

資料番号	S A-98- 5
	R M-98- 69

高精度・高速渦電流場解析のための Whitney辺要素・線形辺要素併用法

早川 雅浩^{*}、Čingoski Vlatko、山下 英生
(広島大学)

1998年8月4日

高精度・高速渦電流場解析のための Whitney 辺要素・線形辺要素併用法

早川 雅浩*, Čingoski Vlatko, 山下英生
(広島大学)

A Mixed Method Using Whitney and Linear Edge Elements for High Accuracy and Low Computation Cost Eddy Current Analysis

Masahiro Hayakawa, Čingoski Vlatko, Hideo Yamashita (Hiroshima University)

Abstract

A mixed method using both Whitney and linear edge elements for eddy current finite element analysis is described in this paper. The accuracy of the results obtained by the proposed mixed method are the same as those obtained using linear edge element. However, this method has shorter computation time and needs less computer memory than the finite element method based on linear edge element. In the same time, the results obtained by our method are better than those obtained by the finite element method using Whitney edge elements. The proposed method is successfully applied in benchmark models for eddy current nondestructive testing.

キーワード：Whitney 辺要素、線形辺要素、渦電流解析、渦電流探傷試験
(Whitney edge element, linear edge element, eddy current analysis, eddy current testing)

1 まえがき

辺要素を用いた有限要素法は、渦電流解析などの三次元磁場解析において広く用いられるようになってきている [1]。その中でも四面体辺要素を用いた解析は複雑な形状のモデルにも適用できることから広く用いられている [2]。高精度な解析を目的として、四面体辺要素のベクトル補間関数についての種々の検討がなされている [3]。従来からの Whitney 辺要素を用いると高速かつ小記憶容量の計算が可能であるが、解析精度に問題がある。一方、四面体線形辺要素を使用すると高精度な解析結果を得ることができるが、膨大な計算メモリ及び計算時間を必要とする。また全領域に線形辺要素を用いると解くべき連立 1 次方程式に従属な式が含まれるため、ICCG 法での収束特性が著しく悪化する。そこで本論文では Whitney 辺要素・線形辺要素を用いた有限要素併用法を提案する。提案手法は線形辺要素を導電率が非零の領域に適用し、導電率が非零の領域に隣接する領域に線形辺要素と Whitney 辺要素の混合要素を適用し、それ以外の領域に Whitney 辺要素を適用する。提案手法を用いることにより、線形辺要素及び Whitney 辺要素で生じたそれぞれの問題点を改善することができる。この提案手法を渦電流探傷ベンチマーク問題に適用し、Whitney 辺要素を用いた有限要素法及び線形辺要素を用いた有限要素法と比較することによりその有用性を検討する。

2 Whitney 辺要素・線形辺要素併用法

2.1 支配方程式

解析対象問題を準定常問題と仮定すれば、辺要素を用いた A 法による三次元渦電流解析の支配方程式にガラーキン法を用いて得られた残差方程式は次式で与えられる。

$$\iiint_{\Omega} \nu \text{rot} \mathbf{N}_i \cdot \text{rot} \mathbf{A} dV - \iiint_{\Omega_c} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 dV + \iiint_{\Omega_e} j\omega\sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{A} dV = 0 \quad (1)$$

ここで ν は磁気抵抗率、 σ は導電率であり、 \mathbf{N}_i 、 \mathbf{J}_0 はそれぞれベクトル補間関数、ソース電流密度を表している。また Ω 、 Ω_c 、 Ω_e はそれぞれ解析全領域、コイル領域、導体領域である。

2.2 ベクトル補間関数

本論文で用いた四面体辺要素を図 1 に示す。同図 (a) は Whitney 辺要素を、(b) は線形辺要素を表している。要素内の節点番号と辺番号は図 1 に示すように定義する。ここで、Whitney 辺要素では辺上の未知数は 1 つであり、線形辺要素では辺上の未知数は 2 つとなる。

次に図 1 の 2 つの要素について、それぞれのベクトル補間関数と (1) 式に現れるベクトル補間関数の回転について検討する。四面体要素の体積座標を次式により定義

