

磁束密度の大きさを考慮した バブルシステム・アダプティブ有限要素自動分割法

学生員 横山 貴之 (広島大学)

正員 Vlatko Čingoski (広島大学)

正員 金田 和文 (広島大学)

正員 山下 英生 (広島大学)

Adaptive Finite Element Analysis Using Dynamic Bubble System Taking into Account Magnitude of Magnetic Flux Density

Yokoyama Takayuki, Student Member, Vlatko Čingoski, Member, Kaneda Kazufumi, Member, Yamashita Hideo, Member (Hiroshima University)

In this paper, a new adaptive method for finite element analysis using dynamic bubble system taking into account magnitude of magnetic flux density is proposed. The error estimation is performed according to the Zienkiewicz and Zhu error norm estimator and using improved solution of the problem instead of the unknown exact values which is both straightforward and computationally cheap. Mesh density is easily controlled by changing the radii of node bubbles that describe the outline of the analysis region according to the previously performed error estimation. The proposed method produce adaptively generated meshes independent of the initial coarse mesh. The final mesh satisfies the user defined relative error of the solution and takes into account the magnetic flux density distribution. The effectiveness of the proposed adaptive method is investigated for 2-D and 3-D magnetostatic field computations. The obtained results show that the proposed method is suitable and very promising for adaptive electromagnetic field analysis.

キーワード : 有限要素法, 誤差解析, アダプティブ分割, バブルシステム, 要素自動分割.

1. はじめに

有限要素法は、場の数値解析手法として、電磁界解析をはじめ広く工学分野で利用されている。汎用の解析ソフトも普及し、日常の設計や種々の問題解決のためにも活用されている。このような状況下で、解析者が適当に解析領域の要素分割を行ない、汎用解析ソフトを実行することにより、簡単に結果が得られることになる。しかし、その解の精度は不明であり、補償されていない。計算機の出力結果を安易に信用して、誤った判断を行なうこともある。解の精度について十分に認識する必要がある。精度の高い解を得るためには、有限要素のサイズを小さくすればよい。しかし、解析領域全体を一様に細かく要素分割すると、要素数は増え、計算コストが多くなるものとなる。そこで、なるべく少ない計算コストで十分の精度を維持した解を得るためには、物理量の分布をあらかじめ予想し、物理量変化の激しい部分のみを細かい

要素に分割するといった、要素の粗密分布を与える必要がある。この作業を行うには、十分な経験と専門知識が必要となるが、しかし、経験にも限界があり、より複雑な解析モデルに対して物理量の分布を予想することは難しく、効率のよい要素分割を行うことは困難である。そこで、経験に頼らずに希望許容誤差を満足し、物理量分布を考慮した要素の粗密分布を自動的に得ることのできるアダプティブ法が近年盛んに研究されている⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。

一般にアダプティブ法には、節点数や補間関数の次数を一定にしておき、節点位置を適切な位置に変更する r 法、誤差の大きい領域の要素を細分化する h 法、要素分割はそのまま、補間関数の次数を変更する p 法がある。

一般には、 h 法あるいは h 法と r 法と組み合わせた方法が用いられている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これらのアダプティブ分割法では、誤差の大きい箇所の要素を局所的に再分割している。そのため、再分割後の要素形状は、初期分割の要素形状の影響を受けるために、再分割後に得られる要素形

状の質の改善には限界がある。この問題を解決する方法として、要素の再分割を局所的ではなく大域的に行う方法が考えられる。本論文では、指定許容誤差を補償するまでアダプティブに要素の再分割を大域的に行う、アダプティブ要素分割法を提案する。ここでは、有限要素自動分割法として、バブルシステムを用いる方法⁽⁶⁾を採用し、また、誤差評価法として、各要素ごとの誤差評価が可能でありバブルシステムに適用しやすい、ZienkiewiczとZhuの誤差評価法⁽¹⁾を基本としている。さらに、磁束密度値の大きい領域で誤差の評価を厳しくする方法を用いている。提案手法では、指定希望許容誤差を補償する最終の要素形状も良好であり、精度と計算コストの面からも有用であるといえる。

