користи $F(x, \omega)$:

$$\tilde{f} = \iint_{R^{2d}} F(x, \omega) M_{\omega} T_x \gamma \, dx d\omega \quad (2.21)$$

во однос на соодветен прозорец на синтеза γ . Забележуваме дека за синтеза и анализа може да се применат различни прозорци.

Ќе разгледаме построга верзија на инверзната формула за STFT. Нејзината формулација личи на дефиницијата на Фуриовата трансформација за L^2 функции со апроксимативната процедура (дискусија во првата глава). Како апроксимација ќе разгледаме низа од вложени компактни множества $K_n \subseteq R^{2d}$ со што се испушта R^{2d} . Ова значи дека $\bigcup_{n \geq 1} K_n = R^{2d}$ и $K_n \subseteq \text{int } K_{n+1}$. Тогаш било кое компактно множество се содржи во некое K_n . Коцките $[-n, n]^{2d}$ и топките $\bar{B}(0, n) = \{x \in R^{2d} \mid |x| \leq n\}$ се заеднички избор за K_n .

Теорема 2.1.11. ([1], Теорема 3.2.4) Нека $g, \gamma \in L^2(R^d)$ се фиксни и нека $K_n \subseteq R^{2d}$, $n \geq 1$ е низа од вложени компактни множества. Дефинираме f_n на следниов начин:

$$f_n = \frac{1}{\langle \gamma, g \rangle} \iint_{K_n} V_g f(x, \omega) M_{\omega} T_x \gamma \, dx d\omega.$$

Тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.

2.2.3 Lieb-ов принцип на неопределеност

Видовме дека временско–фреквенциската резолуција на STFT зависи од изборот на прозорецот g . Поточно, временско–фреквенциската резолуција на $V_g f$ е ограничена со големината на носачите на g и \hat{g} . Класичниот принцип на неопределеност (теорема 2.1.1) за прозорецот g имплицира принцип на неопределеност за $V_g f$. Во овој дел ќе изложиме принцип на неопределеност кој се однесува директно на STFT. Тој претставува математички израз на следниов општ принцип:

“Функција не може да биде концентрирана на мали множества во временско–фреквенциската рамнина, без разлика која временско–фреквенциска репрезентација се користи”.

Тврдење 2.1.12 (Слаб принцип на неопределеност за STFT) ([1], Тврдење 3.3.1) *Ако $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$ и $U \subseteq R^{2d}$ и $\varepsilon > 0$ се такви што*

$$\iint_U |V_g f(x, \omega)|^2 \, dx d\omega \geq 1 - \varepsilon,$$

тогаш $|U| \geq 1 - \varepsilon$.

Следната теорема ни дава “подлабоко” и “појачо” неравенство за STFT кое е покажано од Lieb.

Теорема 2.1.13. ([1], Теорема 3.3.2) Ако $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $2 \leq p < \infty$, тогаш важи

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x, \omega)|^p dx d\omega \leq \left(\frac{2}{p}\right)^d (\|f\|_2 \|g\|_2)^p. \quad (2.22)$$

Забелешка 2.1.14. Lieb покажал и други важни неравенства за STFT. Овде ќе го спомнеме само спротивното неравенство на (2.22) за случајот кога $1 \leq p \leq 2$.

Ако $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $1 \leq p \leq 2$ тогаш

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x, \omega)|^p dx d\omega \geq \left(\frac{2}{p}\right)^d (\|f\|_2 \|g\|_2)^p. \quad (2.23)$$

Равенство во (2.23) важи ако и само ако $p > 1$ и f, g се Гаусови функции.

Следната теорема ни покажува дека Lieb-овиот принцип на неопределеност го подобрува тврдењето 2.1.12 и ни дава поточна оценка за носачот на $V_g f$.

Теорема 2.1.15. ([1], Тврдење 3.3.3) Нека $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$. Ако $U \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ и $\varepsilon > 0$ се такви што

$$\iint_U |V_g f(x, \omega)|^2 dx d\omega \geq 1 - \varepsilon$$

тогаш

$$|U| \geq (1 - \varepsilon)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}} \quad \text{за } \forall p > 2.$$

Специјално,

$$|U| \geq \sup_{p>2} (1 - \varepsilon)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}} \geq (1 - \varepsilon)^2 2^d.$$

Да забележиме дека ако $\varepsilon = 0$ во теорема 2.1.15, ја добиваме најмалата граница за носачот на $V_g f$:

$$|\text{supp} V_g f| \geq \lim_{p \rightarrow 2^+} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}} = [1^\infty] = e^{\lim_{p \rightarrow 2^+} \frac{2d}{p-2} \left(\frac{p-1}{2}\right)} = e^{\lim_{p \rightarrow 2^+} \frac{2d}{p-2} \frac{p-2}{2}} = e^d.$$

Глава 3

Дискретна временско–фреквенциска репрезентација:

Габор рамки

Во глава 2 ја разгледаваме непрекинатата временско–фреквенциска репрезентација. Таа е доволна за голем дел од теоретските аспекти на временско–фреквенциската анализа, но не е секогаш доволна за практични цели. Ќе ја разгледаме повторно инверзната формула (2.19) за STFT. Таа претставува непрекинато развивање на функцијата f во однос на непреброив систем од L^2 функции $\{M_{\omega}T_x\gamma \mid (x, \omega) \in R^{2d}\}$. Бидејќи $L^2(R^d)$ е сепарабилен¹³ Хилбертов простор, разложувањето на f во однос на преброиво множество од временско–фреквенциски поместувања треба да биде доволно за да се претстави секоја функција $f \in L^2(R^d)$. Ако прозорецот на синтеза γ има временско–фреквенциски носач на множество $E \subseteq R^{2d}$ во временско–фреквенциската рамнина, тогаш за две соседни точки $(x_1, \omega_1), (x_2, \omega_2) \in R^{2d}$, носачите на $M_{\omega_i}T_{x_i}\gamma$ се во множеството $(x_i, \omega_i) + E$, $i=1,2$. Овие множества се преклопуваат многу, па коефициентите $V_g f(x_i, \omega_i)$, $i=1,2$ во инверзната формула (2.19) содржат приближно иста информација за временско–фреквенциската содржина на f во точката (x_1, ω_1) . Заклучуваме дека репрезентацијата на f преку инверзната формула на STFT е непотребна, па дури и интерпретацијата на $V_g f$ како временско–фреквенциска содржина на f е прилично неопределена.

Според тоа, наша цел е определување на дискретна репрезентација на f со помош на преброиво многу временско–фреквенциски поместувања на γ чии носачи само минимално се преклопуваат. Постојат неколку природни идеи за да се дискретизира инверзната формула (2.19).

1. Во првиот обид, интегралот во (2.19) го заменуваме со Риманова сума над доволно густа мрежа, запишувајќи го f на следниов начин:

$$f = \sum_{k \in Z^d} \sum_{n \in Z^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \quad (3.1)$$

за некои соодветни прозорци $g \in L^2(R^d)$ и $\gamma \in L^2(R^d)$ и мрежни параметри $\alpha, \beta > 0$.

2. Вториот поедноставен обид не води до разложување на f во форма

$$f = \sum_{k \in Z^d} \sum_{n \in Z^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g \quad (3.2)$$

¹³ Хилбертовиот простор \mathcal{H} е **сепарабилен** ако и само ако има преброива ортонормална база.

со коефициенти $c_{kn} = c_{kn}(f)$ кои треба да се определат. Ако $\alpha, \beta > 0$ може да се изберат така што временско–фреквенциските носачи $(\alpha k, \beta n) + E$ на функциите $T_{\alpha k} M_{\beta n} g$ се скоро дисјунктни, тогаш коефициентите c_{kn} се попрецизна мерка за временско–фреквенциската содржина на f во областа $(\alpha k, \beta n) + E$. Развојот на f од тип (3.2) датира од почетокот на временско–фреквенциската анализа. Габор (Gabor) го предложил овој развој во 1946 година со Гаусов прозорец $g(x) = e^{-\pi x^2}$ и $\alpha = \beta = 1$, па според тоа тој се нарекува **Габор развој** и коефициентите c_{kn} или $\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle$ се нарекуваат **Габор коефициенти**.

3. Третата идеја за дискретизација доаѓа од интерпретацијата на $|V_g f(x, \omega)|^2$ како енергија на сигналот f во временско–фреквенциската ќелија центрирана во точката (x, ω) . Со цел да се опфати целата енергија на сигналот f , од $V_g f$ земаме примероци доволно густо, така што енергијата се зачувува над дискретизацијата. Поформално, потребно е неравенствата

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B \|f\|_2^2 \quad (3.3)$$

да бидат задоволени за $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и за некои константи $A, B > 0$. Десната страна од неравенството (3.3) покажува дека операторот на земање примероци е непрекинат над просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$, додека пак левата страна од (3.3) покажува дека функцијата f е рамномерно определена преку примероците $V_g f(\alpha k, \beta n)$ од STFT. Покрај тоа, f непрекинато зависи од примероците $V_g f(\alpha k, \beta n)$. Според тоа, проблемот на дискретизација на инверзната формула на STFT се сведува на проблем на земање примероци (семплирање) од STFT.

Подоцна ќе покажеме дека овие три приоди за дискретизација се еквивалентни и даваат ист одговор. Пред да ја воведеме нивната теорија, потребно е да нагласиме дека Габоровите развои дадени со (3.1) и (3.2) отвараат нови математички прашања:

а) Временско–фреквенциските атоми $T_{\alpha k} M_{\beta n} g$ не се ортогонални во општ случај. Во кој случај неортогоналните редови во (3.1) и (3.2) конвергираат?

б) За даден прозорец g , како можеме да определиме дуален прозорец γ во (3.1)? Поопшто, како се пресметуваат Габор коефициентите во (3.2)?

в) Кои се соодветните мрежни параметри α, β кои гарантираат дека f е еднозначно определена преку примероците $V_g f(\alpha k, \beta n)$?

г) Како се манифестира принципот на неопределеност кај дискретни временско–фреквенциски репрезентации?

д) Дали е возможно да се конструира ортонормирана база за просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$ во облик $\{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in \mathbb{Z}^d\}$? Во потврден случај, ниту конвергенцијата, ниту определувањето на коефициентите во (3.1) би биле проблем.

Ќе нагласиме дека откако овие прашања ќе бидат одговорени, сепак инженерите нема да бидат задоволни. Габор развојот (3.2) сеуште останува во бесконечно

димензионалниот простор $L^2(\mathbb{R}^d)$, а инженерите бараат дискретизација која им дозволува конечно димензионален модел на временско-фреквенциската анализа и примена на нумерички алгоритми. Овие прашања се дел од нумеричка линеарна алгебра, но во магистерскиот труд нема да бидат обработени.

3.1 Теорија на рамки

Најлесен пристап кон проблемот на дискретизација на инверзната формула на STFT е преку теоријата на земање примероци и проучување на неравенствата (3.3). Забележуваме дека примерокот

$$V_g f(\alpha k, \beta n) = \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle = e^{-2\pi i \alpha \beta k \cdot n} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle$$

од STFT претставува скаларен производ на функцијата f со дадена фамилија од функции. Ако множеството $\{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in \mathbb{Z}^d\}$ покрива густ потпростор од $L^2(\mathbb{R}^d)$, тогаш f е еднозначно определена од примероците на $V_g f$. Сепак за погодна и употреблива реконструкција на f од овие скаларни производи (примероци) потребно е да се воведат дополнителни услови.

Најпрво ќе разгледаме апстрактна математичка структура која претставува основа на оваа набљудување. Мотивирани од (3.3) ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција 3.1.1. Низата $\{e_j \mid j \in J\}$ во (сепарабилен) Хилбертов простор \mathcal{H} се нарекува **рамка** ако постојат константи $A, B > 0$ т.ш. за $\forall f \in \mathcal{H}$ важи

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (3.4)$$

Константите A и B кои го задоволуваат условот (3.4) се нарекуваат **граници на рамката**. Ако $A = B$ тогаш низата $\{e_j \mid j \in J\}$ се нарекува **тесна рамка**.

Примери:

1. Секоја ортонормирана база е тесна рамка со граници $A = B = 1$.
2. Унија од две ортонормирани бази е тесна рамка со граници на рамката $A = B = 2$.
3. Унија од ортонормирани бази од L произволни единечни вектори е рамка со граници $A = 1$ и $B = L + 1$.

Забележуваме дека рамките претставуваат обопштување на ортонормираните бази. Горните примери покажуваат дека во општ случај елементите на една рамка не се ортогонални еден на друг и не се линеарно независни.

За да ги разбереме подобро рамките и методите на реконструкција ќе разгледаме некои важни оператори [1], [3]. Понатаму, \mathcal{H} е ознака за Хилбертов простор.

Дефиниција 3.1.2. За било кое подмножество $\{e_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{H}$, **оператор-коэффициент** или **оператор на анализа** C е дефиниран со

$$Cf = \{\langle f, e_j \rangle \mid j \in J\}. \quad (3.5)$$

Оператор на синтеза или оператор-реконструкција D е дефиниран за конечна низа $c = (c_j)_{j \in J}$ со

$$Dc = \sum_{j \in J} c_j e_j \in \mathcal{H} \quad (3.6)$$

и **оператор-рамка** S е дефиниран над \mathcal{H} со

$$Sf = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j. \quad (3.7)$$

Тврдење 3.1.3. Нека $\{e_j | j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} .

а) S е ограничен оператор од \mathcal{H} во $l^2(J)$ ¹⁴.

б) Операторите C и D се адјунгирани оператори еден на друг, т.е. $D = C^*$. Според тоа, D може да се прошири до ограничен оператор од $l^2(J)$ во \mathcal{H} и притоа да го задоволува неравенството

$$\left\| \sum_{j \in J} c_j e_j \right\| \leq B^{1/2} \|c\|_2, \quad (3.8)$$

за некоја константа $B > 0$.

в) Операторот-рамка $S = C^*C = DD^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ е позитивно инверзен оператор кој ги задоволува неравенствата $AI_{\mathcal{H}} \leq S \leq BI_{\mathcal{H}}$ и $B^{-1}I_{\mathcal{H}} \leq S^{-1} \leq A^{-1}I_{\mathcal{H}}$ ($I_{\mathcal{H}}$ е идентичниот оператор над \mathcal{H}).

Специјално, $\{e_j | j \in J\}$ е тесна рамка ако и само ако $S = AI_{\mathcal{H}}$.

г) Оптимални граници на рамката се $B_{opt} = \|S\|_{op}$ и $A_{opt} = \|S^{-1}\|_{op}^{-1}$, каде што $\|\cdot\|_{op}$ е норма на оператор¹⁵.

Доказ: а) Бидејќи $\{e_j | j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} следува дека неравенството (3.4) важи, па заради дефиницијата (3.5) следува дека операторот C е ограничен.

¹⁴ $l^2(J)$ е простор од конечни низи од комплексни броеви $c = (c_i)_{i \in J}$ за кои важи $\sum_{i \in J} |c_i|^2 < \infty$.

Нормата во овој простор е дефинирана со $\|c\|_2 = \left(\sum_{i \in J} |c_i|^2 \right)^{1/2} < \infty$.

¹⁵ Нека \mathcal{H} е Хилбертов простор. Линеарниот оператор A над \mathcal{H} се нарекува **позитивен оператор** ако $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ за секој $x \in \mathcal{H}$.

Нека S е позитивен оператор. **Норма на операторот** S се дефинира на следниов начин $\|S\|_{op} = \sup\{\langle Sf, f \rangle | \|f\| \leq 1\}$.

б) Нека $c = (c_j)_{j \in J}$ е конечна низа. Тогаш

$$\langle C^*c, f \rangle = \langle c, Cf \rangle = \langle c, (\langle f, e_j \rangle)_{j \in J} \rangle = \sum_{j \in J} c_j \overline{\langle f, e_j \rangle} = \langle \sum_{j \in J} c_j e_j, f \rangle = \langle Dc, f \rangle. \quad (3.9)$$

Бидејќи C е ограничен оператор над \mathcal{H} и има норма $\|C\|_{op} \leq B^{1/2}$, од (3.4) следува дека $D = C^* : l^2(J) \rightarrow \mathcal{H}$ е исто така ограничен оператор со истата норма. Според тоа следува тврдењето б).