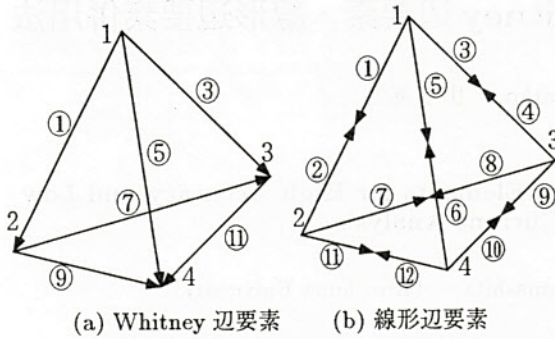


図1 四面体辺要素の構成

する。

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで p_i, q_i, r_i, s_i は要素の4頂点の座標から決まる定数値である。(2)式より Whitney 辺要素の1つの辺のベクトル補間関数は次式のように表すことができる。

$$\mathbf{N}_{i,j} = L_i \text{grad} L_j - L_j \text{grad} L_i \quad (3)$$

ここで、 i, j は辺の始点と終点である。

(3)のベクトル補間関数の回転は(2)式を考慮すると次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{N}_{i,j} &= 2\{(r_i s_j - r_j s_i)\mathbf{i} + (q_i s_j - q_j s_i)\mathbf{j} \\ &+ (q_i r_j - q_j r_i)\mathbf{k}\} \end{aligned} \quad (4)$$

一方、線形辺要素の1つの辺上のそれぞれ逆向きの2つのベクトル補間関数は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{i,k} &= L_i \text{grad} L_j \\ \mathbf{N}_{j,k} &= L_j \text{grad} L_i \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 k は辺の中点である。

(5)式の各々のベクトル補間関数の回転を $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}$ とすると次式ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \text{rot} \mathbf{N}_{i,k} = (r_i s_j - r_j s_i)\mathbf{i} \\ &+ (q_i s_j - q_j s_i)\mathbf{j} + (q_i r_j - q_j r_i)\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_{i+1} &= \text{rot} \mathbf{N}_{j,k} = (r_j s_i - r_i s_j)\mathbf{i} \\ &+ (q_i s_j - q_j s_i)\mathbf{j} + (q_i r_j - q_j r_i)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 l は要素内での辺番号である。

(6)式の2つの回転の3方向の各成分は大きさが等しく、異符号になっている。また(4)式の各成分は \mathbf{a}_i の2倍になっている。

2.3 提案手法の考え方

解析領域内の導体領域以外の領域 $\overline{\Omega}_e$ における提案手法の取り扱いについて説明する。領域 $\overline{\Omega}_e$ では(1)式の第1項と第2項(コイル領域内)が関係する。したがって、線形辺要素を用いた場合の要素方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,12} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{12,1} & b_{12,2} & \dots & b_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_{12} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$b_{i,j} = (\nu_x a_{i,x} a_{j,x} + \nu_y a_{i,y} a_{j,y} + \nu_z a_{i,z} a_{j,z}) V_e$$

ここで $a_{i,x}, a_{i,y}, a_{i,z}$ はベクトル補間関数の回転の3方向成分、 ν_x, ν_y, ν_z は磁気抵抗率の3方向成分である。また V_e は要素の体積を表す。

線形辺要素では辺上の2つの未知ベクトル補間関数の回転は(6)式より各成分とも同じ大きさと逆符号の値を持つ。また辺上の2つの電流密度ベクトルも電流連続条件より各成分とも同じ大きさと逆符号の値を持つ。このことを考慮すれば、(7)式より同一辺上の2つの未知ベクトルも同じ大きさと逆符号の値を持つ。この関係は領域 $\overline{\Omega}_e$ 内のみで成り立つ。導体領域 Ω_e では(1)式の第3項を考慮する必要があるために上記のことは成り立たない。したがって領域 $\overline{\Omega}_e$ 内において線形辺要素を用いた場合の要素方程式は(7)式から次式のように元数を12から6に減らすことが可能である。

$$4 \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & \dots & b_{1,11} \\ b_{1,3} & b_{3,3} & \dots & b_{3,11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,11} & b_{3,11} & \dots & b_{11,11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ \dots \\ A_{11} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} J_1 \\ J_3 \\ \dots \\ J_{11} \end{bmatrix} \quad (8)$$