2. バブルシステムを用いた有限要素自動分割法

バブルシステムは、質量と半径を持つ複数のバブルを解析空間中に充填させ、各バブル間には斥力と引力が働き、ニュートンの運動方程式によってバブル間の力が平衡状態に収束するシステムである。これを用いた自動分割法の概要を図1に示す。まず、解析空間の物体形状決定点のみを用いて空間を初期四面体に分割する。これは、任意形状の解析空間を凸形状の四面体で構成することにより、バブルの配置や半径決定を単純化するためである。次に、ユーザが、各頂点にバブルを配置する。これは、要素分布を粗にしたい領域の近くの頂点に大きい半径のバブルを、密にしたい領域の近くの頂点に小さい半径のバブルを与える。この頂点バブルの大きさを決めるだけで解析空間の要素分布を制御することができる。その後は、自動的に、辺バブル、面バブル、空間バブルが発生し、バブル間の力が平衡状態（近接した状態）になるまでバブルの移動を行う（図2参照）。そして、最終的に求まったバブルの中心座標に節点を配置し、Delaunayのアルゴリズムにより解析空間を四面体分割する。入力データは、物体形状と頂点バブルの半径のみで、必要最小限のデータであり、要素の粗密分布を頂点バブルの半径を変更するだけで容易に与えることができる。

3. バブルシステムを用いたアダプティブ分割法

提案するアダプティブ分割法の概略の手順を以下に示す。

- Step1: 物体形状を入力する。
- Step2: 物体を構成する頂点のみを用いて領域を四面体に分割する。
- Step3: 有限要素解析を行う。
- Step4: 解析結果より誤差評価を行う。
- Step5: 誤差が希望許容誤差を満足していれば終了。または、アダプティブ反復回数が定められた回数を超えた場合終了。それら以外であれば物体構成頂点バブルの半径を決定し、Step6へ。

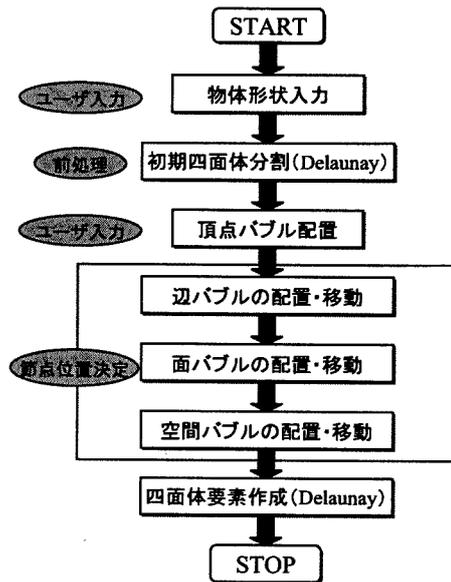


図1 バブルシステムを用いた要素分割の概要
Fig. 1. Simplified flow chart

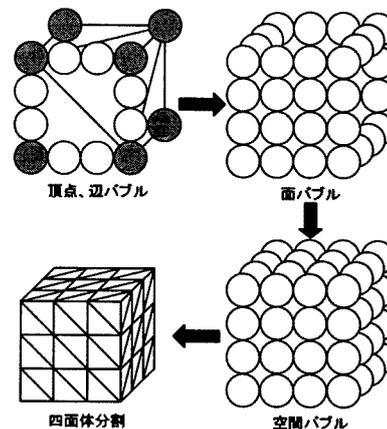


図2 バブルシステムを用いた要素分割の概念図
Fig. 2. Images of meshing procedure

Step6: Step5で決まった頂点バブルの半径を用いて、バブルシステムを用いた有限要素自動分割を行う。Step3へ。

このように、誤差が希望許容誤差を満足するまで解析領域全体の要素再分割を行う。

Step4の誤差評価法、Step6のバブル半径決定法については、次節および次々節で述べる。また、Step5の終了条件において、アダプティブ反復回数を定められた回数までしか行わない理由は、解析領域内に物理量が急激に変化するような特異点を含む場合、要素再分割を行っても希望許容誤差を満足できず、アダプティブ反復のルー

