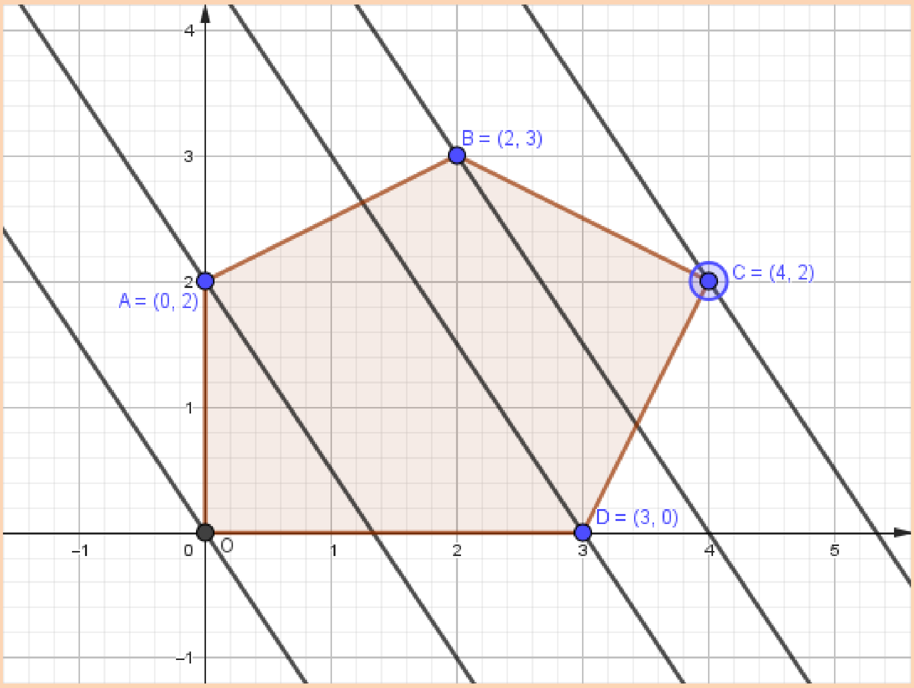
Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Елена Карамазова Гелова; Александар Крстев; Соња Манчевска

# ВОВЕД ВО МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ




Штип 2026

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Елена Карамазова Гелова; Александар Крстев; Соња Манчевска

# ВОВЕД ВО МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ

Наставно-научниот совет на Факултетот за информатика при Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип на 294 седница, одржана на 4.3.2026 година, донесе Одлука за усвојување на извештај од рецензија и издавање на учебникот бр. 1502-55/4 од 4.3.2026 година со наслов „Вовед во математичко програмирање“ од авторотите вонр. проф д-р Елена Карамазова Гелова, проф д-р Александар Крстев и проф. д-р Соња Манчевска. Рецензијата е објавена во Универзитетски билтен бр. 382 од 16.2.2026 година.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Автори**
д-р Елена Карамазова Гелова, вонреден професор
д-р Александар Крстев, редовен професор
д-р Соња Манчевска, редовен професор

**ВОВЕД ВО МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ**

**Рецензенти**
д-р Билјана Златановска, редовен професор
д-р Весна Книгхтс, редовен професор

**Лектор**
Слаѓан Спасовски

**Техничко уредување**
Проф. д-р Елена Карамазова Гелова
Проф. д-р Соња Манчевска

**Издавач**
Универзитет „Гоце Делчев” - Штип

**За издавачот**
**уредник на издавачка продукција на УГД**
д-р Лилјана Колева Гудева, редовен професор

**Објавено во е-библиотека**
https://e-lib.ugd.edu.mk

**DOI** https://www.doi.org/10.46763/m6082771489kg

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

519.85(075.8)

КАРАМАЗОВА Гелова, Елена
Вовед во математичко програмирање [Електронски извор] / Елена Карамазова Гелова, Александар Крстев, Соња Манчевска. - Штип :
Универзитет "Гоце Делчев" - Штип, Факултет за информатика, 2026

Начин на пристапување (URL): http://e-lib.ugd.edu.mk/1265. - Текст во PDF формат, содржи X, 215 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 01.04.2026. - Фусноти кон текстот. - Биографски податоци за авторите: стр. 215. - Библиографија: стр. 211-214

ISBN 978-608-277-148-9

1. Крстев, Александар [автор] 2. Манчевска, Соња [автор]
а) Математичко програмирање -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 68549893

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ” – ШТИП

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

д-р Елена Карамазова Гелова, вонреден професор

д-р Александар Крстев, редовен професор

д-р Соња Манчевска, редовен професор

# ВОВЕД ВО МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ

Штип 2026

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# ПРЕДГОВОР

Учебникот „*Вовед во математичко програмирање*“ е наменет за користење како основен учебник за совладување на наставните содржини по предмет „*Математичко програмирање*“ што се изучува на насоките „*Наставна математика*“ и „*Применета математика*“. Освен по предметот „*Математичко програмирање*“, учебникот, може да се користи и по останатите предмети каде се вклучени содржини од линеарното и нелинеарното програмирање, но и од страна на секој читател кој има потреба од запознавање со темите што во него се обработени.

Учебникот се состои од осум глави.

Во првата глава е накратко опишан предметот на математичкото програмирање. Дадена е формулација на основната задача на математичкото програмирање, специфичната терминологија што се користи во оваа математичка област и наведени се видовите математичко програмирање. Накратко се осврнавме и на дел од областите на практична примена на математичкото програмирање, историскиот развој и тековните трендови во оваа математичка област.

Во втората глава е даден преглед на поважните дефиниции и својства на векторската и тополошката структура на n-димензионалниот реален евклидски простор. Потоа се дефинирани поважните поими и формулирани поважните тврдења од конвексната анализа што се теориска основа за математичкото програмирање.

Во третата глава се наведени основите на теоријата на математичкото програмирање. Имајќи предвид дека Лагранжовиот дуален проблем е проблем на конвексно програмирање, независно од тоа дали примарниот проблем е или не е, акцентот е ставен на поважните својства на конвексното програмирање.

Во четвртата глава се вклучени најважните теориски резултати што се однесуваат на линеарното програмирање. На почетокот е дадена прецизната математичка формулација на општата задача на линеарното програмирање. Потоа се наведени различните облици на задачи на линеарното програмирање и детално се опишани постапките за премините од еден во друг облик. Својствата и геометриската интерпретација на функцијата на целта и допуштената област на задача на линеарното програмирање се подетално разгледани. За разлика од поголем број на учебници, за поимот „базно изводливо решение“ ги вклучивме двете дефиниции, што е од исклучителна важност за разбирање на различните методи за определување на екстремалните точки, а со тоа и алгебарското решавање на дадена задача на линеарно програмирање. Поимот за дуалност во линеарното програмирање е воведен при претпоставка дека примарната задача е задача на максимизација зададена во стандарден облик и, во согласност со оваа претпоставка, се формулирани и докажани основните теореми на линеарното програмирање.

Во петтата глава, надоврзувајќи се на алгебарските методи за определување на екстремалните точки наведени во четвртата глава, опишани се дополнителните методи за решавање: графичките методи за задачи со две променливи на одлучување или две главни ограничувања и една од верзиите на симплекс методот. Во контекст на графичкото решавање на задачи со две главни ограничувања, опишана е и т.н. втора геометриска интерпретација на задача на линеарно програмирање.

Во шестата глава се разгледани два специјални случаи на задачи на линеарно програмирање: основната, или т.н. класична транспортна задача и задачата на распоредување (асигнација). За нивно решавање детално се опишани специфичните методи и наведени се повеќе примери за илустрација на методите.

Во седмата глава накратко е опишан начинот на добивање на решение на задачи од линеарно програмирање со помош на две софтверски апликации што им се достапни на просечните корисници и што може да се користат на персонални сметачки машини: LINDO и MS Excel.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Во осмата глава е наведена кратка листа на задачи што се наменети за самостојна работа. Со оглед на тоа дека во претходните глави е вклучен поголем број на комплетно решени примери, студентите може лесно да ги решат наведените задачи.

Математичкото програмирање е исклучително обемна област, и од теориски, и од апликативен аспект. Широката примена на одделните видови на математичкото програмирање за практични цели ја прават оваа математичка област исклучително атрактивна за понатамошно надградување на знаењата. Кон крајот на дел од главите вклучивме краток преглед од насловите од литературата што ја имавме предвид при изготвување на учебникот, а која заинтересираните студенти и читатели може да ја користат при продлабочување на своите знаења за одделни видови на математичко програмирање.

На крај, би сакале да им се заблагодариме на рецензентите, кои со своите забелешки и сугестии придонесоа за подобрување на квалитетот на овој учебник.

*Од авторите*

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## СОДРЖИНА

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 1. ВОВЕД

## 1.1. Предмет на математичкото програмирање

Математичкото програмирање, уште познато и како математички оптимизации, е математичка област што вклучува теорија и методи за решавање задачи во кои се бара определување на екстреми и екстремни вредности на функции од повеќе променливи при однапред зададени ограничувања за вредностите на променливите. Тоа вклучува техники на моделирање и решавање на проблеми на оптимизација каде методите од класичната анализа не се погодни за примена (на пример, кога функцијата зависи од голем број на променливи) или воопшто не можат да се применат. Специфични примери за последното се задачите што се разгледуваат во линеарното програмирање. Кај овие задачи функцијата за која треба да се определи екстремна вредност е линеарна функција (која е во класата на диференцијабилни функции), а множеството над кое треба да се изврши оптимизацијата е определено со систем од ограничувања зададени во облик на линеарни неравенства. Доколку на ова множество функцијата има екстрем, точката во која се достигнува екстремната вредност не може да се определи преку методите на класичната анализа. Линеарна функција што не е константна нема стационарни точки, што значи дека екстремите не може да се детектираат преку градиентот. Бидејќи ограничувањата се во облик на неравенства, основниот метод на Лагранжови множители не може да се примени директно без да се направат дополнителни претпоставки за променливите.

## 1.2. Основна задача на математичко програмирање. Терминологија

Ако $f$ е функција дефинирана на множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$, под *основна задача на математичкото програмирање* се подразбира задача во која треба да се определи минимум на функцијата $f$ над множеството $X$, како и точките $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ во кои се достигнува минималната вредност. Формално означуваме

$$\min f(\mathbf{x}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in X, \tag{1.1}$$

и читаме „да се минимизира функцијата $f$ на множеството $X$“. Од аспект на класичната анализа, ова значи дека треба да се определи:

(1) дали постои $f^* \in \mathbb{R}$ таков што $f^* = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\} = \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$,

(2) ако (1) е исполнето, дали постои $\mathbf{x}^* \in X$ така што $f(\mathbf{x}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ за кој, доколку постои, означуваме $f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$, *или*

(3) да се покаже дека функцијата $f$ не ограничена од долу, и во тој случај ставаме $\inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\infty$, *или*

(4) да се покаже дека $X = \emptyset$, во овој случај, по дефиниција[1] ставаме $\inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = \infty$.

---

[1] Ако $X = \emptyset$, тогаш, по дефиниција, $\sup_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}) = -\infty$. Овие т.н. „конвенции“ се често прифатени во математичкото програмирање без дополнително објаснување. Иако најчесто се наведува дека се работи за конвенции („по дефиниција“), тие се резултат на т.н. теорија на мери (Cohn, 2013, стр. 381). Во контекст на оваа теорија, $\inf$ и $\sup$ може да се разгледуваат како функции дефинирани на фамилијата *од сите* подмножества на проширената бројна права $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ со вредности во $[-\infty, \infty]$. Со тоа симболите $-\infty$ и $+\infty$ (или само $\infty$) ќе бидат нивни можни вредности (за случаите кога дадено подмножество на $\mathbb{R}$ има инфимум $-\infty$ или пак супремум $+\infty$). За секое непразно подмножество $X$ на $\mathbb{R}$, $\inf$ и $\sup$ се дефинираат на вообичаениот начин и ќе важи $\inf X \leq \sup X$, но за $\emptyset$ имаме аномалија: $-\infty = \sup X < \inf X = \infty$ (Rockafellar & Wets, 2009, стр.1).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Во задачите на математичкото програмирање, множеството $X$ во (1.1) може да биде целиот простор ($X = \mathbb{R}^n$) и во тој случај имаме т.н. *безусловна минимизација*, или да биде од некој од следните облици

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I\}, \tag{1.2}$$

$$X = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I,\ g_j(\mathbf{x}) = 0, j \in E\right\}, \tag{1.3}$$

каде $E$ и $I$ се индексни множества, а $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in I$ и $g_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in E$ се дадени функции. Во овој случај имаме *задача на условна минимизација*.

Ако множеството $X$ е определено како во (1.2) или (1.3), наместо со изразот во (1.1), задачата на минимизација обично се запишува во облик

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.}\ \ f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I, \end{aligned} \tag{1.4}$$

односно,

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.}\ \ f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i \in I, \\ &\qquad\ g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j \in E. \end{aligned} \tag{1.5}$$

И во двата случаи, делот „$\min \varphi(\mathbf{x})$“, заедно со „p.o.“, ги читаме „да се минимизира функцијата $f$ при ограничувања“.

Од аспект на теориските резултати, најчесто е сосема доволно да се разгледува случајот кога задачата е дадена во облик (1.4) бидејќи равенството $g_j(\mathbf{x}) = 0$ може да се замени со системот неравенства

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \iff \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \\ -g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \end{cases} \text{, за секој } j \in E, \tag{1.6}$$

по што задачата може да се запиши во облик (1.4).

Како резултат на широката примена на математичкото програмирање за решавање на проблеми на оптимизација во голем број области од реалниот свет, за одделни поими од класичната анализа се прифатени малку поинакви термини што подолу се наведени во облик на дефиниција.

**Дефиниција 1.1.** За задачата на минимизација од облик (1.1), (1.4) или (1.5):

- функцијата $f$ се нарекува *функција на целта* (или *целна функција*),
- функциите $f_i$, $i \in I$ и $g_j$, $j \in E$, се нарекуваат *функции на ограничување*, додека неравенствата $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i \in I$ и равенствата $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $i \in E$ се нарекуваат *ограничувања*,
- $x_1, \ldots, x_n$ се нарекуваат *променливи на одлучување*, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ се нарекува *вектор на одлучување*,
- за ограничувањето $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$ се вели дека е *активно во точката* $\mathbf{x}_0 \in X$ ако важи $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$,
- множеството $X$ над кое се бара минимум на функцијата на целта се нарекува *допуштена* (или *дозволена*) *област*, а неговите елементи се нарекуваат *допуштени* (*дозволени*, *изводливи* или *одржливи*) *решенија*,
- точката $\mathbf{x}^* \in X$ за која важи $f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ се нарекува *глобален минимум* на $f$ на $X$, а вредноста $f(\mathbf{x}^*)$ се нарекува *минимална вредност* на $f$ на $X$,
- точката $\mathbf{x}^* \in X$ се нарекува *локален минимум* на $f$ на $X$ ако постои $\varepsilon > 0$ така што за секој $\mathbf{x} \in X$ со особина $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ да важи $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$.

Во дефиницијата на поимот локален минимум, со $\|\cdot\|$ е означена евклидската норма во $\mathbb{R}^n$ што попрецизно е дефинирана во одделот 2.1.2 од следната глава.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Иако минималната вредност на функција е единствена, точката во која таа се достигнува не мора да биде единствена. Вклучувајќи ја можноста допуштената област да биде празно множество или функцијата на целта $f$ да не е ограничена на допуштената област или, попрецизно, ако

$$-\infty \leq \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \leq \infty,$$

множеството од глобални минимуми на $f$ на $X$ може да се опиши со:

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x} \in X} f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left\{\mathbf{x}^* \in X \middle| f(\mathbf{x}^*) = \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})\right\}, & \text{ако } \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \neq \infty, \\ \emptyset, & \text{ако } \inf_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = \infty. \end{cases} \tag{1.7}$$

Покрај задачи на минимизација, во математичкото програмирање се решаваат и задачи на максимизација. Но, од аспект на теориски резултати, сосема е доволно да се разгледува основната задача бидејќи

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\inf_{\mathbf{x} \in X}\big(-f(\mathbf{x})\big), \tag{1.8}$$

$$\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x} \in X}\big(-f(\mathbf{x})\big). \tag{1.9}$$

со напомена дека сега множеството од сите глобални максимуми ќе биде

$$\operatorname*{argmax}_{\mathbf{x} \in X} f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left\{\mathbf{x}^* \in X \middle| f(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})\right\}, & \text{ако } \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \neq -\infty, \\ \emptyset, & \text{ако } \sup_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\infty. \end{cases} \tag{1.10}$$

Минимумите и максимумите уште се нарекуваат *оптимуми* или *оптимални решенија*, минималните и максималните вредности на функцијата на целта уште се нарекуваат *оптимални вредности*, а задачите на математичкото програмирање, *задачи на оптимизација*.

### 1.3. Видови на математичко програмирање

Задачите во математичкото програмирање може да се класифицираат по повеќе критериуми[2]. Дел од критериумите се воедно основа за определување на потесни области на математичко програмирање во кои се разгледуваат методи за оптимизација на задачи со специфични карактеристики.

**Класификација на задачи според бројот на ограничување**

Според бројот на ограничувања, задачите на математичкото програмирање се делат на само два вида:

- задачи без ограничувања (безусловна оптимизација), или
- задачи со ограничувања (условна оптимизација).

**Класификација на задачи според бројот на функции на целта**

И според бројот на функции на цел, задачите на математичкото програмирање се делат на само два вида:

- задачи со една функција на цел, или
- задачи со две или повеќе функции на цел, или т.н. *повеќекритериумски* задачи.

**Видови на математичко програмирање според тип на променливите**

Класификација на задачите за оптимизација може да се изврши според тоа дали променливите на одлучување може да се менуваат во интервали на бројната права или во некое преброиво (конечно или бесконечно) множество. Овој критериум воедно ги дефинира следните видови на математичко програмирање:

[2] Критериумите, класификациите на задачите и видовите на математичко програмирање наведени во овој учебник се врз основа на (Andréasson et al., 2007), (Sarker & Newton, 2008, стр. 12), (Keller, 2018, стр. 7), како и предговорите, воведните глави и описите на задачите што се разгледуваат од одделните глави во поголемиот дел од останатата литература.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- *непрекинато програмирање* што вклучува задачи каде секоја од променливите на одлучување може да се менува во некој *интервал* од бројната права,
- *дискретно програмирање* што вклучува задачи каде секоја од променливите на одлучување може да се менува во некое *преброиво* множество реални броеви,
- *целобројно програмирање* е специјален вид на дискретно програмирање каде секоја од променливите може да прима целобројни вредности,
- *мешовито-целобројно програмирање* што вклучува задачи каде еден дел од променливите на одлучување може да се менуваат во интервали од бројната права, а секоја од останатите променливи на одлучување да се менува во множества од целобројни вредности,
- *бинарно (или 0-1) програмирање* е специјален вид на целобројно програмирање каде секоја од променливите може да прима вредности од множеството $\{0,1\}$.

**Видови на математичко програмирање според својства на функциите**

Класификација на задачите за оптимизација може да се изврши според тоа дали и функцијата на целта и функциите на ограничување се претставени со линеарни изрази или тоа не е случај. Овој критериум ги дефинира следните видови на математичко програмирање:

- *линеарно програмирање* во кое се разгледуваат задачи каде функцијата на целта е линеарна или афина функција, додека пак функциите на ограничување се афини пресликувања (линеарна функција + константа),
- *нелинеарно програмирање* во кое се разгледуваат останатите видови задачи.

Еден од видовите на нелинеарно програмирање што има поголема примена е т.н. *квадратно програмирање* каде функцијата на цел е квадратна функција, а функциите на ограничување се афини пресликувања.

**Видови на математичко програмирање според структура на допуштената област**

Во математичкото програмирање структурата на допуштената област има исклучително важна улога, а од посебен интерес се случаите кога таа е конвексно множество. Според овој критериум и дополнителните својства на функцијата на цел и функциите на ограничување ги имаме задачите на оптимизација што се разгледуваат во следните видови на математичко програмирање:

- *конвексно програмирање*, кое вклучува задачи каде функцијата на целта е конвексна функција (за задачи на минимизација) или конкавна функција (за задачи на максимизација), а допуштената област е конвексно множество,
- *неконвексно програмирање*, што ги вклучува останатите видови задачи.

Покрај овие видови на математичко програмирање постојат и други видови каде се разгледуваат задачи на оптимизација што не може во целост да се сведат на некој од облиците (1.4) или (1.5), како што се динамичкото програмирање, параметарското програмирање, стохастичкото програмирање, робусните оптимизации, итн.

## 1.4. Примена на математичкото програмирање

Математичките оптимизации нашироко се применуваат за моделирање и решавање на проблеми поврзани со донесување одлуки во реалниот свет каде што ресурсите се ограничени, а целите („трошок“ или „добивка“) мора да се оптимизираат. Ова подразбира формулирање на задача што се однесува на оптимизација на функција на целта што зависи од една или повеќе променливи (променливи за одлучување), при што променливите најчесто треба да задоволуваат одредени ограничувања опишани со математички функции што произлегуваат од физички (реални), економски или логички ограничувања. Ваквиот пристап овозможува широк спектар на сложени сценарија (од дизајнирање на ланци на снабдување, па до распореди на екипажи во авиокомпании) да се преведат во прецизни математички задачи што можат да се анализираат и решат со помош на некој од методите на математичкото програмирање.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Една од најспецифичните области на примена се логистиката и транспортот. Линеарното и целобројното програмирање се често користена математичка алатка за одредување на најекономични маршрути на возила, распределба на залихи низ магацини или временски распореди на испораки. Минимизирањето на потрошувачката на гориво и времето на испорака, а воедно задоволување на побарувачката на клиентите при ограничени капацитети на возилата, може да се изрази како проблем на линеарно програмирање. Овие модели не само што ги намалуваат оперативните трошоци, туку и ја подобруваат сигурноста на услугите и одржливоста на животната средина со елиминирање на различни облици на неефикасност.

Во финансиите и енергетиката, математичкото програмирање обезбедува поддршка на стратешкото планирање во услови на неизвесност и конкуренција. На пример, со помош на квадратно или нелинеарно програмирање може да се постигни оптимизација на портфолио на некоја компанија (расположливи акции, обврзници и недвижности) за да се најди соодност на средствата вклучени во портфолиото со цел да се постигни баланс на нивото на ризик при инвестирање и потенцијалниот профит. Мешовито - целобројно програмирање се применува во енергетиката за креирање на распоред на единиците за производство на електрична енергија, со цел побарувачката да биде задоволена со најниска можна цена, а притоа да бидат земени целосно предвид техничките ограничувања на инфраструктурата. Овие два специфични примери демонстрираат како со примена на математичкото програмирање може да се донесат научно поткрепени одлуки во средини со висок ризик каде што и најмали промени можат да донесат значајни општествено-економски загуби или придобивки.

Математичкото програмирање има важна улога и во здравствениот систем. Се користи за оптимизирање на повеќе аспекти од работата на поголемите медицински установи, особено при работа во кризни ситуации (елементарни непогоди, пандемии) кога потенцијалното зголемување на бројот на пациенти наметнува оптимизирање на различни аспекти од работењето (поставувањето на итни установи, прераспределби на медицински персонал и останати медицински ресурси).

Во следниот оддел е наведена уште една област на примена што е тесно врзана со почетоците на развојот на теоријата на математичкото програмирање, методите на моделирање и алгоритмите за решавање.

Решението добиено со примената на некој метод на математичка оптимизација често се нарекува *план* или *програма*. Термините произлегуваат од практичните задачи каде, врз основа на резултатите од оптимизацијата, се изготвува некаков план или програма за понатамошно дејствување. Кај одделни методи, како на пример оној за решавање на транспортен проблем, табеларниот приказ на итерациите резултира со табела во која е прикажан планот за распределба на ресурсите согласно целите на задачата. Оттука и терминот „програмирање“ во називот на предметот. Овој термин не подразбира програмирање (испишување на код) во некој програмски јазик наменет за компјутерски апликации[3].

## 1.5. Историски развој

Оптимизирањето на математички функции свои корени има во резултатите на Л. Ојлер и Г. Л. Лагранж поврзани со варијационата анализа (XVIII век). Методот на Лагранжови множители е една од поважните техники за оптимизација што се користи во класичната анализа, а е основа на т.н. Кун-Такерови услови во модерната теорија на математичкото програмирање. Од крајот на XVIII век и почетокот на XIX век датира и познатиот метод на најмали квадрати воведен од К. Ф. Гаус што е еден од најшироко користените методи на оптимизација во науката и инженерството.

[3] Методите на математичкото програмирање се основа за креирање на голем број на компјутерски алгоритми што, запишани во соодветен компјутерски код, се вклучени во компјутерски апликации како MS Excel, LibreOffice, Mathematica, MATLAB или пак во специјализирани компјутерски апликации наменети за решавање на одделни задачи на оптимизација што подразбираат обемни пресметки.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Клучен период за почеток на развој на методи за оптимизација што денес се составен дел на математичкото програмирање е периодот околу Втората светска војна. Од периодот непосредно пред нејзиниот официјален почеток датираат првичните резултати од теоријата на игри на Џ. фон Нојман[4] и трудот на Л. В. Канторович од 1939 во кој се опишани методи за организирање и планирање на производството[5]. Во текот на Втората светска војна во Велика Британија и САД се ангажирани поединци и тимови од математичари чија задача беше да направат оптимални распоредувања на човечки и материјални ресурси за успешно изведување на воените операции. Нивните методи подоцна ќе се покажат како исклучително моќна алатка за решавање на разни проблеми поврзани со организацијата на работењето во компаниите. Од повоениот период датираат и првите резултати на Џ. Б. Данциг[6] што традиционално се смета за основоположник на современата теорија на математичкото програмирање и автор на симплекс методот за решавање на задачи од линеарното програмирање.

Поголемиот дел од теоријата на математичкото програмирање е скоро целосно заокружен во периодот од 1950 до 1990 година, кој уште се смета како ера на класичното математичко програмирање. Во овој период се формализирани и повеќето апликативни методи[7] (т.н. класични методи). Во првата декада се целосно заокружени линеарното и динамичкото програмирање, како и поголем дел од теориските основи на нелинеарното програмирање. Во втората декада нагласок е ставен на развојот на целобројното и неконвексното програмирање, теоријата на мрежи и теоријата на управување, и развиени се некои од техниките на декомпозиција кај оптимизациите на големи системи. Во третата декада напорите се насочени кон целосно заокружување на веќе добиените резултати во претходните две декади, развојот на теоријата на недиференцијабилни оптимизации и спојувањето на математичкото програмирање со теоријата на графови, од што резултат е т.н. комбинаторно програмирање. Развојот во четвртата декада е поттикнат од почетоците на развојот на теоријата на пресметковна комплексност. Кон крајот на оваа декада е почнато со работа врз методи на ефикасна оптимизација по патека на централна траекторија[8], попознати и како методи на внатрешна точка.