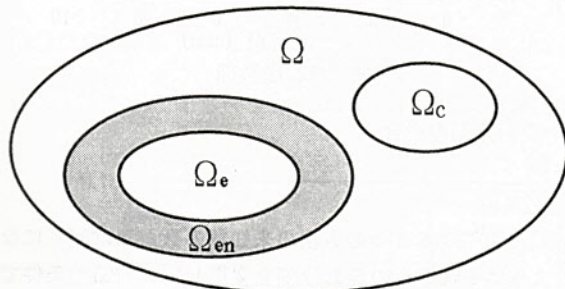
上式は領域 $\overline{\Omega}_e$ 内での Whitney 辺要素の要素方程式に一致する。このことは領域 $\overline{\Omega}_e$ 内に線形辺要素を適用すると解くべき連立1次方程式に従属な式が含まれることを意味している。

2.4 提案併用法

前節で述べたように解析全領域に線形辺要素を適用すると解くべき連立1次方程式に従属な式が含まれる。このような従属な式を消去していくことにより問題領域を図2に示すように分類して表現することができる。提案手法は導体領域 Ω_e では線形辺要素を用い、導体領域に接する境界領域(領域 Ω_{en})には本論文で提案する Whitney 辺要素と線形辺要素の混合要素を用い、それ以外の領域 $\overline{\Omega}_e$ では Whitney 辺要素を用いる。混合要素とは要素内の未知数が7~11である要素を指す。混合要素は導体領域 Ω_e に接している一要素内の辺の数により要素内の未知数が決定される。例として、図3に示すように混合要素の1辺が導体領域 Ω_e に接していれば未知数は7、3辺が

接していれば未知数は9となる。提案手法は上述したように、従属する式を消去するのみで線形辺要素で得られた結果と同じ結果が得られ、全体係数マトリクスの元数と非零要素数を減らすことができる。

さらに線形辺要素と Whitney 辺要素の要素マトリクスの対角優位性は Whitney 辺要素の方が優れている。したがって、領域 Ω_e 内に線形辺要素を用いて、連立1次方程式を解く場合に、その収束特性の悪化が予想される。提案手法を用いると Whitney 辺要素を用いた場合と同じく、マトリクスの対角成分が非対角成分に比べて大きくなるため収束特性の悪化を解消することができる。



Ω : 全解析領域 Ω_c : コイル領域
 Ω_e : 導体領域 Ω_{en} : 導体領域に隣接する領域

図2 提案手法の数値解析体系

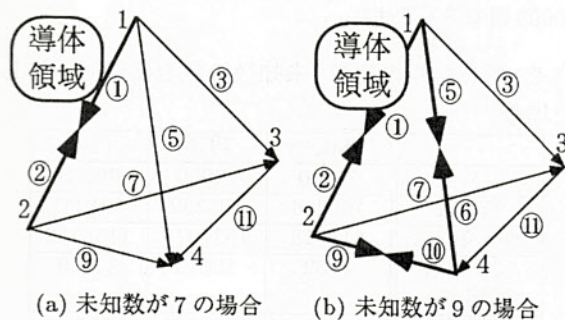


図3 混合辺要素の構成

3 適用例

3.1 検討モデルの概要

提案手法の有用性を検討するために渦電流探傷ベンチマークモデル [4] に適用した。検討モデルは平板上の傷の検出を取り扱う。平板の比透磁率を 1.0、導電率を $1.0 \times 10^6 S/m$ とし、その形状は $40 \times 40 \times 1.25 [mm]$ とした。傷は平板の中心に存在し、その長さ 10mm、幅 0.2mm の場合のインピーダンス解析を行った。ここで