ブが無限になる可能性があるためである。なお、本システムでは5回としている。

4. 誤差評価法

本手法で用いる誤差評価法は、要素ごとの評価が可能でシンプルな Zienkiewicz と Zhu の方法⁽¹⁾を用いる。この方法は、要素ごとの誤差を評価することができるので、要素サイズを変更する提案法に適した誤差評価法といえる。(1)式で計算する要素*i*の誤差エネルギー $\|E^e\|$ を評価に用いる。

$$\|E^e\|^2 = \int_{S_e} (\bar{\mathbf{B}}^e - \mathbf{B}^e)^T \cdot \nu (\bar{\mathbf{B}}^e - \mathbf{B}^e) dS \quad \dots (1)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{B}}^e$ は、磁束密度値の真値、 \mathbf{B}^e は、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より求まる磁束密度であり、 ν は、磁気抵抗率、 S_e は、要素*e*の面積である。

ところで、一般に真値 $\bar{\mathbf{B}}^e$ は、不明である。そこで、以下に示すように \mathbf{B}^e を平均操作することにより求まる値を $\bar{\mathbf{B}}^e$ として使用する。このようにして求まる $\bar{\mathbf{B}}^e$ は、 \mathbf{B}^e より、精度が高いことが知られている⁽⁶⁾。まず、(2)式を用いて節点*i*の磁束密度を求める。

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{M} \sum_{e=1}^M \mathbf{B}^e \quad \dots (2)$$

ここで、 M は、節点*i*を共有する同一物質の要素の個数である。そして、ある要素*e*内の磁束密度 $\bar{\mathbf{B}}^e$ は、要素を形成する節点の磁束密度 \mathbf{B}_i を用いて、次式で定義できる。

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{B}_i \quad \dots (3)$$

ここで、 n は三角形要素のとき3、四面体要素のとき4、 N_i は要素の補間関数、 \mathbf{B}_i は(2)式で求まる節点*i*の磁束密度である。

各要素ごとの誤差は(1)式で求め、解析領域全体の平均相対誤差 η_r は次式で求める。

$$\eta_r = \frac{\|E\|}{\sqrt{\sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} (\bar{\mathbf{B}}^e)^T \cdot \nu (\bar{\mathbf{B}}^e) dS}} \quad \dots (4)$$

$$\|E\|^2 = \sum_{e=1}^{NE} \|E^e\|^2 \quad \dots (5)$$

ここで、 NE は、全要素数である。

5. 頂点バブルの半径決定法

要素分割法として、バブルシステムを用いた要素分割法を用いるために、物体構成頂点の頂点バブルの半径を誤差評価から決定する。(4)式を用いて誤差評価した場

合、 n 回目の解析に用いた要素*e*の最長辺の長さを h_{old}^e とした時、 $n+1$ 回目の解析で希望許容誤差を満足するためには、要素*e*の最長辺の長さ h_{new}^e を次式のように決めればよい⁽¹⁾。ただし解析結果が、特異点の影響を受けないとする。

$$h_{new}^e = \frac{h_{old}^e}{\xi_e^{1/p}} \quad \dots (6)$$

$$\xi_e = \frac{\|E^e\|}{\|E_a^e\|} \quad \dots (7)$$

$$E_a^e = \eta^e \times \sqrt{\frac{\sum_{e=1}^{NE} \int_{S_e} (\bar{\mathbf{B}}^e)^T \cdot \nu (\bar{\mathbf{B}}^e) dS}{NE}} \quad \dots (8)$$

$$\eta^e = \eta_s \quad \dots (9)$$

ここで、 p と η_s は、それぞれ内挿関数の次数及びユーザーが与える希望許容誤差である。なお、(9)式は、全ての要素の許容誤差が η_s に等しいことを示している。