в) Очигледно за операторот-рамка важи $S = C^*C = DD^*$ и според тоа S е самоадјунгиран и позитивен оператор. Бидејќи

$$\langle Sf, f \rangle = \langle \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j, f \rangle = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle \overline{\langle f, e_j \rangle} = \sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2. \quad (3.10)$$

Неравенството $AI_{\mathcal{H}} \leq S \leq BI_{\mathcal{H}}$ е всушност неравенството (3.4) запишано со помош на оператори. S е инверзибилен над \mathcal{H} бидејќи $A > 0$. Неравенствата се зачувуваат над множење со позитивни комутативни оператори, па имаме $AS^{-1} \leq SS^{-1} \leq BS^{-1}$.

г) Ова тврдење следува од рамка неравенствата (3.4) и фактот дека нормата на позитивен оператор е определена со $\|S\|_{op} = \sup\{\langle Sf, f \rangle \mid \|f\| \leq 1\}$. Слични аргументи важат и за A_{opt} . ■

Тврдењето б) покажува дека сумата $\sum_{j \in J} c_j e_j$ е добро дефинирана за произволна l^2 низа, и покрај тоа што рамка векторите e_j во општ случај не се ортогонални.

Последица 3.1.4. Нека $\{e_j \mid j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} . Ако $f = \sum_{j \in J} c_j e_j$ за некоја низа $c = (c_j)_{j \in J} \in l^2(J)$, тогаш за секое $\varepsilon > 0$, постои конечно подмножество $F_0 = F_0(\varepsilon) \subseteq J$ т.ш. важи

$$\left\| f - \sum_{j \in F} c_j e_j \right\| < \varepsilon \text{ за сите конечни множества } F \supseteq F_0. \quad (3.11)$$

Велиме дека редот $\sum_{j \in J} c_j e_j$ безусловно конвергира кон $f \in \mathcal{H}$.

Доказ: Нека $\varepsilon > 0$. Избираме $F_0 \subseteq J$ така што $\sum_{j \notin F_0} |c_j|^2 < \varepsilon/B^{1/2}$ за $F \supseteq F_0$. Нека

$c_F = c \cdot \chi_F \in l^2(J)$ е конечна низа за која важи $c_{F,j} = c_j$ ако $j \in F$ и $c_{F,j} = 0$ ако $j \notin F$.

Тогаш $\sum_{j \in F} c_j e_j = Dc_F$ и од (3.8) имаме

$$\left\| f - \sum_{j \in F} c_j e_j \right\| = \|Dc - Dc_F\| = \|D(c - c_F)\| \leq B^{1/2} \|c - c_F\|_2 < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Безусловната конвергенција е најважен поим за конвергенција на неортогонални редови, над општи неструктурирани множества на индекси.

Како последица на тврдењето 3.1.3 ја добиваме и првата формула за реконструкција на f од рамка коефициентите $\langle f, e_j \rangle$.

Последица 3.1.5. Ако $\{e_j | j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} со граници $A, B > 0$, тогаш $\{S^{-1}e_j | j \in J\}$ е рамка со граници $B^{-1}, A^{-1} > 0$, таканаречена **дуална рамка**. Секоја функција $f \in \mathcal{H}$ има неортогонални развои

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1}e_j \rangle e_j \quad (3.12)$$

и

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle S^{-1}e_j, \quad (3.13)$$

каде што двата реда конвергираат безусловно во \mathcal{H} .

Доказ:

$$\sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1}e_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle (S^{-1})^* f, e_j \rangle|^2 = \sum_{j \in J} |\langle S^{-1}f, e_j \rangle|^2 \stackrel{(3.10)}{=} \langle S(S^{-1})f, S^{-1}f \rangle = \langle S^{-1}f, f \rangle.$$

Од тврдењето 3.1.3, в) следува

$$B^{-1}\|f\|^2 \leq \langle S^{-1}f, f \rangle = \sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1}e_j \rangle|^2 \leq A^{-1}\|f\|^2.$$

Според тоа $\{S^{-1}e_j | j \in J\}$ е рамка со граници B^{-1} и A^{-1} . Користејќи ја факторизацијата $I_{\mathcal{H}} = S^{-1}S = SS^{-1}$ го добиваме следното развивање во ред

$$f = S(S^{-1}f) \stackrel{(3.7)}{=} \sum_{j \in J} \langle S^{-1}f, e_j \rangle e_j = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1}e_j \rangle e_j,$$

и

$$f = S^{-1}(Sf) \stackrel{(3.7)}{=} \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle S^{-1}e_j.$$

Бидејќи и двете низи $\{\langle f, e_j \rangle\}$ и $\{\langle f, S^{-1}e_j \rangle\}$ се во $l^2(J)$, двата реда конвергираат безусловно заради последица 3.1.4. ■

Двете реконструкции (3.12) и (3.13) на f можеме да ги споредиме со ортонормиран развој. (3.12) е неортонормиран развој на f во однос на рамка векторите e_j со коефициенти кои се скаларен производ помеѓу f и дуалната рамка. Од друга страна (3.13) е реконструкција на f од рамка коефициентите во однос на векторите од дуалната рамка $S^{-1}e_j$. За ортонормирана база и тесна рамка овие два развои се совпаѓаат. Спротивно на ортонормирана база, коефициентите $\langle f, S^{-1}e_j \rangle$ во развојот (3.12) во однос на рамката не се еднозначно определени. За нив важи следново тврдење:

Тврдење 3.1.6. Ако $\{e_j | j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} и $f = \sum_{j \in J} c_j e_j$ за некои коефициенти

$c = (c_j)_{j \in J} \in l^2(J)$, тогаш

$$\sum_{j \in J} |c_j|^2 \geq \sum_{j \in J} |\langle f, S^{-1}e_j \rangle|^2.$$

Равенство важи ако $c_j = \langle f, S^{-1}e_j \rangle$ за $\forall j \in J$.

Доказ: Нека $a_j = \langle f, S^{-1}e_j \rangle$. Тогаш $f = \sum_{j \in J} a_j e_j$ и

$$\begin{aligned} \langle f, S^{-1}f \rangle &= \sum_{j \in J} a_j \langle e_j, S^{-1}f \rangle = \sum_{j \in J} a_j \langle S^{-1}e_j, f \rangle \\ &= \sum_{j \in J} a_j \overline{\langle f, S^{-1}e_j \rangle} = \sum_{j \in J} a_j \bar{a}_j = \sum_{j \in J} |a_j|^2 = \|a\|_2^2. \end{aligned}$$

Од друга страна,

$$\langle f, S^{-1}f \rangle = \sum_{j \in J} c_j \langle e_j, S^{-1}f \rangle = \sum_{j \in J} c_j \bar{a}_j = \langle c, a \rangle.$$

Од горните две равенства следува $\|a\|_2^2 = \langle c, a \rangle$, па имаме дека

$$\begin{aligned} \|c\|_2^2 &= \|c - a + a\|_2^2 = \langle c - a + a, c - a + a \rangle \\ &= \|c - a\|_2^2 + \|a\|_2^2 + \langle c - a, a \rangle + \langle a, c - a \rangle \\ &= \|c - a\|_2^2 + \|a\|_2^2 \geq \|a\|_2^2. \end{aligned}$$

Равенство важи само ако $c = a$. ■

Прашањето кога коефициентите $\langle f, S^{-1}e_j \rangle$ во развојот (3.12) се еднозначно определени е одговорено во следново тврдење:

Тврдење 3.1.7. ([1], Тврдење 5.1.5) Нека $\{e_j | j \in J\}$ е рамка за \mathcal{H} . Тогаш следниве услови се еквивалентни:

- (i) Коефициентите $c \in l^2(J)$ во развојот (3.12) се еднозначно определени.
- (ii) Операторот на анализа C е сурјективно пресликување во $l^2(J)$.
- (iii) Постојат константи $A', B' > 0$ така што неравенството

$$A' \|c\|_2 \leq \left\| \sum_{j \in J} c_j e_j \right\| \leq B' \|c\|_2 \quad (3.14)$$

важи за секоја конечна низа $c = (c_j)_{j \in J}$.

- (iv) Рамката $\{e_j | j \in J\}$ е слика на ортонормирана база $\{g_j | j \in J\}$ над инверзибилен оператор.

Дефиниција 3.1.8. Рамката која ги задоволува условите од претходното тврдење се нарекува **Ризова база** на \mathcal{H} .

Нагласуваме дека развоите (3.12) и (3.13) во последица 3.1.5 се корисни само ако експлицитно може да се определи дуалната рамка. Често позгодно и поефикасно е да се примени итеративен метод на реконструкција, кој се нарекува **алгоритам-рамка**.

Алгоритам 3.1.9. Даден е параметар на релаксација $0 < \lambda < \frac{2}{B}$. Нека

$$\delta = \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} < 1 \text{ и } f_0 = 0.$$

Низата $\{f_n\}$ ја дефинираме рекурзивно со

$$f_{n+1} = f_n + \lambda S(f - f_n). \quad (3.15)$$

Тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ со геометриски степен на конвергенција, т.е. важи

$$\|f - f_n\| \leq \delta^n \|f\|. \quad (3.16)$$

Да забележиме дека при пресметувањето на $f_1 = \lambda S f = \lambda \sum_j \langle f, e_j \rangle e_j$ како влез се јавуваат рамка коефициентите. Ова е доволно за да се пресметаат наредните апроксимации f_n и комплетно да се реконструира f .

Доказ: Бидејќи $AI \leq S \leq BI$ добиваме

$$(1 - \lambda B)I \leq I - \lambda S \leq (1 - \lambda A)I.$$

Според тоа

$$\|I - \lambda S\|_{op} \leq \max\{|1 - \lambda A|, |1 - \lambda B|\} = \delta < 1, \quad (3.17)$$

бидејќи $\lambda < \frac{2}{B}$. Да претпоставиме дека оценката (3.16) е точна за $k = 1, 2, \dots, n$ (не треба да се покаже за $n = 0$). Тогаш

$$\begin{aligned} \|f - f_{n+1}\| &= \|f - f_n - \lambda S(f - f_n)\| = \|(I - \lambda S)(f - f_n)\| \\ &\leq \|I - \lambda S\|_{op} \|f - f_n\| \leq \delta \delta^n \|f\| \end{aligned}$$

што требаше да се докаже. ■

Во голем број книги и трудови за рамки, дури и во литература за нивната примена, алгоритамот-рамка се смета како ефикасен метод за реконструкција. Но, едноставната итерација (3.15) се избегнува заради бавната конвергенција. Ако параметарот на релаксација λ е мал, тогаш факторот на конвергенција δ е скоро 1, па f_n бавно конвергира кон f . Ако избереме оптимален параметар за λ , т.е. $\lambda_{opt} = \frac{2}{A+B}$, тогаш факторот на конвергенција е

$$\delta = \frac{B-A}{B+A} = \frac{\frac{B}{A} - 1}{\frac{B}{A} + 1}.$$

Според тоа, конвергенцијата на итеративниот алгоритам-рамка не зависи само од рамката, туку и од оценките на границите на рамката A и B . Оваа зависност од A и B е најголем проблем бидејќи доста тешко е тие да се определат експлицитно, а уште потешко е да се определат оптималните рамка граници. Освен во специјални случаи,

оценетиот однос $\frac{B}{A}$ е вообичаено поголем од оптималниот однос $\frac{B_{opt}}{A_{opt}}$, т.н. условен број на рамката. Според тоа, во општ случај алгоритмот-рамка конвергира бавно.

Следното тврдење го дава односот меѓу рамки, тесни рамки и ортонормирани бази.

Лема 3.1.10. ([1], Лема 5.1.6) а) Ако $\{e_j | j \in J\}$ е тесна рамка за \mathcal{H} со граници $A = B = 1$ и ако $\|e_j\| = 1$ за $\forall j \in J$, тогаш $\{e_j | j \in J\}$ е ортонормирана база.

б) Ако $\{e_j | j \in J\}$ е рамка, тогаш $\{S^{-1/2}e_j | j \in J\}$ е тесна рамка со граници $A = B = 1$.

в) Ако $\{e_j | j \in J\}$ е рамка тогаш инверзниот оператор-рамка S^{-1} е даден со

$$S^{-1}f = \sum_{j \in J} \langle f, S^{-1}e_j \rangle S^{-1}e_j. \quad (3.18)$$

S^{-1} е оператор-рамка во однос на дуалната рамка $\{S^{-1}e_j | j \in J\}$.

3.2 Габор рамки

Откако ја разгледаваме општата теорија на рамки, ќе ја проучиме и специјалната фамилија од временско–фреквенциски поместувања што се јавуваат при земањето примероци од STFT. Ако ги примениме апстрактните резултати од теоријата на Хилбертови простори доаѓаме до одговорот на првото прашање од страна 35 за дискретни временско–фреквенциски репрезентации.

Дефиниција 3.2.1. За даден ненулти прозорец $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и мрежни параметри $\alpha, \beta > 0$, множеството од временско–фреквенциски поместувања

$$\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in \mathbb{Z}^d\} \quad (3.19)$$

се нарекува **Габор систем**.

Ако $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ е рамка за $L^2(\mathbb{R}^d)$, таа се нарекува **Габор рамка** или **Weyl-Heisenberg рамка**. Придружениот оператор-рамка таканаречен **Габор оператор-рамка** има форма

$$\begin{aligned} Sf &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} g. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Овој оператор го означуваме со $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ или $S_{g,g}$ кога е потребно да ја нагласиме неговата зависност од g, α, β .

Во дефиницијата на Габор оператор-рамка, редоследот на транслацијата и модулацијата не е важен бидејќи фазниот фактор $e^{-2\pi i x \cdot \omega}$ од равенството $T_x M_\omega = e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x$ се јавува линеарно и конјугирано-линеарно во (3.20). За Габор

рамки најчесто се користи редоследот $T_{\alpha k} M_{\beta n}$ со цел да се остане доследно на споменатото време пред фреквенција.

Тврдење 3.2.2. Ако $G(g, \alpha, \beta)$ е рамка за $L^2(\mathbb{R}^d)$, тогаш постои дуален прозорец $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$, т.ш. дуалната рамка на $G(g, \alpha, \beta)$ е $G(\gamma, \alpha, \beta)$. Според тоа, секоја функција $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ има развој

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \quad (3.21)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} g \quad (3.22)$$

и горните редовите безусловно конвергираат во $L^2(\mathbb{R}^d)$. Уште повеќе, за нормата во $L^2(\mathbb{R}^d)$ важи:

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |V_g f(\alpha k, \beta n)|^2 \leq B \|f\|_2^2, \text{ и}$$

$$B^{-1} \|f\|_2^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|_2^2.$$

Доказ: Најпрво ќе покажеме дека Габор рамка операторот $S = S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ комутира со временско–фреквенциските поместувања $T_{\alpha k} M_{\beta n}$. Нека $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и $r, s \in \mathbb{Z}^d$. Тогаш

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S T_{\alpha r} M_{\beta s} f = \sum_{k, n \in \mathbb{Z}^d} \langle T_{\alpha r} M_{\beta s} f, T_{\alpha k} M_{\beta n} g \rangle (T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} g. \quad (3.23)$$

Од (1.5) имаме $(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} T_{\alpha k} M_{\beta n} = e^{-2\pi i \alpha \beta (k-r) \cdot s} (T_{\alpha(k-r)} M_{\beta(n-s)})$. Фазниот фактор $e^{2\pi i \alpha \beta (k-r) \cdot s}$ се губи во равенството (3.23), па добиваме

$$(T_{\alpha r} M_{\beta s})^{-1} S T_{\alpha r} M_{\beta s} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha(k-r)} M_{\beta(n-s)} g \rangle T_{\alpha(k-r)} M_{\beta(n-s)} g = S f \quad (3.24)$$

по преименувањето на индексите.

Операторот S^{-1} исто така комутира со $T_{\alpha r} M_{\beta s}$, па дуалната рамка се состои од функциите

$$S^{-1}(T_{\alpha k} M_{\beta n} g) = T_{\alpha k} M_{\beta n} S^{-1} g.$$

Според тоа го земаме $\gamma = S^{-1} g$ како дуален прозорец. Другите тврдења веќе ги покажавме во последица 3.1.4 и последица 3.1.5. ■

Последица 3.2.3. Ако $G(g, \alpha, \beta)$ е рамка за $L^2(\mathbb{R}^d)$ со дуален прозорец $\gamma = S^{-1} g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, тогаш инверзниот оператор рамка е дефиниран со

$$S_{g,g}^{-1} f = S_{\gamma,\gamma} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma. \quad (3.25)$$

Тврдењето 3.2.2 дава дискретна временско–фреквенциска репрезентација на сигналите, и уште повеќе, покажува дека трите приоди за дискретизација кои ги

дискутираме на почетокот на оваа глава се еквивалентни: Ако $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ е рамка, тогаш (3.21) и (3.22) се дискретни верзии на инверзната формула (2.19) за STFT. (3.22) го дава Габор развојот на f со канонично множество од коефициенти дадени со $c_{kn} = \langle f, T_{\alpha k} M_{\beta n} \gamma \rangle$. Развојот во ред (3.21) запишан како

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_g f(\alpha k, \beta n) M_{\beta n} T_{\alpha k} \gamma \quad (3.26)$$

претставува експлицитна реконструкција на f од примероците од STFT.