Во последната декада од XX век е заокружена општата теорија за методите на внатрешна точка што обезбеди алтернатива на симплекс методот за побрзо решавање на одделни проблеми на оптимизација. Од друга страна, оптимизации базирани на природни феномени[9] и метаевристичките алгоритми се имплементирани за решавање на проблеми на комбинаторната оптимизација каде класичните методи не даваат резултати. Оваа тенденција продолжи и во XXI век. Дополнително, креирани се т.н. хибридни[10] алгоритми, извршено е интегрирање на математичкото програмирање со машинското учење и направени се напори за имплементација на стохастичкото програмирање и робустните оптимизации за справување со неизвесност кај големите множества податоци, тренд што и натаму ќе се одржи. Напоредно, со подобрување на алгоритамските и хардверските перформанси на персоналните сметачките машини, значително е намалено времето за решавање на оптимизациите базирани на методите на линеарното и мешовито - целобројното програмирање со што дел од софтверските апликации за оптимизација станаа достапни за голем број на корисници.

[4] Официјална верзија на теоријата на игри изложена во (Von Neumann & Morgenstern, 1953), првпат е објавена во 1944 г.

[5] Оригиналниот труд што објавен на руски јазик, заради воениот период остана скоро непознат за поширокота научна заедница. сè до 1960 година кога е публикуван англискиот превод (Kantorovich, 1960).

[6] Според личното тврдење во (Dantzig, 1985), својот метод Џ. Данциг го конципирал уште во 1947, но официјалното публикување е направено подоцна ((Koopmans, 1951), (Dantzig et al., 1953) и (Dantzig, 1963)).

[7] Концизен осврт на историскиот развој во периодот од 1947 до 2015 е наведен во (Minoux, 1986), (Calafiore & Ghaoui, 2014) и (Hillier & Lieberman, 1995).

[8] Изворно „Interior-Point Polynomial Algorithms“ што го генерализираат симплекс методот.

[9] Станува збор за алгоритми што не се дел од математичкото програмирање. Тоа се најчесто алгоритми базирани на биолошките системи, како што се генетските алгоритми или оние што го симулираат однесувањето на рој на „честички“, колонија на мравки, Харисовите јастреби или пак морските предатори.

[10] Спој на класичните методи на оптимизација со некој од и евристичките или метаевристичките алгоритми.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 2. ЕЛЕМЕНТИ ОД КОНВЕКСНА АНАЛИЗА

Во оваа глава ќе наведеме краток преглед на дел од поважните дефиниции и својства поврзани со векторската и тополошката структура на $n$-димензионалниот реален евклидски простор што се неопходни за соодветно формулирање на поимите и поважните тврдења од конвексната анализа. Конвексната анализа е делот од математичката анализа што претставува основа за теоријата и методите на математичкото програмирање. Ќе се задржиме само на деловите од теоријата што се неопходни за совладување на содржините од останатите глави.

## 2.1. Реален n-димензионален евклидски простор

Нека е дадено множеството

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,2, \cdots, n\}\},$$

каде $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви. Во овој оддел ќе наведеме некои поважни дефиниции и својства што се однесуваат на векторската структура на множеството $\mathbb{R}^n$, дефиницијата на метриката и тополошките својства што произлегуваат од неа.

### 2.1.1. Збир, множење со скалар, споредување и скаларен производ

**Дефиниција 2.1.** Нека $(x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Со изразите

$$(x_1, x_2, \cdots x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n),$$

во множеството $\mathbb{R}^n$ се дефинирани операциите *збир* и *множење со скалар*, соодветно.

Со операциите збир и множење со скалар множеството $\mathbb{R}^n$ добива структура на векторски простор над множеството $\mathbb{R}$. Поради ова, елементите на $\mathbb{R}^n$ уште се нарекуваат $n$ *−димензионални вектори* или само *вектори*. Освен како подредени $n$ −торки, тие често се идентификуваат и со $n \times 1$ матрици:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T,$$

каде „$T$“ ја означува операцијата транспонирање на матрица.

Векторот кај кој сите координати се еднакви на 0, се нарекува нулти вектор во $\mathbb{R}^n$ и се означува со $\mathbf{o} = (\underbrace{0,0, \dots, 0}_{n})$.

За кои било дадени броеви $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ секогаш може да се каже која од релациите $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha \geq \beta$ или $\alpha \leq \beta$ е точна. За еднаквост на $n$ −димензионални вектори може да се даде сосема прецизна дефиниција, но при $n \geq 2$ аналогни релации на релациите $>$, $\geq$, $<$ и $\leq$ не може во целост да се дефинираат во $\mathbb{R}^n$. Тоа може да се направи само делумно како што е посочено во следната дефиниција.

**Дефиниција 2.2.** Векторите $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ се *еднакви* ако $x_i = y_i$ за секој $i \in \{1,2, \dots, n\}$, и тоа се означува со $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. За векторот $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ се вели дека е *ненегативен* и се означува со $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, ако $x_i \geq 0$ за секој $i \in \{1,2, \dots, n\}$. За векторот $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ се вели дека е *позитивен* и се означува со $\mathbf{x} > \mathbf{o}$, ако $x_i > 0$ за секој $i \in \{1,2, \dots, n\}$. Ако за векторите $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ важи

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \geq \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} > \mathbf{o}, \quad \mathbf{y} - \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \quad \text{или} \quad \mathbf{y} - \mathbf{x} > \mathbf{o},$$

тогаш означуваме

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} > \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{или} \quad \mathbf{x} < \mathbf{y},$$

соодветно.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Дефиниција 2.3.** Нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Векторот од облик

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n,$$

се нарекува *линеарна комбинација* на векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$.

**Дефиниција 2.4.** За векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ се вели дека се *линеарно независни*, ако од равенството

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m = \mathbf{o},$$

следи дека $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. Во спротивно, за векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ се вели дека се *линеарно зависни*.

**Својство 2.1.** Кое било подмножество од $\mathbb{R}^n$ може да содржи најмногу $n$ линеарно независни вектори.

Бројот $n$ од претходното својство уште се нарекува *димензија* на просторот $\mathbb{R}^n$.

**Дефиниција 2.5.** За конечното множество $X = \{\mathbf{x}_j \mid j = 1,2,\cdots, s \geq n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ се вели дека е *недегенерирано*, ако содржи подмножество од $n$ линеарно независно вектори.

**Дефиниција 2.6.** За векторите $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_n) \in \mathbb{R}^n$, со

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \overset{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

е дефиниран елемент од $\mathbb{R}$ кој се нарекува *скаларен* (или *точкест*) *производ* на векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

**Својство 2.2.** Со скаларниот производ е дефинирано пресликување

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

што ги има следните особини:

i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е билинеарно пресликување, т.е. за кои било $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи
$$\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,$$
$$\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е симетрично пресликување, односно $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (што значи дека за скаларниот производ во $\mathbb{R}^n$ важи комутативниот закон),

iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е позитивно дефинитно пресликување, т.е. важи $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ за секој $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, при што $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ако, и само ако, $\mathbf{x} = \mathbf{o} = (0,0,\ldots,0)$.

**Својство 2.3.** Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots y_m) \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ е дадена матрица, тогаш $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} \rangle$.

**Доказ.** Следи непосредно од дефиницијата на скаларен производ и операциите производ на матрици и транспонирање на матрица. ■

### 2.1.2. Норма на вектор, растојание меѓу вектори, ограничени множества

**Дефиниција 2.7.** За векторот $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, величината

$$\|\mathbf{x}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0,$$

се нарекува *норма* или *должина* на $\mathbf{x}$.

Во множествата во $\mathbb{R}^n$ може да се воведат и други видови на норми на векторите. Специфично за онаа од дефиниција 2.7 е што таа произлегува од скаларниот производ дефиниран во $\mathbb{R}^n$. За $n = 2$ и $n = 3$ таа целосно се совпаѓа со поимот должина во евклидската геометрија и поради тоа уште се нарекува *евклидска норма* на $\mathbb{R}^n$, а самото множество $\mathbb{R}^n$ уште се нарекува $n$-*димензионален евклидски простор*.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Својство 2.4.** Со нормата е дефинирано пресликување $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ што ги има следните особини:

i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, за секој $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$,
ii) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$, за секои $\lambda \in \mathbb{R}$ , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
iv) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Неравенството iii) од претходното својство уште се нарекува *неравенство на триаголник* или неравенство на Минковски, додека iv) е уште познато како неравенство на Коши-Шварц (или, Коши-Буњаковски-Шварц).

Имајќи ја предвид дефиницијата на поимот „агол меѓу два вектори“ во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, за поголеми вредности на $n$ може да се даде следната генерализација.

**Дефиниција 2.8.** *Агол меѓу векторите* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ е аголот $\theta \in [0, \pi]$ за кој важи

$$\cos\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ се *ортогонални* ако важи $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ и тоа се означува со $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

**Дефиниција 2.9.** За векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ненегативниот број $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overset{\text{def}}{=} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ се нарекува *растојание меѓу* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Слично како кај скаларниот производ и кај евклидската норма, со претходната дефиниција е зададено пресликување $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ што, поради следното својство, претставува *метрика* на просторот $\mathbb{R}^n$.

**Својство 2.5.** Пресликување $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е со следните својства:

i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

**Дефиниција 2.10.** За множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$ се вели дека е *ограничено*, ако постои $M > 0$ така што $\|\mathbf{x}\| \leq M$ за секој вектор $\mathbf{x} \in X$.

### 2.1.3. Стандардна ортонормирана база во n-димензионален евклидски простор, координатни оски, координатни хиперрамнини и хипероктанти

Векторите

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0) \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \cdots, 1) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

формираат т.н. *стандардна ортонормирана база* за просторот $\mathbb{R}^n$ и тие се со следните особини:

i) $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, за секој $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$,
ii) $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, за секои $i \neq j$,
iii) векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ се линеарно независни,
iv) секој вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ може на единствен начин да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n.$$

Поимите координатна оска, координатна рамнина, квадрант и октант имаат свои генерализации и во $\mathbb{R}^n$ за $n > 3$.

**Дефиниција 2.11.** Множеството:

- $\{x_i\mathbf{e}_i | x_i \in \mathbb{R}\} = \{(0, \cdots, x_i, \cdots, 0) | x_i \in \mathbb{R}\}$ се нарекува $x_i$ *–оска* во $\mathbb{R}^n$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i = 0\}$ се нарекува *координатна хиперрамнина* во $\mathbb{R}^n$,

а, ако $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ е таков што $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$, затворен хипероктант (или затворен ортант) што кореспондира на $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ е множеството

$$\{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n) \in \mathbb{R}^n \big| \varepsilon_i x_i \geq 0, i \in \{1,2, \dots, n\}\big\},$$

а отворен хипероктант (или отворен ортант) е множеството

$$\{(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \cdots, \varepsilon_n x_n) \in \mathbb{R}^n \big| \varepsilon_i x_i > 0, i \in \{1,2, \dots, n\}\big\},$$

специјално, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$ и $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} > \mathbf{o}\}$ уште се нарекуваат *ненегативен* и *позитивен* хипероктант (ортант), соодветно.

Ненегативниот хипероктант во $\mathbb{R}^n$ често се означува и со $\mathbb{R}^n_+$.

Согласно претходната дефиниција, во $\mathbb{R}^n$ има $n$ различни оски, $n$ различни координатни хиперрамнини и $2^n$ различни хипероктанти. Да напоменеме дека:

- за $n = 1$, имаме само една оска, затворените хипероктанти се интервалите $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$, отворените хипероктанти се интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, а координатната хиперрамнина се совпаѓа со координатниот почеток,
- за $n = 2$, имаме две оски, отворените хипероктанти се вообичаените квадранти, а координатната хиперрамнина се совпаѓа со координатниот почеток.
- за $n = 3$, имаме три оски, три хиперрамнини што се совпаѓаат со вообичаените координатни рамнини, а отворените хипероктанти се вообичаените октанти.

### 2.1.4. Точка, отсечка, права и полуправа во n-димензионален евклидски простор

Слично како во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, координатите на векторот $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ се смета дека се координати на некоја точка $P$ и се означува со $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Точката $O(0,0, \cdots, 0)$ е точка што кореспондира на нултиот вектор и се нарекува *координатен почеток* во $\mathbb{R}^n$. Тој припаѓа на секоја од оските во $\mathbb{R}^n$ и на секоја координатна хиперрамнина. На тој начин, векторот $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ може да смета за радиус вектор на точката $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, т.е. како вектор со почетна точка $O(0,0, \cdots, 0)$ и крајна точка $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, и се означува со $\mathbf{r}_P = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overrightarrow{OP}$.

**Дефиниција 2.12.** Нека $P$ и $Q$ се две точки со радиус вектори $\mathbf{r}_P = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ и $\mathbf{r}_Q = (y_1, y_2, \cdots y_n)$, соодветно. *Отсечка* во $\mathbb{R}^n$ со крајни точки $P$ и $Q$ е множеството точки

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \{((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, (1-\lambda)x_2 + \lambda y_2, \cdots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n) | \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{(1-\lambda)\mathbf{r}_P + \lambda \mathbf{r}_Q | \lambda \in [0,1]\}.\end{aligned}$$

Бидејќи $1 - \lambda \in [0,1]$, секогаш кога $\lambda \in [0,1]$, редоследот по кој се наведуваат или запишуваат крајните точки на отсечките е неважен. Со други зборови, отсечките $\overline{PQ}$ и $\overline{QP}$ се еднакви, т.е.

$$\overline{PQ} = \{(1-\lambda)\mathbf{r}_P + \lambda \mathbf{r}_Q | \lambda \in [0,1]\} = \{(1-\mu)\mathbf{r}_Q + \mu \mathbf{r}_P | \mu \in [0,1]\} = \overline{QP}.$$

Слично како во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, ако $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, отсечка во $\mathbb{R}^n$ може да се дефинира како множество

$$T = \{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{y}_0 | \lambda \in [a, b]\}.$$

Крајните точки на вака дефинирана отсечка се крајните точки на векторите $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + a\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + b\mathbf{y}_0$, а векторот $\mathbf{y}_0$ се нарекува *насочувачки вектор* на отсечката $T$.

Покрај поимот отсечка, во $\mathbb{R}^n$ своја генерализација имаат и поимите „права“ и „полуправа“ како што следи.

**Дефиниција 2.13.** Нека $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$.

- Множеството $L = \{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{y}_0 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ се нарекува *права што минува низ* $\mathbf{x}_0$ *и е генерирана од векторот* $\mathbf{y}_0$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- Множеството $R = \{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{y}_0 | \lambda \geq 0\}$ се нарекува *полуправа со почеток во* $\mathbf{x}_0$ *и е генерирана од векторот* $\mathbf{y}_0$.
- Полуправата со почеток во координатниот почеток и генерирана од $\mathbf{y}_0$, т.е. множеството $R_{\mathbf{y}_0} = \{\lambda \mathbf{y}_0 | \lambda \geq 0\}$ се нарекува *зрак генериран од векторот* $\mathbf{y}_0$.

**Напомена 2.1.** Кај нормираните векторски простори честа пракса е термините „вектор“ и „точка“ да се користат со исто значење иако, строго формално, се работи за различни математички објекти. Па така, за елементот $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ се користи и изразот „векторот $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$“, и изразот „точката $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$“.

### 2.1.5. Отворени и затворени множества, точки на натрупување

**Дефиниција 2.14.** Нека $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ и $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Множеството $B(\mathbf{a}, \varepsilon) = B_\varepsilon(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$, каде $\varepsilon > 0$, се нарекува $\varepsilon$ *−околина* на точката $\mathbf{a}$.
- Точката $\mathbf{a}$ се нарекува *точка на натрупување* за множеството $X$, ако за секој број $\varepsilon > 0$ важи $X \cap B_\varepsilon(\mathbf{a}) \neq \emptyset$.
- За точката $\mathbf{a}$ се вели дека е *внатрешна точка* на $X$ ако постои $\varepsilon > 0$ така што $B_\varepsilon(\mathbf{a}) \subset X$. Множеството од сите внатрешни точки на множеството $X$ се означува со $\text{int}(X)$ и се нарекува *внатрешност на* $X$.
- Точката $\mathbf{a} \in X$ се нарекува *гранична точка* на $X$, ако таа не е внатрешна точка ниту на $X$, ниту на $\mathbb{R}^n \setminus X$. Множеството од сите гранични точки на $X$ се означува со $\partial X$ и се нарекува *граница на* $X$.
- Множеството $X \cup \partial X$ се нарекува *затворач* на множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и се означува со $\overline{X}$ (или $\text{cl}(X)$).
- Множеството $\mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$ се нарекува *надворешност* на множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и се означува со $\text{ext}(X)$.
- За множеството $X$ се вели дека е:
    - *отворено*, ако сите негови точки се внатрешни точки,
    - *затворено*, ако $\mathbb{R}^n \setminus X$ е отворено множество,
    - *компактно*, ако тоа е затворено и ограничено множество.

**Својство 2.6.** Точката $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ е точка на натрупување за множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ако, и само ако, постои низа вектори $\{\mathbf{a}_n | n \in \mathbb{N}\} \subset X$ така што $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| \to 0$ кога $n \to \infty$.

**Својство 2.7.** Множеството $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е затворено ако, и само ако, $X$ ги содржи сите свои точки на натрупување.

**Својство 2.8.** Важат следните тврдења:

i) $\text{int}(X)$ и $\text{ext}(X)$ се отворени множества,
ii) $\mathbb{R}^n = \text{int}(X) \cup \partial X \cup \text{ext}(X)$, за секое $X \subseteq \mathbb{R}^n$,
iii) $\text{int}(X) \cap \partial X = \text{int}(X) \cap \text{ext}(X) = \partial X \cap \text{ext}(X) = \emptyset$, за секое $X \subseteq \mathbb{R}^n$,
iv) $\overline{X} = \text{int}(X) \cup \partial X = \mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(X)$, за секое $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

**Својство 2.9.** Важат следните тврдења:

i) унија од отворени множества е отворено множество,
ii) пресек на затворени множества е затворено множество,
iii) конечен пресек од отворени множества е отворено множество,
iv) конечна унија од затворени множества е затворено множество.

Отсечките, правите, полуправите, затворените хипероктанти, координатните оски и координатните хиперрамнини се затворени множества. Самиот простор $\mathbb{R}^n$ и $\emptyset$ се истовремено и отворени, и затворени множества.

**Својство 2.10. (Теорема на Болцано-Ваерштрас)** Секое ограничено и бесконечно подмножество од $\mathbb{R}^n$ има барем една точка на натрупување.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Претходното својство, чиј доказ може да се најде во (Bartle, 1976, стр. 70), е генерализација на својството на теоремата на Болцано-Ваерштрас за постоење на конвергентна подниза од ограничена низа реални броеви. На оваа теорема се надоврзува и теоремата на Ваерштрас што се однесува на услов за постоење на глобален минимум и глобален максимум на непрекината функција што ќе биде формулирана и докажана во следната глава (поглавје 3.1).

### 2.1.6. Векторски потпростори, хиперрамнини и полупростори

**Дефиниција 2.15.** Множеството $V \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарекува *векторски потпростор* на $\mathbb{R}^n$, ако тоа е затворено во однос на операциите збир на вектори и множење на вектор со скалар, т.е. ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, важи $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ и $\lambda \mathbf{x} \in V$.

**Пример 2.1.** Секоја оска и секоја координатна хиперрамнина во $\mathbb{R}^n$, е векторски потпростор на $\mathbb{R}^n$. Поопшто, ако $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ тогаш множеството од сите линеарни комбинации на овие вектори, т.е. множеството

$$V = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m : \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}\},$$

е векторски потпростор на $\mathbb{R}^n$. За овој векторски потпростор се вели дека е *генериран* (или *распнат*) од векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ и се означува со

$$V = \mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}.$$

Множеството $\mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}$ уште се нарекува *распнувач на векторите* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$.

**Дефиниција 2.16.** За векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ се вели дека формираат *векторска база* за множеството $U$ ако тие се линеарно независни и притоа важи

$$U \subseteq \mathrm{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m\}.$$

Векторската база на дадено множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ може и да не е единствена, но таа може да содржи најмногу $n$ различни елементи од $U$.

Координатните хиперрамнини се специјален случај на хиперрамнини што, како множества, имаат исклучителна важност во математичкото програмирање. Формално поимот „хиперрамнина" се дефинира како што следи.

**Дефиниција 2.17.** Ако $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ и $b \in \mathbb{R}$ тогаш множеството

$$\begin{aligned} H &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = b\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = b\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

се нарекува *хиперрамнина* во $\mathbb{R}^n$ *со носечки вектор* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$. Елементите на $H$ уште се нарекуваат *решенија на равенката*

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = b.$$

Ако $b = 0$, тогаш хиперрамнината дефинирана во (2.1) минува низ координатниот почеток. Ваквата хиперрамнина е воедно и векторски потпростор $\mathbb{R}^n$ со векторска димензија $n - 1$.

Согласно претходната дефиниција, во $\mathbb{R}^2$ хипперрамнина е исто што и права, а во $\mathbb{R}^3$ хипперрамнина е исто што и рамнина.

Од рамнинска геометрија е познато дека секоја права во рамнината го дели множеството од сите точки од рамнината што не лежат на таа права на две дисјунктни множества, што уште се нарекуваат полурамнини и за кои велиме дека лежат на различни страни од дадената права. Притоа, за било кои две точки што не лежат на иста страна од правата, таа ќе ја сечи отсечката што ги поврзува точките. Слично, една рамнина во простор го дели множеството точки од просторот што не лежат на рамнината на две дисјунктни множества точки што се нарекуваат полупростори и за кои велиме дека се на различни страни од дадената рамнина. Овој концепт може да се генерализира и во $\mathbb{R}^n$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Дефиниција 2.18.** За множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ се вели дека *лежи на едната страна од хиперрамнината* $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = b\}$, ако $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq b$ за секој $\mathbf{x} \in X$ или, ако $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq b$ за секој $\mathbf{x} \in X$. Во случај на строго неравенство се вели дека $X$ *лежи стриктно на едната страна од* $H$.

Во математичкото програмирање од посебно значење се следните множества точки поврзани со претходната дефиниција:

$$S_+ = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n > b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle > b\},$$
$$S_- = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n < b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < b\},$$
$$\overline{S_+} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \geq b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq b\},$$
$$\overline{S_-} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \leq b\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq b\}.$$

За секое од овие множества, хиперрамнината $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = b\}$ се нарекува *гранична* (*ограничувачка* или *определувачка*) хиперрамнина.

**Својство 2.11.** За множествата $S_+$, $S_-$, $\overline{S_+}$ , $\overline{S_-}$ и нивната гранична хиперрамнина $H$ важат следните својства.

i) $S_+ \cap S_- = S_+ \cap \overline{S_-} = \overline{S_+} \cap S_- = \emptyset$,
ii) $\overline{S_+} \cap \overline{S_-} = H$,
iii) $S_+ \cup H \cup S_- = \mathbb{R}^n = \overline{S_+} \cup \overline{S_-}$,
iv) $S_+$ и $S_-$ се отворени множества,
v) $\overline{S_+}$ и $\overline{S_-}$ се затворени множества.

Заради iv) и v) од претходното својство, множествата $S_+$ и $S_-$ уште се нарекуваат *отворени полупростори*, а $\overline{S_+}$ и $\overline{S_-}$ се нарекуваат *затворени полупростори* во $\mathbb{R}^n$.

**Својство 2.12.** Непразен пресек на затворени полупростори во $\mathbb{R}^n$ е затворено множество.

## 2.2. Конвексни множества; Екстремални точки

**Дефиниција 2.19.** За множеството $C \subseteq \mathbb{R}^n$ се вели дека е *конвексно*, ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и секој $\lambda \in [0,1]$, важи $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in C$.

Со други зборови, конвексно множество е секое множество што за секои две свои точки ја содржи и отсечката што нив ги спојува. По дефиницијата, празното множество сметаме дека е конвексно.

**Пример 2.2. а)** Едноелементно множество, целиот простор $\mathbb{R}^n$, отсечка, права, полуправа, векторски потпростор, хиперрамнина, отворен и затворен полупростор, се сите конвексни множества во $\mathbb{R}^n$.

**б)** Квадар, паралелопипед, пирамида чија основа е правилен многуаголник, пресечена пирамида чија основа е правилен многуаголник, конус и пресечен конус се конвексни множества во $\mathbb{R}^3$. Топката е исто така конвексно множество, но сферата не е.

**в)** Отворена и затворената топка во $\mathbb{R}^n$ со радиус $r > 0$, т.е. множествата

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| < r\} \quad \text{и} \quad \overline{B(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| \leq r\},$$

се конвексни множества.

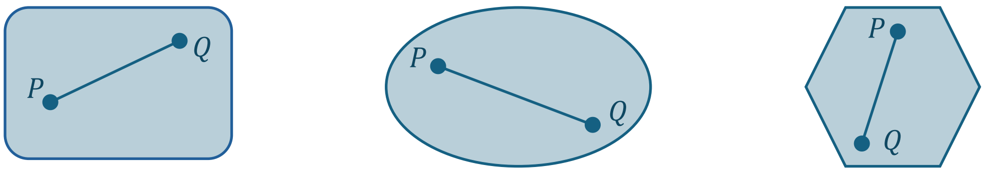
**г)** $n$-димензионална коцка што се дефинира со

$$K = [0,1]^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i \in [0,1], i = 1, \dots, n\},$$

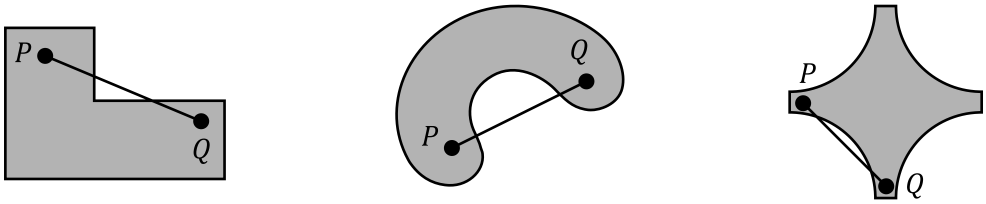
е конвексно множество.