(6)式を用いることにより、 $n+1$ 回目の解析で希望許容誤差を満足するように要素サイズを細かくすることができる。しかし、この方法では、希望許容誤差が小さく、しかも n 回目の要素分割が極端に粗いときには、 $n+1$ 回目分の要素サイズが細かくなり過ぎ、要素数が必要以上に増えるという問題点がある⁽⁷⁾。また、磁界解析の場合、物理量の変化が小さい空気領域も考慮しなければならない。

以上のことを考え、ここでは頂点バブルの半径を以下のように決定することを提案する。

希望許容誤差は解析領域全体に亘って均一である必要はない。すなわち、磁束密度の高いところの誤差は小さく、磁束密度の低いところの誤差は大きくても工学的には問題はない。ここでは、各要素の磁束密度の大きさに従って、 η^e を自動的に決定する方法を提案する。このように磁束密度の大きさを考慮すると、磁束密度が小さい領域では誤差が多少あるとしてもバブルの半径が大きく求まり、逆に磁束密度が大きい領域はバブルの半径が小さく求まる。以下にその決定方法を示す。

$$\eta^e = \eta_s + (\eta_r - \eta_s) \cdot (1 - d^e) \quad \dots (10)$$

$$d^e = \frac{\|\mathbf{B}^e\|}{\|\mathbf{B}_{max}\|} \quad \dots (11)$$

ここで、 η_r は、(4)式で求まる現在の要素分割における平均相対誤差、 \mathbf{B}_{max} は、要素の磁束密度 \mathbf{B}^e の最大値である。また、磁界解析において、誤差の大きいところだけでなく、磁束密度の値が大きく、磁気ベクトルポテンシャルの変化の激しいところも要素を細かくしたいという要求がある。そこで、磁束密度の大きい要素に関しては、(8)式の平均エネルギーを使わずに、(12)式で求める局所エネルギーを用いる。

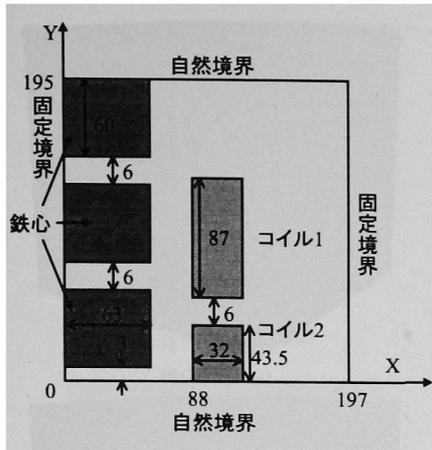


図3 2次元適用モデル (単位:mm)
Fig.3. 2D application model (mm)

$$E_a^e = \eta^e \times \sqrt{\int_{S_e} (\bar{\mathbf{B}}^e)^T \cdot \nu (\bar{\mathbf{B}}^e) dS} \dots\dots\dots (12)$$

なお、次式を満足する要素については、(12)式を用いる。

$$\mathbf{B}^e > \mathbf{B}_{max} \times 0.8 \dots\dots\dots (13)$$

ここで、0.8は経験的に決めた。

以上のようにして、 $n + 1$ 回目の要素サイズが決まると、頂点*i*上のバブルの半径は、頂点*i*を共有する*M*個の要素より、次式で決定する。

$$r_i = 0.5 \times \min(h^1, \dots, h^M) \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $\min(x_1, \dots, x_M)$ は、 x_1, \dots, x_M の中から、その最小値を返す関数である。

(14)式を用いる理由は、バブルシステムが、隣接するバブルの半径は、急激に変わることは無く、バブルの移動が収束した時に、2つのバブルは互いに近接した状態と考えることができ、要素の一边が、2つのバブルの中心距離で構成されているからである。