Експлицитните формули за реконструкција (3.21) и (3.22) не се базирани на итеративниот рамка алгоритам 3.1.9, туку на дополнителната структура на Габор рамките. Бидејќи од (3.25) важи $S_{g,g}^{-1} = S_{\gamma,\gamma}$, следува дека дуалниот прозорец γ комплетно го определува инверзниот оператор–рамка. За да ја одредиме дискретната инверзна формула (3.26), доволно е да ја решиме линеарна равенка $S\gamma = g$, што е многу полесно отколку да ја решиме општата равенка $Sf = h$.

Јасно е дека Габор рамка операторот $S_{g,g}^{\alpha,\beta}$ зависи од прозорецот g и од мрежните параметри α, β . На сликата 5.1 е претставено како дуалниот прозорец γ на фиксен прозорец g зависи од мрежните параметри α и β . Кога $(\alpha\beta)^{-1} \rightarrow \infty$, дуалниот прозорец γ почнува да наликува на оригиналниот прозорец g . Прецизно, може да се покаже дека $\lim_{(\alpha,\beta) \rightarrow (0,0)} (\alpha\beta)^{-1} (S_{g,g}^{\alpha,\beta})^{-1} g = g$.

3.3 Безусловна конвергенција

Во овој дел подетално ќе го проучиме поимот безусловна конвергенција. Безусловната конвергенција претставува соодветна конвергенција на неортогоналните редови во Хилбертови простори, и еден од најважните типови на конвергенција во Банаховите простори. Цел на безусловната конвергенција е да ги оправда неформалните постапки како што е промената на редоследот на сума и линеарен оператор. За оваа конвергенција може да се најде повеќе во [8].

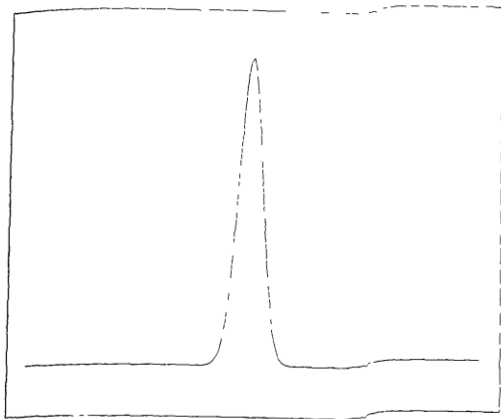
Да се потсетиме на дефиницијата за безусловна конвергенција.

Дефиниција 3.3.1. Нека $\{f_j \mid j \in J\}$ е претброиво множество во Банахов простор B . Велиме дека редот $\sum_{j \in J} f_j$ **конвергира безусловно** кон $f \in B$ ако за $\forall \varepsilon > 0$, постои конечно множество $F_0 \subseteq J$ т.ш.

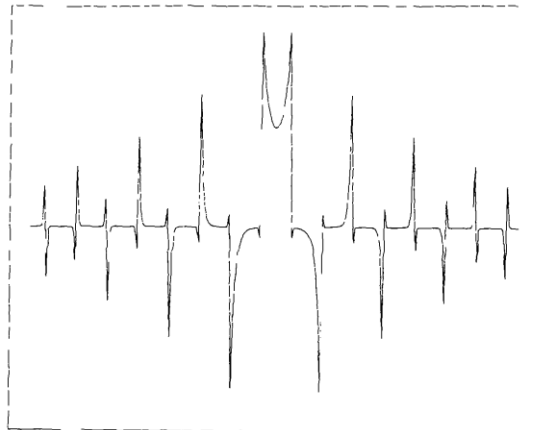
$$\left\| f - \sum_{j \in F} f_j \right\|_B < \varepsilon \text{ за сите конечни множества } F \supseteq F_0.$$

Бидејќи множеството од индекси J е претброиво, можеме да направиме поделба на J со бијективно пресликување $\pi : \mathbb{N} \rightarrow J$ и да ја дефинираме конвергенцијата на редот $\sum_{j \in J} f_j$ преку конвергенција на парцијалната сума $\sum_{n=1}^N f_{\pi(n)}$, т.е.

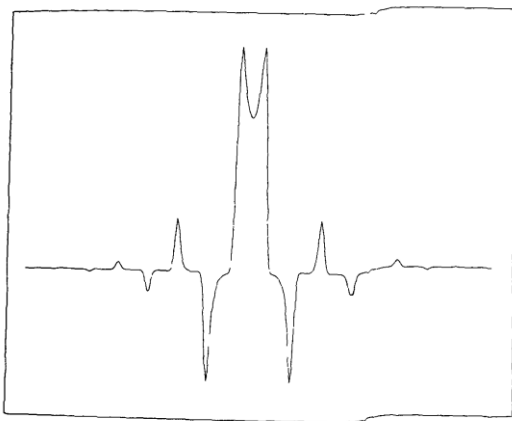
$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f_{\pi(n)}. \quad (3.27)$$



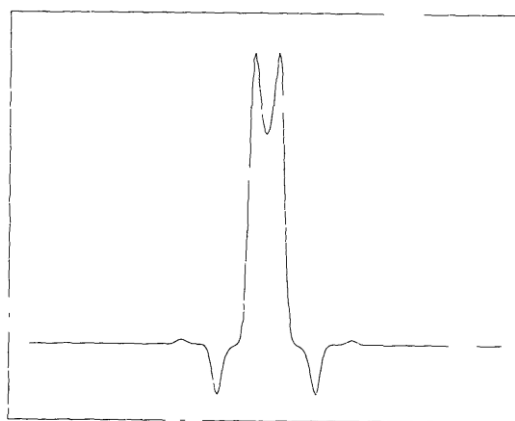
а) Прозорец g



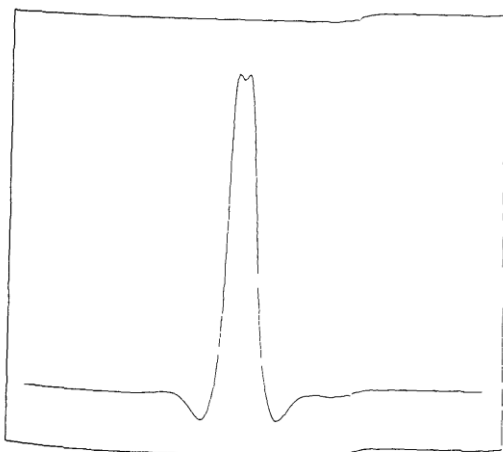
б) Дуален прозорец γ за $\alpha = \beta = 1$



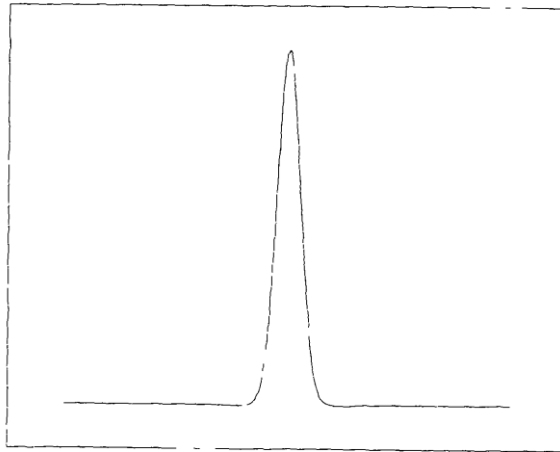
в) Дуален прозорец γ за $\alpha = \beta = 0.97$



г) Дуален прозорец γ за $\alpha = \beta = 0.89$



д) Дуален прозорец γ за $\alpha = \beta = 0.77$



ѓ) Дуален прозорец γ за $\alpha = \beta = 0.52$

слика 5.1 Дуални прозорци на прозорецот g за различни вредности на мрежните параметри α и β

Во овој приод се појавуваат два проблеми:

а) За неструктурирани множества на индекси не постои природна поделба π и не постои природна низа од парцијални суми.

б) Во општ случај, не е јасно дали границата во (3.27) е независна од поделбата π .

Следното тврдење покажува дека овие проблеми нема да се појавуваат ако редот конвергира безусловно.

Тврдење 3.3.2. ([1], Тврдење 5.3.1) *Нека $\{f_j \mid j \in J\}$ е прброиво множество во Банахов простор B . Тогаш следниве услови се еквивалентни:*

(i) $f = \sum_{j \in J} f_j$ конвергира безусловно кон $f \in B$.

(ii) За било која поделба $\pi : N \rightarrow J$ низата од парцијални суми $\sum_{n=1}^N f_{\pi(n)}$ конвергира кон $f \in B$, т.е. $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N f_{\pi(n)} \right\|_B = 0$.

Притоа, границата f не зависи од поделбата π .

Ако $J = Z^d$, тогаш F_0 може да биде d -димензионалната коцка $\{k \in Z^d \mid |k_j| \leq N, j = 1, 2, \dots, d\}$ или d -димензионалната топка $\{k \in Z^d \mid |k| \leq N\}$. Тогаш безусловната конвергенција имплицира конвергенција на правоаголни и радијални парцијални суми, но обратното не важи, конвергенцијата на правоаголни и радијални суми не имплицира безусловна конвергенција.

Пример 3.3.3 (Габор ред)

Ако $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta) = \{T_{\alpha k} M_{\beta n} g \mid k, n \in Z^d\}$ е Габор рамка, тогаш Габоровиот ред $f = \sum_{k, n \in Z^d} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$ конвергира безусловно заради последица 3.1.4. Ова повлекува дека правоаголната парцијална сума $s_{K, N} = \sum_{\substack{k \in Z^d \\ |k_j| \leq K}} \sum_{\substack{n \in Z^d \\ |n_j| \leq N}} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$ конвергира кон f . Исто така, радијалната парцијална сума $\tilde{s}_N = \sum_{\substack{k, n \in Z^d \\ |n|^2 + |k|^2 \leq N^2}} c_{kn} T_{\alpha k} M_{\beta n} g$ конвергира кон f .

Пример 3.3.4 (Фуриеов ред)

Бидејќи $\{e^{2\pi i n x} \mid n \in Z\}$ е ортонормирана база за $L^2(T)$, Фуриеовиот ред $f = \sum_{n \in Z} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ конвергира безусловно во $L^2(T)$.

Во многу докази потребно е да се промени редоследот на линеарен оператор со сума. Ако сумата конвергира безусловно оваа промена е оправдана како што покажува следнава лема:

Лема 3.3.5. Нека A е ограничен оператор помеѓу Банаховите простори B_1 и B_2 . Ако $f = \sum_{j \in J} f_j$ конвергира безусловно во B_1 , тогаш $\sum_{j \in J} Af_j$ конвергира безусловно во B_2 и важи $A(\sum_{j \in J} f_j) = \sum_{j \in J} Af_j$.

Доказ: Од тоа што $f = \sum_{j \in J} f_j$ конвергира безусловно во B_1 следува дека за дадено

$\varepsilon > 0$, постои конечно множество $F_0 \subseteq J$ така што $\left\| f - \sum_{j \in F} f_j \right\|_{B_1} < \varepsilon / \|A\|_{op}$ за сите

$F \supseteq F_0$. Оттука

$$\left\| Af - \sum_{j \in F} Af_j \right\|_{B_2} = \left\| A \left(f - \sum_{j \in F} f_j \right) \right\|_{B_2} < \|A\|_{op} \left\| f - \sum_{j \in F} f_j \right\|_{B_1} < \varepsilon$$

за $F \supseteq F_0$. Според тоа $\sum_{j \in J} Af_j$ конвергира безусловно кон границата Af . ■

Ако множеството од индекси има производ структура, т.е. $J = K \times L$, тогаш сумата $\sum_{j \in J} f_j$ може да се смета како итеративна сума од облик $\sum_{k \in K} \left(\sum_{l \in L} f_{kl} \right)$. Наредната теорема дава аналогно тврдење на лема 3.3.5. за двојна сума над $Z^d \times Z^d$.

Теорема 3.3.6. ([1], Теорема 5.3.3) Претпоставуваме дека $\sum_{(k,l) \in Z^{2d}} f_{kl}$ конвергира безусловно кон $f \in B$. Тогаш внатрешната парцијална сума $s_{k,N} = \sum_{|l| \leq N} f_{kl}$ конвергира кон некој елемент $g_k \in B$ за секое $k \in Z^d$, и $f = \sum_{k \in Z^d} g_k$ безусловно конвергира. Исто така, парцијалната сума $\sum_{|k| \leq M} f_{kl}$ конвергира кон некој елемент $h_l \in B$ за секое $l \in Z^d$ и $f = \sum_{l \in Z^d} h_l$.

Според тоа, редоследот на сумирање во двојната сума може да се промени.

Нагласуваме делка конвергенцијата е “лажна”, т.е. конвергенцијата на итеративната сума не мора да имплицира безусловна конвергенција на двојната сума.

Глава 4

Вејвлет трансформација и вејвлет рамки

Вејвлет теоријата често се смета за алтернатива на временско–фреквенциската анализа. Како и временско–фреквенциската анализа така и вејвлет теоријата претставува интердисциплинарно поле кое ги комбинира хармониската анализа, применетата математика, како и обработката на сигнали и податоци. Ќе разгледаме некои основни идеи за вејвлет теоријата и ќе ги споредиме со временско–фреквенциската анализа. Детална вејвлет теорија може да се најде во книгите од нејзините создавачи, Y. Meyer [9] и I. Daubechies [2] кои сеуште се ненадминливи. Книгата од S. Chui [10] се препорачува како почетна бидејќи бара мали математички предзнаења, а модерна вејвлет теорија и нејзина примена во анализа на сигнали може да се најде во книгата на S. Mallat [11]. Покрај овие книги, дел од вејвлет теоријата може да се најде во [4], [5] и [14].

4.1 Непрекината вејвлет трансформација

Дефиниција 4.1.1. Функцијата $\psi \in L^2(R)$ се нарекува **вејвлет** ако има средна вредност 0 на R , т.е.

$$\int_R \psi(t) dt = 0. \quad (4.1)$$

Слично како функциите-прозорци во STFT, потребно е вејвлетите да задоволуваат дополнителни услови за да важат ортогонални релации (Теорема 4.1.14).

Забелешка 4.1.2. Ако $\psi \in L^2(R) \cap L^1(R)$ го задоволува неравенството

$$c_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (4.2)$$

тогаш важи (4.1). Условот (4.2) се нарекува **вејвлет услов за допустливост**. (Понатаму за Фуријеова трансформација на ψ ќе ја користиме формулата

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \psi(x) e^{-ix\omega} dx.)$$

За добивање на ортогонални релации во поголеми димензии, потребно е вејвлетите да задоволуваат построг услов за допустливост (Теорема 4.1.17): Нека за функциите $\psi_1, \psi_2 \in L^2(R^d)$, $d \geq 1$ важат следниве релации за скоро секое $\omega \in R^d$ за кое $|\omega| = 1$ и $a \in R^d$:

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2(a\omega)| \frac{da}{a} < \infty \quad (4.3)$$

и

$$\int_0^\infty \overline{\hat{\psi}_1(a\omega)\hat{\psi}_2(a\omega)} \frac{da}{a} = K \text{ независно од } \omega. \quad (4.4)$$

Се покажува дека условот (4.3) важи секогаш кога или $\hat{\psi}_1$ или $\hat{\psi}_2$ опаѓа во околина на точката 0, додека пак условот (4.4) важи за сите радијални функции¹⁶. Ако $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ тогаш (4.3) имплицира дека или $\hat{\psi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_1(x) dx = 0$ или $\hat{\psi}_2(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_2(x) dx = 0$.

Нагласуваме дека не постои општо прифатена дефиниција за вејвлети. Понекогаш функциите кои го задоволуваат условот за допустливост се нарекуваат вејвлети. Најчесто условот (4.1) за анулирање на првиот момент $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$ е услов за да функцијата ψ биде вејвлет како што е во дефиниција 4.1.1. Понекогаш дури и прозорец функциите за STFT се нарекуваат Габор вејвлети.