**д)** Правилните многуаголници, отворен или затворен круг, како и оние прикажани на слика 2.1 се сите конвексни множества во $\mathbb{R}^2$. Кружницата не е конвексно множество. Рамнинските фигури на слика 2.2 не се конвексни множества.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 2.1. Примери на конвексни рамнински фигури (автори)




Слика 2.2. Примери на рамнински фигури што не се конвексни (автори)

**Теорема 2.1.** Пресек на конвексни множества е конвексно множество.

**Доказ.** Нека $\{C_i | i \in I\}$ е фамилија од конвексни множества и нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} C_i$. За секој $\lambda \in [0,1]$ и секој $i \in I$, поради конвексноста на $C_i$, ќе важи $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C_i$, што значи дека $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} C_i$. ■

Од претходната теорема следи дека пресек на векторски потпростори, пресек на хиперрамнини и пресек на полупростори се исто така конвексни множества (со можност пресекот да е празно множество). Тоа значи дека множеството решенија на систем линеарни равенки (запишан во матрична форма)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

и множеството решенија на систем линеарни неравенки (запишан во матрична форма)

$$\mathbf{Cx} \geq \mathbf{d},$$

се конвексни множества.

**Теорема 2.2.** Нека $C$ и $D$ се конвексни множества и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогаш множеството $\lambda C + \mu D = \{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} | \mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in D\}$ е конвексно.

**Доказ.** Доказот следува непосредно од дефиницијата за конвексни множества. ■

**Дефиниција 2.20.** Векторот $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ е *конвексна линеарна комбинација* на векторите $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$, ако постојат реални броеви $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такви што

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i\,; \quad \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m; \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

**Теорема 2.3.** Множеството $C \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексно ако, и само ако, ги содржи сите конвексни линеарни комбинации на своите точки.

**Доказ.** Ако множеството $C$ ги содржи сите конвексни линеарни комбинации на своите точки, тогаш ќе ги содржи и сите комбинации со облик

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2\,;\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0;\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1;\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C,$$

па врз основа на дефиниција 2.20, $C$ е конвексно множество.

Обратно, нека $C$ е конвексно множество. Со математичка индукција ќе покажеме дека $C$ ги содржи сите конвексни линеарни комбинации на своите точки. За $m = 2$ од конвексноста на $C$ следува дека

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 \in C, \text{ секогаш кога } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C.$$

Претпоставуваме дека сите конвексни линеарни комбинации на не повеќе од $m-1$ точки од $C$ припаѓаат на $C$. Нека

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

е конвексна линеарни комбинација од точките $\mathbf{x}_i \in C, i = 1,2,\cdots,m$.

Ако $\lambda_m = 0$, од индуктивната претпоставка следи $\mathbf{b} \in C$.

Ако $\lambda_m = 1$, тогаш $\mathbf{b} = x_m \in C$.

Претпоставуваме дека $0 < \lambda_m < 1$. Тогаш важи

$$\mathbf{b} = (1-\lambda_m)\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)}\mathbf{x}_i + \lambda_m \mathbf{x}_m.$$

Бидејќи

$$\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} \geq 0,$$

и

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)} = \frac{1}{(1-\lambda_m)}\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i = \frac{1}{(1-\lambda_m)}\cdot(1-\lambda_m) = 1,$$

врз основа на индуктивната претпоставка следи дека

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_m)}\mathbf{x}_i \in C,$$

па $\mathbf{b} \in C$, како конвексна линеарна комбинација на две точки е елемент од $C$. ■

**Дефиниција 2.21.** Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Пресекот на сите конвексни множества од $\mathbb{R}^n$ кои го содржат множеството $A$ го нарекуваме *конвексна обвивка* на $A$ и го означуваме со $\operatorname{conv}(A)$.

**Теорема 2.4.** Конвексната обвивка на множеството $A$ е еднаква на множеството од сите конвексни линеарни комбинации на точките од $A$.

**Доказ.** Нека $K$ е множеството од сите конвексни линеарни комбинации на елементите од $A$. Ќе покажеме дека важат инклузиите $K \subseteq \operatorname{conv}(A)$ и $\operatorname{conv}(A) \subseteq K$.

За да се покаже дека $K \subseteq \operatorname{conv}(A)$, прво да забележиме дека $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$ и дека $\operatorname{conv}(A)$ е конвексно множество (следи од теорема 2.1 и самата дефиниција на $\operatorname{conv}(A)$). Според теорема 2.3 $\operatorname{conv}(A)$ ги содржи конвексните линеарни комбинации на своите елементи, па поради $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$, $\operatorname{conv}(A)$ ќе ги содржи и конвексните линеарни комбинации на елементите од $A$, што значи дека $K \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

За да се покаже дека $\operatorname{conv}(A) \subseteq K$, прво да забележиме дека $A \subseteq K$. Доволно е да се покаже дека $K$ е конвексно (тогаш инклузијата $\operatorname{conv}(A) \subseteq K$ ќе следи од дефиниција 2.21). За таа цел нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$. Тогаш

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{a}_i; \quad \alpha_i \geq 0,\ \mathbf{a}_i \in A,\ i = 1,\dots,m; \quad \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1,$$

$$\mathbf{x}_2 = \sum_{i=1}^{p}\beta_i\mathbf{b}_i; \quad \beta_i \geq 0,\ \mathbf{b}_i \in A,\ i = 1,\dots,p; \quad \sum_{i=1}^{p}\beta_i = 1.$$

Ставајќи

- $\alpha_i = 0$ за $i \in \{m+1,\dots,p\}$ и избирајќи произволни $\mathbf{a}_i \in A$ за $i \in \{m+1,\dots,p\}$ во случај кога $m < p$,
- $\beta_i = 0$ за $i \in \{p+1,\dots,m\}$ и избирајќи произволни $\mathbf{b}_i \in A$ за $i \in \{p+1,\dots,m\}$ во случај кога $m > p$,

можеме да сметаме дека $m = p$. Ако сега $\lambda \in [0,1]$, тогаш важи

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda\alpha_i + \sum_{i=1}^{m}(1-\lambda)\beta_i = \lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\beta_i = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

што значи дека точката

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda\alpha_i\, \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\lambda)\beta_i\, \mathbf{b}_i$$

е конвексна комбинација на точките $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in A$ и, како таква, припаѓа на $K$. Со тоа е докажано дека $K$ е конвексно множество. ■

**Теорема 2.5.** Внатрешноста и затворачот на конвексно множество се конвексни множества.

**Доказ.** Нека $C$ е конвексно множество. Ако $\operatorname{int}(C) = \emptyset$, тврдењето е тривијално. Нека $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$ и $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \operatorname{int}(C)$. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ така што

$$B_\varepsilon(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \varepsilon\} \subseteq C \quad \text{и} \quad B_\varepsilon(\mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| < \varepsilon\} \subseteq C.$$

Нека $\lambda \in [0,1]$. Ќе покажеме дека $B_\varepsilon(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}) \subseteq C$. Нека $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z})$. Тогаш постојат $\mu \in [0, \varepsilon)$ и вектор $\mathbf{e}$, таков што $\|\mathbf{e}\| = 1$ и притоа $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} + \mu\mathbf{e}$. Лесно може да се провери дека важи $\mathbf{y} + \mu\mathbf{e} \in B_\varepsilon(\mathbf{y}) \subseteq C$ и $\mathbf{z} + \mu\mathbf{e} \in B_\varepsilon(\mathbf{z}) \subseteq C$. Бидејќи $C$ е конвексно множество следи дека

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} + \mu\mathbf{e} = \lambda(\mathbf{y} + \mu\mathbf{e}) + (1-\lambda)(\mathbf{z} + \mu\mathbf{e}) \in C.$$

Па, $B_\varepsilon(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}) \subseteq C$, т.е. $\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \in \operatorname{int}(C)$. Со тоа покажавме дека $\operatorname{int}(C)$ е конвексно множество.

За да се покаже дека и $\overline{C}$ е конвексно множество, нека $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \overline{C}$. Според својство 2.6 и својство 2.7 постојат низи $(\mathbf{y}_n)$ и $(\mathbf{z}_n)$ во $C$ кои конвергираат кон $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, соодветно. Ако $\lambda \in [0,1]$, тогаш низата $(\lambda\mathbf{y}_n + (1-\lambda)\mathbf{z}_n)$ е низа точки во $C$ и таа конвергира кон точката $\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$, од каде следи дека $\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \in \overline{C}$. ■

**Теорема 2.6.** Нека $C$ е затворено конвексно множество и $\operatorname{int}(C) \neq \emptyset$. Тогаш $\overline{\operatorname{int}(C)} = C$.

**Доказ.** Бидејќи $\operatorname{int}(C) \subseteq C$, поради условот $C$ да е затворено множество, ќе важи $\overline{\operatorname{int}(C)} \subseteq \overline{C} = C$. За да покаже обратната инклузија, нека $\mathbf{y} \in C$ и $\mathbf{z} \in \operatorname{int}(C)$. Бидејќи $\operatorname{int}(C)$ е отворено множество, постои $\varepsilon > 0$ така што $B_\varepsilon(\mathbf{z}) \subseteq \operatorname{int}(C)$. Ако $\lambda \in (0,1)$, слично како во доказот на претходната теорема, се покажува дека $B_\varepsilon(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}) \subseteq \operatorname{int}(C)$. Ја разгледуваме низата $((1-1/n)\mathbf{y} + (1/n)\mathbf{z})$. Бидејќи $1 - 1/n \in (0,1)$, поради последната инклузија, оваа низа е низа од точки во $\operatorname{int}(C)$ и, бидејќи таа конвергира кон $\mathbf{y}$, ќе важи $\mathbf{y} \in \overline{\operatorname{int}(C)}$. ■

Ако во претходната теорема се изостави условот $C$ да биде конвексно, тогаш $\overline{\operatorname{int}(C)}$ не мора да се совпадне со $C$. На пример, множеството $C = \{2\} \cup [0,1]$ е затворено множество, но тоа не е конвексно. Притоа $\operatorname{int}(C) = (0,1)$ и $\overline{\operatorname{int}(C)} = [0,1] \neq C$.

**Дефиниција 2.22.** За точката $\mathbf{x}^* \in A \subset \mathbb{R}^n$ се вели дека е *екстремална точка* на множеството $A$, ако не постојат точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ така што $\mathbf{x}^* \in \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \lambda \in (0,1)\}$.

Со други зборови, точката $\mathbf{x}^* \in A$ е екстремална точка на множеството $A$, ако таа *не лежи* на ниту една отсечка чии крајни точки се некои други две точки од $A$.

**Пример 2.3. а)** Крајните точки на отсечка во $\mathbb{R}^n$ се нејзините екстремални точки. Почетната точка на полуправа е нејзина (единствена) екстремална точка. Права, хиперрамнина и полупростор во $\mathbb{R}^n$ немаат екстремални точки.

**б)** Множеството од сите екстремални точки на триаголник и правоаголник (воопшто, конвексен многуаголник) се состои од неговите темиња. Множеството од сите ќошиња на конвексен полиедар (на пример, коцка, квадар, паралелопиед, призма, пирамида) во реален простор се негови екстремални точки.

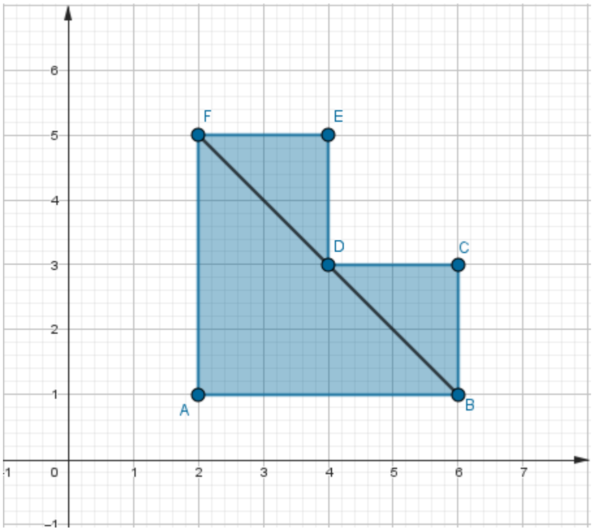
**в)** Множеството од сите екстремални точки на кружницата се состои од сите нејзини точки и тоа воедно е еднакво на множеството од сите екстремални точки на затворениот круг определен со таа кружница. Множеството од сите екстремални точки

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

на сферата се состои од сите нејзини точки и тоа е еднакво на множеството од сите екстремални точки на затворената топка определена со таа сфера.

Да напоменеме дека не секое од темињата на даден многуаголник во $\mathbb{R}^2$ или ќоше на полиедар во $\mathbb{R}^3$ мора да биде и екстремална точка. На слика 2.3. е прикажан шестоаголникот $ABCDEF$. Овој шестоаголник не е конвексен. Неговите екстремални точки се само темињата $A, B, C, E$ и $F$. Темето $D$ не е екстремална точка бидејќи таа лежи на отсечката со крајни точки $B$ и $F$, а оваа отсечка целосно се содржи во делот од рамнината определена со овој шестоаголник или, согласно координатите на точките прикажани на слика 2.3, во множество точки определено со

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 5\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 4 \leq x_1 \leq 6, 1 \leq x_2 \leq 3\}.$$




Слика 2.3. Многуаголник со теме што не е негова екстремална точка (автори)

## 2.3. Конуси, полиедри и политопи во n-димензионален евклидски простор

**Дефиниција 2.23.** Множеството $C \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарекува *конус*, ако за секој $\mathbf{x} \in C$ и за секој $\lambda \geq 0$, важи $\lambda\mathbf{x} \in C$. Конусот $C$ кој е воедно и конвексно множество, се нарекува *конвексен конус*.

**Пример 2.4.** Од веќе познатите математички објекти што ја задоволуваат оваа дефиниција е, на пример, бесконечниот конус што се користи при дефинирање на т.н. конусни пресеци, но не и вообичаеното геометриско тело конус за кое пресметуваме волумен или бочна плоштина. Секој векторски потпростор и секој полупростор (отворен или затворен) чија гранична хиперрамнина минува низ координатниот почеток е конус.

**Пример 2.5.** Еден конус не мора да биде конвексно множество. На пример, ако $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ се линеарно независни вектори, тогаш множеството

$$\{\lambda\mathbf{x} | \lambda \geq 0\} \cup \{\mu\mathbf{y} | \mu \geq 0\},$$

што се состои од зраците генерирани од векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, е конус. Но поради линеарната независност на векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, тој не е конвексно множество.

Лесно се покажува дека важи следното својство.

**Својство 2.13.** Важат следните тврдења:

i) унија од конуси е исто така конус,
ii) непразен пресек на конуси е исто така конус,
iii) непразен пресек на конвексни конуси е исто така конвексен конус.

Следните две теореми овозможуваат да се дефинира специфичен тип на конвексни конуси што се исклучително важни во математичкото програмирање.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Теорема 2.7.** Конусот $C$ е конвексен ако, и само ако, $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in C$, за секои $\mathbf{x},\mathbf{y}\in C$.

**Доказ.** Ако $C$ е конвексен конус и $\mathbf{x},\mathbf{y}\in C$, тогаш заради конвексноста на $C$,

$$\mathbf{z}=\frac{1}{2}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{y}=\frac{1}{2}\mathbf{x}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbf{y}\in C,$$

и, последователно, $\mathbf{x}+\mathbf{y}=2\mathbf{z}\in C$.

Обратно, ако за секои $\mathbf{x},\mathbf{y}\in C$ важи $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in C$ и ако $\lambda\in[0,1]$ е произволен, тогаш $\lambda\geq 0$, $1-\lambda\geq 0$ и, последователно, $\lambda\mathbf{x}\in C$ и $(1-\lambda)\mathbf{y}\in C$ (бидејќи $C$ е конус). Ова, заедно со направената претпоставка, имплицира дека $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in C$, што значи дека $C$ е конвексно. ■

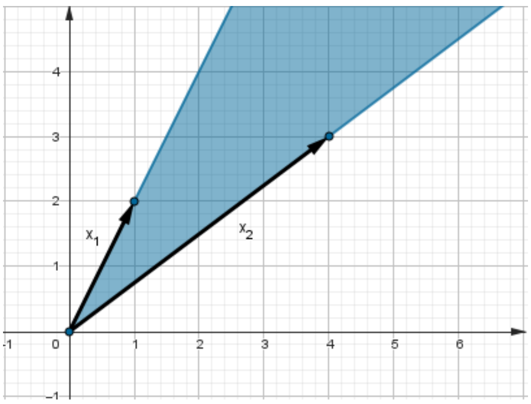
**Теорема 2.8.** Ако $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m\in\mathbb{R}^n$, тогаш множеството

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{x}_i\,\middle|\,\lambda_i\geq 0, i\in\{1,\dots,m\}\right\},$$

е конвексен конус.

**Доказ.** Лесно се покажува дека за произволни $\lambda\geq 0$ и $\mathbf{x},\mathbf{y}\in C$ важи $\lambda\mathbf{x}\in C$ (што воедно значи дека $C$ е конус) и дека $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in C$, па според теорема 2.7, $C$ е конвексен конус. ■

Множеството од теорема 2.8 уште се нарекува *конвексен конус генериран од векторите* $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m\in\mathbb{R}^n$. На слика 2.4 е прикажан конвексниот конусот во $\mathbb{R}^2$ што е генериран од векторите $\mathbf{x}_1=(1,2)$ и $\mathbf{x}_2=(4,3)$.




Слика 2.4. Конвексен конус во $\mathbb{R}^2$ генериран од два вектори (автори)

**Дефиниција 2.24.** Конвексниот конус кој може да се претстави како пресек на конечен број затворени полупростори чии определувачки хиперрамнини минуваат низ координатниот почеток се нарекува *конвексен многустран* (*полиедрален*) *конус*.

**Дефиниција 2.25.** Пресекот на конечен број затворени полупростори така што од соодветните определувачки хиперрамнини барем една не минува низ $O$ се нарекува *конвексно многустрано* (*полиедрално*) *множество.*

Значи множеството $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n|\langle\mathbf{a}_i,\mathbf{x}\rangle\geq d_i, i\in\{1,2,\cdots,m\}\}$ каде $\mathbf{a}_i\in\mathbb{R}^n$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, претставува конвексно многустрано множество. Ако $\mathbf{A}$ е матрицата чии редици се векторите $\mathbf{a}_i$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, кратко можеме да означиме: $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n|\mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{d}\}$.

**Дефиниција 2.26.** Ограниченото конвексно многустрано множество се нарекува *конвексен полиедар*.

**Напомена 2.2.** Дефиницијата 2.26 преставува природна генерализација на поимот конвексен полиедар познат од просторната геометрија. Но дел од авторите воведуваат малку поинаква генерализација и, во замена за дефинициите 2.25 и 2.26, ги даваат следните две дефиниции:

- *полиедар* е пресек на конечен број затворени полупростори,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- *политоп* е ограничен полиедар.

Ваквата дефиниција на поимот „полиедар“ овозможува во овој тип на објекти да се вклучат и конвексните полиедрални конуси и конвексните полиедрални множества.

**Пример 2.6.** Множеството од $\mathbb{R}^3$ зададено со системот неравенки

$$X: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \\ x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

претставува конвексно многустрано множество. Тоа е пресек на четири полупростори на $\mathbb{R}^3$, од кои првиот (оној определен со $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$) има гранична хиперрамнина што *не минува* низ координатниот почеток. Геометриски, $X$ е тристраната пирамида чија основа е триаголникот со темиња во точките $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$ и $B(0,1,0)$, и врв во точката $C(0,0,1)$. Бидејќи $X$ е ограничено множество (на пример, за секој $\mathbf{x} \in X$, важи $\|x\| \leq 3$), $X$ е воедно и конвексен полиедар.

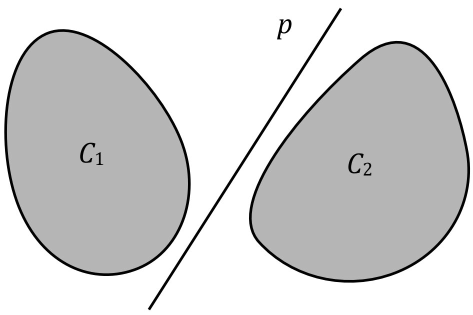
Следната теорема што ќе ја наведеме без доказ овозможува поимот „конвексен полиедар“, наместо како „ограничен пресек на конечен број затворени полупростори“ (што уште познато како тангенцијална дефиниција) да се дефинира како „конвексна обвивка на конечен број ненулти вектори“ (или уште познато како точкеста дефиниција).

**Теорема 2.9.** Множеството $K \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексен полиедар ако, и само ако, постојат конечен број ненулти вектори $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^n$ такви што $K = \mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m\})$. Уште повеќе, секој непразен конвексен полиедар се совпаѓа со конвексната обвивка на своите екстремални точки.

## 2.4. Теореми за раздвојување

Ако се дадени две дисјунктни конвексни множества во $\mathbb{R}^2$, интуитивно е јасно дека може да се исцрта барем една права така што множествата да лежат на различни страни од неа (слика 2.5). Во тој случај велиме дека правата ги одвојува (сепарира) множествата. Слично, меѓу две дисјунктни конвексни множества во $\mathbb{R}^3$ може да се постави барем една рамнина што нив ќе ги одвојува.

Идејата за сепарација во $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ има своја генерализација и во $\mathbb{R}^n$: било кои две дисјунктни конвексни множества во $\mathbb{R}^n$ може да се раздвојат со хиперрамнина.




Слика 2.5. Дисјунктни конвексни множества (автори)

Следните теореми ги наведуваме без доказ.

**Теорема 2.10.** Нека $C \neq \emptyset$ затворено конвексно множество и $\mathbf{x} \notin C$. Тогаш постои една и само една точка $\mathbf{u} \in C$ таква што $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| = \inf_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

**Теорема 2.11.** (За раздвојување точки и множества) Нека $C$ затворено конвексно множество и $\hat{\mathbf{x}} \notin C$. Тогаш постои $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ таков што $\langle \mathbf{c}, \hat{\mathbf{x}} \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ за секој $\mathbf{y} \in C$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Теорема 2.12.** Нека $\hat{\mathbf{x}}$ е гранична точка на конвексното множество $C$. Тогаш постои $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, таков што $\langle \mathbf{c}, \hat{\mathbf{x}} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ за секој $\mathbf{y} \in C$.

**Теорема 2.13.** (За раздвојување две множества) Нека $C$ и $D$ се непразни и дисјунктни конвексни множества. Тогаш постои $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, таков што $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ за секои $\mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in D$.

**Теорема 2.14.** Нека се $C$ и $D$ непразни конвексни множества, $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ и нека $\mathrm{int}(C) \cap D = \emptyset$. Тогаш постои $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, таков што $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ за секои $\mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in D$.

За доказите упатуваме на (Vujčić et al.,1980, I.1.2).

Теоремите 2.11, 2.12 и 2.14 се всушност последица на теорема 2.13 што низ литературата најчесто се формулира кога станува збор за сепарација на конвексни множества, а останатите се изоставаат. Според оваа теорема, ако множествата $C$ и $D$ се непразни и дисјунктни конвексни и ако $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, е векторот од заклучокот во теоремата, тогаш постои реален број $b$ таков што

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq b \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle \text{ за секои } \mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in D.$$

Хиперрамнината $H$ зададена со $H = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = b\}$ уште се нарекува *раздвојувачка* (или *сепарирачка*) *хиперрамнина* за множествата $C$ и $D$ (или, хиперрамнина што ги раздвојува $C$ и $D$). Овие две множествата лежат на различни страни од $H$. Ако притоа $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle$ за секои $\mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in D$, тогаш за хиперрамнината $H$ се вели дека е *строго раздвојувачка* хиперрамнина, и таа не е единствена.

### 2.5. Фаркашова лема

Низ литературата може да се сретнат повеќе верзии на едно исклучително важно тврдење во теоријата на математичкото програмирање, познато како лема на Фаркаш или теорема на Фаркаш. Тие се однесуваат на неможноста од истовремено постоење на решенија со специфични карактеристики за два системи линеарни равенства или неравенства така што едниот систем како матрица со главни коефициенти ја има дадена матрица со димензија $m \times n$, а другиот како матрица со главни коефициенти да ја има нејзината транспонирана матрица. Подолу е наведена една од можните модификации на лема на Фаркаш што овозможува непречено изведување на некои докази од наредната глава.

**Теорема 2.15. (Лема на Фаркаш)** Нека секое решение на системот

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq 0, \end{array} \tag{2.1}$$

го задоволува и неравенството

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \leq 0. \tag{2.2}$$

Тогаш постојат ненегативни броеви $y_1, \dots, y_m$ такви што

$$\begin{array}{c} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m = b_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m = b_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = b_n. \end{array}$$

**Доказ.** Доказот се спроведува со индукција по бројот на непознати. Без губење на општоста може да претпоставиме дека системот (2.1) не го содржи неравенството

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \leq 0.$$

Случајот за $n = 1$ е тривијален.

Претпоставуваме дека тврдењето важи за систем со најмногу $n - 1$ непознати. Нека $U$ е потпростор од $\mathbb{R}^{m+1}$ распнат од колоните на матрицата

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \end{bmatrix},$$

и нека $V \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ е дефинирано со $V = (-\infty, 0]^m \times (-\infty, 0)$.

Множествата $U$ и $V$ се непразни и конвексни. Дополнително $U \cap V = \emptyset$, бидејќи во спротивно би постоело решение на (2.1) што нема да го задоволува неравенството (2.2). Според теорема 2.13 постои хиперрамнина од $\mathbb{R}^{m+1}$ која ги раздвојува $U$ и $V$. Нека нејзината равенка е

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = d,$$

каде $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{m+1})$ и нека, на пример, важи

(a) $c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m + c_{m+1} z_{m+1} \leq d,$ за секој $(z_1, \cdots, z_{m+1}) \in U$, и

(b) $c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m + c_{m+1} z_{m+1} \geq d,$ за секој $(z_1, \cdots, z_{m+1}) \in V$.

Прво земаме $\mathbf{z}' = (0, \cdots, 0, 0) \in U$ и $\mathbf{z}'' = (0, \cdots, 0, -\varepsilon) \in V$, каде $\varepsilon > 0$. Тогаш, според (а), ќе важи $0 \leq d$, а според (b), ќе важи $-\varepsilon c_{m+1} \geq d$. Допуштајќи $\varepsilon \to 0$, се добива дека мора да важи $d = 0$.