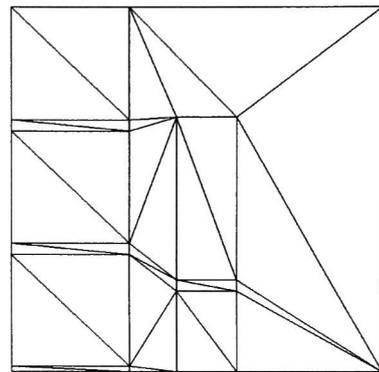
このように頂点バブルの半径を決定することによって、誤差と磁束密度を考慮し、希望許容誤差を満足するアダプティブ分割が行える。また、バブルシステムを用いているため、要素の大きさは連続的に変化し、得られる要素形状も歪みの少ないものになっている。

6. 適用例

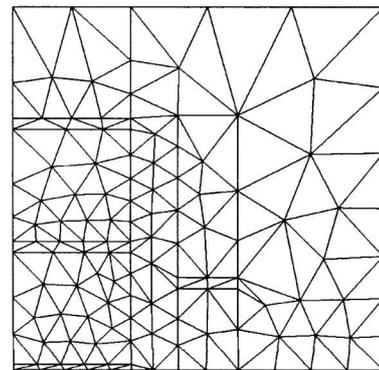
本手法の有用性を示すために、2次元場および3次元場のモデルに適用した。

〈6・1〉 2次元場モデル 図3に示す鉄心とコイルのあるモデルに希望許容誤差10%を与え、本手法を適用した。

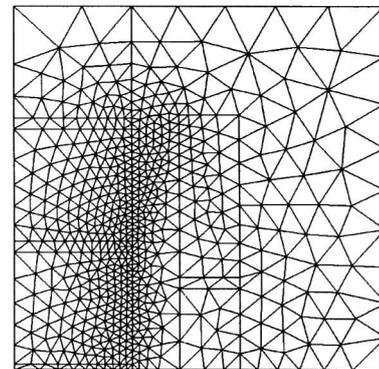
初期分割を図4(a)、アダプティブ分割1回目、2回目の分割結果をそれぞれ同図(b)、(c)に示す。また、相対誤



(a) 初期分割



(b) アダプティブ分割1回目



(c) アダプティブ分割2回目

図4 アダプティブ分割結果
Fig.4. Adaptive division map

表1 分割結果データ

Table 1. Data of division maps

	節点数	要素数	相対誤差
初期分割	24	33	0.425
アダプティブ分割1回目	131	224	0.151
アダプティブ分割2回目	598	1,139	0.08

差8%が得られた分割図4(c)を用いて磁場解析を行なったときの磁束密度分布、磁束線図を図5に示す。図4の各分割図の節点数、要素数、相対誤差を表1に示す。

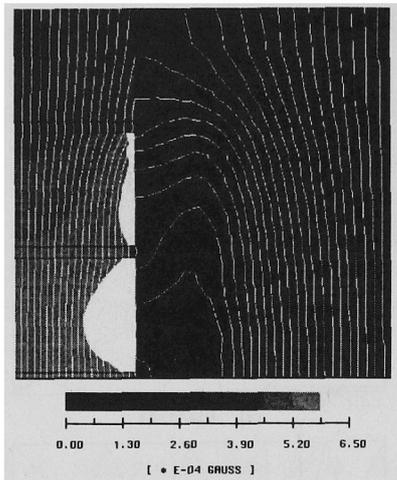


図5 磁束密度分布と磁束線

Fig. 5. Magnetic flux density distribution and magnetic flux lines

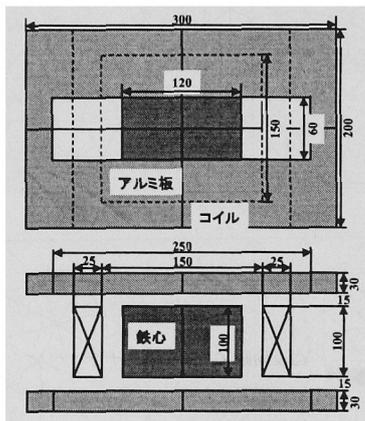


図6 3次元適用モデル (単位:mm)
Fig. 6. 3D application model (mm)