渦電流探傷試験において傷検出信号の評価のため、インピーダンス解析を行う必要がある。インピーダンスの算出には次式を用いる。

$$Z = \frac{-j\omega N_t \int_c \mathbf{A}_c \cdot d\ell}{I} \quad (9)$$

N_t はコイルの巻数、 I は 1 ターン当りの電流、 \mathbf{A}_c はコイル部の磁気ベクトルポテンシャルを表している。傷のない場合のインピーダンス値を標準値として、傷がある場合のインピーダンス値との変化を傷検出信号としている。

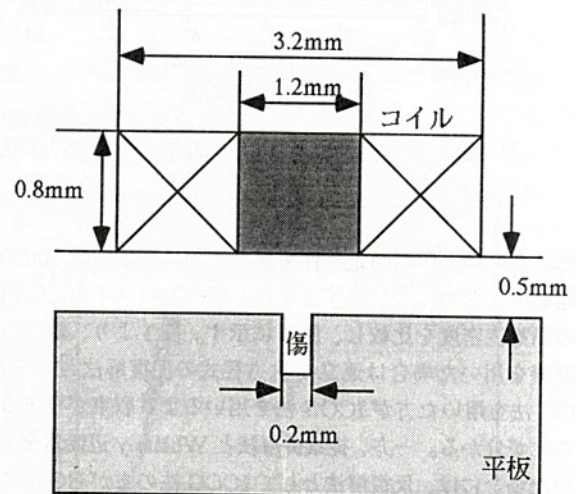
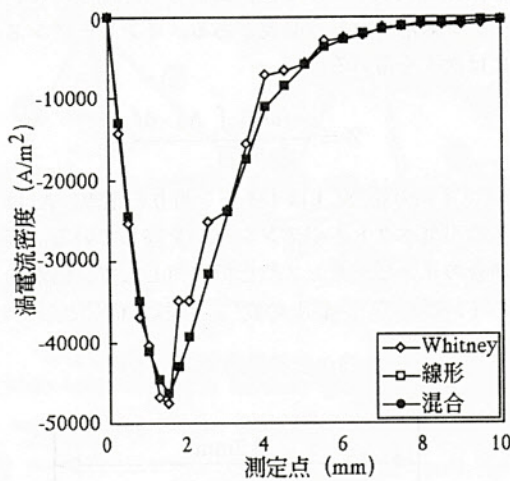


図4 パンケーキコイルの構造と平板との位置関係

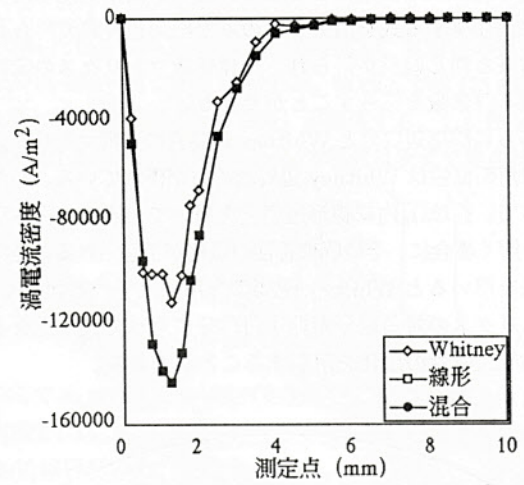
また解析で用いた自己誘導型パンケーキコイルの構造と平板との位置関係を図4に示す。コイルは外径が 3.2mm、内径が 1.2mm、高さ 0.8mm の軸対称形で、コイルの起磁力は 1AT、巻数は 140 回で、リフトオフは 0.5mm、試験周波数は 300kHz である。

3.2 提案手法の検討

Whitney 辺要素を用いた有限要素法、線形辺要素を用いた有限要素法、Whitney 辺要素と線形辺要素を用いた有限要素併用法の 3 種類の手法の比較検討を行なった。まず始めに、前節の条件で平板に傷がない場合で検討を行なった。同一の要素分割を用いて、3 種類の手法を用いて解析した際の要素分割データや使用メモリ及び計算時間を表1に示す。表中において、非零要素数とは全体係数行列の左下半分の非零要素数を表す。また連立一次方程式の解法には CG 法及び ICCG 法を用い、反復回数、使用メモリ、計算時間について調査した。反復回数とは収束判定条件を 10^{-6} とした場合の反復回数である。線形辺要素を用い、連立一次方程式の反復解法に ICCG 法を用い