Имајќи го предвид претходното, ако $\mathbf{z} = (-1, 0, \cdots, 0, -\varepsilon) \in V$, каде $\varepsilon > 0$, според (b) ќе важи $-c_1 - \varepsilon c_{m+1} \geq 0$. Допуштајќи $\varepsilon \to 0$, заклучуваме дека $c_1 \leq 0$. На сличен начин се покажува дека $c_2 \leq 0, \cdots, c_{m+1} \leq 0$.

Следен чекор е да покажеме дека хиперрамнината $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1} | \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 0\}$ го содржи множеството $U$. Согласно дефиницијата на $U$, ако $\mathbf{z} \in U$ тогаш и $-\mathbf{z} \in U$. Имајќи предвид дека $d = 0$, според (а) ќе важат следните неравенства

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle \leq 0 \text{ и } -\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{c}, -\mathbf{z} \rangle \leq 0,$$

што значи дека мора да важи $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = 0$, или

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m + c_{m+1} z_{m+1} = 0, \text{ за секое } (z_1, \cdots, z_{m+1}) \in U.$$

Бидејќи, по дефиниција, $U$ е векторскиот простор генериран од колоните на матрицата $\mathbf{A}$, според претходното тие колони ја задоволуваат равенката на хиперрамнината $H$ што ги раздвојува множествата $U$ и $V$. При $c_{m+1} \leq 0$, можни се следните два случаи:

1. $c_{m+1} < 0$. Заменувајќи ги колоните на матрицата $\mathbf{A}$ во равенката на $H$, добиваме
$$c_1 a_{1j} + \cdots + c_m a_{mj} - c_{m+1} b_j = 0, \qquad j = 1, \cdots, n.$$
Тогаш, за бараните ненегативни броеви $y_1, \cdots, y_m$ доволно е да земеме
$$y_1 = \frac{c_1}{c_{m+1}}, \cdots, y_m = \frac{c_m}{c_{m+1}}.$$
2. $c_{m+1} = 0$. Барем еден броевите од $c_1, \dots, c_m$ мора да биде различен од нула. Нека е тоа $c_1$. Бидејќи $c_1 \leq 0$, ќе мора да важи $c_1 < 0$. Системот (2.1) и неравенството (2.2) ќе ги запишеме во векторски облик
$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq 0, i = 1, \cdots, m, \tag{2.1'}$$
$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \leq 0, \tag{2.2'}$$

каде $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$, $i = 1, \cdots, m$, а $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$. Бидејќи $c_{m+1} = 0$, заменувајќи ги колоните на матрицата $\mathbf{A}$ во равенката на хиперрамнината добиваме

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o},$$

или

$$-\mathbf{a}_1 = \sum_{i=2}^{m} \frac{c_i}{c_1} \mathbf{a}_i.$$

Го разгледуваме системот

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle &\le 0, \quad i = 1, \cdots, m \\ \langle -\mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle &\le 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Бидејќи векторот $-\mathbf{a}_1$ е ненегативна линеарна комбинација на векторите $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, системите (2.1′) и (2.3) се еквивалентни. Барем една компонента на векторот $\mathbf{a}_1$ различна е од нула. Нека тоа, на пример, е $n$-тата компонента. Множејќи го неравенството $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \le 0$, или неравенството $\langle -\mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \le 0$, со погоден ненегативен број може непознатата $x_n$ да се елиминира од останатите неравенства на системот (2.3). Ќе добиеме еквивалентен систем од облик

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle &\le 0 \\ \langle -\mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle &\le 0 \\ \langle \overline{\mathbf{a}_i}, \mathbf{x} \rangle &\le 0, \quad i = 2, \cdots, m \end{aligned} \tag{2.4}$$

каде $\overline{\mathbf{a}}_i = (\overline{a}_{i1}, \cdots, \overline{a}_{i,n-1}, 0)$. Слично, од неравенството $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \le 0$ може да се елиминира $x_n$, па ќе имаме

$$\langle \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \rangle \le 0, \tag{2.5}$$

каде $\overline{\mathbf{b}} = (\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{n-1}, 0)$.

Лесно е може да се забележи дека за секое решение $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ на системот

$$\langle \overline{\mathbf{a}_i}, \mathbf{x} \rangle \le 0, \quad i = 2, \cdots, m,$$

може да се определи $x_n$ така што $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ ќе биде решение на целиот систем (2.4), а со тоа $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ ќе биде решение на системот (2.3), но и на системот (2.1′).

Според индуктивната претпоставка, векторот $\overline{\mathbf{b}}$ може да се напише во облик

$$\overline{\mathbf{b}} = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i \overline{\mathbf{a}}_i.$$

Но бидејќи секој од векторите $\overline{\mathbf{a}}_i$ е ненегативна комбинација на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ и бидејќи векторот $\mathbf{b}$ може да се добие како ненегативна линеарна комбинација од векторот $\overline{\mathbf{b}}$ и еден од векторите $\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1$, векторот $\mathbf{b}$ ќе може да се добие како ненегативна линеарна комбинација на векторите $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ т.е.

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{a}_i, \qquad y_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

што требаше да се покаже. ■

Како последица на Фаркашова лема се добива следната теорема за чиј доказ читателот се упатува на (Vujčić et al.,1980, теорема 1.3.2).

**Теорема 2.15′.** Претпоставуваме дека системот

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{gathered} \tag{2.6}$$

има решение и дека секое негово решение го задоволува и неравенството

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n > d. \tag{2.7}$$

Тогаш постојат ненегативни броеви $y_1, \dots, y_m$ такви што

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m = c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m = c_n \\ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m > d. \end{gathered}$$

За алтернативни формулации на лема на Фаркаш (и соодветните докази) што често се користат при докажување на некои својства во математичко програмирање

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

упатуваме на (Bazaara et al., 2010, стр.234), (Bertsekas, 2016, стр. 403) и (Караманов, 2004, стр. 26).

## 2.6. Непрекинатост и диференцијабилност

Кај задачи на математичкото програмирање, и функциите на целта, и функциите на ограничување, се реално вредносни функции што дејствуваат на подмножества од просторот $\mathbb{R}^n$. Вообичаено, во теоријата на математичкото програмирање за секоја од овие функции се претпоставува дека е непрекината.

**Дефиниција 2.27.** За функцијата $f: X \to \mathbb{R}$, каде $X \subseteq \mathbb{R}^n$, се вели дека е *непрекината во точката* $\mathbf{x}_0 \in X$, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ така што

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon, \text{ за секој } \mathbf{x} \text{ таков што } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta,$$

а за функцијата $f$ се вели дека е *непрекината на* $X$, ако таа е непрекината во секоја точка од $X$.

**Својство 2.14.** Функцијата $f$ е непрекината во точката $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ако, и само ако, за секоја низа $(\mathbf{x}_n)$ што конвергира кон $\mathbf{x}_0$, низата $(f(\mathbf{x}_n))$ конвергира кон $f(\mathbf{x}_0)$.

**Дефиниција 2.28.** Нека $f: X \to \mathbb{R}$, каде $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и $\mathbf{x}_0 \in X$.

- Доколку постои границата
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h},$$
(каде $\mathbf{e}_i$ е единичниот вектор кај кој $i$ –та координата е 1, а останатите се 0) истата се нарекува *прв парцијален извод* на функцијата $f$ во точката $\mathbf{x}_0$ во однос на променливата $x_i$.

- Ако во точката $\mathbf{x}_0$ постојат парцијалните изводи на функцијата $f$ по секоја од променливите, тогаш
$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}\right),$$
се нарекува *градиент* на функцијата $f$ во точката $\mathbf{x}_0$.

- Ако $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ е даден вектор, границата (доколку постои)
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h\|\mathbf{u}\|},$$
се нарекува *извод на функцијата $f$ во точката $\mathbf{x}_0$ во правец на векторот $\mathbf{u}$*.

Изводот во точката $\mathbf{x}_0$ во правец на векторот $\mathbf{u}$ е скаларна величина што го определува нараснувањето на функцијата во правец на векторот $\mathbf{u}$. Врз основа на дефиниција 2.27 може да се покаже дека важи

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Согласно ова равенство, изводот на функцијата $f$ во точката $\mathbf{x}_0$ во правец на некој вектор најголемата вредност постигнува во насока на градиентот $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ и таа е еднаква на $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$. Со други зборови, најголемо нараснување на вредноста на функцијата е во правец на градиентот.

## 2.7. Конвексни функции

**Дефиниција 2.29.** Нека $C \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексно множество. За функцијата $f: C \to \mathbb{R}$ се вели дека е *конвексна функција на* $C$, ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и секој $\lambda \in [0,1]$ важи

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

За функцијата $g: C \to \mathbb{R}$ се вели дека е *конкавна функција на* $C$, ако функцијата $-g$ е конвексна функција на $C$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Со помош на неравенството на триаголник, лесно може да се покаже дека функцијата $f_1: C \to [0,1) \subset \mathbb{R}$, дефинирана со $f_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$, е конвексна на $\mathbb{R}^n$.

**Дефиниција 2.30.** Нека $C \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексно множество. За функцијата $f: C \to \mathbb{R}$ се вели дека е *строго конвексна функција на* $C$, ако за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и за секој $\lambda \in (0,1)$ важи

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) < \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

За функцијата $g: C \to \mathbb{R}$ се вели дека е *строго конкавна функција на* $C$, ако функцијата $-g$ е строго конвексна функција на $C$.

Јасно, секоја строго конвексна функција е конвексна, но обратно не мора да важи. На пример, погоре дефинираната функција $f_1(\mathbf{x})$ не е строго конвексна.

**Теорема 2.16. (Јенсеново неравенство)** Нека функцијата $f: C \to \mathbb{R}$ е конвексна на конвексно множество $C$ и нека $\lambda_1, \dots, \lambda_m, m \geq 2$ се ненегативни броеви такви што

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1.$$

Тогаш, за произволни $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in C$ важи

$$f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m) \leq \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{x}_m).$$

**Доказ.** За $m = 2$ тврдењето се сведува на дефиницијата на конвексна функција. Претпоставуваме дека важи за $m$ точки. Тогаш за $m + 1$ точки, при претпоставка дека $\lambda_{m+1} \neq 1$, заради конвексноста на $f$ и индуктивната препоставка имаме

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m + \lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1})\\
&\quad = f\left((1-\lambda_{m+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}\mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}\mathbf{x}_m\right) + \lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1}\right)\\
&\quad \leq (1-\lambda_{m+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}\mathbf{x}_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}\mathbf{x}_m\right) + \lambda_{m+1}f(\mathbf{x}_{m+1})\\
&\quad \leq (1-\lambda_{m+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{m+1}}f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_{m+1}}f(\mathbf{x}_m)\right) + \lambda_{m+1}f(\mathbf{x}_{m+1})\\
&\quad = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{x}_m) + \lambda_{m+1}f(\mathbf{x}_{m+1}).
\end{aligned}$$

Ако $\lambda_{m+1} = 1$, тогаш $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ па тврдењето е тривијално исполнето. ■

**Теорема 2.17.** Нека $C \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексно множество, $f_1, \dots, f_m$ се конвексни функции на $C$ и нека $c_1, \dots, c_m$ се ненегативни броеви. Тогаш функцијата

$$f = c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m,$$

е конвексна на $C$.

**Доказ.** Ако се $f_1, \dots, f_m$, конвексни функции, тогаш за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$, секој $\lambda \in [0,1]$ важи

$$f_i(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f_i(\mathbf{y}),\ i = 1, \dots, m.$$

Ги множиме овие неравенки соодветно со $c_i$ и ги собираме, по што добиваме

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}),$$

па функцијата $f$ по дефиниција е конвексна. ■

**Теорема 2.18.** Нека $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е неопаѓачка конвексна функција и нека $g: C \to \mathbb{R}$ е конвексна на конвексното множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогаш функцијата $\varphi(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ е конвексна на $C$.

**Доказ.** Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ и $\lambda \in [0,1]$. Имаме

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= f(g(\lambda(\mathbf{x}) + (1-\lambda)(\mathbf{y})) \leq f(\lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(\mathbf{y}))\\
&\leq \lambda f\big(g(\mathbf{x})\big) + (1-\lambda)f\big(g(\mathbf{y})\big) = \lambda\varphi(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

што требаше да се покаже. ■

**Последица 2.1.** Нека $g$ е конвексна ненегативна функција на конвексно множество $C$. Тогаш и функцијата $\varphi(\mathbf{x}) = [g(\mathbf{x})]^2$ е конвексна функција на $C$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Доказ.** Нека $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е пресликувањето дефинирана со

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Лесно е да се покаже дека $f$ е конвексна и неопаѓачка на $\mathbb{R}$ па функцијата $f(g(\mathbf{x}))$ е конвексна. Бидејќи $g(\mathbf{x}) \geq 0$ за секое $\mathbf{x}$, имаме $f(g(\mathbf{x})) = [g(\mathbf{x})]^2$. ■

**Теорема 2.19.** Нека функцијата $f: C \to \mathbb{R}$ е конвексна на конвексното множество $C$. Тогаш множеството $K_a = \{\mathbf{x} \in C | f(\mathbf{x}) \leq a\}$ е конвексно за секое $a \in \mathbb{R}$.

**Доказ.** Ако $K_a = \emptyset$, тврдењето е точно. Претпоставуваме дека $K_a \neq \emptyset$. Нека $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in K_a$ и нека $\lambda \in [0,1]$. Имаме

$$f(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}) < \lambda f(\mathbf{y}) + (1-\lambda)f(\mathbf{z}) \leq \lambda a + (1-\lambda)a = a,$$

па и $\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} \in K_a$. Значи $K_a$ е конвексно. ■

**Теорема 2.20.** Нека $f$ е конвексна функција на конвексно множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогаш $f$ е непрекината во секоја внатрешна точка на множеството $C$.

**Доказ.** За доказот упатуваме на (Vujčić et al.,1980, теорема 1.4.6). ■

**Теорема 2.21.** Нека $f$ е конвексна функција на конвексното множество $C$ и диференцијабилна на некое отворено множество кое го содржи $C$. Тогаш

$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \geq \langle \nabla f(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle, \text{ за секој пар точки } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C.$$

($\nabla f$ е градиентот на функцијата $f$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$).

**Доказ.** Нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ се произволен пар точки од $C$. Од конвексноста на функцијата $f$ имаме

$$f(\lambda\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1) \leq \lambda f(\mathbf{x}_2) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2),$$

за секое $\lambda \in (0,1]$. Ова неравенство може да се запише во следниот облик

$$f(\mathbf{x}_1 + \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) - f(\mathbf{x}_1) \leq \lambda(f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)).$$

Ако поделиме со $\lambda$ и побараме гранична вредност кога $\lambda \to 0$ ќе добиеме

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \rangle \leq f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1),$$

што требаше да се покаже. ■

Од посебен интерес во математичкото програмирање се т.н. линеарни функции и афини функции што се дефинирани на целиот простор $\mathbb{R}^n$.

**Дефиниција 2.31.** Нека $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$. Пресликувањето $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ зададено со

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \text{ за секој } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

се нарекува *линеарна функција на* $\mathbb{R}^n$.

Во следната теорема се наведени поважните својства на линеарните функции.

**Теорема 2.22.** Ако $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е линеарна функција, тогаш:

i) $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$, за секои $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, т.е. функцијата $f$ е линеарно пресликување,
ii) $f$ е истовремено и конвексна и конкавна функција,
iii) $f$ е непрекината функција,
iv) вредностите на функцијата нараснуваат во правец на векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

**Доказ.** Тврдењето под i) лесно се проверува врз основа на дефиницијата на линеарна функција, а тврдењето под ii) е директна последица на i).

За да се покаже тврдењето под iii), нека $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Ако функцијата е дефинирана со (2.6), нека $\delta = (\|\mathbf{c}\| + 1)^{-1}\varepsilon > 0$. Според својство 2.4.iv), ако $x \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$, тогаш:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle\| = \|\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle\| \leq \|\mathbf{c}\| \cdot \|\mathbf{x} - x_0\| < \|\mathbf{c}\| \cdot \delta < \varepsilon.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Насоката на нараснување на диференцијабилна функција во точката $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ е определена со $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Од друга страна, за линеарната функција дефинирана со

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

што значи дека насоката на нараснување на линеарна функција е иста во секоја точка $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и таа е еднаква на насоката на векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. ■

Линеарните функции се специјален случај на таканаречените афини функции што исто така имаат исклучително важна улога во математичкото програмирање.

**Дефиниција 2.32.** Нека $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пресликувањето $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ зададено со

$$g(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + b = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + b, \text{ за секој } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

се нарекува *афина функција на* $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 2.23.** Ако $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е афина функција, тогаш:

i) $g$ е истовремено и конвексна и конкавна функција,
ii) $g$ е непрекината функција,
iii) вредностите на функцијата нараснуваат во правец на векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

**Доказ.** Тврдењата по ii) и iii) се покажуваат на истиот начин како за случајот на линеарна функција. За да се покаже тврдењето под i) нека $g$ е дефинирана со (2.7) и нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0,1]$. Тогаш

$$\begin{aligned} g(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \langle \mathbf{c}, \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \rangle + b = \\ &= \lambda\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle + \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= \lambda[\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + b] + (1-\lambda)[\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + b] \\ &= \lambda g(\mathbf{x}) + (1-\lambda)g(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

од каде следи дека $g$ е истовремено и конвексна и конкавна функција. ■

## 2.8. Дополнителни напомени и препораки за продлабочување на знаењата

Векторските и тополошките својства на просторот $\mathbb{R}^n$ традиционално се предмет на проучување на линеарната алгебра, реалната анализа, функционална анализа и топологија. Од литературата на македонски јазик каде што може да се најдат повеќе информации за својствата на $\mathbb{R}^n$ како векторски и метрички простор ги препорачуваме соодветните содржини од (Карчицка, 1985), (Оровчанец и Соколоски, 2024), (Трпеновски и др., 1994a, гл.V.1, гл.V.2 и гл.V.3) и (Трпеновски и др., 1994b, гл.VII.3, гл.VII.4, гл.X.1, гл.X.2 и гл.X.3).

За дополнителни информации за конвексната анализа ги препорачуваме следните содржини:

- литература што може непречено да се користи со поелементарни предзнаења од математичка анализа и линеарна алгебра: (Карчицка, 2000, гл.1), (Vujčić et al., 1980, гл.1), (Boyd & Vandenberghe, 2004, гл.1 и гл.2), (Berkovitz, 2001 гл.1 – гл.3), (Krantz, 2014), (Mangasarian, 1994 гл.1 – гл.4), (Teofanov & Žigić, 2018 гл.1 и гл.2),
- литература за чие користење може да се потребни потемелни предзнаења: (Bazaara et al., 2006, гл.2 и гл.3), (Calafiore & Ghaoui, 2014), (Valentine, 1964, гл.1 – гл.3) и (Zălinescu, 2002),
- литература со поформален математички пристап: (Rockafellar, 1970 гл.1 и гл.2) и (Rockafellar & Wets, 2009 гл.1 – гл.3).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## 3. ВОВЕД ВО ТЕОРИЈА НА МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ

Во оваа глава ќе се осврнеме на дел од поопштите резултати што се однесуваат на основната задача што ја дефиниравме во поглавје 1.2.

Ако $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\varphi: X \to \mathbb{R}$ е дадена функција, разгледуваме задача на минимизација

$$\min \varphi(\mathbf{x}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in X. \tag{3.1}$$

Ознаките

$$\inf\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = \inf_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}), \quad \min\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}),$$
$$\sup\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = \sup_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}), \quad \max\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = \max_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

ќе ги користиме со вообичаеното значење што го имаат во класичната анализа.

Ако $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, и задачата на минимизација е зададена со

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o. } f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ставајќи $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ да биде функција дефинирана со $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, задачата (3.2) кратко ја запишуваме со

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o. } f(\mathbf{x}) \le \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

За овие задачи допуштената област е множеството

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f(\mathbf{x}) \le \mathbf{o}\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.1. Општи услови за постоење на глобален минимум

Општите услови за постоење на глобален минимум или максимум на дадена реално вредносна функција од повеќе променливи произлегуваат од резултатите на класичната анализа. Во ова поглавје ќе ги наведеме поважните услови за постоење на оптимално решение на задачата (3.1), независно од тоа како е опишана допуштената област $X$.

**Теорема 3.1. (Ваерштрас)** Ако $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е непразно компактно множество и функцијата $\varphi$ е непрекината на $X$, тогаш $\varphi$ има барем еден глобален минимум и барем еден глобален максимум на $X$.

**Доказ.** Ќе го покажеме само постоењето на глобален минимум. Постоењето на глобален максимум се покажува на сличен начин.

Нека $m = \inf_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x})$. Согласно дефиницијата на инфимум, постои $(\mathbf{x}_n)$ низа во $X$ така што $\varphi(\mathbf{x}_n) \to m$ кога $n \to \infty$. Бидејќи $X$ е компактно множество (затворено и ограничено), според теорема на Болцано-Ваерштрас (својство 2.10) и својство 2.7, постојат точка $\mathbf{x}^* \in X$ и подниза $(\mathbf{x}_{n_k})$ на $(\mathbf{x}_n)$ така што $\|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}^*\| \to 0$ кога $k \to \infty$. Поради непрекинатоста на функцијата $\varphi$ ќе важи

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \lim_{k \to \infty} \varphi(\mathbf{x}_{n_k}) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\mathbf{x}_n) = m = \inf_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

од каде следи тврдењето. ■

**Последица 3.1.** Ако $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ се непрекинати функции и ако множеството $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$ е непразно и ограничено, тогаш секоја непрекината функција $\varphi$ на $X$ има барем еден глобален минимум на ова множество.

**Доказ.** Заради непрекинатоста на функциите $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, инверзните слики $f_i^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$, $i = 1, \dots, m$, на затвореното множество $(-\infty, 0]$ исто така ќе бидат затворени множества. Тогаш и $X = \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$, ќе биде затворено множество.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Бидејќи по претпоставка $X$ е и ограничено, добиваме дека $X$ е компактно множество, па тврдењето следи од теорема 3.1. ■

**Теорема 3.2.** Ако функцијата $\varphi$ е непрекината на $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и постои $\alpha \in \mathbb{R}$ така што множеството

$$S_\alpha(\varphi) = \{\mathbf{x} \in X | \varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha\},$$

е непразно и ограничено, тогаш $\varphi$ има барем еден глобален минимум на $X$.

**Доказ.** Заради непрекинатоста на $\varphi$ и затвореноста на интервалот $(-\infty, \alpha]$, множеството $S_\alpha(\varphi) = \varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$ исто така ќе биде затворено. Ова, заедно со условот $S_\alpha(\varphi)$ да е ограничено, имплицира дека $S_\alpha(\varphi)$ е компактно множество.

Нека $m = \inf_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x})$. Јасно е дека важи $m \leq \alpha$.

Ако $m = \alpha$ , тогаш

$$S_\alpha(\varphi) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi,$$

па според претпоставката дека $S_\alpha(\varphi)$ е непразно, ќе следи дека $\varphi$ има барем еден глобален минимум на $X$.

Ако $m < \alpha$ , тогаш постои низа $(\mathbf{x}_n)$ во $X$ така што $\varphi(\mathbf{x}_n) \to m$ кога $n \to \infty$ и за која сите членови, освен можеби конечно многу, се елементи и на $S_\alpha(\varphi)$. Слично како во доказот на теорема 3.1 се добива дека постои точка $\mathbf{x}^* \in S_\alpha(\varphi)$ таква што $\varphi(\mathbf{x}^*) = m$. ■

Множеството $S_\alpha(\varphi) = \{\mathbf{x} \in X | \varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ е се нарекува множество на $\alpha$ *–подниво* за функцијата $\varphi$.

**Последица 3.2.** Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е непразно и затворено множество, и нека $\varphi$ е непрекината функција на $X$ со особина: за секоја низа $(\mathbf{x}_n)$ во $X$ таква што $\|\mathbf{x}_n\| \to \infty$ кога $n \to \infty$, важи и $\varphi(\mathbf{x}_n) \to \infty$ кога $n \to \infty$. Тогаш $\varphi$ има барем еден глобален минимум на $X$.

**Доказ.** Нека $\mathbf{y} \in X$ и нека $\varphi(\mathbf{x}) = M$. Го разгледуваме множеството

$$S_M(\varphi) = \{\mathbf{x} \in X | \varphi(\mathbf{x}) \leq M\}.$$

Јасно е дека $S_M(\varphi) \neq \emptyset$. Ќе покажеме дека $S_M(\varphi)$ е ограничено. Ако се претпостави спротивно, тогаш $S_M(\varphi)$ ќе содржи низа $(\mathbf{x}_n)$ таква што $\|\mathbf{x}_n\| \to \infty$ кога $n \to \infty$. Тогаш, заради претпоставеното својство на функцијата $\varphi$, ќе важи и $\varphi(\mathbf{x}_n) \to \infty$ кога $n \to \infty$. Ова пак имплицира постоење на $n_0 \in \mathbb{N}$ таков што $\varphi(\mathbf{x}_n) > M + 1$, за секој $n \geq n_0$. Но поради описот на $S_M(\varphi)$ и тоа што $(\mathbf{x}_n)$ е низа во $S_M(\varphi)$, не е можно. Сега тврдењето следи од теорема 3.2. ■

За функцијата $\varphi$ што ја има особината од последица 3.2. уште се вели дека е *принудувачка* функција[11].

### 3.2. Седлести точки; Минимакс равенство

**Својство 3.1.** Ако $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и $B \subseteq \mathbb{R}^m$ се непразни множества и $F: A \times B \to \mathbb{R}$ е дадено пресликување, тогаш

$$\sup_{\mathbf{y}\in B} \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{x}\in A} \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{3.5}$$

**Доказ.** Ако $\overline{\mathbf{y}} \in B$, тогаш согласно дефинициите на инфимум и супремум,

$$F(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}}) \leq \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ , \forall \mathbf{x} \in A \ \ \Rightarrow \ \ \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}}) \leq \inf_{\mathbf{x}\in A} \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ако во последното неравенство се побара супремум по $\overline{\mathbf{y}} \in B$, се добива (3.5). ■

Како специјални случаи на (3.5) се добиваат оние кога некои од супремумите или инфимумите се достигнуваа. На пример, важат следните неравенства

$$\max_{\mathbf{y}\in B} \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x}\in A} \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{3.5′}$$

[11] анг. coercive.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\max_{\mathbf{y}\in B}\min_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \min_{\mathbf{x}\in A}\max_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (3.5'')$$

Овие неравенства често се нарекуваат и *минимакс неравенства*.