図4(c)の結果は、図4(a)の初期分割形状に依存しない要素再分割が行われていることがわかる。また、図5と図4(c)から、物理量変化が激しい鉄心と空気領域の境界付近で非常に細かい要素が作成されており、要素の粗密分布が非常になめらかに作成されている。

〈6・2〉3次元場モデル 図6に示すような鉄心、コイル、アルミ板からなる3次元場モデル（電気学会モデル⁽⁹⁾）の1/8領域に本手法を適用した結果を示す。作成された要素形状の評価を、(15)式で求まる Q の値を用いた。この Q の値が1に近いほど形状のよい正四面体に近く、0に近ければ扁平な四面体である。

$$Q = 3 \times \frac{\text{内接球の半径}}{\text{外接球の半径}} \dots\dots\dots (15)$$

初期分割および希望許容誤差を満足した分割結果をそれぞれ図7(a)および(b)に示す。なお、アダプティブ反



図7 アダプティブ分割結果
Fig. 7. Adaptive division map

表2 分割結果データ
Table 2. Data of division maps

	節点数	要素数	Qの平均値	相対誤差
初期分割	113	468	0.489	0.472
アダプティブ分割1回目	663	3,153	0.744	0.283
アダプティブ分割2回目	2,005	10,329	0.763	0.163
アダプティブ分割3回目	13,422	77,809	0.829	0.095

復回数は3回であった。また、希望許容誤差を満足した分割結果の鉄心付近の拡大図と磁束密度分布をそれぞれ図8(a), (b)と(c)に示す。図7(a), (b)のそれぞれの節点数、要素数、 Q の平均値、相対誤差を表2に示す。

図7(b)の分割結果より、これが初期分割に依存していないことがわかる。また、表2より Q の平均値が約0.83であり、形状のよい要素が作成されていることがわかる。また、鉄心端点付近の磁束が鉄心から出る部分では、磁束密度が高くなっており、空気領域との物理量変化が激しいため、細かい要素分割が行われていることがわかる。

7. まとめ

本論文では、バブルシステムを用いたアダプティブ分割法を提案し、大域的に要素再分割を行うことによって、従来問題となっていた要素再分割の際に、その形状が初期分割に依存し、形状が悪化していく問題を解決した。そして、希望許容誤差を満足し、磁束密度の大きさと誤

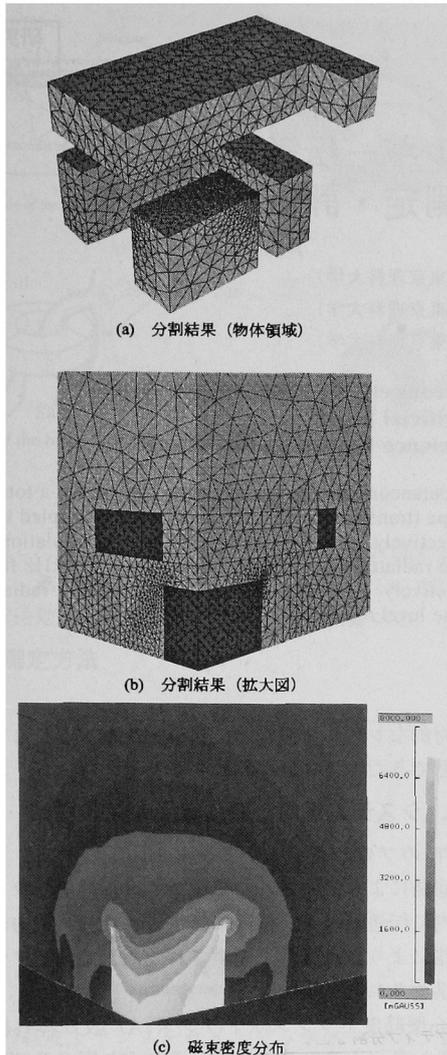


図 8 拡大図と磁束密度分布

Fig. 8. Zoom map and flux density distribution

差を考慮した要素分割を自動的に得ることができた。このように本提案法の有用性は明らかであるが、他の手法と比べた場合の優位性を客観的に評価するには、数値的な評価が必要である。すなわち、最終解の精度、最終解を得るまでの計算時間などの評価が必要であり、この点に関しては今後の検討課題とする。