Лема 4.1.3. Нека φ е ненулта n -пати ($n \geq 1$) диференцијабилна функција така што $\varphi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$. Тогаш

$$\psi(x) = \varphi^{(n)}(x) \quad (4.5)$$

е вејвлет.

Доказ: Од особината (1.15) на Фуриевата трансформација имаме $|\hat{\psi}(\omega)| = |\omega|^n |\hat{\varphi}(\omega)|$. Тогаш

$$\begin{aligned} c_\psi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^{2n} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\ &= 2\pi \left(\int_{-1}^1 |\omega|^{2n-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega + \int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2n} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \right). \end{aligned}$$

Да го разгледаме првиот интеграл $\int_{-1}^1 |\omega|^{2n-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega$. Од тоа што $|\omega| \leq 1 \Rightarrow |\omega|^{2n-1} \leq 1$ и од Планшереловата теорема ја имаме следнава оценка

$$\int_{-1}^1 |\omega|^{2n-1} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq \int_{-1}^1 |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{\varphi}\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2.$$

Да го разгледаме сега и вториот интеграл $\int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2n} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$. Од тоа што $|\omega| > 1 \Rightarrow |\omega|^{-1} < 1$ и од особината на Фуриева трансформација (1.15), т.е. $|\hat{\psi}(\omega)| = |\omega|^k |\hat{\varphi}(\omega)|$ ја имаме следнава оценка

¹⁶ **Радијални функции** се реално вредносни функции чија вредност зависи само од растојанието до координатниот почеток, т.е. важи $f(x) = f(|x|)$, $\forall x \in D_f$, или поопшто од растојанието до некоја точка c , наречена центар, т.е. важи $f(x, c) = f(|x - c|)$, $\forall x \in D_f$.

$$\int_{|\omega|>1} \frac{|\omega|^{2n} |\hat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \int_{|\omega|>1} |\omega|^{2n} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \|\hat{\varphi}^{(n)}(\omega)\|_2^2 = \|\varphi^{(n)}(\omega)\|_2^2.$$

Бидејќи $\varphi, \varphi^{(n)} \in L^2(R)$ следува

$$c_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq 2\pi \left(\|\varphi\|_2^2 + \|\varphi^{(n)}\|_2^2 \right) < \infty,$$

т.е. важи (4.2). Од забелешка 4.1.2. следува дека ψ е вејвлет. ■

Лема 4.1.4. Нека $0 \neq \psi \in L^2(R) \cap L^1(R)$ и важи $\int_R \psi(t) dt = 0$ и $\int_R |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ за $\beta > 1/2$. Тогаш ψ е вејвлет.

Доказ: Без губење на општоста претпоставуваме дека $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, од каде следува дека

$1 + |x|^\beta \geq (1 + |x|)^\beta$. Уште повеќе, заради условите од лемата имаме

$$\int_R (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx \leq \int_R (1 + |x|^\beta) |\psi(x)| dx = \int_R |\psi(x)| dx + \int_R |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty. \quad (4.6)$$

Знаеме дека функцијата $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ е диференцијабилна скоро секаде и $\varphi'(x) = \psi(x)$.

За $x \leq 0$ добиваме

$$|\varphi(x)| = \left| \int_{-\infty}^x \psi(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^x |\psi(t)| dt \leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt.$$

Бидејќи $x \leq 0$, $t < x$ ја имаме следнава оценка $|x| < |t| \Rightarrow |x| + 1 < |t| + 1 \Rightarrow \frac{1}{|x| + 1} > \frac{1}{|t| + 1}$, од

каде добиваме

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt \leq (1 + |x|)^{-\beta} \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt \leq (1 + |x|)^{-\beta} \int_R (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt.$$

Ако $x > 0$, тогаш од условот $\int_R \psi(t) dt = 0$ следува

$$0 = \int_R \psi(t) dt = \int_R \psi(t) dt + \int_{-\infty}^x \psi(t) dt = \varphi(x) + \int_x^\infty \psi(t) dt \Rightarrow \varphi(x) = - \int_x^\infty \psi(t) dt,$$

па слично како за $x \leq 0$ се покажува дека $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(1 + |x|)^\beta} \int_R (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt$.

Според тоа имаме

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{(1 + |x|)^\beta} \int_R (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt \text{ за секое } x \in R,$$

па од (4.6) следува дека $|\varphi(x)| < \infty$ за секое $x \in R$. Значи $\varphi \in L^2(R)$.

Бидејќи $\varphi' = \psi \in L^2(R)$, заради лема 4.1.3 следува дека ψ е вејвлет. ■

Последица 4.1.5. ([4], Последица 10.2.1) *За секој ненулти елемент $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ со компактен носач, следниве тврдења се еквивалентни:*

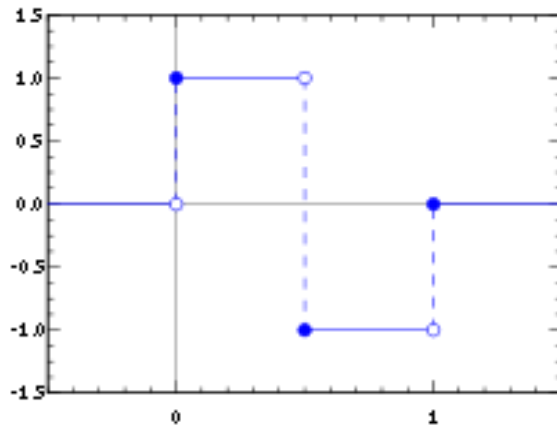
- a) функцијата ψ е вејвлет,
- б) релацијата (4.2) е задоволена.

Ќе разгледаме некои примери на вејвлети.

Пример 4.1.6 Хар вејвлет (Haar Wavelet). Нека

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases} .$$

Јасно е дека $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ и дека $\psi(x)$ има компактен носач $[0,1]$.



слика 4.1 Хар вејвлет

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/2} e^{-i\omega x} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/2}^1 e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{1/2}^1 \right) \\ &= \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (-2e^{-i\omega/2} + 1 + e^{-i\omega}) = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-i\omega/2})^2 \\ &= \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\omega/2} - 1}{e^{i\omega/2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{(2ie^{i\omega/4})^2} \cdot (2ie^{i\omega/4})^2 = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\omega/2} - 1}{2ie^{i\omega/4}} \right)^2 \cdot \frac{1}{(e^{i\omega/2})^2} \cdot (2ie^{i\omega/4})^2 \\ &= -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4} \right)^2}{\frac{\omega}{4}} e^{\frac{i\omega}{2} - i\omega} = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4} \right)^2}{\frac{\omega}{4}} e^{-\frac{i\omega}{2}} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4} \right)^2}{\frac{\omega}{4}} e^{-\frac{i}{2}(\omega - \pi)} . \end{aligned}$$

Тогаш јасно е дека $c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 16 \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\sin \frac{\omega}{4}\right)^4}{|\omega|^3} d\omega < \infty$, па според последица

4.1.5 следува дека ψ е вејвлет. Овој вејвлет е познат како Хар вејвлет во чест на унгарскиот математичар Alfred Haar. Хар вејвлет е прекината функција во точките $0, \frac{1}{2}$ и 1 .

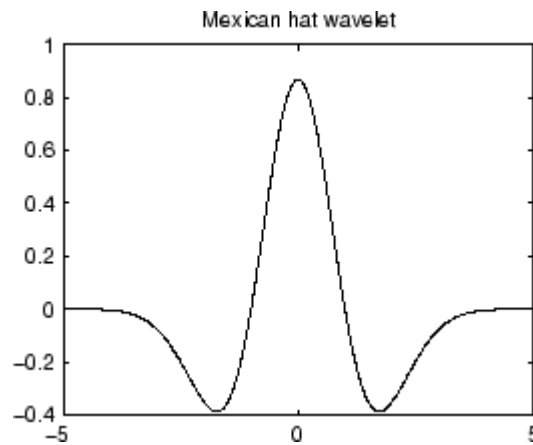
Пример 4.1.7 Вејвлет-мексиканска капа (Mexican Hat Wavelet) Функцијата

$$\psi(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

е позната како вејвлет-мексиканска капа. $\psi(x)$ го задоволува равенството (4.5) од лема 4.1.3 бидејќи,

$$\psi(x) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

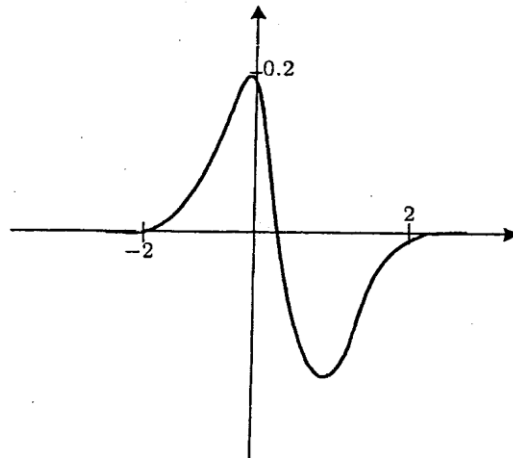
па според лема 4.1.3 следува дека $\psi(x)$ е вејвлет. Јасно е дека вејвлетот-мексиканска капа нема прекин.



слика 4.2 Вејвлет-мексиканска капа

Теорема 4.1.8. ([4], Теорема 10.2.1) Нека ψ е вејвлет и φ е ограничена интегрална функција, тогаш конволуцијата $\psi * \varphi$ е вејвлет.

Пример 4.1.9. Со конволуција на Хар вејвлетот со функцијата $\varphi(x) = e^{-x^2}$, ја добиваме функцијата на слика 4.3. која е вејвлет според теорема 4.1.8.



слика 4.3

Интересно е да се забележи дека множеството од ненулни вејвлети со компактен носач е секаде густ подмножество од $L^2(\mathbb{R})$, т.е. важи следнава теорема:

Теорема 4.1.10. ([4], Теорема 10.2.2) *Нека*

$$A = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \psi \neq 0, \psi \text{ има компактен носач и } \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \right\}.$$

Тогаш A е секаде густ потпростор од $L^2(\mathbb{R})$.

Дефиниција 4.1.11 (Непрекината вејвлет трансформација)

Непрекината вејвлет трансформација W_ψ на функцијата $f \in L^2(\mathbb{R})$ во однос на вејвлет ψ е дефинирана со

$$W_\psi f(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (4.7)$$

каде што $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ и $\overline{\psi}$ е ознака за конјугирана комплексна функција ψ .

За реална функција важи $\overline{\psi} = \psi$. Понатаму ќе разгледуваме воглавно реални вејвлети.

Забелешка 4.1.12.

1) Нека ψ е вејвлет (доста често наречен **вејвлет-мајка**) и нека $\{\psi_{a,b}\}$ е фамилија од функции

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Тогаш вејвлет трансформацијата (4.7) можеме да ја запишеме во облик $W_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$.

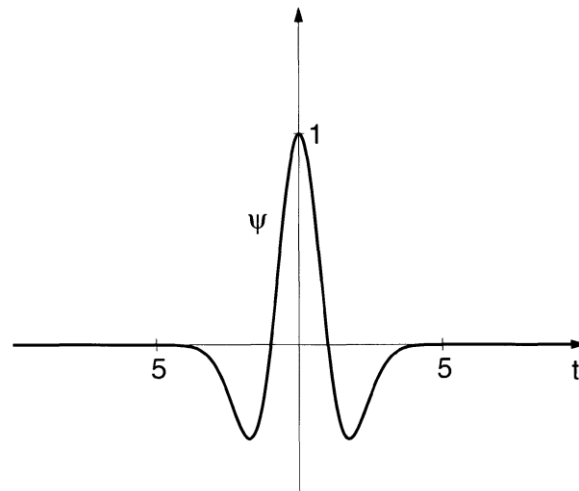
Како што видовме во глава 3, параметрите во временско-фреквенциската анализа се време x и фреквенција ω , додека пак параметрите во вејвлет теоријата се

време b и скала a . Рамнината дефинирана со променливите a и b се нарекува **временско–скална рамнина**.

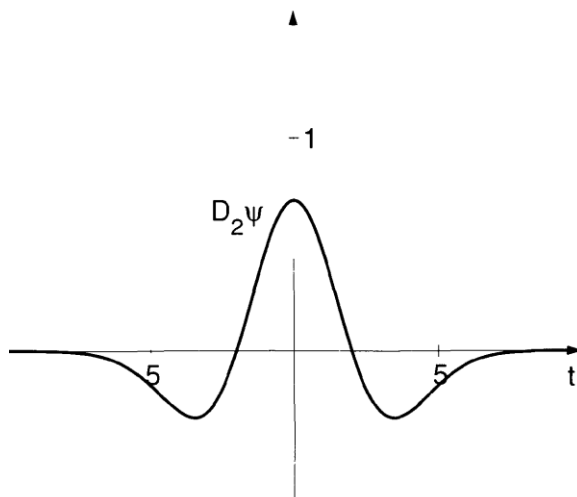
Фреквенциските поместувања, т.е. модулатиите M_ω кај STFT се заменети со дилатации

$$D_a f(x) = |a|^{-1/2} f(a^{-1}x) \quad (4.9)$$

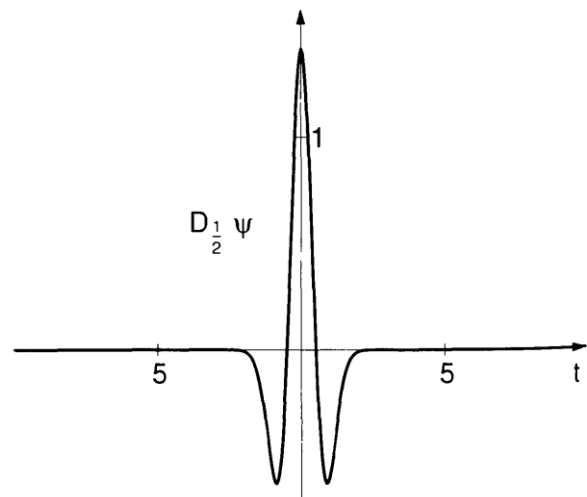
за $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Дилатациите D_a ја зачувуваат формата (обликот) на функцијата, но ја менуваат скалата т.е. “ширината” на функцијата (слика 4.4).



а) вејлет



б) дилатиран вејлет за фактор 2



в) дилатиран вејлет за фактор 1/2

слика 4.4 Дилатација на функција

Факторот $\|a\|^{-1/2}$ е избран за да D_a е унитарен оператор над просторот $L^2(\mathbb{R})$. Јасно е дека $\psi_{a,b} = T_b D_a \psi$, каде што T_b е операторот на translација (1.3). Според тоа, $W_\psi f(a,b) = \langle f, T_b D_a \psi \rangle$.

Ако $\text{supp} \psi \subseteq E$ и множеството E е центрирано околу координатниот почеток, тогаш $\text{supp} T_b D_a \psi \subseteq b + aE$ е околина на точката b со скала a . Значи $W_\psi f(b,a)$ дава локална информација за функцијата f во точката b , т.е. $W_\psi f(a,b)$ ја мери промената на f во околина на точката b .

Фуриеовата трансформација делува на дилатацијата на следниот начин:

$$\hat{D}_a f(\omega) = D_{\frac{1}{a}} \hat{f}(\omega). \quad (4.10)$$

2) Нека ψ и ϕ се вејвлети и нека $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Тогаш важат следниве релации кои лесно може да се покажат користејќи ја дефиницијата на вејвлет трансформацијата:

а) $W_\psi(\alpha f + \beta g)(a,b) = \alpha W_\psi f(a,b) + \beta W_\psi g(a,b), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

б) $W_\psi(T_c f)(a,b) = W_\psi f(a,b-c), \quad c \in \mathbb{R}.$

в) $W_\psi(D_c f)(a,b) = W_\psi f(a/c, b/c), \quad c > 0.$

г) $W_\psi f(a,b) = W_f \psi(1/a, -b/a), \quad a \neq 0.$

д) $W_{\alpha\psi + \beta\phi} f(a,b) = \bar{\alpha} W_\psi f(a,b) + \bar{\beta} W_\phi f(a,b), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

ѓ) $W_{I\psi} f(a,b) = W_\psi f(a,-b)$, каде што I е операторот на рефлексива (1.13).

е) $W_{T_c \psi} f(a,b) = W_\psi f(a, b+ca), \quad c \in \mathbb{R}.$

ж) $W_{D_c \psi} f(a,b) = 1/\sqrt{c} W_\psi f(ac, b), \quad c > 0.$

Забелешка 4.1.13.