**Дефиниција 3.1.** Ако $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и $B \subseteq \mathbb{R}^m$ се непразни множества и $F: A \times B \to \mathbb{R}$ е дадена функција, точката $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in A \times B$ се нарекува *седлеста точка* за $F$ ако

$$F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*), \text{ за секои } \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{y} \in B. \qquad (3.6)$$

**Теорема 3.3.** Парот $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in A \times B$ е седлеста точка за функцијата $F: A \times B \to \mathbb{R}$ ако, и само ако,

$$\max_{\mathbf{y}\in B}\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in A}\sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (3.7)$$

и притоа, $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за задачата на минимизација

$$\min \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in A, \qquad (3.8)$$

а $\mathbf{y}^*$ е оптимално решение за задачата на максимизација

$$\max \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ при услов } \mathbf{y} \in B. \qquad (3.9)$$

**Доказ.** Нека $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in A \times B$ е седлеста точка за $F$. Тогаш според (3.6) имаме:

$$\inf_{\mathbf{x}\in A}\sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq \sup_{\mathbf{y}\in B}\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \qquad (3.10)$$

Од тука, имајќи го предвид својство 3.1, следи дека:

1. точно е равенството:

$$\sup_{\mathbf{y}\in B}\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}\in A}\sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

2. во (3.10) знаците „≤“ секаде може да се заменат со „=“, па ќе важи

$$\sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*). \qquad (3.11)$$

Второто равенството во последниот израз ја потврдува точноста на тврдењето дека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за (3.8), додека првото равенство ја потврдува точноста на тврдењето дека $\mathbf{y}^*$ е оптимално решение за (3.9) и воедно важи (3.7).

Обратно, нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за задачата на минимизација (3.7), $\mathbf{y}^*$ е оптимално решение за задачата на минимизација (3.9) и притоа важи (3.7). Ќе покажеме дека е точен изразот (3.11). Прво да забележиме дека непосредно од дефинициите на инфимум и супремум се добива дека

$$\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) \leq \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}).$$

Од друга страна, при направената претпоставка имаме:

$$\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{y}\in B}\inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x}\in A}\sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}).$$

Последните изрази покажуваат дека е точен изразот (3.11). Од него пак следи дека

$$F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) \leq \sup_{\mathbf{y}\in B} F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in A} F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \leq F(\mathbf{x},\mathbf{y}^*), \text{ за секои } \mathbf{x} \in A,\ \mathbf{y} \in B.$$

што требаше да се докаже. ■

### 3.3. Лагранжова функција

За потсетување, со $\mathbb{R}_+^m$ го означуваме ненегативниот хипероктант во $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}.$$

Имајќи ги предвид резултатите од поглавјата 3.1 и 3.2, за поедноставување на теориските изложување понатаму сметаме дека, и функцијата на целта, и функциите на ограничување се дефинирани на целиот простор $\mathbb{R}^n$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Дефиниција 3.2.** Функцијата $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x}) \rangle, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m, \end{aligned}$$

се нарекува *Лагранжова функција придружена на задачата* (3.2), односно (3.3). Променливите $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$ уште се нарекуваат *Лагранжови множители*.

**Теорема 3.4.** Ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ е седлеста точка на Лагранжовата функција придружена на задачата (3.2) (или (3.3)), тогаш $\mathbf{x}^*$ е глобален минимум за оваа задача.

**Доказ.** Ќе покажеме дека

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u} \geq \mathbf{o}} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \text{ за секој } \mathbf{x} \text{ таков што } f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}. \tag{3.12}$$

Врз основа на дефиницијата на Лагранжовата функција лесно може да се воочи дека

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = \varphi(\mathbf{x}) \text{, за секој } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.13}$$

Од друга страна, бидејќи $f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}$ за секој $\mathbf{x}$ од допуштената област и, по дефиниција, $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$, за секој $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$, имаме

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x}) \rangle \leq \varphi(\mathbf{x}) + 0 = \varphi(\mathbf{x}) \text{, за секој } \mathbf{x} \text{ таков што } f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o} \text{ и } \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m.$$

Тогаш, согласно (3.13) имаме:

$$\varphi(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{o}) \leq \sup_{\mathbf{u} \geq \mathbf{o}} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}) \text{, за секој } \mathbf{x} \text{ таков што } f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}.$$

Применувајќи ја теорема 3.3 врз Лагранжовата функција при $A = \mathbb{R}^n$ и $B = \mathbb{R}_+^m$, согласно (3.12) добиваме дека $\mathbf{x}^*$ е глобален оптимум за проблемот (3.3). ■

Претходната теорема може да се докаже и независно од теорема 3.4, само со користење на неравенство од облик (3.6) формулирано соодветно за Лагранжовата функција. Деталите може да се најдат во (Vujčić et al. 1980, теорема 2.2.1). Но погоре приложениот доказ е попогоден за непречено формулирање на Лагранжовиот дуален проблем (оддел 3.6.1).

### 3.4. Задача на конвексно програмирање

За потсетување, конвексното програмирање е еден од видовите на математичко програмирање во кој се разгледуваат задачи на оптимизација каде допуштената област е конвексно множество и функцијата на целта е:

- конвексна на допуштената област, кај задачи на минимизација,
- конкавна на допуштената област, кај задачи на максимизација.

Во ова поглавје ќе се задржиме на поважните теориски резултати поврзани со задачите на минимизација во конвексното програмирање. Прво ќе покажеме три поопшти теореми за оптимумите кај задача на конвексно програмирање независно од тоа како е опишано конвексното множество над кое треба да се минимизира функцијата.

**Теорема 3.5.** Нека $X$ е конвексно множество, $\varphi$ е конвексна функција на $X$ и нека точката $\overline{\mathbf{x}} \in C$ е локален минимум за задачата

$$\min \varphi(\mathbf{x}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in X.$$

Тогаш $\overline{\mathbf{x}}$ е и глобален минимум за оваа задача.

**Доказ.** Нека претпоставиме дека точката $\overline{\mathbf{x}} \in X$ е локален минимум, но дека не е и глобален минимум. Тогаш постои $\mathbf{y} \in X$ така што $\varphi(\mathbf{y}) < \varphi(\overline{\mathbf{x}})$.

Бидејќи $\overline{\mathbf{x}}$ е локален минимум на $\varphi$ на $X$, постои $\varepsilon > 0$ така што $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) \leq \varphi(\mathbf{z})$ за секоја точка $\mathbf{z} \in B_\varepsilon(\overline{\mathbf{x}}) \cap X$. Нека $\lambda \in (0,1)$ е произволен и нека $\mathbf{z}_\lambda = (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{y}$. Поради конвексноста на $X$, важи $\mathbf{z}_\lambda \in X$. Поради конвексноста на функцијата $\varphi$ на $X$ и $\varphi(\mathbf{y}) < \varphi(\overline{\mathbf{x}})$ ќе важи

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\varphi(\mathbf{z}_\lambda) \leq (1-\lambda)\varphi(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda\varphi(\mathbf{y}) < (1-\lambda)\varphi(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}).$$

Поради произволноста на $\lambda$, според претходното, добиваме дека $\varphi(\mathbf{z}_\lambda) < \varphi(\bar{\mathbf{x}})$, за секој $\lambda \in (0,1)$. Вредноста на $\lambda \in (0,1)$ може да се избере доволно мала така што за точката $\mathbf{z}_\lambda$ да важи $\mathbf{z}_\lambda \in B_\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}) \cap X$. Во тој случај $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) \leq \varphi(\mathbf{z}_\lambda)$, што противречи на $\varphi(\mathbf{z}_\lambda) < \varphi(\bar{\mathbf{x}})$. ■

**Теорема 3.6.** Нека $X$ е конвексно множество, $\varphi$ е строго конвексна функција на $X$ и нека $\bar{\mathbf{x}} \in X$ е локален минимум за задачата

$$\min \varphi(\mathbf{x}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in X.$$

Тогаш $\bar{\mathbf{x}}$ е единствен глобален минимум на оваа задача.

**Доказ.** Од теорема 3.5 следи дека $\bar{\mathbf{x}}$ е глобален минимум. Претпоставуваме дека тој не е единствен, т.е. дека постои $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ така што $\tilde{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{x}}$ и за кој важи $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = \varphi(\bar{\mathbf{x}})$. Во тој случај

$$\frac{(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}})}{2} \in X,$$

и, поради строгата конвексност на функцијата $\varphi$,

$$\varphi\left(\frac{\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}}{2}\right) < \frac{\varphi(\bar{\mathbf{x}}) + \varphi(\tilde{\mathbf{x}})}{2} = \varphi(\bar{\mathbf{x}}),$$

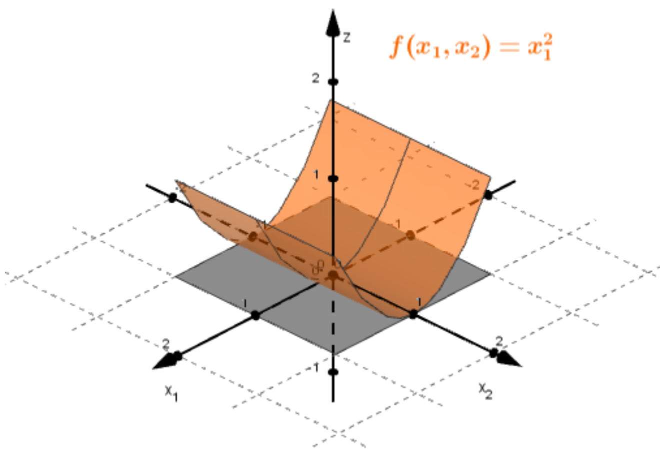
што противречи на претпоставката дека $\bar{\mathbf{x}}$ е глобален минимум. ■

Аналогни тврдењата на оние во теоремите 3.5 и 3.6 може да се формулираат и да се докажат на сличен начин за проблеми на максимизација.

Како што покажува следниот пример, во случај кога функцијата $\varphi$ е конвексна, но не и строго конвексна, оптимумот не мора да биде единствен.

**Пример 3.1.** Нека $X = \{(x_1 x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \in [-1,1]\}$ и нека $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е функцијата дефинирана со $\varphi(x_1 x_2) = x_1^2$. Множеството $X$ е конвексно (тоа е квадратот во $\mathbb{R}^2$ со темиња во точките $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$ и $D(-1,1)$). Функцијата $\varphi$ не е линеарна, но таа е конвексна функција. Делот од нејзиниот график на множеството $X$ е прикажан на слика 3.1. Минималната вредност што оваа функција ја има на множеството $X$ е $0$ и таа се достигнува во секоја точка од множеството

$$T = \{(0, x_2) | -1 \leq x_2 \leq 1\}.$$




Слика 3.1. Функција што нема единствен глобален минимум (автори)

Множеството од сите минимуми во пример 3.1 е отсечка и истото е конвексно множество. Ова всушност важи за секоја задача на минимизација во конвексното програмирање. Да напоменеме дека не секоја задача на конвексно програмирање има решение. Наједноставни примери за вакви случаи би биле задачата на минимизација на функцијата $\varphi_1(x) = 1/x$ на множеството $X_1 = [1, \infty)$ (функцијата $\varphi_1$ е конвексна на $X_1$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

но не и на целата своја дефинициона област) и задачата на минимизација на функцијата $\varphi_2(x) = e^x$ на множеството $X_2 = \mathbb{R}$ (функцијата $\varphi_2$ е конвексна на целата своја дефинициона област). За овие функции важи

$$\inf\{\varphi_1(x) | x \in X_1\} = 0 = \inf\{\varphi_1(x) | x \in X_2\},$$

но $X_1$ и $X_2$ не содржат точки во кои функциите $\varphi_1$ и $\varphi_2$ имаат вредности еднакви на 0.

**Теорема 3.7.** Нека $X$ е конвексно множество и $\varphi$ е конвексна функција на $X$. Тогаш $\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi$ е конвексно множество.

**Доказ.** Нека претпоставиме дека $\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi$ е непразно множество, т.е. дека функцијата $\varphi$ има барем еден минимум $\bar{\mathbf{x}}$. Нека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi$ се произволни и нека за $\lambda \in [0,1]$, ставиме $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$. Поради конвексноста на $X$ ќе важи $\mathbf{x}_\lambda \in X$. Тогаш, поради конвексноста на функцијата $\varphi$, дефиницијата на $\operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi$ и претпоставката дека $\bar{\mathbf{x}}$ е минимум, ќе важи

$$\varphi(\mathbf{x}_\lambda) \leq \lambda\varphi(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{x}_2) = \lambda\varphi(\bar{\mathbf{x}}) + (1-\lambda)\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}) \leq \varphi(\mathbf{x}_\lambda).$$

Значи дека $\varphi(\mathbf{x}_\lambda) = \varphi(\bar{\mathbf{x}})$, и последователно, $\mathbf{x}_\lambda \in \operatorname*{argmin}_{\mathbf{x}\in X} \varphi$. ■

Ако задачата за минимизација е зададена во облик (3.2), таа ќе биде задача на конвексно програмирање секогаш кога функцијата на целта и функциите на ограничување се конвексни функции. Имено, важи следното својство.

**Својство 3.2.** Ако $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ се конвексни функции, тогаш

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\},$$

е конвексно множеството.

**Доказ.** Според теорема 2.19 , множествата $K_{i,0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f(\mathbf{x}) \leq 0\},\ i = 1,2, \dots, m$, се конвексни. Тогаш, според теорема 2.1, нивниот пресек $X = \bigcap_{i=1}^m K_{i,0}$ исто така ќе биде конвексно множество. ■

**Дефиниција 3.3.** За функциите $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, велиме *го задоволуваат Слејтеровиот услов* ако постои точка $\mathbf{x}^* \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\}$ таква што $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$ за секој $i \in \{1, \dots, m\}$.

Следната теорема овозможува значително полесна проверка на исполнетост на Слејтеровиот услов во конвексен случај.

**Теорема 3.8.** Нека функциите $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни. Ако за секој $i \in \{1, \dots, m\}$ постои точка $\mathbf{x}_i \in X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1,2, \dots, m\}$ така што $f_i(\mathbf{x}_i) < 0$, тогаш функциите $f_i,\ i = 1, \dots, m$ го задоволуваат Слејтеровиот услов.

**Доказ.** Доволно е да се земе

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \mathbf{x}_k.$$

Согласно Јенсеновото неравенство (теорема 2.16), за секој $i = 1, \dots, m$ ќе важи

$$f_i(\mathbf{x}^*) = f_i\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \mathbf{x}_k\right) \leq \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m f_i(\mathbf{x}_k) < 0,$$

што и требаше да се покаже. ■

**Теорема 3.9.** Нека $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни функции на $\mathbb{R}^n$ и нека тие го задоволуваат Слејтеровиот услов. Тогаш за $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m\}$ важи

$$\operatorname{int}(X) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) < 0,\ i = 1,2, \dots, m\},$$

$$\partial X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \text{за барем еден } i \in \{1,2, \dots, m\}\}.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Доказ.** Нека $\mathbf{x}^*$ е таков што $f_i(\mathbf{x}^*) < 0$ за секој $i \in \{1, \dots, m\}$. Бидејќи функциите $f_i$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни на $\mathbb{R}^n$ и како такви се непрекинати функции (теорема 2.20), постои околина $V$ на $\mathbf{x}^*$ таква што за секој $\mathbf{x} \in V$ и секој $i \in \{1,2, \dots, m\}$, важи $f_i(\mathbf{x}) < 0$. Тогаш $V \subset X$ и, последователно, $\mathbf{x}^* \in \operatorname{int}(X)$.

Нека сега $\overline{\mathbf{x}} \in \operatorname{int}(X)$. Бидејќи $f_i$, $i = 1, \dots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов постои точка $\tilde{\mathbf{x}} \in X$ таква што

$$f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Бидејќи $\overline{\mathbf{x}} \in \operatorname{int}(X)$, постои $\varepsilon > 0$ така што точката

$$\hat{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} + (1+\varepsilon)(\overline{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}) \in X.$$

Поради дефиницијата на $X$, од последното се добива дека $f_i(\hat{\mathbf{x}}) \le 0$, $i = 1, \dots, m$. Имајќи предвид дека

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{1+\varepsilon}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\tilde{\mathbf{x}},$$

ќе важи и

$$f_i(\overline{\mathbf{x}}) \le \frac{1}{1+\varepsilon} f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f_i(\tilde{\mathbf{x}}) < 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$

и, последователно, $\overline{\mathbf{x}} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) < 0, \ i = 1,2, \dots, m\}$.

Бидејќи $X$ е затворено множество (да се види почетокот од доказот на последица 3.1), ќе важи $\partial X = X \backslash \operatorname{int}(X) = \overline{X} \backslash \operatorname{int}(X)$. Ова заедно со претходниот дел од доказот го имплицира описот на $\partial X$ наведен во тврдењето. ■

Како што покажува следниот пример, Слејтеровиот услов е битен за точноста на тврдењето од претходната теорема.

**Пример 3.2.** Нека $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дадена со

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & |t| \ge 1 \\ 0, & |t| < 1 \end{cases}.$$

Тогаш $X = \{t | f(t) \le 0\} = [-1,1]$, $\operatorname{int}(X) = (-1,1)$, додека множеството $\{t | f(t) < 0\}$ е празно (не постои $\mathbf{x}^*$ таква што $f(\mathbf{x}^*) < 0$).

Наредните теореми играат значајна улога во математичкото програмирање, а се однесуваат на потребен и доволен услов за постоење на решение на задачите на минимизација.

**Теорема 3.10. (Кун-Такер)** Нека $\varphi$ и $f_i, i = 1,2, \cdots, m$, се конвексни функции, и притоа функциите $f_i, i = 1,2, \cdots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов. Потребен и доволен услов $\mathbf{x}^*$ да биде оптимално решение на задачата

$$\begin{aligned} &\min \ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.} \ f_i(\mathbf{x}) \le 0, \ i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

е да постои $\mathbf{y}^* \ge 0$ таков што $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлеста точка на Лагранжовата функција придружена оваа задача.

**Доказ.** Од теорема 3.4 следува дека условот е доволен. Ќе покажеме дека е и потребен. Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на дадената задача. Ги разгледуваме следните множества

$$P = \{(z_0, \mathbf{z}) | z_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, z_0 \le \varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{z} \le \mathbf{o}\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1},$$

$$Q = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} Q(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^{m+1},$$

каде

$$Q(\mathbf{x}) = \{(z_0, \mathbf{z}) | z_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, z_0 \ge \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{z} \ge f(\mathbf{x})\},$$

$(z_0, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ е вектор во кој, од втората, до последната координата, кратко се означени со $\mathbf{z}$, а функцијата $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е дефинирана со $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$.

Лесно се покажува дека множеството $P$ е конвексно.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Ќе покажеме дека и $Q$ е конвексно множество. Нека се $(z_0', \mathbf{z}')$ и $(z_0'', \mathbf{z}'')$ точки од $Q$. Според дефиниција на $Q$ постојат точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ такви што

$$(z_0', \mathbf{z}') \in Q(\mathbf{x}') \text{ и } (z_0'', \mathbf{z}'') \in Q(\mathbf{x}'').$$

Нека $0 \leq \lambda \leq 1$ и

$$(z_0, \mathbf{z}) = \lambda(z_0', \mathbf{z}') + (1-\lambda)(z_0'', \mathbf{z}'').$$

Ќе покажеме дека $(z_0, \mathbf{z}) \in Q(\lambda\, \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'')$. Со оглед на тоа дека функцијата $\varphi(\mathbf{x})$ е конвексна ќе важи

$$\varphi(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \leq \lambda\varphi(\mathbf{x}') + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{x}'') \leq \lambda z_0' + (1-\lambda)z_0'' = z_0.$$

Бидејќи $f_i(\mathbf{x})$ се конвексни функции, таква ќе биде и функцијата $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, па важи

$$f(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \leq \lambda f(\mathbf{x}') + (1-\lambda)f(\mathbf{x}'') \leq \lambda\mathbf{z}' + (1-\lambda)\mathbf{z}'' = \mathbf{z}.$$

Значи

$$(z_0, \mathbf{z}) \in Q(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \subseteq Q.$$

Множествата $\operatorname{int}(P) = \{(z_0, \mathbf{z}) | z_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{z} < 0, z_0 < \varphi(\mathbf{x}^*)\}$ и $Q$ се дисјунктни. Имено, за секој $\mathbf{x} \in X$ важи $\varphi(\mathbf{x}) \geq \varphi(\mathbf{x}^*)$, па согласно дефиницијата на $Q(\mathbf{x})$, точка $(z_0, \mathbf{z})$ што е елемент на $Q(\mathbf{x})$ не може да припаѓа на $\operatorname{int}(P)$. Ако пак $\mathbf{x} \notin X$, тогаш постои $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ таков што $f_i(\mathbf{x}) \geq 0$, од каде повторно следи дека точка $(z_0, \mathbf{z})$ што е елемент на $Q(\mathbf{x})$ не може да припаѓа на $\operatorname{int}(P)$.

Бидејќи множествата $\operatorname{int}(P)$ и $Q$ се конвексни и дисјунктни, според теорема 2.14 ќе постои хиперрамнина која нив ги раздвојува, т.е. постои вектор $(u_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ така што $(u_0, \mathbf{u}) \neq \mathbf{o}$ и

$$u_0 z_0 + \langle\mathbf{u}, \mathbf{z}\rangle \geq u_0 v_0 + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle, \text{ за секои } (z_0, \mathbf{z}) \in Q \text{ и } (v_0, \mathbf{v}) \in \operatorname{int}(P). \quad (3.14)$$

Со оглед на тоа дека компонентите на векторите кои припаѓаат на $P$ не се ограничени од долу, согласно (3.14) добиваме дека $(u_0, \mathbf{u}) \geq 0$. Заради непрекинатоста на скаларниот производ, неравенството (3.14) важи и за точки од множеството $P$.

Нека $\mathbf{x}$ е произволна точка од $\mathbb{R}^n$ и нека

$$z_0 = \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{z} = f(\mathbf{x}), v_0 = \varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

Заменувајќи во (3.14), добиваме

$$u_0\varphi(\mathbf{x}) + \langle\mathbf{u}, f(\mathbf{x})\rangle \geq u_0\varphi(\mathbf{x}^*), \text{ за секој } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.15)$$

Ќе покажеме дека $u_0 > 0$. Доколку $u_0 = 0$ ќе имаме

$$\langle\mathbf{u}, f(\mathbf{x})\rangle \geq 0, \text{ за секој } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

Бидејќи $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$ и $(u_0, \mathbf{u}) \neq 0$ постои $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ таков што $u_i > 0$. Со оглед на тоа дека $f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}$ за секој $\mathbf{x} \in X$, од (3.16) следува дека $f_i(\mathbf{x}) = 0$ за секој $\mathbf{x} \in X$, што противречи на Слејтеровиот услов.

Нека $\mathbf{y}^* = u_0^{-1}\mathbf{u}$, $u_0 > 0$. Тогаш (3.15) преминува во

$$\varphi(\mathbf{x}^*) \leq \varphi(\mathbf{x}) + \langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x})\rangle, \quad \text{за секој } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

При $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, од последното неравенство следи дека $\langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x}^*)\rangle \geq 0$. Од друга страна, $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{o}$ (што следи од $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$, $u_0 > 0$ и дефиницијата на $\mathbf{y}^*$), а $f(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{o}$, па ќе важи и $\langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x}^*)\rangle \leq 0$. Последователно, $\langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$. Бидејќи за секој $\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$ важи $\langle\mathbf{y}, f(\mathbf{x}^*)\rangle \leq 0$, добиваме

$$\varphi(\mathbf{x}^*) + \langle\mathbf{y}, f(\mathbf{x}^*)\rangle \leq \varphi(\mathbf{x}^*) + \langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x}^*)\rangle \leq \varphi(\mathbf{x}) + \langle\mathbf{y}^*, f(\mathbf{x})\rangle, \text{ за секои } \mathbf{y} \geq \mathbf{o}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. $L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$. ■

Следниот пример покажува дека тврдењето во теоремата не мора да важи кога Слејтеровиот услов не е исполнет.

**Пример 3.3.** Нека функциите $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се дефинирани со

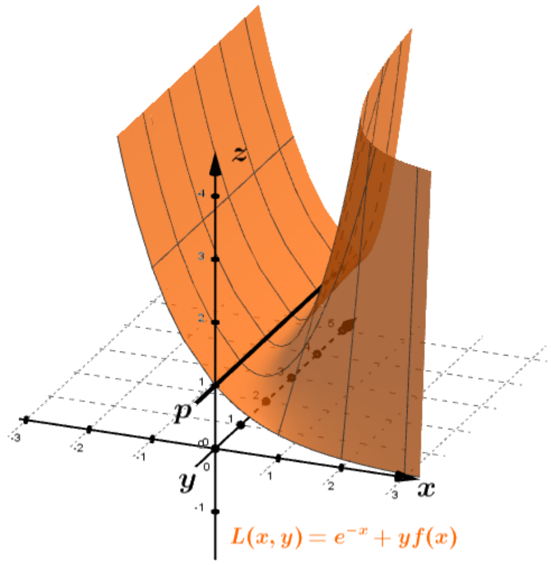
$$\varphi(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

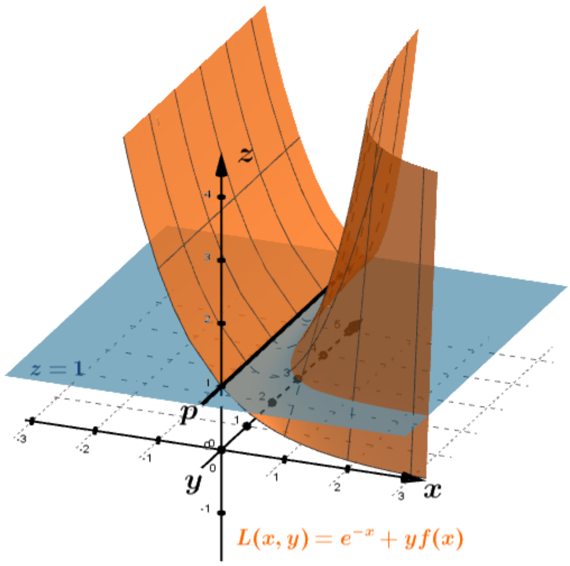
Множеството од допуштени решенија е $X = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$. Не е тешко да се забележи дека $\varphi$ го достигнува својот минимумот на множеството $X$ во точката $x^* = 0$. Но, бидејќи за секој $x \in X$ важи $f(x) = 0$, Слејтеровиот услов не е исполнет. Соодветната Лагранжовата функција е

$$L(x, y) = e^{-x} + yf(x), \qquad x \in \mathbb{R}, y \geq 0.$$

Со оваа функција е определена површината прикажана на слика 3.2. Заедно со површината е прикажана и правата $p$ што минува низ точката со координати $(0,0,1)$ и е паралелна со $y$ −оската. На оваа права лежат сите точки од површината определена со Лагранжовата функција чија прва координата е еднаква на $x^* = 0$.