(a) 実数部



(b) 虚数部

図5 渦電流密度の比較 (同一要素分割の場合)

た場合には、収束判定条件を満たす前に反復回数 30000 回を越えたので強制終了させた。平板上のコイル側表面の渦電流密度を比較し、図5に示す。表1より、線形辺要素を用いた場合は連立1次方程式の反復解法として、CG法を用いた方がICCG法を用いるより収束が早まる事が分かる。一方、提案併用法とWhitney辺要素を用いた場合には、反復解法としてICCG法の方がCG法に比べ、収束特性が優れている事が分かる。図5より線形辺要素を用いて得られた結果と提案併用法を用いて得られた結果はほぼ同じ結果が得られている。このことより本提案手法の正当性を確認することが出来た。

表1: 解析結果の比較 (同一要素分割の場合)

	Whitney	線形	混合
要素数	42960	42960	42960
未知数	53166	106332	65203
非零要素数	399058	1537078	672574
反復回数 (CG法)	10638	19015	24194
反復回数 (ICCG法)	2750	30000	3845
使用メモリ (CG法) (MB)	22.3	51.4	30.3
使用メモリ (ICCG法) (MB)	29.3	77.1	39.9
計算時間 (CG法) (sec)	3708	18783	12563
計算時間 (ICCG法) (sec)	2172	56340	4323

(CPU: Ultra SPARC / 143MHz)

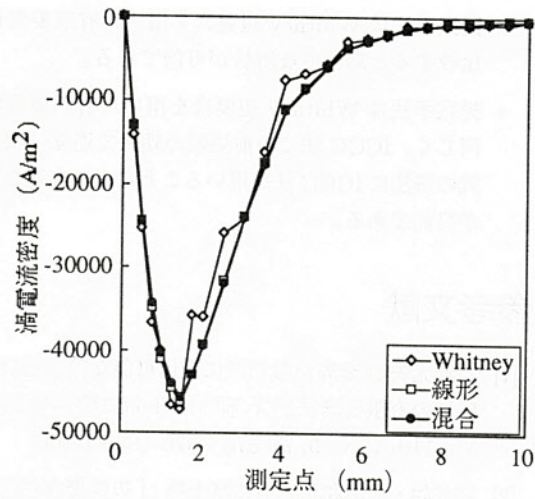
次に比較する3つの方法の未知数の数がほぼ同じになるようにそれぞれの要素分割を変更して、前節の条件で平板に傷がない場合について検討を行なった。上述の3種類の手法を用いて解析した際の要素分割データや使用メモリ及び計算時間を表2に示す。表中において反復回数とは収束判定条件を 10^{-6} とした場合の反復回数であり、線形辺要素を用い、連立1次方程式の反復解法にICCG法を用いた場合には収束判定条件を満たす前に反復回数30000回で終了させた。

表2: 解析結果の比較 (未知数の数をほぼ同一にした場合)

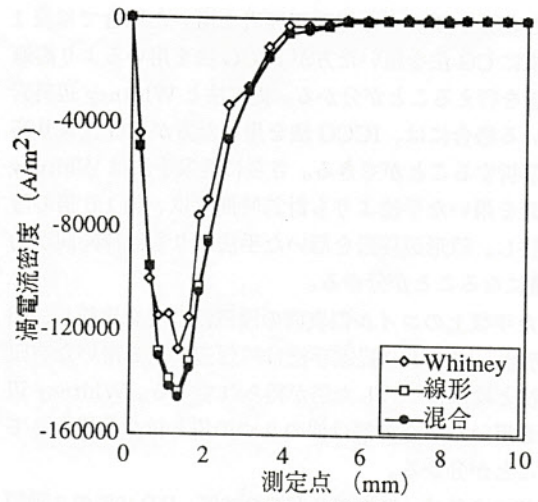
	Whitney	線形	混合
要素数	85920	42960	66588
未知数	105226	106332	104931
非零要素数	811118	1537078	1155152
反復回数 (CG法)	7462	19015	31129
反復回数 (ICCG法)	2029	30000	3354
使用メモリ (CG法) (MB)	41.2	51.4	45.6
使用メモリ (ICCG法) (MB)	55.9	77.1	65.3
計算時間 (CG法) (sec)	6688	18783	27292
計算時間 (ICCG法) (sec)	4576	56340	7265