Како што спомнавме во забелешка 4.1.12, вејвлет трансформацијата $W_\psi f(a,b)$ ја мери промената на f во околина на точката b . За вејвлет со компактен носач, вредноста на $W_\psi f(a,b)$ зависи од вредноста на f во околина на точката b со големина пропорционална со скалата a . Скалата a индуцира резолуција во која ги набљудуваме локалните детали. За фиксно $a > 0$, вејвлет трансформацијата $W_\psi f(a, \cdot)$ се интерпретира како апроксимација на f која ги гледа само деталите со големина a . Од друга страна, за фиксно b и $a \rightarrow 0$, вејвлет трансформацијата $W_\psi f(\cdot, b)$ зумира во b и дејствува како микроскоп кој ги дава локалните детали во b . За разлика од вејвлет трансформацијата, STFT ја нема оваа микроскопска карактеристика, заради фиксната големина на прозорецот поради која околината околу b е константна.

Вејвлет трансформацијата не е експлицитна временско-фреквенциска репрезентација, но сепак дава фреквенциска локализација. Ако $\text{supp} \hat{\psi} \subseteq \Omega$, тогаш од тоа што $W_\psi f(b,a) = \langle f, T_b D_a \psi \rangle = \langle \hat{f}, (T_b D_a \psi)^\wedge \rangle$ и од равенствата $(T_b f)^\wedge = M_{-b} f$,

$(D_a f)^\wedge = D_{1/a} f$ следува $W_\psi f(b, a) = \langle \hat{f}, M_{-b} D_{1/a} \hat{\psi} \rangle$. Значи $W_\psi f(b, a)$ содржи информација за f во фреквенциски граници $\frac{1}{a} \Omega = \text{supp} D_{1/a} \hat{\psi}$.

Следнава теорема е еднодимензионална верзија на ортогоналната релација за вејвлет трансформацијата.

Теорема 4.1.14. ([1], Теорема 10.1) Нека за $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ важи

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(\omega)| \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty. \quad (4.11)$$

Тогаш за сите $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ важи

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1} f_1(b, a) \overline{W_{\psi_2} f_2(b, a)} \frac{db da}{a^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_1(\omega) \hat{\psi}_2(\omega) \frac{d\omega}{|\omega|} \right) \langle f_1, f_2 \rangle. \quad (4.12)$$

Повеќедимензионалните верзии на ортогоналната релација можат да се добијат со мали модификации на претпоставките, каква што е следнава теорема:

Теорема 4.1.15. ([1], Теорема 10.2) За $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$ претпоставуваме дека скоро за сите $\omega \in \mathbb{R}^d$, $|\omega| = 1$ важи

$$(a) \int_0^\infty |\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2(a\omega)| \frac{da}{|a|} < \infty, \text{ и} \quad (4.13)$$

$$(b) \int_0^\infty \overline{\hat{\psi}_1(a\omega) \hat{\psi}_2(a\omega)} \frac{da}{a} = K \text{ независно од } \omega. \quad (4.14)$$

Тогаш за сите $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ важи

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} W_{\psi_1} f_1(b, a) \overline{W_{\psi_2} f_2(b, a)} \frac{db da}{a^{d+1}} = K \langle f_1, f_2 \rangle. \quad (4.15)$$

Теорема 4.1.16 (Парсевалова формула за вејвлет трансформација) ([4], Теорема 10.2.3)

Нека $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ го задоволува условот (4.2). Тогаш за било кои $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ важи следната формула:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a, b) \overline{W_\psi g(a, b)} \frac{db da}{a^2}. \quad (4.16)$$

Теорема 4.1.17 (теорема на Calderon, Grossman, Morlet)

Нека $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ го задоволува условот (4.2). Тогаш, за секоја функција $f \in L^2(\mathbb{R})$ важат следниве релации:

Инверзна формула

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi f(a, b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{db da}{a^2}. \quad (4.17)$$

Изометрија

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\psi} f(a, b)|^2 \frac{db da}{a^2}. \quad (4.18)$$

Равенството (4.18) може да се запише како

$$\|f\|_{L^2(R)} = \|W_{\psi} f(a, b)\|_{L^2\left(R^2, \frac{dadb}{a^2}\right)}. \quad (4.19)$$

Доказ: Нека $g \in L^2(R)$. Од теорема 4.1.16 добиваме

$$\begin{aligned} c_{\psi} \langle f, g \rangle &= \langle W_{\psi} f, W_{\psi} g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{W_{\psi} g(a, b)} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \frac{db da}{a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{\psi_{a,b}(t)} \frac{db da}{a^2} g(t) dt, \end{aligned}$$

а од теорема на Фубини следува

$$c_{\psi} \langle f, g \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{\psi_{a,b}(t)} \frac{db da}{a^2}, g \right\rangle,$$

или

$$\left\langle c_{\psi} f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{\psi_{a,b}(t)} \frac{db da}{a^2}, g \right\rangle = 0 \text{ за секое } g \in L^2(R).$$

Заради својство на скаларен производ¹⁷ имаме $c_{\psi} f - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\psi} f(a, b) \overline{\psi_{a,b}(t)} \frac{db da}{a^2} = 0$. Со тоа го докажавме равенството (4.17).

Сега ќе го покажеме равенството (4.18). Бидејќи Фуриевата трансформација во точката b на $W_{\psi} f(\xi, b)$ е $\hat{f}(\omega + \xi) \hat{\psi}(\omega)$, од Планшереловата теорема за Фуриевата трансформација добиваме

$$\frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\psi} f(\xi, b)|^2 \frac{db d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + \xi) \hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega d\xi.$$

Од теорема на Фубини добиваме

$$\frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + \xi) \hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega d\xi = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi = \|f\|^2,$$

со што го покажавме и равенството (4.18). ■

¹⁷ Нека X е линеарен простор со скаларен производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $x_0 \in X$. Тогаш $\langle x_0, y \rangle = 0$ за секое $y \in X$ ако и само ако $x_0 = 0$.

4.2 Дискретна вејвлет трансформација и вејвлет редови

Во практични примени, непрекинатата вејвлет трансформација треба да се пресмета на дискретна мрежа од точки $(a_n, b_n), n \in Z$. Најважниот проблем при дискретизација на инверзната формула за вејвлет трансформација е изборот на примероци од вејвлет трансформацијата кои ги содржат сите информации за функцијата f .

За вејвлет ψ , дефинираме фамилија $\{\psi_{m,n}\}, n, m \in Z$ на следниов начин:

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{n/2} \psi(a_0^n t - b_0 m), \quad n, m \in Z,$$

каде што $a_0 > 1$ и $b_0 > 0$ се фиксни параметри. За оваа фамилија се поставуваат следниве две важни прашања:

1. Дали низата $\{\langle f, \psi_{m,n} \rangle\}_{n,m \in Z}$ комплетно ја определува функцијата f ?
2. Дали f може да се добие од низата $\{\langle f, \psi_{m,n} \rangle\}_{n,m \in Z}$ на стабилен начин?

Овие прашања се доста поврзани со концептот на рамки чија општа теорија ја изнесовме во глава 3. Целта е да се најдат добри рамки, Ризови бази или ортонормирани бази кои се состојат од транслации и дилатации на вејвлетот ψ . Конструкцијата на вејвлет рамки е слична со конструкцијата на Габор рамките. Габор рамките ги добивавме со земање на примероци од STFT на мрежата $\alpha Z^d \times \beta Z^d$. За правилно земање примероци од вејвлет трансформацијата го дискретизираме најпрво параметарот на дилатација преку негово избирање од подгрупата $\{\beta^j \mid j \in Z\}$ од R^+ . За дадена скала β^j , го дискретизираме и параметарот на транслација преку негово избирање од подгрупата $\alpha \beta^j R^d$. За примероците $W_\psi f(\alpha \beta^j k, \beta^j), k \in Z^d, j \in Z$ го добиваме вејвлет системот

$$\{T_{\alpha \beta^j k} D_{\beta^j} \psi \mid k \in Z^d, j \in Z\}. \quad (4.20)$$

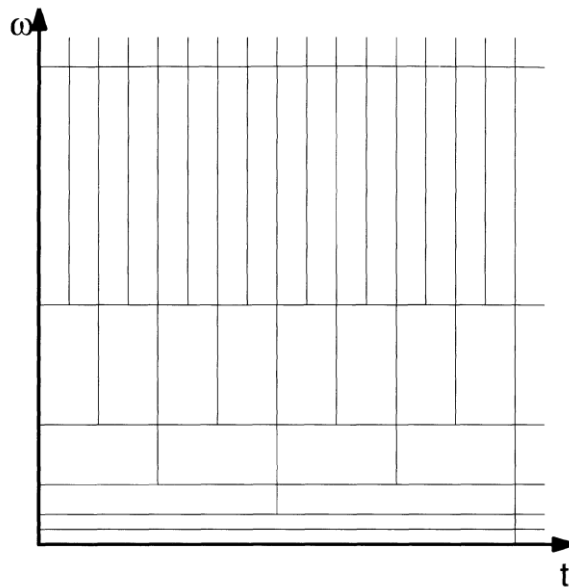
Најчесто се зема $\alpha = 1, \beta = 2, d = 1$. Ова води до диадична поделба на временско-скалната рамнина (слика 4.5) за разлика од рамномерната поделба на временско-фреквенциската рамнина која се јавува кај Габор рамките (слика 4.6).

Како што нагласивме во глава 3, една од добрите карактеристики на Габор рамките е симетријата помеѓу рамката и нејзината дуална рамка, од каде следува дека дуалната рамка е повторно Габор рамка. Спротивно на тоа, вејвлет рамките ја немаат оваа симетрична карактеристика.

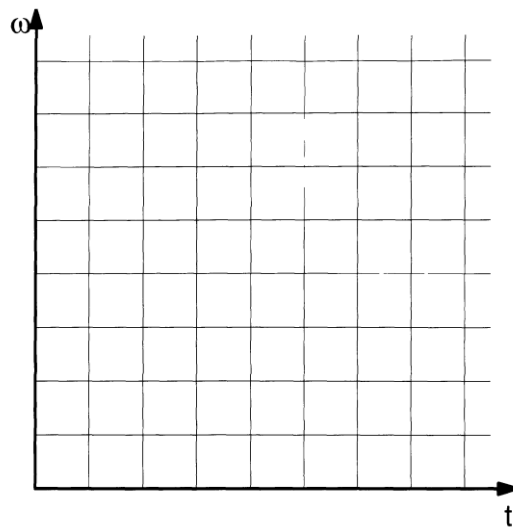
За вејвлет системот (4.20), вејвлет рамка операторот е дефиниран со

$$Sf = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z^d} \langle f, T_{\alpha k \beta^j} D_{\beta^j} \psi \rangle T_{\alpha k \beta^j} D_{\beta^j} \psi. \quad (4.21)$$

Се покажува дека вејвлет рамка операторот S комутира со дилатациите D_{β^j} , но не и со транслациите $T_{\alpha k \beta^j}$. Според тоа, дуалната рамка $S^{-1}(T_{\alpha \beta^j k} D_{\beta^j} \psi)$ во општ случај не мора да е вејвлет систем. Конструкцијата на вејвлет рамки чија дуална рамка е повторно вејвлет систем не е едноставна задача и може да се најде на пример во [13].



слика 4.5 Диадична поделба на временско–skalната рамнина



слика 4.6 Рамномерната поделба на временско–фреквенциската рамнина

Се поставува прашањето под кои услови за ψ, α, β вејвлет системот (4.20) е рамка, Ризова база или ортонормирана база за просторот $L^2(\mathbb{R}^d)$. Во продолжение ќе изнесеме неколку резултати кои даваат одговор на ова прашање. Наредната теорема ги дава условите за ψ, α, β за да вејвлет системот (4.20) е рамка за $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 4.2.1. *Претпоставуваме дека вејвлетот ψ го задоволува неравенството $|\hat{\psi}(\omega)| \leq C|\omega|^r(1+|\omega|)^{-s}$ за некое $r > 0$ и за некое $s > r + 1$. Тогаш вејвлет системот $\{T_{\alpha\beta^j k} D_{\beta^j} \psi \mid k \in \mathbb{Z}^d, j \in \mathbb{Z}\}$ е рамка за $L^2(\mathbb{R}^d)$ во случај кога $\alpha > 0$ и $\ln \beta > 0$ се доволно мали.*

Дефиниција 4.2.2. *Функцијата $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ е ортонормиран вејвлет ако фамилијата од функции $\psi_{j,k}(t)$ дефинирани со*

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad (4.2.3)$$

каде што k, j се произволни цели броеви, е ортонормирана база за просторот $L^2(\mathbb{R})$. Ваквите бази се нарекуваат (**ортонормирани**) **вејвлет бази**.

Теорема 4.2.3. а) (Haar, 1910) Постои вејвлет $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, т.ш. соодветниот вејвлет систем

$$\{T_{2^j k} D_{2^j} \psi(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} x - k) \mid k, j \in \mathbb{Z}\} \quad (4.23)$$

е ортонормирана база за $L^2(\mathbb{R})$.

б) (Lamarié - Meyer, 1986) Постои вејвлет $\psi \in S(\mathbb{R})$ ¹⁸ со $\text{supp} \hat{\psi}$ компактен, т.ш. соодветниот вејвлет систем (4.23) е ортонормирана база за $L^2(\mathbb{R})$.

в) (Daubechies, 1988) За секој $n \geq 0$ постои вејвлет $\psi \in C^n(\mathbb{R})$ со компактен носач, т.ш. соодветниот вејвлет систем (4.23) е ортонормирана база за $L^2(\mathbb{R})$.

Вејвлетот за т.н. Хар база во а) е Хар вејвлетот од пример 4.1.6, т.е. $\psi = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$. Јасно е дека (4.23) е ортонормиран систем, додека неговата комплетност потешко се покажува. Хар вејвлетот е прекината функција и поради тоа нема добра фреквенциска локализација. За разлика од Хар вејвлетот, sinc-вејвлетот ψ дефиниран со $\hat{\psi} = \chi_{[-1,-1/2]} + \chi_{[1/2,1]}$ е со ограничен опсег. Повторно, (4.21) е ортонормирана база. Но овој вејвлет пак нема добра локализација во време.

Lamarié-Meyer и Daubechies конструирале вејвлет бази кои ги елиминираат недостатоците на Хар базата и на sinc-базата, бидејќи потекнуваат од вејвлети кои се добро локализираны и во време и во фреквенција, а при тоа или ширината на опсег се зачувува конечна (под б) или пак се зачувува компактниот носач (под в).

Дефиниција 4.2.4. Нека $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ е ортонормиран вејвлет. **Вејвлет коефициенти** на функција $f \in L^2(\mathbb{R})$ со ознака $d_{j,k}$ се дефинирани како скаларен производ на f и $\psi_{j,k}$, т.е.

$$d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt. \quad (4.24)$$

Редот

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (4.25)$$

се нарекува **вејвлет ред** на f . Развојот

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (4.26)$$

¹⁸ Функцијата f **брзо опаѓа** ако за секој цел број $N \geq 0$, постои константа C_N така што $|x|^N |f(x)| \leq C_N$ за секое $x \in \mathbb{R}$.

$S(\mathbb{R})$ е просторот од сите функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ така што функцијата f и сите нејзини изводи брзо опаѓаат.

се нарекува **вејвлет репрезентација** или **вејвлет развој** на f .

Забелешка 4.2.5. Интересно е да забележиме дека важи $d_{j,k} = W_\psi f(2^j, k2^j)$, т.е. вејвлет коефициентите се еднакви на вејвлет трансформација на f во однос на вејвлет ψ во точката $(2^j, k2^j)$.

4.3 Мултирезолуциска анализа (МРА)

Концептот на мултирезолуциска анализа (МРА) се смета како “срце” на вејвлет теоријата. МРА е алатка која овозможува систематска конструкција на вејвлет базите.

Дефиниција 4.3.1 (Мултирезолуциска анализа, Малат (Mallat), 1989)

Мултирезолуциска анализа е низа $\{V_j\}$ од потпростори од $L^2(\mathbb{R})$ такви што

- (i) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$,
- (ii) $\text{span} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$,
- (iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
- (iv) $f(x) \in V_j$ ако $f(2^j x) \in V_0$,
- (v) $f(x) \in V_0$ ако $f(x-t) \in V_0$ за секое $t \in \mathbb{Z}$ и
- (vi) Постои функција $\varphi \in V_0$ наречена **скална функција** така што системот $\{\varphi(x-t)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ е ортонормирана база за V_0 .