Слика 3.2. Графички приказ на Лагранжовата функција од пример 3.3 (автори)




Слика 3.3. Графички приказ на Лагранжовата функција од пример 3.3 заедно со рамнината $z = 1$ (автори)

Ако кон приказот се додаде и рамнината $z = 1$, како на слика 3.3, лесно може да се забележи, барем од прикажаниот дел од површината, дека за секој $y^* \geq 0$ постои некој мал интервал $(0, \varepsilon^*)$ така што $L(x, y^*) < 1 = L(0, y^*)$, за секој $x \in (0, \varepsilon^*)$. Како што, движејќи се вдолж правата $p$, се оддалечуваме од $(0,0,1)$, вредноста на $\varepsilon^*$ е сè помала. Ова укажува на тоа дека, иако $x^* = 0$ е минимум на функцијата $\varphi$ на множеството $X$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

ниту една точка $L(x^*, y^*)$, каде $y^* \geq 0$, не може да биде седлеста точка за Лагранжовата функција. Формалната проверка, независно од она што може да се воочи од слика 3.2 и слика 3.3, е како што следи. Нека за даден $y^* \geq 0$, $g^*: [0, \infty) \to [0, \infty)$ е функцијата дефинирана со

$$g^*(x) = L(x, y^*) = e^{-x} + y^* f(x) = e^{-x} + y^* x^2, \quad x \geq 0.$$

Ќе покажеме дека вредноста на првиот извод на $g^*$ во точката $x = 0$ е негативна. Првиот извод на $g^*$ на отворениот интервал $(0, \infty)$ се определува на вообичаениот начин. Имајќи предвид дека $y^*$ е фиксно, добиваме:

$$(g^*)'(x) = (e^{-x} + y^* x^2)' = -e^{-x} + 2y^* x.$$

Со помош на овој израз, вредноста на првиот извод на $g^*$ во 0 ја определуваме како што следи

$$(g^*)'(0) = \lim_{x \to 0^+} (g^*)'(x) = \lim_{x \to 0^+} (-e^{-x} + 2y^* x) = -1 < 0.$$

Ова значи дека постои $\varepsilon^* > 0$ така што $g^*$ е *стого опаѓачка* функција на $(0, \varepsilon^*)$, т.е.

$$g^*(x) < g^*(0), \text{ за секој } x \in (0, \varepsilon^*),$$

или, согласно дефиницијата на $g^*$,

$$L(x, y^*) < L(x^*, y^*) = L(0, y^*), \text{ за секој } x \in (0, \varepsilon^*).$$

Во случај кога функциите на ограничување во задачата на минимизација од облик (3.2) се линеарни или афини пресликувања, Слејтеровиот услов може да се изостави. Прво да забележиме дека ако функциите на ограничување $f_i, i = 1,2, \cdots, m$, се афини пресликувања, тогаш тие може да се запишат во облик

$$f_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle - b_i, \; i = 1, \dots, m.$$

Ако $\mathbf{A}$ е матрица со димензија $m \times n$ чии редици се векторите $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, m$, и ако $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, задачата (3.2) може да се запише во следниот матричен облик:

$$\begin{aligned} &\min \; \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.} \; \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

**Теорема 3.11.** Нека $\varphi$ е конвексна функција на $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ е матрицата со димензија $m \times n$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Потребен и доволен услов да $\mathbf{x}^*$ биде оптимално решение на задачата (3.17) е да постои $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{o}$ така што $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ да биде седлеста точка на Лагранжовата функција придружена на (3.17).

**Доказ.** Од теорема 3.4 следува дека условот е доволен. Ќе покажеме дека е и потребен. Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на (3.17). Ги разгледуваме множествата

$$U = \{(y, \mathbf{s}) | y \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, y \geq \varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}^*)\},$$

и

$$V = \{(y, \mathbf{s}) | y \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \leq \mathbf{b}, y \leq 0\}.$$

Нека

$$V_0 = \{(y, \mathbf{s}) | y \in \mathbb{R}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \leq \mathbf{b}, y < 0\}.$$

Лесно може да се провери дека $U$ и $V$ се конвексни множества.

Множествата $U$ и $V_0$ се дисјунктни. Имено, поради претпоставката дека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение, за секој $\mathbf{x}^* + \mathbf{s} \in X$ важи

$$\varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}^*) \geq 0,$$

па ако $(y, \mathbf{s}) \in U$, тогаш мора да биде исполнето $y \geq 0$ и, последователно, $(y, \mathbf{s}) \notin V_0$. Според теорема 2.13, постои ненулти вектор $(c_0, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таков што

$$c_0 y_1 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{s}_1 \rangle \leq c_0 y_2 + \langle \mathbf{c}, \mathbf{s}_2 \rangle, \text{ за секои } (y_1, \mathbf{s}_1) \in U, (y_2, \mathbf{s}_2) \in V_0. \tag{3.18}$$

Со оглед на тоа дека $V$ е затворачот на $V_0$, неравенството во (3.18) важи и за $(y_2, \mathbf{s}_2) \in V$.

Ќе покажеме дека $c_0 < 0$. Нека претпоставуваме дека $c_0 \geq 0$.

Јасно е дека за секој $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ постои $y > 0$ така што $(y, \mathbf{s}) \in U$. Ако $c_0 = 0$, тогаш мора $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$ ($(c_0, \mathbf{c})$ е ненулти вектор), па функцијата $\mathbf{s} \mapsto \langle \mathbf{c}, \mathbf{s} \rangle$ е неограничена од горе.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Тогаш и функцијата $(y, \mathbf{s}) \mapsto c_0 y + \langle \mathbf{c}, \mathbf{s} \rangle$ е неограничена, што противречи на (3.18). Ако пак $c_0 > 0$, тогаш функцијата $(y, \mathbf{s}) \mapsto c_0 y + \langle \mathbf{c}, \mathbf{s} \rangle$ е неограничена, што исто така противречи на (3.18). Значи мора да важи $c_0 < 0$.

Ако (3.18) го поделиме со $c_0$ и ставиме $\mathbf{d} = c_0^{-1}\mathbf{c}$ ќе добиеме

$$y_1 + \langle \mathbf{d}, \mathbf{s}_1 \rangle \geq y_2 + \langle \mathbf{d}, \mathbf{s}_2 \rangle \text{ за секои } (y_1, \mathbf{s}_1) \in U,\ (y_2, \mathbf{s}_2) \in V. \tag{3.19}$$

Специјално, за $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s},\ y_1 = \varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{s}_2 = 0,\ y_2 = 0$ имаме

$$\varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{d}, \mathbf{s} \rangle \geq 0,$$

односно

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{x}^* + \mathbf{s} \rangle + \varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \geq \langle \mathbf{d}, \mathbf{x}^* \rangle + \varphi(\mathbf{x}^*) \text{ за секој } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.20}$$

Ако во (3.19) ставиме $y_1 = 0, \mathbf{s}_1 = \mathbf{o},\ y_2 = 0,\ \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}$, каде $\mathbf{s}$ е таков што $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{s}) \leq \mathbf{b}$, ќе добиеме

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{s} \rangle \leq 0. \tag{3.21}$$

Нека $\mathbf{a}_i$ е $i$ −тата редица на матрицата $\mathbf{A}$, $i = 1, \dots, m$. Без да се губи од општоста можеме да претпоставиме дека

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle &= \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle &< \mathbf{b}_i, \quad i = k+1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ќе покажеме дека за секој $\mathbf{s}^*$ за кој важи $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s} \rangle \leq 0,\ i = 1, \dots, k$, ќе важи и $\langle \mathbf{d}, \mathbf{s}^* \rangle \leq 0$. Нека претпоставиме спротивно т.е. дека постои $\overline{\mathbf{s}}$ за кој $\langle \mathbf{a}_i, \overline{\mathbf{s}} \rangle \leq 0, i = 1, \dots, k$ и $\langle \mathbf{d}, \overline{\mathbf{s}} \rangle > 0$. Тогаш поради (3.22), постои $\lambda > 0$ така што $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \lambda\overline{\mathbf{s}}) \leq \mathbf{b}$. Но во тој случај, поради (3.21), ќе важи $\langle \mathbf{d}, \lambda\overline{\mathbf{s}} \rangle \leq 0$. Од ова неравенство, имајќи предвид дека $\lambda > 0$, ќе следи дека $\langle \mathbf{d}, \overline{\mathbf{s}} \rangle \leq 0$, што е спротивно на претпоставката.

Според Фаркашова лема постои $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_k^*, 0 \dots, 0) \geq \mathbf{o}$ така што $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* = \mathbf{d}$, па важи $\langle \mathbf{d}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle$ за секој $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Врз основа на (3.20) добиваме

$$\varphi(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} \rangle \leq \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \rangle, \text{ за } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n.$$

Бидејќи $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} \rangle = 0,\ \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} \leq \mathbf{o}$ важи и

$$\varphi(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} \rangle \leq \varphi(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b} \rangle, \text{ за } \mathbf{y} \geq \mathbf{o}.$$

Од тука следи дека $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлеста точка на Лагранжовата функција придружена на проблемот (3.17). ■

Претходната теорема ќе ја илустрираме со следниот пример.

**Пример 3.4.** Нека функцијата $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дадена со $\varphi(x) = e^{-x}$ и нека е дадено едно линеарно ограничување $x \leq 0$. Лагранжовата функција е $L(x, y) = e^{-x} + xy$. Не е тешко да се провери дека точката $x^* = 0$ е оптимална за $\varphi$ над $X = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ и дека точката $(0,1)$ е седлеста точка за Лагранжовата функција.

Интересно е да се напомене дека функциите на цел во последните два примера се еднакви и дека се минимизираат над исто множество $X = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ од допуштени решенија, но одговорите за егзистенција на седлеста точка се разликуваат. Ова покажува дека прашањето за егзистенција на седлеста точка битно зависи од начинот на опишување на множество од допуштени решенија, а не од самото множество. Тоа е природно бидејќи дефинирањето на Лагранжовата функција, освен од функцијата на цел, зависи од начинот на опишување на допуштената област.

### 3.5. Диференцијабилен случај; Кун-Такерови услови

За функцијата на целта и функциите на ограничување, во претходните поглавја не беше претпоставена диференцијабилност. Сега ќе покажеме како може да се изразат условите за оптималност и условите за седлеста точка во случај кога тие функции се диференцијабилни.

**Теорема 3.12.** Ако $\varphi$ и $f_i,\ i = 1, \dots, m$, се конвексни и диференцијабилни функции тогаш $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлеста точка за Лагранжовата функција

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m.$$

ако, и само ако, се исполнети условите

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2, \dots, n, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} \le 0, \quad j = 1,2, \dots, m, \tag{3.24}$$

$$y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1,2, \dots, m, \tag{3.25}$$

$$y_j^* \ge 0, \quad j = 1,2, \dots, m, \tag{3.26}$$

каде $(y_1^*, \dots, y_m^*) = \mathbf{y}^*$ и

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}}, i = 1,2, \dots, n, \qquad \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial L}{\partial y_j}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}}, j = 1,2, \dots, m.$$

**Доказ.** Нека претпоставиме дека постои $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, $\mathbf{y}^* \ge \mathbf{o}$ така што

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \le L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \le L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*),\ \text{за секои}\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \ge \mathbf{o}.$$

Тогаш функцијата $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ достигнува минимум во точката $\mathbf{x}^*$, па условот (3.23) е потребен. Со оглед на тоа дека

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} = f_j(\mathbf{x}^*), j = 1,2, \dots, m.$$

потребата од условите (3.24), (3.25) и (3.26) следи од теорема 3.4.

Ќе покажеме дека условите (3.23) – (3.26) се и доволни.

Бидејќи функциите $\varphi$ и $f_i$, $i = 1, \dots, m$ се конвексни, а $\mathbf{y}^* \ge \mathbf{o}$, врз основа на теорема 2.17 следи дека и функцијата $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)$ ќе биде конвексна по $\mathbf{x}$, па според теорема 2.21 и условот (3.23)

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \ge L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \sum_{j=1}^{m} (x_j - x_j^*) \frac{\partial L^*}{\partial x_j} = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\ \ \text{за секој}\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Имајќи предвид дека заради условите (3.24) и (3.25) важи

$$f_j(\mathbf{x}^*) \le 0, \quad y_j^* f_j(\mathbf{x}^*) = 0,\ \ j = 1,2, \dots, m,$$

и, последователно, мора да важи и $y_j \ge 0$, $j = 1,2, \dots, m$, следува дека

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j(\mathbf{x}^*) \le \varphi(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m} y_j^* f_j(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*).$$

Што значи дека $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлеста точка на функцијата $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. ■

**Теорема 3.13. (Кун-Такер)** Нека во проблемот на конвексното програмирање

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o.}\ f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

функциите $\varphi$ и $f_i$, $i = 1, \dots, m$ се диференцијабилни и нека функциите $f_i$, $i = 1, \dots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов. За $\mathbf{x}^*$ да биде оптимална точка потребно и доволно е да постојат реални броеви $\lambda_1, \dots \lambda_m$такви што

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j(\mathbf{x}^*), \tag{3.27}$$

$$f_j(\mathbf{x}^*) \le 0, \quad j = 1,2, \dots, m, \tag{3.28}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\lambda_j f_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3.29}$$

$$\lambda_j \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3.30}$$

**Доказ.** Доволно е да се земе $\lambda_j = -y_j^*,\ j = 1,2,\ldots,m$ , и да се применат теоремите 3.12 и 3.10. ■

**Теорема 3.14. (Кун-Такер)** Нека во проблемот

$$\min\ \varphi(\mathbf{x})$$
$$\text{p.o. } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

функцијата $\varphi$ е конвексна и диференцијабилна. За $\mathbf{x}^*$ да биде оптимална точка потребно и доволно е да постојат реални броеви $\lambda_1,\ldots\lambda_m$ такви да

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, \mathbf{a}_j, \tag{3.31}$$

$$\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle - b_j \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3.32}$$

$$\lambda_j\left(\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle - b_j\right) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3.33}$$

$$\lambda_j \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3.34}$$

каде $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ се редиците на матрицата $\mathbf{A}$.

**Доказ.** Како и во претходната теорема доволно е да земеме $\lambda_j = -y_j^*, j = 1,\ldots,m$ и да ги примениме теорема 3.11 и теорема 3.12. ■

**Пример 3.5.** Нека е даден проблемот

$$\min\ e^{x_1+x_2}$$
$$\text{p.o. } x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0.$$

Допуштената област е множеството

$$X = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \big| x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}.$$

На слика 3.4 се прикажани $X$ (сиво обоениот круг во $x_1Ox_2$ рамнината) и делот од графикот на функцијата

$$\varphi(x_1,x_2) = e^{x_1+x_2},$$

над $X$. Функцијата на целта и функцијата на ограничување се конвексни, а конвексно е и множеството $X$. За функцијата

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1,$$

е исполнет Слејтеровиот услов. Условите (3.27) – (3.30) од теоремата 3.13 стануваат:

$$e^{x_1^*+x_2^*} = 2\lambda x_1^*,$$

$$e^{x_1^*+x_2^*} = 2\lambda x_2^*,$$

$${x_1^*}^2 + {x_2^*}^2 - 1 \leq 0,$$

$$\lambda({x_1^*}^2 + {x_2^*}^2 - 1) = 0,$$

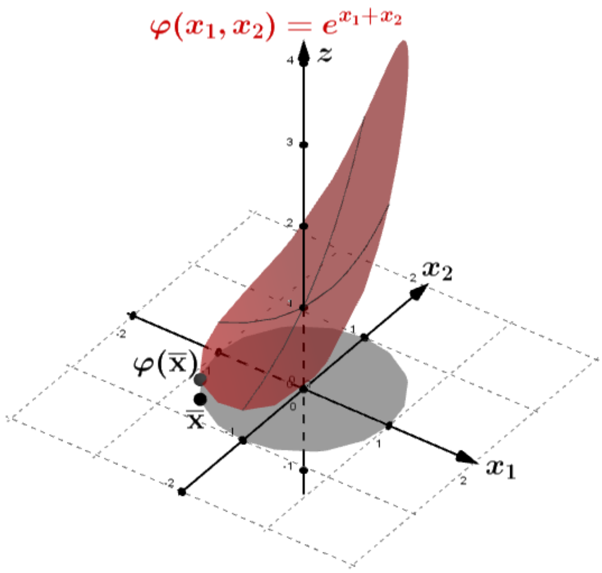
$$\lambda \leq 0.$$

Бидејќи $e^{x_1^*+x_2^*} \neq 0$, следува дека $\lambda \neq 0$ (поточно $\lambda < 0$), па е ${x_1^*}^2 + {x_2^*}^2 = 1$ и $x_1^* = x_2^*$, од каде следи дека

$$x_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad x_2^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda = -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Врз основа на теорема 3.13 точката $\bar{\mathbf{x}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ е оптимална.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 3.4. Допуштената област, функцијата на целта и нејзиниот оптимум за пример 3.5 (автори)

Во случај кога функцијата на целта и/или функциите на ограничување не се конвексни, теоремите 3.13 и 3.14 не може да се применат за испитување на оптималност, и тоа од повеќе причини:

- условите од овие теореми не можат да бидат доволни, бидејќи функцијата на целта на допустливото множество може да има повеќе (па дури и бесконечно многу) локални оптимуми,
- при докажувањето на овие теореми се користи теоремата 3.10 во која е клучна претпоставката за конвексност на функцијата на целта и функциите на ограничување,
- доказот на теорема 3.11 е врз основа на теорема 3.10 во која се користи конвексноста на функциите на ограничување и Слејтеровиот услов.

Меѓутоа, може да се покаже дека условите (3.27) – (3.30) се потребни за оптималност и во неконвексен случај при што, наместо Слејтеровиот услов, се користат некои од т.н. услови за регуларност. Еден таков услов е тоа дека градиентите на функциите на ограничување што се активни во $\mathbf{x}^*$ се линеарно независни. Имено, важи следната теорема.

**Теорема 3.15.** Нека $\mathbf{x}^*$ е локален оптимум за задачата

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o. } f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

нека функциите $\varphi$ и $f_i,\ i = 1, \dots, m$, се диференцијабилни во точката $\mathbf{x}^*$ и градиентите на функциите на ограничувањата што се активни во $\mathbf{x}^*$ се линеарно независни. Тогаш постојат реални броеви $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ така да се задоволени условите (3.27) – (3.30).

**Доказ.** Без губење на општоста можеме да земеме

$$f_1(\mathbf{x}^*) = 0, \cdots, f_k(\mathbf{x}^*) = 0, f_{k+1}(\mathbf{x}^*) < 0, \dots, f_m(\mathbf{x}^*) < 0.$$

Бидејќи $\nabla f_1(\mathbf{x}^*), \cdots, \nabla f_k(\mathbf{x}^*)$ се линеарно независни, системот

$$\langle \mathbf{s}, \nabla f_i(\mathbf{x}^*) \rangle = -1, \quad i = 1,2, \dots, k,$$

има барем едно решение. Нека $\hat{\mathbf{s}}$ е едно од нив.

Нека сега $\mathbf{s}$ е произволен вектор за кој важи.

$$\langle \mathbf{s}, \nabla f_i(\mathbf{x}^*) \rangle < 0, \quad i = 1,2, \dots, k.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Тогаш за доволно мало $\eta > 0$, точките $\mathbf{x}^* + \alpha\mathbf{s}$, $0 \le \alpha \le \eta$, се допуштени решенија, бидејќи функциите $f_1, \dots, f_k$ локално опаѓаат во правец $\mathbf{s}$, а функциите $f_{k+1}, \dots, f_m$, поради непрекинатоста остануваат негативни во доволно мала околина на точката $\mathbf{x}^*$. Но за таков вектор $\mathbf{s}$ мора да важи и

$$\langle \mathbf{s}, \nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\rangle \ge 0,$$

бидејќи во спротивно, ќе постои вектор $\bar{\mathbf{s}}$ и позитивен број $\rho$, така што $\mathbf{x}^* + \alpha\bar{\mathbf{s}} \in X$ и

$$\varphi(\mathbf{x}^* + \alpha\bar{\mathbf{s}}) < \varphi(\mathbf{x}^*), \text{ за } 0 < \alpha < \rho,$$

што е спротивно на претпоставката дека $\mathbf{x}^*$ е локален оптимум.

Нека сега $\mathbf{d}$ е произволен вектор за кој важи

$$\langle \mathbf{d}, \nabla f_i(\mathbf{x}^*)\rangle \le 0, \quad i = 1,2,\dots,k.$$

Ќе покажеме дека $\langle \mathbf{d}, \nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\rangle \ge 0$. Навистина, за $0 < \lambda_j \le 1$, векторот $\mathbf{s}_j = \lambda_j\hat{\mathbf{s}} + (1-\lambda_j)\mathbf{d}$ го задоволува условот

$$\left\langle \mathbf{s}_j, \nabla f_i(x^*)\right\rangle < 0, \quad i = 1,2,\dots,k;$$

па поради тоа ќе важи и

$$\left\langle \mathbf{s}_j, \nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\right\rangle \ge 0.$$

Земаме $\lambda_j \to 0, j \to \infty$. Тогаш $\mathbf{s}_j \to \mathbf{d}$, па од непрекинатоста на скаларниот производ следи дека

$$\langle \mathbf{d}, \nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\rangle \ge 0.$$

Но, тоа значи дека секој $\mathbf{d}$ што го задоволува системот неравенства

$$\langle \mathbf{d}, \nabla f_i(\mathbf{x}^*)\rangle \le 0, \quad i = 1,2,\dots,k,$$

го задоволува и неравенството

$$\langle \mathbf{d}, -\nabla\varphi(\mathbf{x}^*)\rangle \le 0.$$

Според Фаркашова лема постојат ненегативни броеви $\mu_1, \dots, \mu_k$ такви што

$$-\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k_i} \mu_i \nabla f_i(\mathbf{x}^*).$$

Земајќи $\lambda_1 = -\mu_1, \dots, \lambda_k = -\mu_k, \lambda_{k+1} = \cdots \lambda_m = 0$ ги добиваме условите (3.27), (3.29) и (3.30), додека условот (3.28) е тривијално исполнет. ■

Во случај на линеарни ограничувања доказот на горното тврдење може да се изведи и без претпоставката за линеарна независност на градиентите на активните ограничувања. Со оглед на важноста која ја имаат условите (3.27) – (3.30), односно (3.31) – (3.34), ја воведуваме следната дефиниција.

**Дефиниција 3.4.** Точката $\mathbf{x}^*$ се нарекува *стационарна точка* за проблемот

$$\begin{aligned} &\min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o. } f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,m, \end{aligned}$$

ако таа ги задоволува Кун-Такеровите услови:

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla f_j(\mathbf{x}^*)$$

$$f_j(\mathbf{x}^*) \le 0, \quad j = 1,2,\dots,m,$$

$$\lambda_j f_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1,2,\dots,m,$$

$$\lambda_j \le 0, \quad j = 1,2,\dots,m,$$

Да забележиме дека во случај на проблем без ограничување, Кун-Такеровите услови се сведуваат на условот

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 3.6. Еквивалентни задачи на оптимизација

**Дефиниција 3.5.** Нека $X \subseteq \mathbb{R}^m$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. За пресликувањето $f: X \to Y$ се вели дека е *алгоритамско*, ако за секој вектор $\mathbf{x} \in X$, секоја од компонентите на векторот $f(\mathbf{x})$ може да се пресмета со која било однапред одредена точност користејќи конечен број на основни аритметички операции со компонентите на векторот $\mathbf{x}$.

**Дефиниција 3.6.** Задачите на минимизација

$$(\mathcal{P}'): \min \varphi(\mathbf{x}) \text{ при услов } \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{3.35}$$

$$(\mathcal{P}''): \min \psi(\mathbf{y}) \text{ при услов } \mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{3.36}$$

се вели дека се *еквивалентни*, ако постојат алгоритамски пресликувања

$$f: X \to Y \text{ и } g: Y \to X,$$

така што

$$\psi\big(f(\mathbf{x})\big) \leq \varphi(\mathbf{x}), \text{ за секој } \mathbf{x} \in X, \tag{3.37}$$

$$\varphi\big(g(\mathbf{y})\big) \leq \psi(\mathbf{y}), \text{ за секој } \mathbf{y} \in Y, \tag{3.38}$$

Пресликувањето $f$ се нарекува *еквивалентна трансформација* на задачата $(\mathcal{P}')$ во $(\mathcal{P}'')$, а $g$ еквивалентна трансформација на задачата $(\mathcal{P}'')$ во $(\mathcal{P}')$.

Барањето пресликувањата во $f$ и $g$ да бидат алгоритамски е вклучено со цел да се земат предвид ограничувањата на реалните алгоритми. Ваквото барање гарантира дека ефикасното решавање на еден проблем води до ефикасно решавање на другиот проблем, а трансформациите ќе бидат изведени со примена на конечен број на основни аритметички операции, што е исклучително важен аспект во пресметковната теорија.