(平成 11 年 3 月 25 日受付, 同 11 年 6 月 9 日再受付)

文 献

(1) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu: "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp.337-357, (1987).
 (2) Z. J. Cendes and D. N. Shenton: "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic field", *IEEE*

Transaction on Magnetics, Vol. 21, pp.1811-1816, (1985).
 (3) K. Ho-Le: "Finite element mesh generation method review and classification", *Computer-aided design*, Vol. 20, pp. 27-38,(1988).
 (4) K. Reichert, J. Skoczylas, T. Tarnhuvud: "AUTOMATIC MESH GENERATION BASED ON EXPERT-SYSTEM-METHODS", *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp.4197-4200, (1991).
 (5) Rudiger Verfurth: "A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques", *WILLY TEUBNER*, 1-st edition, (1996).
 (6) T. Yokoyama, V. Čingoski, K. Kaneda, H. Yamashita: "3-D Automatic Mesh Generation for FEA Using Dynamic Bubble System", *IEEE, Transaction on Magnetics*, to appear, (1999).
 (7) R. Murakawa, V. Čingoski, K. Kaneda, H. Yamashita: "Adaptive Finite Element Analysis Using Dynamic Bubble System", *11th Conference on the Computation of Magnetic Fields COMPUMAG'97*, PC2-1, pp.255-256, (1997).
 (8) V. Čingoski, H. Yamashita: "An improved method for magnetic flux density visualization using 3D edge finite element method", *J. of Applied Physics*, Vol.75, No.10, pp.6042-6044, (1994).
 (9) 電気学会技術報告 (II部), 第 384 号, 三次元渦電流場数値計算基礎技術, 渦電流場数値計算技術調査専門委員会, (1991)

横山 貴之 (学生員) 1974 年 2 月 14 日生。1997 年 3 月広島大学工学部電気工学科卒業。同年 4 月, 広島大学大学院博士課程前期工学研究科入学。現在に至る。主に, 有限要素解析の前処理の研究に従事。電気学会会員。



Vlatko Čingoski (正員) 1962 年 6 月 11 日生。1990 年マケドニア"Sts. Cyril & Methodius" 大学大学院修士課程修了。1996 年広島大学大学院工学研究科博士課程後期修了。同年, 同大学工学部助手。主として, 有限要素法による電気機器の電界・磁界解析, 逆問題解法, サイエнтиフィックビジュアリゼーションに関する研究に従事。電気学会, 日本 AEM 学会, ICS, 各会員。



金田 和文 (正員) 1959 年 10 月 1 日生。1984 年広島大学大学院工学研究科博士課程前期修了。同年, 中国電力 (株) 入社。1986 年, 広島大学工学部助手。1995 年同大学助教授。この間, 1991 年より 1 年間米国プリガムヤング大学へ出張。主として, コンピュータグラフィックス, 画像処理の研究・開発に従事。工学博士。電気学会, 電子情報通信学会, 情報処理学会, ACM, 各会員。



山下 英生 (正員) 1941 年 10 月 22 日生。1968 年広島大学大学院修士課程修了。同年, 同大学工学部助手。1992 年, 同大学教授第 2 類 (電気系) 電気機器工学教育科目担当。この間, 米国クラークソン工科大学へ出張。主として, 有限要素法による電気機器の電界・磁界解析, 逆問題解法, サイエнтиフィックビジュアリゼーションに関する研究に従事。工学博士。電気学会, 電子情報通信学会, 情報処理学会, 日本シミュレーション学会, 日本 AEM 学会, 計算工学学会, IEEE, ICS, 各会員