Да се потсетиме дека операторот на транслација е дефиниран со $T_h f(x) = f(x-h)$ за даден реален број h , додека понатаму операторот на дилатација е дефиниран со $D_j f(x) = f(2^{-j} x)$ за даден цел број j .

Можеме да забележиме дека:

1. Дилатацијата можеме да ја дефинираме за било кој реален број, не само за фактор 2^j , $j \in \mathbb{Z}$ (забелешка 4.1.12).
2. T_h и D_j се инверзибилни и $T_h^{-1} = T_{-h}$ и $D_j^{-1} = D_{-j}$.
3. T_h и $2^{-j/2} D_j$ се изометрии над $L^2(\mathbb{R})$.

Забелешка 4.3.2.

а) Од условите (i) и (ii) од дефиниција 4.3.1 следува дека секоја функција од $L^2(\mathbb{R})$ може да се апроксимира со елементи од потпросторите V_j .

б) Од условите (iv) и (v) следува инваријантноста на системот од потпростори $\{V_j\}$ во однос на операторот на транслација и операторот на дилатација. Овие услови можат да бидат запишани преку операторите T_h и D_j на следниов начин:

$$(iv)' \quad V_j = D_j(V_0) \text{ за сите } j \in \mathbb{Z},$$

$$(v) \quad V_0 = T_m(V_0) \text{ за сите } m \in Z,$$

в) Бидејќи D_j и T_n се изометрии, условот (vi) може да се запише на следниов начин:

$$(vi) \quad \text{за } \forall j \in Z \text{ системот } \{2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k)\}_{k \in Z} \text{ е ортонормирана база за } V_j.$$

г) Условот (v) следува од условот (vi).

Наредниве теореми ги опишуваат основните карактеристики на МРА чии докази може да се најдат во било која од стандардните референци за вејвлет теорија.

Теорема 4.3.3. Нека за $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ важи

$$(i) \quad \{\varphi(t - m)\}_{m \in Z} \text{ е Ризова низа}^{19} \text{ во } L^2(\mathbb{R}),$$

$$(ii) \quad \text{Редот } \varphi(x/2) = \sum_{k \in Z} a_k \varphi(x - k) \text{ конвергира во } L^2(\mathbb{R}),$$

$$(iii) \quad \hat{\varphi}(\xi) \text{ е непрекината функција во } 0 \text{ и } \hat{\varphi}(0) \neq 0.$$

Тогаш просторите $V_j = \text{span}\{\varphi(2^{-j}x - k)\}_{k \in Z}$, $j \in Z$ формираат МРА.

Теорема 4.3.4. Нека $\{V_j\}$ претставува МРА со скална функција $\varphi \in V_0$. Функцијата $\psi \in W_0 = V_1 - V_0$ ($W_0 \oplus V_0 = V_1$) е вејвлет ако и само ако

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} v(\xi) \overline{m_\varphi(\xi/2 + \pi)} \hat{\varphi}(\xi/2) \quad (4.27)$$

за некоја 2π -периодична функција $v(\xi)$ таква што $|v(\xi)| = 1$ скоро секаде, и каде што

$m_\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n \in Z} a_n e^{-in\xi}$. Секој таков вејвлет ψ го има својството $\text{span}\{\psi_j\}_{k \in Z, j < s} = V_s$ за секое $s \in Z$.

Забелешка 4.3.5.

1. Да забележиме дека условот низата од потпростори $\{V_j\}$ да е растечка кој го користевме во дефиницијата (4.3.1) на МРА не е универзален. Многу експерти како Daubechies и Mallat користат спротивен услов со земање на опаѓачка низа $\{V_j\}$ при што условот (iv) е заменет со следниов услов:

$$f(x) \in V_j \text{ ако } f(2^{-j}x) \in V_0,$$

и равенството $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$, $V_j \perp W_j$ е заменето со

$$W_j \oplus V_j = V_{j-1}, \quad V_j \perp W_j.$$

¹⁹ Низата од вектори $\{x_n\}$ во Хилбертов простор \mathcal{H} се нарекува **Ризова низа** ако постојат константи $0 < c \leq C$ така што за секоја низа $\{a_n\} \in l^2$ важи неравенството

$$c \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_n a_n x_n \right\| \leq C \left(\sum_n |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Во “растечките потпростори” користени од Меуер, за функциите во V_j за скала се зема 2^j , додека пак во “опаѓачките потпростори” користени од Daubechies и Mallat, како скала се зема 2^{-j} .

2. За дадена МРА $\{V_j\}$ во просторот $L^2(R)$ со скална функција φ , вејвлет се добива на начинот кој е прикажан подолу, и се нарекува вејвлет придружен на МРА $\{V_j\}$. Нека потпросторите $\{W_j\}$ од $L^2(R)$ се дефинирани со условот

$$W_j \oplus V_j = V_{j+1}, \quad V_j \perp W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Од забелешка 4.3.2 б) следува $D_j(V_1) = V_{j+1}$. Тогаш

$$V_{j+1} = D_j(V_0 \oplus W_0) = D_j(V_0) \oplus D_j(W_0) = V_j \oplus D_j(W_0),$$

Бидејќи $V_{j+1} = W_j \oplus V_j$ добиваме дека

$$W_j = D_j(W_0) \text{ за секое } j \in \mathbb{Z}. \quad (4.28)$$

Од условите (i)- (iii) од дефиниција 4.3.1 ја добиваме ортогоналната декомпозиција

$$L^2(R) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n \dots = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (4.29)$$

Потребно е да се најде функција $\psi \in W_0$ така што $\{\psi(x-m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ е ортонормирана база за W_0 . Од (4.28) и (4.29) следува дека било која таква функција е вејвлет.

3. Значи каноничната конструкција на вејвлет базата започнува со мултирезолуциската анализа $\{V_j\}$. Во димензија $d = 1$ може да се покаже дека постои вејвлет $\psi \in W_0$, така што $\{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ е ортонормирана база за W_0 . Следува $\{2^{-j/2} \psi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ е ортонормирана база за W_j и заради ортогоналната декомпозиција $L^2 = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$, вејвлет системот $\{2^{-j/2} \psi(2^j x - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ е ортогонална база за $L^2(R)$. Во поголема димензија $d > 1$ потребни се $2^d - 1$ вејвлети ψ_l . Во тој случај, базата за W_0 го има следниот облик $\{\psi_l(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}, l = 1, \dots, 2^d - 1\}$.

Пример. Мултирезолуциската анализа која одговара на Хар базата ги содржи следниве потпростори

$$V_j = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \chi_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]} \mid c \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

4.4 Вејвлети и глаткост на функции

Ќе изнесеме неколку резултати кои ја даваат врската меѓу глаткост на функција и особините на нивната вејвлет трансформација или нивните вејвлет коефициенти.

За вејвлетот ψ велиме дека има n моменти кои се анулираат ако

$$\int_R t^k \psi(t) dt = 0 \text{ за } 0 \leq k < n. \quad (4.30)$$

Ако вејвлетот ψ има n моменти кои се анулираат и $\psi \in C^n(R)$ има изводи кои брзо опаѓаат, тогаш за $0 \leq k \leq n$ и $m \in N$, постои константа M_m т.ш. важи

$$\forall t \in R, \quad |\psi^{(k)}(t)| \leq \frac{M_m}{1+|t|^m}. \quad (4.31)$$

Како што веќе истакнавме, вејвлет трансформацијата $W_\psi f(b, a)$ мери колку f се менува во околина на точката b . Бидејќи глатките функции се менуваат многу малку во околина на точката b , нивните вејвлет трансформации во точката b би требало да бидат мали. Обратно, сингуларноста на функцијата f во точката b , предизвикува голема промена на f во околина на точката b . Ова резултира во големи вредности на нејзината вејвлет трансформација $W_\psi f(b, a)$. Од ова интуитивно расудување, заклучуваме дека вејвлет трансформацијата $W_\psi f(b, a)$ може да се искористи како инструмент за мерење на локалната глаткост на функциите.

Нека $0 < r \leq 1$. f е r -Холдер непрекината во точката $x_0 \in R$ (означуваме $f \in C^r(x_0)$), ако постои константа $C > 0$ така што важи

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^r \quad (4.32)$$

за $\forall x$ во околина на точката x_0 . Ако (4.32) важи за $\forall x_0$ за иста константа $C > 0$, тогаш f е (глобално) r -Холдер непрекината (означуваме $f \in C^r(R)$).

Наредната теорема дава врска меѓу Холдер непрекинатите функции и нивната вејвлет трансформација.

Теорема 4.4.1. Нека $\int_R \psi(x) dx = 0$ и $\int_R |\psi(x)|(1+|x|) dx < \infty$.

Ако $f \in C^r(x_0)$, $0 < r \leq 1$, тогаш

$$|W_\psi f(x_0, a)| \leq C_1 |a|^{r+1/2}. \quad (4.33)$$

Ако $f \in C^r(R)$, $0 < r \leq 1$ тогаш

$$\sup_{x \in R} |a|^{-r-1/2} |W_\psi f(x, a)| < \infty. \quad (4.34)$$

Доказ: Нека $f \in C^r(x_0)$, $0 < r \leq 1$. Користејќи го условот $\int_R \psi(x) dx = 0$, и со

ведување на смената $\frac{x-x_0}{a} \rightarrow x$ добиваме

$$|W_\psi f(x_0, a)| = |a|^{-1/2} \left| \int_R \overline{\psi} \left(\frac{x-x_0}{a} \right) f(x) dx \right| = |a|^{-1/2} \left| \int_R \overline{\psi} \left(\frac{x-x_0}{a} \right) (f(x) - f(x_0)) dx \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq C|a|^{-1/2} \int_R \left| \overline{\psi} \left(\frac{x-x_0}{a} \right) \right| |x-x_0|^r dx = C|a|^{1/2} \int_R |\overline{\psi}(x)| |ax|^r dx \\ &= a^{1/2+r} C \int_R |\psi(x)| |x|^r dx. \end{aligned}$$

Од условот на теоремата $\int_R |\psi(x)| (1+|x|) dx < \infty$ и од горното изведување следува (4.33).

(4.34) следува со директна примена на (4.33). ■

Забелешка 4.4.2.

1. Се покажува дека спротивното тврдење на теорема 4.4.2 важи само ако $\text{supp} \psi$ е компактен.
2. Аналогно тврдење важи и за Холдеровите простори C^r од повисок ред $r > 1$. Во тој случај треба да се претпостави дека вејвлетите имаат $|\alpha| \leq [r]+1$ моменти кои се анулираат.

Наредните теореми се верзија на теорема 4.4.1. Тие даваат карактеризацијата на Липшидсовата α класа, $0 < \alpha < 1$ преку вејвлет коефициентите или вејвлет трансформацијата.

Дефиниција 4.4.3 (Глобална Липшидсова регуларност)

Функција f е глобално α Липшидсова ако постои константа $K > 0$ т.ш. важи

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in R, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Дефиниција 4.4.4 (Точкаста Липшидсова регуларност)

Функција f е точкасто α Липшидсова, $\alpha \geq 0$, во точката v ако постои константа $K > 0$ и полином P_v со степен $m = [\alpha]$, т.ш.

$$|f(t) - P_v(t)| \leq K|t - v|^\alpha, \quad \forall t \in R. \quad (4.35)$$

Теорема 4.4.5. ([4], Теорема 10.2.7) Нека ψ е глатка и добро локализирана функција. Функција f е глобално α Липшидсова ако и само ако постои константа $K > 0$, т.ш. важи

$$|d_{j,k}| \leq K 2^{-\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)j},$$

Наредната теорема ни дава сличен резултат за точкаста Липшидсова регуларност на функција.

Теорема 4.4.6 (Jaffard, 1991) ([4], Теорема 10.4.1)

Ако f е точкасто α Липшидсова функција, $\alpha \leq n$ во точката v , тогаш постои константа $M > 0$, т.ш. важи

$$|W_\psi f(a, b)| \leq M a^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{b-v}{a} \right|^\alpha \right), \quad \forall (a, b) \in R^+ \times R. \quad (4.36)$$

Обратно, ако $\alpha < n$ не е цел број и постои константа $M > 0$ и $\alpha' < \alpha$, т.ш. важи

$$|W_{\psi} f(a, b)| \leq M a^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(1 + \left| \frac{b - v}{a} \right|^{\alpha'} \right), \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (4.37)$$

тогаш f е точноста α Литшидсова функција во точката v .

4.5 Оператор на апроксимација и оператор за детали

Најпрвин ќе ги разгледаме операторот на апроксимација и операторот за детали за Хар вејвлетот.

Дефиниција 4.4.7.

а) За секој пар цели броеви (j, k) нека

$$I_{j,k} = [2^{-j} k, 2^{-j} (k + 1)].$$

Фамилијата $\{I_{j,k}\}, j, k \in \mathbb{Z}$ се нарекува **фамилија од диадични интервали**.

б) **Диадична скалеста (Dyadic step) функција** е скалеста функција со особина: за некој цел број j , f е константна функција на сите диадични интервали $I_{j,k}$ за секој цел број k . За било кој интервал I , диадична скалеста функција над I е диадична скалеста функција со носач I .

в) Нека е даден диадичен интервал на ниво j , $I_{j,k}$. Овој интервал го запишуваме $I_{j,k} = I_{j,k}^l \cup I_{j,k}^r$, каде што $I_{j,k}^l$ и $I_{j,k}^r$ се диадични интервали на ниво $j+1$, т.е. левата и десната половина на интервалот, соодветно. Поточно $I_{j,k}^l = I_{j+1,2k}$ и $I_{j,k}^r = I_{j+1,2k+1}$.

Дефиниција 4.4.8. а) Нека $\varphi(x) = \chi_{(0,1)}$ и нека за секои $j, k \in \mathbb{Z}$ дефинираме

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

Фамилијата $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ се нарекува **Хар скален систем** на ниво j .

б) Нека $\psi(x) = \chi_{(0,1/2)} - \chi_{(1/2,1)}$ и нека за секои $j, k \in \mathbb{Z}$ дефинираме

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Фамилијата $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ се нарекува **Хар вејвлет систем** на ниво j .

в) За секое $j \in \mathbb{Z}$ дефинираме **оператор на апроксимација** P_j за функциите $f \in L^2$ и за Хар скалниот систем $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ со

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}. \quad (4.38)$$

г) За секое $j \in \mathbb{Z}$ дефинираме **простор на апроксимација** V_j на следниов начин:

$$V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}.$$

Забелешка 4.4.9.

1. $P_j f(x)$ е функција во V_j која најдобро ја апроксимира $f(x)$ во L^2 смисла.
2. Бидејќи $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}(x)$ имаме

$$\langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) = \left(\int_R 2^{j/2} f(t) \chi_{I_{j,k}}(t) dt \right) 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}(x) = \left(2^j \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x).$$

Според тоа, $P_j f(x)$ е средна вредност на $f(x)$ на интервалот $I_{j,k}$. Заради тоа $P_j f(x)$ може да се разгледува како функција која ги содржи особините на $f(x)$ на ниво (скала) 2^{-j} .

Лема 4.4.10. ([4], Лема 10.4.1)

- а) За $j \in \mathbb{Z}$, P_j е линеарен оператор над $L^2(\mathbb{R})$.
- б) P_j е идемпотентен оператор, т.е. важи $P_j = P_j^2$.
- в) За дадени цели броеви j, j' , $j \leq j'$ и $g \in V_j$ важи $P_j g = g$.
- г) За дадено $j \in \mathbb{Z}$ и $f \in L^2(\mathbb{R})$ важи $\|P_j f\|_2 \leq \|f\|_2$.

Лема 4.4.11 ([4], Лема 10.4.2) Нека f е непрекината функција над \mathbb{R} со компактен носач. Тогаш

- 1) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_2 = 0$,
- 2) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f\|_2 = 0$.

Дефиниција 4.4.12. За $\forall j \in \mathbb{Z}$, дефинираме оператор на детали Q_j од просторот $L^2(\mathbb{R})$ во \mathbb{R} на следниов начин:

$$Q_j f(x) = P_{j+1} f(x) - P_j f(x). \quad (4.39)$$

Лема 4.4.13.