**Својство 3.3.** Нека $(\mathcal{P}')$ и $(\mathcal{P}'')$ дадени со (3.35) и (3.36) се еквивалентни задачи на минимизација, и нека $f$ и $g$ се како во дефиниција 3.6.

v) Допуштените области на $(\mathcal{P}')$ и $(\mathcal{P}'')$, или двете се празни, или двете се непразни множества.
vi) Ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за $(\mathcal{P}')$, тогаш $f(\mathbf{x}^*)$ е оптимално решение за $(\mathcal{P}'')$ и важи $\varphi(\mathbf{x}^*) = \psi(f(\mathbf{x}^*))$.
vii) Ако која било од задачите $(\mathcal{P}')$ и $(\mathcal{P}'')$ има оптимално решение, тогаш и другата има оптимално решение.
viii) $\inf\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = \inf\{\psi(\mathbf{y}) | \mathbf{y} \in Y\}$ .
ix) Ако $(\mathbf{x}_n)$ е низа во $X$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\mathbf{x}_n) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x})$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \psi\big(f(\mathbf{x}_n)\big) = \inf_{\mathbf{y}\in Y} \psi(\mathbf{y}).$$

Специјално, ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за $(\mathcal{P}')$ и ако $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\mathbf{x}_n) = \varphi(\mathbf{x}^*)$, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \psi\big(f(\mathbf{x}_n)\big) = \psi(f(\mathbf{x}^*)).$$

**Доказ.** Тврдењето од i) е тривијално.

Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за $(\mathcal{P}')$. Согласно (3.37) и (3.38), за произволен $\mathbf{y} \in Y$ важи

$$\psi(\mathbf{y}) \geq \varphi\big(g(\mathbf{y})\big) \geq \varphi(\mathbf{x}^*) \geq \psi\big(f(\mathbf{x}^*)\big), \text{ и}$$
$$\psi\big(f(\mathbf{x}^*)\big) \geq \varphi\Big(g\big(f(\mathbf{x}^*)\big)\Big) \geq \varphi(\mathbf{x}^*),$$

од каде следи дека

$$\inf_{\mathbf{y}\in Y} \psi(\mathbf{y}) = \psi\big(f(\mathbf{x}^*)\big) = \varphi(\mathbf{x}^*).$$

Со тоа е докажано тврдењето под ii) и дел од тврдењето под iii) за кое, слично како претходно, лесно се покажува дека, доколку $\mathbf{y}^*$ е оптимално решение за $(\mathcal{P}'')$, тогаш $g(\mathbf{y}^*)$ ќе биде оптимално решение за $(\mathcal{P}')$ и притоа $\psi(\mathbf{y}^*) = \varphi\big(g(\mathbf{y}^*)\big)$.

За да се покажат тврдењата под iv) и v), нека

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\alpha = \inf_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}), \quad \beta = \inf_{\mathbf{y}\in Y} \psi(\mathbf{y}).$$

Лесно се покажува дека $\alpha = -\infty \iff \beta = -\infty$ и дека во тој случај, тврдењето во v) е скоро тривијално исполнето. Затоа нека претпоставиме дека $\alpha \neq -\infty \neq \beta$ и нека $\varepsilon > 0$ е произволен. Согласно дефиницијата на инфимум, постои $\mathbf{y}_\varepsilon \in Y$ така што да важи $\beta \leq \psi(\mathbf{y}_\varepsilon) < \beta + \varepsilon$. Но тогаш, согласно (3.38), $\psi(\mathbf{y}_\varepsilon) \geq \varphi\big(g(\mathbf{y}_\varepsilon)\big) \geq \alpha$, што значи дека

$$\alpha < \beta + \varepsilon.$$

Слично, постои $\mathbf{x}_\varepsilon \in X$ така што да важи $\alpha \leq \varphi(\mathbf{x}_\varepsilon) < \alpha + \varepsilon$. Тогаш според (3.37), $\varphi(\mathbf{x}_\varepsilon) \geq \psi\big(f(\mathbf{x}_\varepsilon)\big) \geq \beta$, што значи дека

$$\beta < \alpha + \varepsilon.$$

Допуштајќи $\varepsilon \to 0$, од неравенствата $\alpha < \beta + \varepsilon$ и $\beta < \alpha + \varepsilon$ следи дека $\alpha = \beta$, со што е докажано iv).

Нека $(\mathbf{x}_n)$ е низа допуштени решенија за задачата $(\mathcal{P}')$ така што $\lim_{n\to\infty} \varphi(\mathbf{x}_n) = \alpha$. Бидејќи $\alpha = \beta$ и, според (3.37), $\varphi(\mathbf{x}_n) \geq \psi\big(f(\mathbf{x}_n)\big)$, ќе важи $0 \leq \psi\big(f(\mathbf{x}_n)\big) - \beta = \varphi(\mathbf{x}_n) - \alpha$. Допуштајќи $n \to \infty$, се добива дека $\lim_{n\to\infty} \psi\big(f(\mathbf{x}_n)\big) = \inf_{\mathbf{y}\in Y} \psi(\mathbf{y})$. ■

**Напомена 3.1.** Дефиницијата за еквивалентност проблеми на минимизација во математичкото програмирање (а со тоа и формулацијата на својство 3.3) е адаптација на дефиницијата за еквивалентни задачи на максимизација (Абрамов и Капустин, 1976, §3). За случај на задачи на максимизација, соодветната дефиниција се одбива од дефиниција 3.6, со замена на неравенствата (3.37) и (3.38) со обратните неравенства.

## 3.7. Дуалност

Дуалноста е еден од најважните концепти во математичките оптимизации. Во суштина, таа обезбедува техника со која се врши трансформирање на даден проблем на минимизација (т.н. примарен проблем) во проблем на максимизација (т.н. дуален проблем) што ќе обезбеди корисни информации за примарниот проблем. Уште повеќе, при дополнителни услови, решавањето на дуалниот проблем, индиректно ќе значи и решавање на примарниот проблем.

Во поновата литература најчесто се разгледува т.н. Лагранжова дуалност каде дуалниот проблем се дефинира со помош на Лагранжовата функција, а се надоврзува на резултатите од теоремите 3.3 и 3.4. Во случај кога и функцијата на цел и функциите на ограничување се диференцијабилни, Лагранжовата функција може да се искористи за дефинирање на алтернативен, т.н. Вулфов дуален проблем. Во продолжение ќе ги разгледаме двата вида дуалност.

Разгледуваме задача на минимизација од облик

$$(\mathcal{P}):\quad \begin{array}{l} \min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ \text{р.о.}\ f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \dots, m, \end{array}$$

или

$$(\mathcal{P}):\quad \begin{array}{l} \min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ \text{р.о.}\ f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}. \end{array}$$

каде $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се дадени функции, а $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е функцијата дефинирана со $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$. Претходните проблеми ги нарекуваме *примарни* проблеми, а координатите на векторската променлива $\mathbf{x}$ ги нарекуваме *примарни променливи*. Како и во претходните поглавја, функцијата $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$, дефинирана со

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x}) \rangle, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m_+, \end{aligned}$$

е нивната придружена Лагранжова функција.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 3.7.1. Лагранжов дуален проблем (општ случај)

**Дефиниција 3.7.** Функцијата $\psi\colon \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ дефинирана со

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{u}) &= \inf_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \\ &= \inf_{\mathbf{x}\in X}(\varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x})\rangle) \\ &= \inf_{\mathbf{x}\in X}\left(\varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})\right), \text{ за секој } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m\end{aligned} \tag{3.39}$$

се нарекува *дуална Лагранжова функција* на функцијата $\varphi$.

**Теорема 3.16.** Функцијата $\psi$ дефинирана со (3.39) е со следните својства.

i) $\psi$ е конкавна функција на $\mathbb{R}_+^m$.

ii) За секои $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$, $\psi(\mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x})$.

iii) Ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на примарниот проблем $(\mathcal{P})$, тогаш $\psi(\mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}^*)$ за секој $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$.

**Доказ.** За да се покаже i) нека $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}_+^m$ и $\lambda \in [0,1]$ се произволни. Тогаш

$$\begin{aligned}\psi(\lambda\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2) &= \inf_{\mathbf{x}\in X}(\varphi(\mathbf{x}) + \langle \lambda\mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2, f(\mathbf{x})\rangle) \\ &= \inf_{\mathbf{x}\in X}(\varphi(\mathbf{x}) + \lambda\langle \mathbf{u}_1, f(\mathbf{x})\rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{u}_2, f(\mathbf{x})\rangle) \\ &= \inf_{\mathbf{x}\in X}\{\lambda[\varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}_1, f(\mathbf{x})\rangle] + (1-\lambda)[\varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}_2, f(\mathbf{x})\rangle]\} \\ &= \inf_{\mathbf{x}\in X}\big(\lambda L(\mathbf{x},\mathbf{u}_1) + (1-\lambda)L(\mathbf{x},\mathbf{u}_2)\big) \\ &\geq \lambda\psi(\mathbf{u}_2) + (1-\lambda)\psi(\mathbf{u}_2),\end{aligned}$$

од каде следи дека $\psi$ е конкавна функција. За последното неравенство е искористено општо својство на инфимумот за збир на функции, како и ненегативноста на $\lambda$ и $1-\lambda$.

Во случај кога $\mathbf{x} \in X$, ќе важи $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$, за секој $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Тогаш за произволен $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m$ имаме

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot 0 = \varphi(\mathbf{x}), \text{ за секој } \mathbf{x} \in X. \tag{3.40}$$

Имајќи ја предвид дефиницијата на $\inf$, од (3.40) следи дека

$$\psi(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{x}\in X} L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \leq L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}), \text{ за секои } \mathbf{x} \in X \text{ и } \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m. \tag{3.41}$$

со што е докажано ii).

Ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на примарниот проблем $(\mathcal{P})$, тогаш за произволен $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}_+^m$, според (3.41) ќе важи

$$\psi(\hat{\mathbf{u}}) \leq L(\mathbf{x},\hat{\mathbf{u}}) \leq \inf_{\mathbf{x}\in X}\varphi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in X}\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}^*),$$

па следи точноста и на тврдењето под iii). ■

**Дефиниција 3.8.** Проблемот на максимизација

$$(\mathcal{D}): \quad \begin{array}{rl}\max & \psi(\mathbf{u}) \\ \text{р.о.} & \mathbf{u} \geq \mathbf{o},\end{array}$$

каде $\psi$ е дуалната Лагранжова функција за функцијата на целта на проблемот $(\mathcal{P})$ се нарекува *Лагранжов дуален проблем* на $(\mathcal{P})$.

Како што може да се забележи, во теорема 3.16 не е претпоставена конвексност ниту на функцијата на целта, ниту на функциите на ограничување кај примарниот проблем $(\mathcal{P})$, а сепак дуалниот проблем $(\mathcal{D})$ е проблем на конвексно програмирање: допуштената област за $(\mathcal{D})$ е $\mathbb{R}_+^m$ што е конвексно множество, а функцијата на целта за $(\mathcal{D})$ е конкавна функција.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Теорема 3.17. (слаба дуалност кај примарен и Лагранжов дуален проблем)**
Ако проблемот $(\mathcal{P})$ има барем едно допуштено решение, и

$$p^* = \inf\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, f_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1, \dots, m\}, \tag{3.42}$$

$$d^* = \sup\{\psi(\mathbf{u}) | \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m\}, \tag{3.43}$$

каде $\psi$ е Лагранжовата дуална функција за $\varphi$, тогаш важи

$$d^* \le p^*. \tag{3.44}$$

**Доказ.** Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е допуштено решение на проблемот $(\mathcal{P})$, тогаш според ii) од теорема 3.16,

$$\psi(\mathbf{u}) \le \varphi(\bar{\mathbf{x}}), \text{ за секој } \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m,$$

па ако во ова неравенство побараме супремум по сите вредностите $\psi(\mathbf{u})$ кога $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$, ќе добиеме дека

$$d^* \le \varphi(\bar{\mathbf{x}}).$$

Последното неравенство важи за секое допуштено решение $\bar{\mathbf{x}}$ на проблемот $(\mathcal{P})$, па ако побараме инфимум како во (3.42), ќе добиеме неравенството (3.44). ■

**Дефиниција 3.9.** Ако проблемот $(\mathcal{P})$ има барем едно оптимално решение и $p^*$, $d^*$ се дефинирани со (3.42) и (3.43), вредноста

$$p^* - d^* \ge 0,$$

се нарекува *јаз на дуалност* за парот дуални проблеми $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{D})$.

Во математичкото програмирање од посебен интерес е определување на услови што треба да ги исполнуваат функцијата на целта и функциите на ограничувања кај проблемот на минимизација $(\mathcal{P})$ за јазот на дуалност да биде еднаков на 0, т.е. да важи

$$d^* = p^*. \tag{3.45}$$

Ова равенство, што уште се нарекува *јака дуалност*, има исклучително важна улога. Имено, во практични ситуации често се наидува на тешкотии при определување на оптимумот кај примарниот проблем, а притоа да може лесно да се определи оптимумот кај дуалниот проблем. Кај овие случаи јаката дуалност, доколку постои, би овозможила значително олеснување на пресметките преку формулирање и решавање на дуалниот проблем на почетно зададениот.

**Теорема 3.18. (јака дуалност кај примарен и Лагранжов дуален проблем)**
Ако функциите $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни и притоа функциите $f_i$, $i = 1, \dots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов, тогаш за примарниот проблем $(\mathcal{P})$ и неговиот Лагранжов дуален проблем $(\mathcal{D})$ важи јаката дуалност.

**Доказ.** Прво да забележиме дека, од тоа што $f_i$, $i = 1, \dots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов, следи дека проблемот $(\mathcal{P})$ има барем едно допуштено решение, па според теорема 3.17 за проблемот $(\mathcal{P})$ и неговиот дуален проблем $(\mathcal{D})$ ќе важи слабата дуалност. Поради ова, за да се покаже дека важи (3.45), треба да се покаже дека важи обратното неравенство на она во (3.44), т.е. $p^* \le d^*$.

Постоењето на барем едно допуштено решение воедно ја исклучува можноста множеството од сите одржливи решенија да биде празно множество, што согласно поглавје 1.2, значи дека $p^* \ne \infty$, т.е. $p^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ако $p^* = -\infty$, тогаш постои низа $(\mathbf{x}_n)$ допуштени решенија за проблемот $(\mathcal{P})$ така што $\varphi(\mathbf{x}_n) \to -\infty$ кога $n \to \infty$. Бидејќи, според ii) од теорема 3.16, за Лагранжовата дуална функција $\psi$ на $\varphi$ ќе важи $\psi(\mathbf{u}) \le \varphi(\mathbf{x}_n)$, за секој $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$ и, последователно,

$$d^* \le \varphi(\mathbf{x}_n) \to -\infty, \text{ кога } n \to \infty,$$

па ќе мора да важи $d^* = -\infty$.

Нека $p^* \in \mathbb{R}$. Нека $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$, $\bar{\mathbf{x}} \in X$ е точката за која важи $f_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0$, за секој $i = 1, \dots, m$, и нека

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$A = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} A(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^{m+1},$$

каде

$$A(\mathbf{x}) = \{(u_1, \dots, u_m, w) \in \mathbb{R}^{m+1} | \, f_i(\mathbf{x}) \leq u_i, i = 1, \dots, m, \varphi(\mathbf{x}) \leq w\},$$

Множеството $A$ е конвексно множество, што се покажува слично како што е покажана конвексноста на множеството $Q$ од доказот на теорема 3.10.

Да забележиме дека точката $(\mathbf{o}, p^*)$, каде $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$, не е внатрешна точка за $A$. Имено, во спротивно, би постоел $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ така што точката $(\mathbf{o}, p^* - \varepsilon)$ припаѓа на $A(\mathbf{x}_0)$. Тогаш, согласно дефиницијата на $A(\mathbf{x}_0)$ и (3.42), би важело

$$p^* \leq \varphi(\mathbf{x}_0) \leq p^* - \varepsilon,$$

што не е точно.

Според теорема 2.13 (применета на множествата $C = \{(\mathbf{o}, p^* - \varepsilon)\}$ и $D = A$) постои точка $(\mathbf{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^{m+1}$ така што $(\mathbf{c}, \gamma) \neq (\mathbf{o}, 0)$ и

$$\langle (\mathbf{c}, \gamma), (\mathbf{o}, p^*) \rangle \leq \langle (\mathbf{c}, \gamma), (\mathbf{z}, w) \rangle \text{ , за секој } (\mathbf{z}, w) \in A,$$

или

$$\gamma p^* \leq \gamma w + \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle \text{ , за секој } (\mathbf{z}, w) \in A. \tag{3.46}$$

Бидејќи за секој $(\mathbf{z}, w) \in A$ и за секој $\delta \geq 0$, векторите $(\mathbf{z}, w + \delta)$ и $(z_1, \dots, z_j + \delta, \dots, z_m, w)$, $j = 1, \dots, m$, се исто така елементи на $A$, според (3.46) се добива дека

$$\gamma p^* \leq \gamma w + \gamma \delta + \langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle, \text{ за секој } (\mathbf{z}, w) \in A \text{ и за секој } \delta \geq 0,$$

$$\gamma p^* \leq \gamma w + c_j \delta + \textstyle\sum_{i=1}^m c_i z_i, \text{ за секој } (\mathbf{z}, w) \in A \text{ и за секој } \delta \geq 0,$$

што е можно само доколку

$$\gamma \geq 0 \text{ и } c_i \geq 0, \text{ за секој } i = 1, \dots, m. \tag{3.47}$$

Ќе покажеме дека $\gamma > 0$. Ако претпоставиме дека $\gamma = 0$, тогаш за точката $\overline{\mathbf{x}} \in X$ за која важи $f_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$, $i = 1, \dots, m$, согласно (3.46) и (3.47) би добиле

$$0 \leq \sum_{i=1}^m c_i f_i(\overline{\mathbf{x}}) \leq 0,$$

што е можно само доколку $c_i = 0$, за секој $i = 1, \dots, m$. Но во тој случај $(\mathbf{c}, \gamma) = (\mathbf{o}, 0)$, што противречи на $(\mathbf{c}, \gamma) \neq (\mathbf{o}, 0)$. Значи мора да важи $\gamma > 0$.

Делејќи го (3.46) со $\gamma$, добиваме дека

$$p^* \leq w + \langle \gamma^{-1} \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle \text{ , за секој } (\mathbf{z}, w) \in A. \tag{3.48}$$

Ако $\mathbf{x} \in X$ е произволен, тогаш $\big(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\big) \in A$. Оттука и од (3.48) следи дека

$$p^* \leq \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \gamma^{-1} c_i f_i(\mathbf{x}) \text{, за секој } \mathbf{x} \in X.$$

Земајќи инфимум по сите $\mathbf{x} \in X$, имајќи го притоа предвид (3.47), добиваме

$$p^* \leq \inf_{\mathbf{x} \in X} \left( \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \gamma^{-1} c_i f_i(\mathbf{x}) \right) = \psi(\gamma^{-1} \mathbf{c}) \leq d^*,$$

што требаше да се покажи. ■

Претходната теорема обезбедува услови под кои оптималните вредности на функциите на целта на примарниот и дуалниот проблем се еднакви. Таа не се однесува на услови под кои тие оптимални вредности се достигнуваат, т.е. дали некој од овие два проблеми на оптимизација имаат оптимални решенија. Дотолку повеќе што, постојат елементарни примери на примарен проблем и негов Лагранжов дуален проблем каде важи јаката дуалност, но примарниот проблем $(\mathcal{P})$ нема оптимално решение, додека неговиот Лагранжов дуален $(\mathcal{D})$ има оптимално решение. Наједноставниот пример за ова е следниот.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Пример 3.6.** Нека е даден проблемот

$$\min \frac{1}{x}$$
$$\text{p.o. } -x \leq 0.$$

Допуштената област е множеството $X = [0, \infty)$, конвексно, затворено и неограничено множество. Функцијата $\varphi(x) = 1/x$ е конвексна на $X$, ограничена од долу на $X$ и има оптимална вредност 0, но таа вредност не се постигнува на $X$. Лагранжовата функција придружена на проблемот е

$$L(x, y) = \frac{1}{x} - xy, \qquad x \in \mathbb{R}, y \geq 0,$$

а Лагранжовата дуална функција на $\varphi$ е функцијата

$$\psi(u) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ -\infty, & u > 0. \end{cases}$$

Нејзината оптимална (максимална) вредност е 0 и таа се достигнува во точката $u^* = 0$.

Имајќи го предвид претходниот пример и теоремите 3.3, 3.10 и 3.18 може лесно да се докаже следната теорема.

**Теорема 3.19.** Нека $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни функции, $f_i$, $i = 1, \dots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов и $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m\}$. Парот $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ е седлеста точка за Лагранжовата функција придружена на примарниот проблем

$$(\mathcal{P}): \quad \begin{aligned} &\min \ \varphi(\mathbf{x}) \\ &\text{p.o. } f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

ако, и само ако, $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на $(\mathcal{P})$, $\mathbf{y}^*$ е оптимално решение за дуалниот проблем

$$(\mathcal{D}): \quad \begin{aligned} &\max \ \inf_{\mathbf{x} \in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ &\text{p.o. } \mathbf{u} \geq \mathbf{o}, \end{aligned} \quad .$$

Притоа за $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{D})$ важи јаката дуалност, и $\varphi(\mathbf{x}^*) = \max\limits_{\mathbf{u} \geq \mathbf{o}} \inf\limits_{\mathbf{x} \in X} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$.

Во контекст на Лагранжовата дуалноста, променливите на одлучување кај примарниот проблем уште се нарекуваат *примарни променливи*, а оние кај дуалниот проблем се нарекуваат *дуални променливи*. Во контекст на теорема 3.19, парот $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ уште се нарекува пар од *дуални оптимуми*. Множествата од примарни и од дуални променливи кај Лагранжовата дуалност се дисјунктни.

### 3.7.2. Лагранжов дуален проблем за задача на линеарно програмирање

Нека $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{o}\}$ и $\mathbf{A}$ е ненулта матрица со димензија $m \times n$. Го разгледуваме следниот проблем на минимизација:

$$(\mathcal{P}'): \quad \begin{aligned} &\min \ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ &\text{p.o. } \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Јасно, функцијата на целта $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ е линеарна функција, а на дадените ограничувања, што може да се запишат во облик

$$\begin{aligned} \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{o}, \\ -\mathbf{x} &\leq \mathbf{o}, \end{aligned}$$

кореспондираат функциите

- $f_i(\mathbf{x}) = b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle$, каде $\mathbf{a}_i$ е $i$ –та редица на матрицата $\mathbf{A}$, $i = 1, \dots, m$, и
- $f_i(\mathbf{x}) = -x_i$, $i = m + 1, \dots, m + n$,

што пак претставуваат афини пресликувања.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Допуштената област е множеството

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$$
$$= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq 0, i = 1, \dots, m, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\},$$

и тоа е конвексно.

Ставајќи

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \tag{3.50}$$

Лагранжовата функција придружена на проблемот (3.49) може да се дефинира како што следи:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle) + \sum_{j=m+1}^{m+n} u_i(-x_i) \\ &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{u}, -\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{Ax} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{A}^T\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Во тој случај, Лагранжовата дуална функција на $\varphi$ може да се запише во облик

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) &= \inf_{\mathbf{x} \in X} (\langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle) \\ &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle + \inf_{\mathbf{x} \in X} \langle \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle. \end{aligned} \tag{3.52}$$

1. Ако $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} = \mathbf{o}$, тогаш $\psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.
2. Ако $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, тогаш Лагранжовата функција во (3.51), како афина функција по $\mathbf{x}$, не е ограничена функција (ни од горе, ни од долу). Ако за фиксни $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^n$, важи $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} > \mathbf{o}$, тогаш изразот $\langle \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$ би имал најмала вредност при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ и таа ќе биде $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$. Во спротивно, векторот $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u}$ ќе има барем една компонента што е негативна и тогаш $\psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = -\infty$.

Според претходното,

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{b}^T\mathbf{y}, & \text{ако } \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} = \mathbf{o}, \\ -\infty, & \text{во спротивно.} \end{cases} \tag{3.53}$$

Од тука следи дека Лагранжовиот дуален проблем на проблем $(\mathcal{P}')$ во (3.49) е

$$(\mathcal{D}'): \quad \begin{aligned} \max \ & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{p.o.} \ & \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} \geq \mathbf{o}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{o}, \\ & \mathbf{u} \geq \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Вредностите на функцијата на целта во овој проблем не зависат од $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^n$. Ова посочува на тоа дека можеби за проблемот (3.54) постои можност за дефинирање на еквивалентен проблем на максимизација чија допуштена област, наместо да биде подмножество на $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$, да биде подмножество на $\mathbb{R}_+^m$.

Имајќи ги предвид дефинициите на релациите „$\leq$“ и „$\geq$“ за вектори (дефиниција 2.2), од точноста на $\mathbf{c} - \mathbf{A}^T\mathbf{y} - \mathbf{u} \geq \mathbf{o}$, следи точноста на $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, за секој $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$. Ова значи дека ако:

$f: \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^m$ е дефинирано со $f(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{y}$,
$g: \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^n$ е дефинирано со $g(\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{o})$,
$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m, \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^n$,

тогаш за допуштената област $Y$ на проблемот (3.54) и допуштената област $Z$ на следниот проблем на максимизација

$$(\mathcal{D}''): \quad \begin{aligned} \max \ & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{p.o.} \ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{o}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

ќе важи $f(Y) \subseteq Z$. Лесно се проверува дека важи $g(Z) \subseteq Y$ и дека, согласно напомена 3.1, пресликувањата $f$ и $g$ се еквивалентни трансформации, т.е. дека проблемите (3.49) и (3.55) се еквивалентни.

Имајќи ги предвид претходните теориски резултати од оваа глава, за задачите (3.49) и (3.55) може да се докажат поголем број на својства што традиционално се дел од теоријата на линеарното програмирање. На нив, заедно со резултатите што се специфични само за линеарното програмирање, како и методите за решавање на овој вид задачи на математичко програмирање, повеќе ќе се задржиме во наредните две глави.

### 3.7.3. Вулфов дуален проблем

Повторно поаѓаме од примарниот проблем

$$(\mathcal{P}): \quad \begin{array}{l} \min\ \varphi(\mathbf{x}) \\ \text{p.o.}\ f_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, m, \end{array}$$

каде $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се дадени функции, а $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е функцијата дефинирана со $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, но овој пат со дополнителна претпоставка дека $\varphi$ и $f_i$, $i = 1, \dots, m$, се диференцијабилни функции. Нека $\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ е дефинирана со

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x}) \rangle, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Од аспект на дефиницијата 3.2, функцијата $\psi$ е проширување на Лагранжовата функција на целиот простор $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, а не само на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$.

**Дефиниција 3.10.** Проблемот на максимизација

$$(\mathcal{D}_1): \quad \begin{array}{l} \max\ \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{p.o.}\ \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = 0, \\ \mathbf{u} \ge \mathbf{o}, \end{array}$$

се нарекува *Вулфов дуален проблем* за примарниот проблем $(\mathcal{P})$.

За разлика од Лагранжовиот дуален проблем, дуалните променливи на Вулфов дуален проблем целосно ги вклучуваат и примарните променливите.

**Теорема 3.20. (слаба дуалност кај примарен и Вулфов дуален проблем)** Нека $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, се конвексни функции, $\overline{\mathbf{x}}$ е допуштено решение на примарниот проблем $(\mathcal{P})$, а $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ е допуштено решение на дуалниот проблем $(\mathcal{D}_1)$. Тогаш е $\psi(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}) \le \varphi(\overline{\mathbf{x}})$.