(CPU: Ultra SPARC / 143MHz)

表よりどの手法を用いても、CG法を用いた方がICCG法を用いるよりも少ない記憶容量のメモリで解析が行え

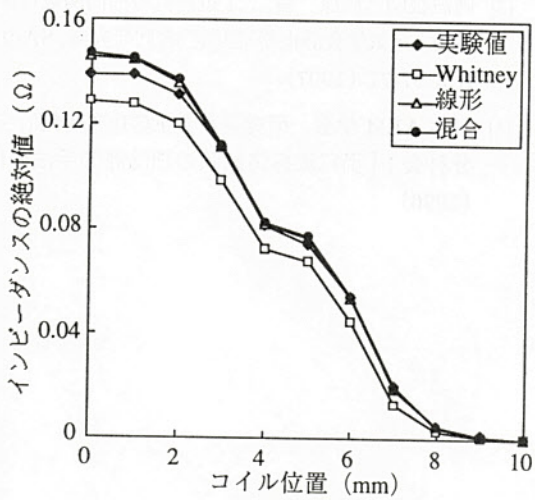


(a) 実数部

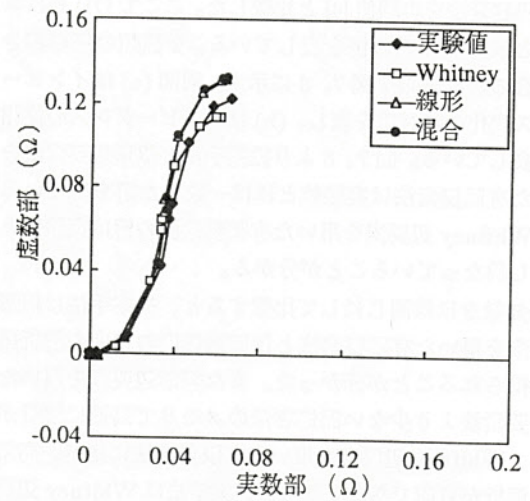


(b) 虚数部

図6 渦電流密度の比較 (未知数の数をほぼ同一にした場合)

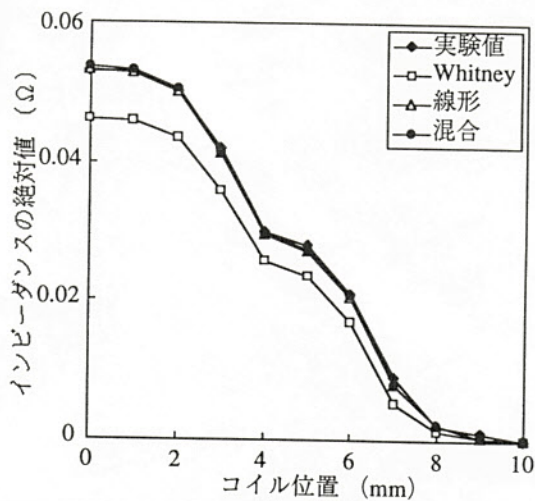


(a) 絶対値

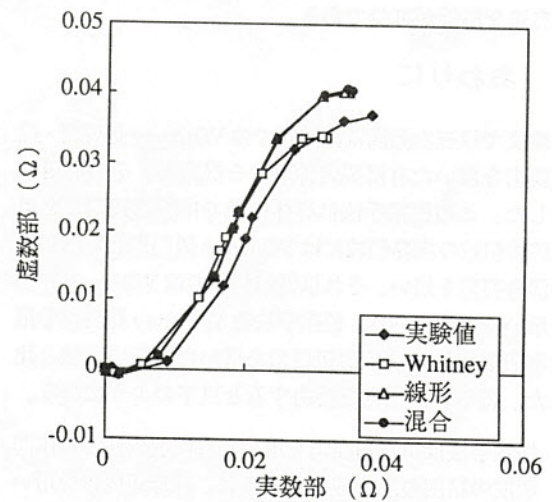


(b) 位相図

図7 インピーダンスの絶対値と位相図 (OD60%)