- (а) Операторот на детали Q_j е линеарен оператор над $L^2(\mathbb{R})$.
- (б) Q_j е индемпотентен оператор, т.е. важи $Q_j = Q_j^2$.
- (в) Ако $g \in W_j$ и ако j' е цел број, $j \neq j'$ тогаш $Q_j g = 0$.
- (г) За дадено $j \in \mathbb{Z}$ и $f \in L^2(\mathbb{R})$ важи $\|Q_j f\|_2 \leq \|f\|_2$.

Лема 4.4.14. ([4], Лема 10.4.4) За дадено $j \in \mathbb{Z}$ и непрекината функција f со компактен носач над \mathbb{R} важи

$$Q_j f = \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (4.40)$$

каде што сумата е конечна.

Забелешка 4.4.15.

1) Како што можеме да видиме поминувајќи од $f(x)$ на $P_j f(x)$, однесувањето на $f(x)$ на интервалот $I_{j,k}$ се сведува на еден број, средната вредност на функцијата $f(x)$ на интервалот $I_{j,k}$ се губи. Со тоа $P_j f(x)$ може да се смета како нејасна верзија на $f(x)$ на ниво 2^{-j} , т.е. деталите во $f(x)$ со големина помала од 2^{-j} се невидливи во апроксимацијата $P_j f(x)$, но особините со големина поголема од 2^{-j} сеуште се видливи во $P_j f(x)$.

2) За $\forall j \in \mathbb{Z}$, вејвлет просторот W_j е даден со

$$W_j = \overline{\text{span}\{\psi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}.$$

Се покажува ([4], Забелешка 10.4.2) дека $Q_j f(x)$ е функција во W_j која најдобро ја апроксимира $f(x)$ во L^2 смисла.

Поради толкувањето на $P_j f(x)$ како нејасна верзија на $f(x)$ на ниво 2^{-j} , $Q_j f(x)$ ги содржи оние особини на $f(x)$ што се по големина помали од 2^{-j} , но се поголеми од 2^{-j-1} . Со други зборови, $Q_j f(x)$ ги содржи оние детали кои се невидливи за апроксимација $P_j f(x)$, но се видливи за апроксимација $P_{j+1} f(x)$.

Опатор на апроксимација и оператор за детали за произволна скална функција

Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се произволни скална и вејвлет функција придружени на МРА $\{V_j\}$.

Дефиниција 4.4.16. За $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ скалниот систем, операторот на апроксимација и операторот на детали се дефинирани соодветно со

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &= 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \\ P_j f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x), \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$Q_j f(x) = P_{j+1} f(x) - P_j f(x). \tag{4.42}$$

Лема 4.4.17. ([4], Лема 10.4.5) За сите непрекинати функции f кои имаат компактен носач над R важи:

$$1) \lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_2 = 0, \tag{4.43}$$

$$2) \lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_j f\|_2 = 0. \tag{4.44}$$

4.6 Скални и вејвлет филтри

Во оваа поглавје ќе дефинираме скален и вејвлет филтер, и ќе изнесеме резултати кои покажуваат постоење на скални филтри, конструкција на вејвлет со помош на даден скален филтер и одредени карактеристики на скалните и вејвлет филтри.

Теорема 4.4.18. Нека φ е скална функција на МРА $\{V_j\}$. Тогаш постои низа $\{h_k\} \in l^2$ т.ш.

$$\varphi(x) = \sum_k h_k 2^{1/2} \varphi(2x - k) \quad (4.45)$$

е функција во $L^2(\mathbb{R})$. Уште повеќе, важи

$$\hat{\varphi}(t) = m_\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right), \quad \text{каде што} \quad (4.46)$$

$$m_\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ikt}. \quad (4.47)$$

Доказ: Бидејќи $\varphi \in V_0 \subseteq V_1$ и заради лема 4.4.17 следува $\{\varphi_{1,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ е ортонормирана база за V_1 , па важи

$$\varphi(x) = \sum_k \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle 2^{1/2} \varphi(2x - k).$$

Според тоа, (4.45) важи за низата $h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle$ која е во просторот $l^2(\mathbb{R})$ заради Беселовото неравенство²⁰ (Bessel). Кога ќе се земе Фуриеова трансформација на двете страни од (4.45) се добива

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_k h_k 2^{1/2} \varphi(2x - k) e^{-ixt} dx = \sum_k h_k 2^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x - k) e^{-ixt} dx \\ &= \sum_k h_k 2^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(m) e^{-i\left(\frac{k+m}{2}\right)t} \frac{dm}{2} = \sum_k h_k 2^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ik}{2}t} \int_{\mathbb{R}} \varphi(m) e^{-\frac{im}{2}t} dm \\ &= \sum_k h_k \frac{1}{2^{1/2}} e^{-\frac{ik}{2}t} \hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right) = m_\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{t}{2}\right), \end{aligned}$$

т.е. важи (4.46). ■

Дефиниција 4.4.19. Низата $\{h_k\}$ во теорема 4.4.18 се нарекува **скален филтер** придружен на скалната функција φ од МРА $\{V_j\}$. Функција m_φ дефинирана со (4.47) се нарекува **помошна функција** придружена на φ . Равенството (4.45) се нарекува

²⁰ **Беселово неравенство.** Нека X е линеарен простор со скаларен производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$, A е ортонормирано множество од вектори од X , и y е произволен вектор од X . Тогаш за сите $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ важи

$$\text{неравенството } \sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

равенство на подобрување или равенство на двоскална дилатација. Низата $\{g_k\}$, $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ се нарекува **вејвлет филтер**.

Теорема 4.4.20. ([4], Теорема 10.4.3) Нека $\{V_j\}$ е МРА со скална функција φ , и $\{h_k\}$ и $\{g_k\}$ се соодветно скален и вејвлет филтер. Нека

$$\psi(x) = \sum_k g_k 2^{1/2} \varphi(2x - k). \quad (4.48)$$

Тогаш $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ е вејвлет ортонормирана база за просторот $L^2(\mathbb{R})$.

Следната теорема ги дава карактеристиките на скалниот и вејвлет филтерот.

Теорема 4.4.21. ([4], Теорема 10.4.4) Нека $\{V_j\}$ е МРА со скален филтер $\{h_k\}$ и вејвлет филтер $\{g_k\}$. Тогаш важат следниве равенства:

1. $\sum_k h_k = \sqrt{2}$.
2. $\sum_n g_n = 0$.
3. $\sum_k h_k h_{k-2n} = \sum_k g_k g_{k-2n} = \delta_n$.
4. $\sum_k h_{m-2k} h_{n-2k} + \sum_k g_{m-2k} g_{n-2k} = \delta_{n-m}^{21}$.

Доказот на теоремата следува директно од следнава лема.

Лема 4.4.22. ([4], Лема 10.4.7) Нека φ е скална функција на МРА $\{V_j\}$ која припаѓа во $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, и нека ψ е придружен вејвлет на МРА $\{V_j\}$ дефиниран со (4.48) и $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Тогаш важи:

$$1. \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \right| = 1. \quad (4.49)$$

$$2. \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx \right| = 0. \quad (4.50)$$

$$3. \hat{\varphi}(n) = 0 \text{ за секој цел број } n \text{ различен од } 0. \quad (4.51)$$

$$4. \sum_n \varphi(x+n) = 1. \quad (4.52)$$

²¹ $\delta_{n-m} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$

Глава 5

Примена на вејвлет методи за решавање диференцијални равенки и во обработка на сигнали

Во изминатиот период имало неверојатен раст на примената на вејвлет методите во различни полиња како што се обработка на слики и сигнали, метеорологија, сеизмологија, турбуленција, биомедицинско инженерство, пазарно предвидување, анализа на временски серии, препознавање на модел, технологија на водно обележување и нумеричко решавање на парцијални диференцијални равенки. Во оваа глава ќе се фокусираме на примената на вејвлетите во решавање на обични и парцијални диференцијални равенки, како и во обработка на сигнали.

5.1 Вејвлет-Галеркин метод за обични диференцијални равенки

За одредена класа на равенки, користејќи вејвлети во Галеркин методот, добиваме две основни посакувани карактеристики за соодветните линеарни системи: слаба пополнетост и мал број услови за матрицата. Разгледуваме класа обични диференцијални равенки познати како Штурм-Луивилови (Sturm-Liouville). Типичен Штурм-Луивилов проблем е равенката

$$(Q) \left\{ Lu(t) = -\frac{d}{dt} \left(a(t) \frac{du}{dt} \right) + b(t)u(t) = f(t), 0 \leq t \leq 1 \right.$$

заедно со условите на Дирихле $u(0) = u(1) = 0$. Овде функциите a, b, f се непрекинати и имаат непрекинати изводи над $[0,1]$. Претпоставуваме дека операторот L е рамномерно елиптичен на $[0,1]$. Заради теорема на Пикард²² постои единствено решение u кое ја задоволува равенката (Q) . Наједноставниот случај е кога $a(t) = 1$ и $b(t) = 0$. Тогаш равенката (Q) се сведува на равенката

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t), 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = 0 \text{ и } u(1) = 0 \end{cases}.$$

²² **Теорема на Пикард.** Ако f е непрекината функција која го задоволува Липшидсовиот услов, ако постои константа $L > 0$

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leq L|x - y|$$

во околина на точката $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \{(x,t) \mid |x - x_0| < b, |t - t_0| < a\}$, тогаш диференцијалната равенка $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ има единствено решение $x(t)$ на интервалот $|t - t_0| < d$ каде што $d = \min(a, b/B)$, $B = \sup|f(t, x)|$.

За Галеркин методот, претпоставуваме дека $\{v_j\}$ е ортонормирана база за $L^2[0,1]$ и дека за секоја функција v_j важи $v_j \in C^2([0,1])$ и v_j ги задоволува условите на Дирихле на равенката (Q), т.е. важи

$$v_j(0) = v_j(1) = 0. \quad (5.1)$$

Избираме некое конечно множество Λ од индекси j и го разгледуваме потпросторот $S = \text{span}\{v_j \mid j \in \Lambda\}$. Бараме приближување кон решението u на равенката (Q) во облик

$$u_s = \sum_{k \in \Lambda} x_k v_k, \quad x_k \in R. \quad (5.2)$$

Критериум за определување на коефициентите x_k , е дека u_s треба да се однесува како вистинско решение на потпросторот S , т.е. да важи

$$\langle Lu_s, v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle, \quad \forall j \in \Lambda. \quad (5.3)$$

Да забележиме дека u_s ги задоволува условите на Дирихле, т.е. важи $u_s(0) = u_s(1) = 0$. Се претпоставува дека u_s е најдобрата апроксимација за u во S , каде што нормата е добиена од $\langle f, g \rangle = \langle L(f), g \rangle$.

Ако го замениме равенството (5.2) во равенството (5.3), го добиваме равенството

$$\langle L \left(\sum_{k \in \Lambda} x_k v_k \right), v_j \rangle = \langle f, v_j \rangle, \quad \forall j \in \Lambda,$$

кое е еквалентно со

$$\sum_{k \in \Lambda} \langle Lv_k, v_j \rangle x_k = \langle f, v_j \rangle, \quad \forall j \in \Lambda. \quad (5.4)$$

Нека $x = [x_k]_{k \in \Lambda}$, $y = [y_k]_{k \in \Lambda}$ и $A = [a_{j,k}]_{j,k \in \Lambda}$, каде што $a_{j,k} = \langle Lv_k, v_j \rangle$, $y_k = \langle f, v_k \rangle$. Тогаш равенството (5.4) е систем од линеарни равенки $\sum_{k \in \Lambda} a_{j,k} x_k = y_j$, $\forall j \in \Lambda$ чиј матричен облик е

$$Ax = y. \quad (5.5)$$

Очекуваме дека со зголемување на множеството Λ , апроксимација u_s ќе конвергира кон вистинското решение u на равенката (Q). Главен предмет е природата на линеарниот систем (5.5), која зависи од изборот на вејвлет базата $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$. Притоа, сакаме матрицата A да ги исполнува следниве услови: A да биде слабо пополнета матрица, и да има мал број на услови (condition number). Бројот на услови на матрицата е мерка за стабилноста на системот $Ax = y$ над пертурбации на y , т.е. се вели дека системот $Ax = y$ е лошо (добро) условен ако мали промени на влезните податоци y предизвикуваат големи (мали) промени на решението x .

За таа цел, претпоставуваме можност за модификација на вејвлет системот $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$ за $L^2(R)$ со цел да добиеме комплетен ортонормиран систем за $L^2[0,1]$. Јасно е дека

Глава 5. Примена на вејвлет методи за решавање диференцијални равенки и во обработка на сигнали

$\forall j, k \in \Gamma$, $\psi_{j,k}$ е C^2 функција која ги задоволува условите на Дирихле $\psi_{j,k}(0) = \psi_{j,k}(1) = 0$.

Користејќи го фактот дека вејвлетите се индексирани со два цели броеви, равенката (5.2) ќе ја презапишеме во облик

$$u_s = \sum_{j,k \in \Gamma} x_{j,k} \psi_{j,k},$$

и равенството (5.4) како

$$\sum_{j,k \in \Gamma} \langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle x_{j,k} = \langle f, \psi_{l,m} \rangle, \quad \forall l, m \in \Gamma. \quad (5.6)$$

Последнава равенка сеуште можеме да ја сметаме како матрична равенка $Ax = y$, каде што x, y се индексирани со парот (j, k) и елементите на матрицата $A = [a_{l,m;j,k}]$ се дефинирани со $a_{l,m;j,k} = \langle L\psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle$.

Всушност, матрицата A нема мал број на услови, но сепак системот $Ax = y$ можеме да го замениме со еквивалентен систем $Mz = v$ чија матрицата M има број на услови кој е ограничен независно од множеството Λ . Па, како што се зголемува множеството Λ , се зголемува и точноста на решението, а бројот на услови останува ограничен цело време.

Се поставува прашањето: Дали вејвлет системите се неопходни, во смисла, дали тие неможат да бидат заменети со други системи, без да се наруши нумеричката ефикасност и точност? Одговорот е позитивен. Фуриевата база е еден таков пример, но таа не ги задоволува условите на Дирихле бидејќи $e^{2\pi int} \neq 0, \forall n$. Но, на пример системот $\{\sqrt{2} \sin 2\pi nt\}$ може да се примени. Предностите на вејвлет базите во однос на Фуриевите бази главно се должи на компактниот носач на вејвлетите, кој игра улога во докажувањето на слабата пополнетост на матрицата. Користејќи Галеркин метод со Фуриевите бази можеме да добиеме ограничен број на услови за матрицата, но матрицата не е повеќе слабо пополнета. Користејќи вејвлет-Галеркин метод добиваме и слаба пополнетост на матрицата и ограничен број на услови за матрицата.

5.2 Вејвлет-Галеркин метод за парцијални диференцијални равенки

За нумеричко решавање и на парцијални диференцијални равенки со методите на Галеркин, проблемот се сведува на решавање системи од равенки. Вејвлетите нудат решение за различни видови на препреки кои се јавуваат при примената на методите на Галеркин. Се покажало дека матрицата на системот во однос на вејвлет базата е доволно блиска до слабо пополнета матрица. Затоа, ефикасните решенија на слабо пополнетата матрица можат да се користат без губење на точноста.

Како што видовме, вејвлетите можеме да ги користиме за да претставиме функција од една или повеќе променливи во вид на бесконечен ред или апроксимативна конечна сума. Притоа се поставуваат прашањата: Како може да се пресметаат ефикасни изводи на функции преку вејвлет коефициенти? Како тие можат да бидат употребени за нумеричко решавање на диференцијални равенки? Одговорот се состои во користењето на таканаречениот концепт “*врска коефициенти*”. Ќе

Глава 5. Примена на вејвлет методи за решавање диференцијални равенки и во обработка на сигнали

покажеме дека познавањето на врска коефициентите е важна компонента во определувањето на вејвлет развоите.

Ќе разгледаме вејвлет систем $W = \{\varphi_k, \psi_{j,k}\}$, каде што φ_k е скална функција, а $\psi_{j,k}$ се вејвлети. Нека f е глатка L^2 функција, чии извод f' е исто така L^2 функција. Вејвлет редот на f е

$$f(x) = \sum_k f_k \varphi_k(x) + \sum_{j,k} f_{j,k} \psi_{j,k}(x), \text{ каде што } f_k = \langle f, \varphi_k \rangle, f_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

Ако овој ред го диференцираме добиваме:

$$f'(x) = \sum_k f'_k \varphi'_k(x) + \sum_{j,k} f'_{j,k} \psi'_{j,k}(x).$$

Ќе ги развиеме $\varphi'_k(x)$ и $\psi'_{j,k}(x)$ повторно во вејвлет ред во форма:

$$\varphi'_k(x) = \sum_l \Gamma_k^l \varphi_l(x) + \sum_{i,l} \Gamma_k^{i,l} \psi_{i,l}(x),$$

$$\psi'_{j,k}(x) = \sum_l \Gamma_{j,k}^l \varphi_l(x) + \sum_{i,l} \Gamma_{j,k}^{i,l} \psi_{i,l}(x).$$

Коефициентите во горните редови се еднозначно определени користејќи ја ортогоналноста:

$$\Gamma_k^l = \int \varphi'_k(x) \varphi_l(x) dx, \quad \Gamma_k^{i,l} = \int \varphi'_k(x) \psi_{i,l}(x) dx,$$

$$\Gamma_{j,k}^l = \int \psi'_{j,k}(x) \varphi_l(x) dx, \quad \Gamma_{j,k}^{i,l} = \int \psi'_{j,k}(x) \psi_{i,l}(x) dx.$$

Последниве формули ги нарекуваме врска коефициенти за W .

5.3 Обработка на сигнали

Како што веќе нагласивме, сигналите претставува функции од една променлива кои припаѓаат во просторот $L^2(\mathbb{R})$, додека сликите претставуваат функции од две променливи од просторот $L^2(\mathbb{R}^2)$. Функционалната анализа и посебно вејвлет теоријата дават основни и корисни алатки за да се направи систематска анализа на проблеми од областа на обработка на сигнали и слики. Постои огромна литература за оваа тема, но ние ќе изнесеме почетна дискусија за примената на вејвлет рамките и ортогоналните вејвлети во отстранување или потиснување на шум од сигнал. Шум во сигналот е оној дел каде недостасува структура. Отстранување или потиснување на тој дел е важна задача со цел да се добие чист сигнал. Овој процес често се нарекува обесшумување.

Најпрвин, ќе ги разгледаме алгоритмите за декомпозиција и реконструкција.

5.3.1 Алгоритам за декомпозиција и реконструкција

Алгоритам за декомпозиција

Нека $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ се соодветно скална функција (доста често наречена вејвлет-татко) и вејвлет (вејвлет-мајка) придружени на МРА $\{V_j\}$ и нека со $c_{j,k}$ и $d_{j,k}$ се означени скалните и вејвлет коефициентите соодветно. Да се потсетиме дека за $j, k \in Z$ тие се дефинирани на следниов начин:

$$c_{j,k} = \int_R f(x) \varphi_{j,k}(x) dx \quad (5.7)$$

и

$$d_{j,k} = \int_R f(x) \psi_{j,k}(x) dx, \quad (5.8)$$

каде што

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k),$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Бидејќи $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, постои h_l така што

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &= \sum_{l \in Z} h_l 2^{j/2} \varphi_{1,l}(2^j x - k) \\ &= \sum_{l \in Z} h_l 2^{(j+1)/2} \varphi(2^{j+1} x - 2k - l) \\ &= \sum_{l \in Z} h_l \varphi_{j+1, l+2k}(x) \\ &= \sum_{l \in Z} h_{l-2k} \varphi_{j+1, l}(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Заменувајќи ја оваа вредност во (5.7) имаме

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \int_R f(x) \sum_{l \in Z} h_{l-2k} \varphi_{j+1, l}(x) dx \\ &= \sum_{l \in Z} h_{l-2k} \int_R f(x) \varphi_{j+1, l}(x) dx \\ &= \sum_{l \in Z} h_{l-2k} c_{j+1, l}, \end{aligned}$$

или

$$c_{j,k} = \sum_{l \in Z} h_{l-2k} c_{j+1, l}. \quad (5.10)$$

Како што видовме во теорема 4.4.18, бидејќи $V_0 \subset V_1$, секоја функција $\varphi \in V_0$ исто така припаѓа во V_1 . Заради тоа што $\{\varphi_{1,k}, k \in Z\}$ е ортонормирана база за V_1 , постои низа $\{h_k\}$ (позната како скален филтер) така што

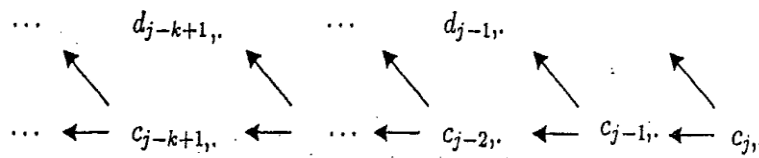
$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(x), \quad (5.11)$$

каде што коефициентите h_k (елементите на низата) може да се запишат во форма

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \text{ и } \{h_k\} \in l^2.$$

Од дефиницијата 4.4.20 е познато дека релацијата (5.11) која поврзува функции со различни скални фактори, уште е позната како релација на дилатација или равенка на подобрување (прочистување). Така на пример, може да се види дека за Хар базата имаме

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0, 1 \\ 0, & k \notin \{0, 1\} \end{cases}. \quad (5.12)$$



слика 5.1 Шематски приказ на алгоритмот за декомпозиција

Од теорема 4.4.21 е познато дека вејвлетот-мајка ψ и вејвлетот-татко φ се поврзани преку релацијата

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{-k+1} \varphi_{1,k}(x), \quad (5.13)$$

каде што низата $\{g_k\}$, $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ е вејвлет филтер.

Заменувајќи ја вредноста на $\psi(x)$ од (5.13) во (5.8) добиваме

$$d_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{-l+2k+1} c_{j+1,l}. \quad (5.14)$$

Нека се познати скалните коефициенти на било кое ниво j . Тогаш скалните коефициенти од пониско ниво ($i < j$) може да бидат пресметани користејќи ја рекурзивната релација (5.10), и вејвлет коефициентите од пониско ниво ($i < j$) можат да бидат пресметани од скалните коефициенти користејќи го равенството (5.14).

Ако скалните и вејвлет коефициентите на ниво j ги означиме со $c_{j,}$ и $d_{j,}$ соодветно, овој алгоритам за декомпозиција е претставен шематски на слика 5.1: стрелките ја покажуваат декомпозицијата, на пример $c_{j-2,}$ и $d_{j-2,}$ можат да бидат пресметани само со користење на коефициентите $c_{j-1,}$.

Може да се забележи дека алгоритмите (5.10) и (5.14) имаат една интересна карактеристика, т.е. ако индексот на дилатација k во било која равенка се зголеми за еден, тогаш сите индексите на $\{h_l\}$ се зголемуваат за два. Тоа значи дека ако има само конечно многу ненулни елементи во низата $\{h_l\}$, тогаш со примена на алгоритмот за декомпозиција на множество од ненулни скални коефициенти на ниво $j+1$, ќе добиеме половина од ненултите скални коефициенти на ниво j . На сличен начин ќе добиеме само половина од ненултите вејвлет коефициенти на ниво j . Според тоа,

пресметките со помош на алгоритмот за декомпозиција ни даваат помалку коефициенти на секое ниво. Mallat алгоритмот за декомпозиција го нарекол алгоритам-пирамида, додека пак Daubechies каскаден алгоритам.

Алгоритам за реконструкција

Нека $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ се добиени соодветно од вејвлетот-татко φ и вејвлетот-мајка ψ , т.е. $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$ и $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ формираат ортонормирана база, соодветно за V_j и W_j од дадената МРА за секое k . Покрај тоа, нека

$$a_{2k} = \langle \varphi_{1,0}, \varphi_{0,k} \rangle, \quad a_{2k-1} = \langle \varphi_{1,1}, \varphi_{0,k} \rangle,$$

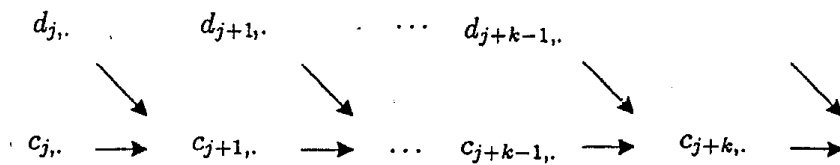
$$b_{2k} = \langle \varphi_{1,0}, \psi_{0,k} \rangle, \quad b_{2k-1} = \langle \varphi_{1,1}, \psi_{0,k} \rangle,$$

каде што $a_k = h_{-k}$ и $b_k = (-1)^k h_{k+1}$. Тогаш се покажува дека важи

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{2l-k} c_{j-1,l} + b_{2l-k} d_{j-1,l} \quad (5.15)$$

или

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} c_{j-1,l} + (-1)^k h_{2l-k+1} d_{j-1,l} \quad (5.16)$$



слика 5.2 Шематски приказ на алгоритмот за реконструкција

Забелешка 5.3.1

1. Скалните коефициенти на било кое ниво може да се пресметат од само едно множество скални коефициенти од пониско ниво и вејвлет коефициенти меѓу нив со користење на рекурзивната врска (5.16).
2. Двоскалната низа $\{h_k\}$ комплетно ја карактеризира секоја вејвлет база.
3. За вејвлети со компактен носач, низата $\{h_k\}$ ќе содржи конечно многу ненулни елементи. За вејвлети со носач на целото R , секој елемент на низата $\{h_k\}$ општо е ненулни, но тие опаѓаат експоненцијално кога $|k| \rightarrow \infty$.

5.3.2 Врска со обработка на сигнали

Да претпоставиме дека сигналот $f(t)$ е дефиниран за секое $t \in R$ и има конечна енергија, т.е. $\int_R |f(t)|^2 dt < \infty$, т.е. $f \in L^2(R)$. Целта на обработка на сигнали е испраќање/пренесување или складирање/анализа на сигнали користејќи некој конечен

апарат. Функцијата е дадена со нејзините вредности во сите точки од R , но наместо пренесување и складирање на f во сите точки, ќе разгледаме ситуација каде само конечен број вредности на f ќе го дадат бараниот резултат. Ако $\{\varphi_n\}$ е ортонормирана база во $L^2(R)$, тогаш можеме да запишеме

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Наместо да се пренесува функцијата f , доволно е да се пренесе низата од коефициенти $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$, а примателот ќе го сумира редот добиен од пренесените коефициенти. Ако ортонормираната база $\{\varphi_n\}$ е специјално ортонормирана вејвлет база $\{\psi_{j,k}\}$ која се состои од вејвлети со компактен носач (дефиниција 4.2.2 или вејвлети придружени со МРА), тогаш заради забелешката 5.3.1 се постигнува целта.

Сега ќе го изложиме алгоритмот за декомпозиција и реконструкција преку процесот на филтрирање како еден важен концепт од обработка на сигнали. Филтер претставува оператор од l^2 во l^2 . Па, применувајќи филтер на сигнал од l^2 , повторно се добива некој друг сигнал од l^2 . Филтер се користи во лабораторија за да ги исчисти течностите од нечистотиите или пак да ги отстрани тврдите материји од течноста. Филтер се користи врз сигнал загаден со шум, за да го изолира чистиот сигнал или да го извади шумот, зависно од нашите првични интереси, сигнал или шум. Операторот на филтрирање оперира точно како алгоритмот за декомпозиција, па применувајќи го овој оператор над сигнал се добива сигнал со половина должина од оригиналниот сигнал. Во пракса, се работи само со сигнали кои имаат конечен број ненулти изрази, вообичаено се разгледуваат парен број од ненултните изрази.

Во општ случај, дефинираме филтер A со

$$Af_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_{l-2k} f_l, \quad (5.17)$$

каде што $f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$. $\{Af_k\} \in l^2$, т.е. процесот на филтрирање претставува дискретна конволуција на низата-филтер $\{a_k\}$ со сигналот. Нека H е филтер дефиниран со релацијата

$$Hc_{j,\cdot} = c_{j-1,\cdot}, \quad (5.18)$$

која одговара на (5.10) каде j е заменет со $j-1$, т.е.

$$c_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} c_{j,l}.$$

Ако H го применме m -пати добиваме

$$H^m c_{j,\cdot} = c_{j-m,\cdot}. \quad (5.19)$$

Нека G е друг филтер дефиниран со релацијата

$$Gc_{j,\cdot} = d_{j-1,\cdot}, \quad (5.20)$$

која одговара на (5.14) каде j е заменет со $j-1$, т.е.

$$d_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{-l+2k+1} c_{j,l}. \quad (5.21)$$

Заради (5.18) и (5.20) имаме

$$d_{j-m,\cdot} = GH^{m-1} c_{j,\cdot}. \quad (5.22)$$

Ова значи дека вејвлет коефициентите на било кое пониско ниво можат да се пресметат од скалните коефициенти на j -тото ниво. На тој начин алгоритмот за декомпозиција е запишан со помош на филтрите H и G . Во инженерската литература, H се нарекува ниско пропустлив (low-pass) филтер, додека пак G е високо пропустлив (high-pass) филтер.

Пример 5.3.2 Ќе разгледаме Хар вејвлет во кој $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $h_k = 0, k \notin \{0,1\}$. Нека

$f = (f_1, f_2, \dots, f_k, \dots) = \{f_k\} \in l^2$. Тогаш

$$Hf = \tilde{f}_k, \text{ каде што } \tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2k} + f_{2k-1}),$$

и

$$Gf = f_k^*, \text{ каде што } f_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2k} - f_{2k-1}).$$

Ако избереме $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$, тогаш

$$Hf = (5\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$$

$$Gf = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0).$$

Забелешка 5.3.3.

Како што спомнавме, покрај во обработка на сигнали, вејвлет методите се применуваат и во обработка на слики. Така на пример, проблемот со компресија на слика, која е важна компонента во обработка на слики, може да се разгледува како апроксимација на f со друга функција \tilde{f} , каде што \tilde{f} претставува компресираната слика. Предмет на алгоритмот на компресирање е да се претстави одредена класа оригинални слики преку слики со помалку информации (компресирани слики).

Ако слика се разгледува како функција f дефинирана на единечен квадрат $Q = [0,1] \times [0,1]$, тогаш концептот на вејвлет анализата во димензија 2 е соодветна за оваа дискусија.

Ако φ е скална функција и $\psi(x)$ е соодветниот вејвлет-мајка, тогаш трите функции

$$\psi_1(x, y) = \psi(x)\psi(y)$$

$$\psi_2(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$$

$$\psi_3(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

формираат, со translација и дилатација, ортонормирана база за $L^2(R^2)$, т.е.

$$\{2^{j/2} \psi_m(2^j x - k_1, 2^j y - k_2)\}, \quad j \in Z, \quad k = (k_1, k_2) \in Z^2, \quad m = 1, 2, 3$$

е ортонормирана база за $L^2(R^2)$. Според тоа, секоја функција $f \in L^2(R^2)$ може да се претстави со следниов вејвлет ред

$$f = \sum_{j,k \in Z} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

Глава 5. Примена на вејвлет методи за решавање диференцијални равенки и во обработка на сигнали

каде ψ е било која од трите функции $\psi_m(x, y)$ и $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$. Тогаш, компресираната слика \tilde{f} претставува парцијална сума на вејвлет редот. Според тоа, аналогни вејвлет резултати кои се користат при обработка на сигнали, се користат и во обработката на слики.

Литература

- [1] K. Gröchenig. *Foundations of Time- Frequency Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhauser, Boston, 2001.
- [2] I. Daubechies. *Ten Llectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
- [3] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhauser, Boston, 2003.
- [4] A. H. Siddiqi. *Applied Functional Analysis: numerical methods, wavelet methods and image Processing*. Markel Dekker, New York, 2004.
- [5] D. F. Walnut. *An introduction to Wavelet Analysis*, Birkhauser, 2004.
- [6] E. M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, **III**.
- [7] K. Gröchenig. *An uncertainty principle related to the Poisson summation formula*. Studia Math., 121(1), 87-104, 1996.
- [8] J. T. Marti. *Introduction to the theory of bases*. Springer-Verlag New York Inc. New York, 1969. Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol. 18.
- [9] Y. Meyer. *Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA. 1993. Algorithms & applications. Translated from the French and with a foreword by Robert D. Ryan.
- [10] C. K. Chui. *An introduction to wavelets*. Academic Press, Inc . Boston, MA. 1992.
- [11] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [12] K. Gröchenig. *Describing functions: atomic decompositions versus frames*. Monatsh. Math., 112(1):1-42,1991.

- [13] M. Frazier and B. Jawerth. *A discrete transform and decompositions of distribution spaces*. J. Functional Anal., 93(1), 34-170.1990.
- [14] E. Hernandez, G. Weiss. *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Inc., 1996
- [15] G. Bachman and L. Narici. *Functional Analysis*. Academic Press New York and London, 1966.