(a) 絶対値



(b) 位相図

図8 インピーダンスの絶対値と位相図 (OD40%)

ることが分かる。また線形辺要素を用いた場合には表1と同様にCG法を用いた方がICCG法を用いるより高速に解析を行えることが分かる。提案法とWhitney辺要素を用いる場合には、ICCG法を用いた方がCG法より高速に解析することができる。さらに提案手法はWhitney辺要素を用いた手法よりも計算時間では、約1.6倍の時間を要し、線形辺要素を用いた手法よりも計算時間が約0.4倍になることが分かる。

また平板上のコイル側表面の渦電流密度を比較し、図6に示す。図6より提案手法は線形辺要素を用いた有限要素法とはほぼ一致した解が得られている。Whitney辺要素を用いた場合の解は他の2つの解とは少し異なっていることが分かる。

前節の条件で、傷の深さがOD60%、OD40%の2種類の場合についてインピーダンスを計算し、提案手法、線形辺要素法を用いた有限要素法、Whitney辺要素を用いた有限要素法を実験値[4]と比較した。ここでODとはコイルと反対側の面の傷を表している。2種類の傷の深さの場合の解析結果を図7、8に示す。同図(a)はインピーダンス変化の絶対値を表し、(b)はインピーダンスの位相図を表している。図7、8より提案手法と線形辺要素法を用いた有限要素法は実験値とほぼ一致した解を得ているが、Whitney辺要素を用いた有限要素法の解は実験値とは少し異なっていることが分かる。

未知数をほぼ同じにして比較すると、提案手法は線形辺要素を用いた有限要素法とはほぼ同程度の精度の解析結果を得られることが分かった。また線形辺要素を用いた有限要素法より少ない記憶容量のメモリで高速に解析が行え、Whitney辺要素を用いた有限要素法に比べ、高精度な解析が可能である。さらに提案手法はWhitney辺要素を用いた有限要素法と同じく、ICCG法での前処理の効果で連立一次方程式の解法にICCG法を用いることにより高速な解析が可能である。

4 おわりに

本論文では三次元渦電流問題でのWhitney辺要素・線形辺要素を用いた有限要素併用法を提案し、その有用性を示した。この提案手法は導体領域では線形辺要素を用い、導体領域の境界領域にはWhitney辺要素と線形辺要素の混合要素を用い、それ以外の領域ではWhitney辺要素を用いる方法である。提案手法をWhitney辺要素を用いた有限要素法及び線形辺要素を用いた有限要素法と比較した。得られた知見を要約すると以下ようになる。

- 提案手法は線形辺要素を用いた有限要素法とはほぼ同程度の精度の解析結果を得られ、線形辺要素を用いた有限要素法より少ない記憶容量で、かつ高速に解析が行える。

- 提案手法はWhitney辺要素を用いた有限要素法と比較すると高精度な解析が可能である。
- 提案手法はWhitney辺要素を用いた有限要素法と同じく、ICCG法での前処理の効果で連立一次方程式の解法にICCG法を用いることにより高速な解析が可能である。

参考文献

- [1] 羽野光夫:「全周波数領域に適用可能な線形三次元電磁界の有限要素法解析-理論編-」電気学会論文誌A, Vol.110-A, No.9, pp.570~576 (Sep.1990)
- [2] 坪井始・池田和正・小林富士男:「辺要素有限要素法による渦電流探傷問題の解析」電気学会静止器・回転機合同研究会, SA-97-9, RM-97-68 (1997)
- [3] 阿波根明 藤原 耕二:「辺要素の補間関数に関する検討」電気学会静止器・回転機合同研究会, SA-97-12, RM-97-71 (1997)
- [4] 日本 AEM 学会 研究委員会 ECT 高度化研究開発分科会:「渦電流探傷試験の理論評価手法の開発」(1996)