**Доказ.** Според теорема 2.21 имаме

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{\mathbf{x}}) &\ge \varphi(\hat{\mathbf{x}}) + \langle \nabla\varphi(\hat{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \rangle, \\ f_i(\overline{\mathbf{x}}) &\ge f_i(\hat{\mathbf{x}}) + \langle \nabla f_i(\hat{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \rangle, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Поради тоа што $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}})$ е допуштено решение, важи

$$\nabla\varphi(\hat{\mathbf{x}}) = -\sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \nabla f_i(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{u}} \ge \mathbf{o},$$

а поради тоа што $\overline{\mathbf{x}}$ е допуштено решение, ќе важи $f(\overline{\mathbf{x}}) \le \mathbf{o}$, па имаме

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{\mathbf{x}}) &\geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) + \langle \nabla\varphi(\hat{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \rangle = \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i \langle \nabla f_i(\hat{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}} \rangle \\ &\geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i (f_i(\overline{\mathbf{x}}) - f_i(\hat{\mathbf{x}})) \geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i f_i(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \psi(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}),\end{aligned}$$

што требаше да се докажи. ■

**Теорема 3.21. (јака дуалност кај примарен и Вулфов дуален проблем)** Нека $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, се конвексни функции и $f_i$, $i = 1, \ldots, m$, го задоволуваат Слејтеровиот услов. Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално решение на примарниот проблем $(\mathcal{P})$. Тогаш постои $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ така што парот $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$ претставува оптимално решение на дуалниот проблем $(\mathcal{D}_1)$ и $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \psi(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$.

**Доказ.** Според теорема 3.13 постои $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ таков што парот $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$ го задоволува условите

$$\begin{gathered}\nabla\varphi(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i \nabla f_i(\overline{\mathbf{x}}) = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i f_i(\overline{\mathbf{x}}) = 0, \\ f(\overline{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{o}, \\ \overline{\mathbf{u}} \geq \mathbf{o}.\end{gathered}$$

Според тоа $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$ е допуштено решение за проблемот $(\mathcal{D}_1)$. Нека $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ е произволна допуштена точка на проблемот $(\mathcal{D}_1)$. Според претходната теорема, $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) \geq \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ за секој $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in Y = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m | \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{u} \geq \mathbf{o}\}$, па имаме

$$\psi(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}) = \varphi(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i f_i(\overline{\mathbf{x}}) = \varphi(\overline{\mathbf{x}}) \geq \psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

за секој $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in Y$. Оттука следува дека $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$ е оптимално решение за проблемот $(\mathcal{D}_1)$ и важи $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \psi(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$. ■

Во случај кога сите ограничувања се линеарни, Слејтеровиот услов може да се изостави со што ја добиваме следната теорема.

**Теорема 3.22.** Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е решение на примарниот проблем (3.17), $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ и $\varphi$ е конвексна функција. Тогаш постои $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ таков што парот $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$ претставува оптимално решение на дуалниот проблем и $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \psi(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}})$.

**Доказ.** Доказот се изведува слично како и доказот на теорема 3.21 со тоа што сега се користи теорема 3.14. ■

**Напомена 3.2.** Кај проблемот на линеарно програмирање (3.49), и функцијата на целта и функциите на ограничување, се диференцијабилни функции, па за овој проблем може да се дефинира и Вулфовиот дуален проблем. Но овој проблем е исто така еквивалентен со проблемот (3.55). За деталите упатуваме на (Vujčić et al., 1980, поглавје 3.2)

### 3.8. Дополнителни напомени и препораки за продлабочување на знаењата

Во претходните седум поглавја ги изнесовме само најелементарните резултати од општата теорија на математичкото програмирање, како и неколку специфични теориски резултати од конвексното програмирање. За овој вид на програмирање е објавена исклучително опсежна литература. Читателите што се заинтересирани за

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

понатамошно надградување на знаењата во оваа насока, ги упатуваме на следните наслови од листата приложена во Литература: (Andréasson et al., 2007), (Bazaraa et al., 2006), (Berkovitz, 2001), (Boyd & Vandenberghe, 2004), (Bertsekas, 1996), (Bertsekas, 1999), (Bertsekas, 2009) (вообичаено се препорачува заедно со (Bertsekas, 2015)), (Bertsekas et al., 2003), (Eiselt & Sandblom, 2019), (Neralić, 2003), (Peressini et al., 1993), или (Ruszczyński, 2006). Да напоменеме дека кај дел од овие наслови како основна задача на математичко програмирање се зема задачата на минимизација од облик (1.5) (види поглавје 1.2), т.е. задача во која дел од ограничувањата се изразени во облик на равенства.

Лагранжовата и Вулфовата дуалност се најопштите типови на дуалност во математичкото програмирање. Дел од претходно посочените наслови, особено оние што датираат пред 2000 г., соодветно ги покриваат и двата вида на дуалност. Како дополнителен наслов во кој на Вулфовата дуалност е посветено повеќе внимание го посочуваме (Mangasarian, 1994, гл. 8). Да напомене дека овие два вида на дуалност не се единствените видови во математичкото програмирање. За специфични видови на задачи на оптимизација постојат и други методи за дефинирање на дуален проблем. На пример, во контекст на конвексните оптимизации, често се разгледува и т.н. Фенхелова дуалност (W. Fenchel). Специфичниот облик на дуалност во линеарното програмирање на кој ќе се задржиме во поглавје 4.8, може да се разгледува како специјален случај и овој вид дуалност. Повеќе информации за неа може да се најдат во (Bertsekas, 1999, поглавје 5.4)[12], (Rockafellar, 1970, §31), (Rockafellar, 1974), (Luenberger, 1997, поглавје 7.12) и (Magnanti, 1974).

[12] Алтернативно, (Bertsekas, 2016, поглавје 6.4).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 4. ТЕОРИЈА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Линеарното програмирање е еден од видовите на математичко програмирање чија теорија и методи се во целост заокружени. Историски, задачите на линеарното програмирање се првите за кои се формулирани автентични методи за решавање што не произлегуваат од претходно познатите методи на класичната анализа. Резултатите од линеарното програмирање станаа основа за развој на конвексното програмирање.

Во оваа глава ќе се задржиме на поважните делови од теоријата на линеарното програмирање. Следејќи ја воспоставената конвенција, изразот „ЛП-задача" понатаму ќе го користиме со значење „задача на линеарно програмирање".

## 4.1. Општ облик на ЛП-задача

Под општ облик на ЛП-задача се подразбира задача на максимизација или минимизација од облик:

$$\max(\min)\left\{ f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \le 0, & i=1,\dots,k, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \ge 0, & i=k+1,\dots,s, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0, & i=s+1,\dots,m \\ x_1 \ge 0,\cdots,x_r \ge 0 & \end{array} \right\}, \tag{4.1}$$

каде $m \ge 1$, $r \le n$, а $a_{ij}$ и $c_j$, $i \in \{1,\cdots,m\}$, $j \in \{1,\cdots,m\}$, се дадени реални броеви, така што $c_j \ne 0$ за барем еден $j \in \{1,\cdots,m\}$ и, за секој $i \in \{1,\cdots,m\}$ постои $j \in \{1,\cdots,m\}$ така што $a_{ij} \ne 0$. Изразот за функцијата на целта

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\,, \tag{4.2}$$

е линеарна функција за која треба да се определи максимална (минимална) вредност над подмножеството од $\mathbb{R}^n$ определено со останатите изрази во (4.1). Тие изрази се функциите на ограничување. Притоа,

- изразите

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \le 0,\ \ i=1,\dots,k, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \ge 0,\ \ i=k+1,\dots,s, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0,\ \ i=s+1,\dots,m \end{aligned} \tag{4.3}$$

  се нарекуваат *главни ограничувања*,

- неравенствата

$$x_1 \ge 0,\cdots,x_r \ge 0, \qquad 1 \le r \le n, \tag{4.4}$$

  се т.н. *услови за ненегативност на променливите*.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Изразот „$r \leq n$“ во (4.4) значи дека, во општ случај, условите за ненегативност не мора да се однесуваат на сите променливи, односно дека може да важи и $r < n$. Од теориски аспект може да се претпостави дека овие услови се однесуваат на сите променливи, односно дека $r = n$. Имено, ако $r < n$, секоја променлива

$$x_j, \qquad r < j \leq n,$$

и во главните ограничувања, и во функцијата на целата, можеме да ја замениме со

$$x_j = x_j' - x_{j+n-r}', \qquad r < j \leq n,$$

каде $x_j' \geq 0$ и $x_{j+n-r}' \geq 0$, $r < j \leq n$, се нови променливи. На тој начин, од проблем што содржи $n$ променливи, се добива проблем со $r + 2(n - r)$ ненегативни променливи.

**Пример 4.1.** Со

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{p.o.}\ & 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ & 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 12 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

е дадена ЛП-задача на максимизација во општ облик, а со

$$\begin{aligned} \min\ & f = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

е дадена ЛП-задача на минимизација во општ облик.

**Пример 4.2.** ЛП-задачата на максимизација зададена со

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

не содржи услов за ненегативност на $x_3$. За оваа променлива воведуваме две нови променливи $x_3'$ и $x_3''$, за кои сметаме дека треба да го задоволуваат условот за ненегативност, и притоа $x_3 = x_3' - x_3''$. Заменувајќи во дадената ЛП-задача добиваме

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3' - x_3'' \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3' - x_3'' \leq 5 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0. \end{aligned}$$

Доколку оваа ЛП-задача има решение, со замена на вредностите што ќе се добијат за $x_3'$ и $x_3''$ во $x_3 = x_3' - x_3''$, ќе се добие вредноста за $x_3$. Да напоменеме дека последната ЛП-задачата и почетно поставената се *различни* ЛП-задачи.

### 4.2. Видови облици на ЛП-задачи

Иако голем број од проблемите од праксата иницијално математички може да се опишат како ЛП-задачи од облик (4.1), тој не е погоден за теориските разгледувања или примена на одделни методи за решавање на задачите на линеарното програмирање. Подолу ќе наведеме неколку видови на облици на ЛП-задачи што се поповолни за понатамошните разгледувања, а во следниот оддел ќе дадеме прецизни инструкции за премин од еден во друг облик.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Каноничен облик**

ЛП-задача во која сите главни ограничувања се зададени во облик на равенства

$$\begin{aligned} \max(\min)\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

се вели дека е зададена во *каноничен облик*.

**Стандарден облик**

ЛП-задачите каде се бара максимизација на функцијата на целта и во која сите главни ограничувања се неравенства од облик „≤“, односно задачата од облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

се нарекува *стандарден облик на ЛП-задача на максимизација*, а задачата на линеарно програмирање каде се бара минимизација на функцијата на целта и во која сите главни ограничувања се неравенства од облик „≥“

$$\begin{aligned} \min\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

се нарекува *стандарден облик на ЛП-задача на минимизација*.

**Матричен облик**

Со помош на ознаките од теоријата на линеарна алгебра како и дефиницијата на релациите $=, \leq, \geq, <, >$ за вектори, ЛП-задачата може да се зададе и во т.н. матричен облик. Ако $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ е векторот што се состои од коефициентите во функцијата на цел, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е векторот од променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ е векторот од ограничувачките вредности (т.е. слободните коефициенти кај главните ограничувања) и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

е матрицата формирана од коефициентите пред променливите, но само во главните ограничувања, имајќи ги предвид матричните облици

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T,$$

(матрицата за $\mathbf{b}$ мора да има ист број редици како матрицата $\mathbf{A}$), тогаш со

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned} \max\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

е зададена ЛП-задача на максимизација, а со

$$\begin{aligned} \min\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

е зададена ЛП-задача на минимизација. (4.9) и (4.10) се т.н. *матрични облици* на задача на линеарно програмирање.

Своја матрична форма има и каноничниот облик (4.5):

$$\begin{aligned} \max\,(\min)\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

**Векторски облик**

Ако со $A_1, A_2, \dots . A_n$ ги означиме колоните на матрицата $\mathbf{A}$ од (4.8) т.е.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

а $\mathbf{c}, \mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ се матричните облици на векторите на коефициентите на функцијата на цел, променливите и слободните коефициенти кај главните ограничувања, тогаш со

$$\begin{aligned} \max\ & f = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{p.o.}\ & A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n \le \mathbf{b} \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

е зададена *ЛП-задача на максимизација во векторски облик*, а со

$$\begin{aligned} \min\ & f = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{p.o.}\ & A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n \ge \mathbf{b} \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

е зададена *ЛП-задача на минимизација во векторски облик*.

**Табеларен приказ на проблемот на линеарно програмирање**

При практична примена на методите на линеарното програмирање, врз основа на податоците често првично се формира табела во која се средуваат информациите што произлегуваат од проблемот. Вообичаено е првата редица во табелата да се состои од коефициентите на функцијата на целта $c_1, c_2, \dots, c_n$, последната колона да се состои од ограничувачките фактори $b_1, b_2, \dots, b_n$, претпоследната колона од релациите $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m \in \{\le, =, \ge\}$, а останатиот дел од табелата соодветно да се пополни со коефициентите $a_{ij},\ i = 1,2, \dots, m,\ j = 1,2, \dots, n$ (табела 4.1). Одделно од ваквата табелата се наведуваат условите за ненегативност како и тоа дали за функцијата на целта треба да се изврши минимизација или максимизација. Табела 4.1 уште се нарекува *податочна табела* за ЛП-задача или кратко *ЛП-табела*.

Табела 4.1. Податочна табела за ЛП-задача (автори)

| $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_n$ | релација | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $\rho_1$ | $b_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $\rho_2$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $\rho_m$ | $b_m$ |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Напомена 4.1.** Низ литературата може да се наиде на случаи каде термините „каноничен“ и „стандарден“ се заменети еден со друг.

### 4.3. Премин од еден во друг облик на ЛП-задача

Проблемите од праксата што може да се решат со некој од методите на линеарното програмирање првично може математички да бидат формулирани во било кој од претходно наведените облици на ЛП-задачи. Овие облици може да се создадат впечаток дека врз нив треба да се применат посебни начини за решавање. За среќа тој заклучок не важи. Првичниот облик секогаш може да со трансформира во некој од останати облици. Во продолжение ќе се задржиме на дел од постапките за премин од еден во друг облик на ЛП-задача. Комбинирајќи ги соодветно, може да се спроведе било која друга постапка на премин што не е експлицитно појаснета.

#### 4.3.1. Премин од општ облик во стандарден облик

Нека претпоставиме дека со (4.1) е дадена ЛП-задача на максимизација и дека $r = n$ (т.е. условите за ненегативност важат за секоја од променливите). За да се добие стандарден облик на ЛП-задача на максимизација потребно е главните ограничувања со знак „=“ и „≥“ на соодветен начин да се заменат со ограничувања со знак „≤“.

Главните ограничувања што се со знак „≥“ доволно е да се помножат со $-1$.

Главните ограничувања што се со знак „=“, на истиот начин како што посочивме кај основаната задача на математичко програмирање (поглавје 1.2), се заменуваат со две ограничувања од облик „≤“. Попрецизно, ограничувањето од облик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \tag{4.15}$$

е еквивалентно со системите неравенства

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq b_i \end{cases}.$$

па во ЛП-задача на максимизација (4.15) го заменуваме со двете неравенства од десниот систем неравенства.

Слично се постапува кога (4.1) е ЛП-задача на минимизација, само што сега главното ограничување од облик (4.15) ќе се замени со неравенствата

$$\begin{aligned} -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n &\geq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &\geq b_i. \end{aligned}$$

**Пример 4.3.** Во ЛП-задачата на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{p.o.}\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

на ограничувањето

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4,$$

соодветствува системот неравенства

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 4 \end{cases}.$$

Бидејќи дадената задача е задача на максимизација, второто неравенство го множиме со $-1$ и потоа, заедно со првото неравенство, ги ставаме на местото од $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4$. На тој начин ја добиваме следната ЛП-задачата на максимизација во стандарден облик

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned} \max\ & f = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{p.o.}\ & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ & -2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq -4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

### 4.3.2. Премин од стандарден, матричен и векторски облик, во некој од другите два облика

Врз основа на начинот на кој се дефинирани стандардните, матричните и векторските облици на задачите на линеарно програмирање, од стандарден облик на ЛП-задача лесно може да се запише соодветниот матричен или векторски облик, а ако задачата е дадена во матричен или векторски облик, соодветниот стандарден облик ќе се добие со изведување на назначените операции со матрици. Следните примери ја илустрираат постапката за ЛП-задачи на максимизација. Слично се постапува за ЛП-задачи на минимизација.

**Пример 4.4.** За ЛП-задачата на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

формирајќи ги матричните записи на векторите од коефициентите пред променливите и слободните коефициенти во главните ограничувања го добиваме следниот векторски облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \\ \text{p.o.}\ & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} x_4 \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

**Пример 4.5.** За ЛП-задачата на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{p.o.}\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{aligned}$$

формирајќи ја матрицата од коефициентите пред променливите кај главните ограничувања, како и соодветните матричните облици на векторите од коефициентите на функцијата на целта, слободните коефициенти кај главните ограничувања и векторот од променливите, го добиваме следниот матричен облик на дадената ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ & f = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \text{p.o.}\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Пример 4.6.** За ЛП-задачата на максимизација дадена во векторски облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{p.o.}\ & \begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}5\\2\\7\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix} x_4 \le \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

по изведување на операциите со матрици, согласно дефиницијата на релацијата „≤“ за вектори, го добиваме следниот стандарден облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ \text{p.o.}\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2 \\ & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \le 5 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

**Пример 4.7.** За ЛП-задачата на максимизација дадена во матричен облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = \begin{bmatrix}5 & 7 & 2 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \\ \text{p.o.}\ & \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\5 & 2 & 1 & 3\\0 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}5\\7\\10\end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \ge \mathbf{o}, \end{aligned}$$

по назначеното множење на матрици, се добива следниот стандарден облик

$$\begin{aligned} \max\ & f = 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{p.o.}\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 5 \\ & 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le 7 \\ & 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 10 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

### 4.3.3. Премин од стандарден, матричен и векторски облик, во канонична облик

Кај стандардниот облик на ЛП-задача на максимизација ограничувањата се дадени со неравенства од облик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{4.16}$$

За да се добие кореспондентниот каноничен облик, овие неравенства треба да се заменат со равенства на начин што тоа нема да го наруши соодветното ограничување. Тоа се постигнува со воведување на нови променливи

$$x_{n+i} = b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n), \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{4.17}$$

За секое од ограничувањата се воведува *само една променлива* и таа го претставува „неискористениот“ дел од соодветното ограничување. Сите овие променливи се ненегативни и уште се познати се како *дополнителни променливи*. Врз основа на изразите во (4.17), ограничувањата (4.16) може да се заменат со ограничувањата

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{4.18}$$

Системот од така добиени ограничувања сега ќе содржи $n + m$ променливи.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Дополнителните променливи $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ не смеат да влијаат на вредноста на функцијата на целта. За да можеме со нив ги изведеме сите постапки при решавање на ЛП-задача, тие во функцијата на цел се додаваат со коефициент еднаков на нула пред секоја од нив. На тој начин стандардниот облик на ЛП-задача на максимизација ќе премини во следниот каноничен облик

$$\begin{aligned}
\max\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} \\
\text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\
& x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

За стандардната ЛП-задача на минимизација главните ограничувања се од облик

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m,$$

За нив исто така се воведуваат дополнителни променливи $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$, но сега со изразите

$$x_{n+i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i, \qquad i = 1,2,\cdots,m. \tag{4.20}$$

Соодветната ЛП-задача на минимизација во каноничен облик

$$\begin{aligned}
\min\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} \\
\text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \\
& x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

**Пример 4.8.** Во ЛП-задачата на линеарното програмирање во стандарден облик

$$\begin{aligned}
\max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,
\end{aligned}$$

имаме две главни ограничување, па воведуваме две дополнителни променливи $x_4$ и $x_5$ определени со изразите

(a) $x_4 = 5 - (2x_1 + 3x_2 + x_3)$,
(b) $x_5 = 4 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$.

Бидејќи кај главните ограничувања левата страна е помала или еднаква од десна страна, важи $x_4 \geq 0$ и $x_5 \geq 0$. Изразот $2x_1 + 3x_2 + x_3$ претставува „искористена“ количина за првото главно ограничување, па според (a), $x_4$ ќе претставува неискористен дел од тоа ограничување. Слично, $x_5$ ќе биде „неискористен“ дел од второто ограничување. Променливите $x_4$ и $x_5$ ги додаваме во функцијата на целта со коефициенти еднакви на нула пред секој од нив. На тој начин се добива следната ЛП-задача во каноничен облик

$$\begin{aligned}
\max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \\
\text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ако ЛП-задачата е дадена во матричен облик (4.9), тогаш кореспондентниот каноничниот облик (запишан во матричен облик) ќе биде

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$
\begin{aligned}
\max\ & f = \overline{\mathbf{c}}^T \overline{\mathbf{x}} \\
\text{p.o.}\ & [\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m]\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\
& \overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o},
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

каде

$$
[\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{cases} \overline{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, \dots, 0)^T \\ \overline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^T \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \end{cases}
\tag{4.23}
$$

Ако пак ЛП-задачата е дадена во матричен облик (4.10), тогаш кореспондентниот каноничниот облик (запишан во матричен облик) ќе биде

$$
\begin{aligned}
\min\ & f = \overline{\mathbf{c}}^T \overline{\mathbf{x}} \\
\text{p.o.}\ & [\mathbf{A}\ \ (-\mathbf{I}_m)]\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \\
& \overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o},
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

каде

$$
[\mathbf{A}\ \ (-\mathbf{I}_m)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix},
$$

а $\overline{\mathbf{c}}$, $\overline{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b}$ се како во (4.23).

Ако ЛП-задачата е дадена во векторски облик (4.13), тогаш кореспондентниот каноничниот облик (запишан во векторска форма) ќе биде

$$
\begin{aligned}
\max\ & f = \langle \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle \\
\text{p.o.}\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n + A_{n+1} x_{n+1} + \cdots + A_{n+m} x_{n+m} = \mathbf{b} \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \\
& x_{n+1},\ x_{n+2},\ x_{n+3}, \dots, x_{n+m} \geq 0,
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

каде $\overline{\mathbf{c}}$, $\overline{\mathbf{x}}$, и $\mathbf{b}$ се како во (4.23), $A_1, A_2, \dots, A_n$ се како во (4.12) и

$$
A_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{n+2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \cdots, \qquad A_{n+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.
\tag{4.26}
$$

Ако ЛП-задачата е дадена во векторски облик (4.14), тогаш кореспондентниот каноничниот облик (запишан во векторска форма) ќе биде

$$
\begin{aligned}
\min\ & f = \langle \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle \\
\text{p.o.}\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n - A_{n+1} x_{n+1} - \cdots - A_{n+m} x_{n+m} = \mathbf{b} \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \\
& x_{n+1},\ x_{n+2},\ x_{n+3}, \dots, x_{n+m} \geq 0,
\end{aligned}
$$

каде $\overline{\mathbf{c}}$, $\overline{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{b}$ се како во (4.23), $A_1, A_2, \dots, A_n$ се како во (4.12), а $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$ се како во (4.26).

### 4.3.4. Премин од каноничен во стандарден облик

Нека претпоставиме дека е дадена ЛП-задача во каноничен облик (4.5). За разлика од претходно наведените премин, овде ќе мора да направиме дополнителна претпоставка, а тоа е дека системот линеарни равенки од главните ограничувања, т.е. системот линеарни равенки

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{4.27}$$

има барем едно решение. Ова е случај ако, и само ако, важи $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, каде $\mathbf{A}$ е матрицата од (4.8), $\mathbf{b}$ е матрицата колона од слободните коефициенти, а $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ е проширената матрицата на системот (4.27). Ако притоа важи и $m < n$, тогаш решението не е единствено.

Случајот кога (4.27) нема решение имплицира дека допуштената област на ЛП-задачата (4.5) е празно множество (последователно, ваквата ЛП-задача нема решение), а случајот кога (4.27) има единствено решение, доколку тоа ги задоволува условите за ненегативност, ќе значи дека допуштената област се редуцира на само една точка и таа ќе биде оптимум и за ЛП-задачата на минимизација, и за ЛП-задачата на максимизација. Затоа, нека претпоставиме дека

$$\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = m < n,$$

и, за поедноставување, дека $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ се слободните променливи за системот (4.27). Тогаш

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - (a_{1,m+1}'x_{m+1} + \cdots + a_{1n}'x_n) \\ x_2 = b_2' - (a_{2,m+1}'x_{m+1} + \cdots + a_{2n}'x_n) \\ \cdots \\ x_m = b_m' - (a_{m,m+1}'x_{m+1} + \cdots + a_{mn}'x_n) \end{cases}. \tag{4.28}$$

Ова овозможува елиминирање на променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ од:

- функцијата на целта, со замена на $x_1, x_2, \dots, x_m$ согласно изразите во (4.28),
- замена на главните ограничувања и условите за ненегативност од (4.5) со нови главни ограничувања што се добиваат од изразите во (4.28), на тој начин што за десните страни се зема да бидат ненегативни, а новите услови за ненегативност ќе се однесуваат само на променливите $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$.

Кореспондентната задача на максимизација ќе биде од облик:

$$\begin{aligned} \max\ & f = c_{m+1}'x_{m+1} + c_{m+2}'x_{m+2} + \cdots + c_n'x_n + C \\ \text{p.o.}\ & a_{1,m+1}'x_{m+1} + a_{1,m+2}'x_{m+2} + \cdots + a_{1n}'x_n \le b_1' \\ & a_{2,m+1}'x_{m+1} + a_{2,m+2}'x_{m+2} + \cdots + a_{2n}'x_n \le b_2' \\ & \cdots \\ & a_{m,m+1}'x_{m+1} + a_{m,m+2}'x_{m+2} + \cdots + a_{mn}'x_n \le b_m' \\ & x_{m+1} \ge 0, x_{m+2} \ge 0, \cdots, x_n \ge 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

каде $C$ е константа што најчесто е различна од 0. Ова значи дека функцијата на целта, наместо линеарна функција, ќе биде афина функција. Ваквите ЛП-задачи се нарекуваат *генерализирани ЛП-задачи*. Генерализирани ЛП-задачи, т.е. задачи на минимизација или максимизација каде допуштената област е определена со изрази од облик (4.3) и (4.4), но функцијата на целта е афина функција, или функција од облик

$$g = C + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + C, \tag{4.30}$$

каде $C$ е константа, исто така се задачи на линеарно програмирање. Дополнително, задачите

$$\begin{aligned} \max\,(\min)\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}, \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} \max\,(\min)\ & g = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}, \end{aligned}$$

имаат исти оптимуми, но различни оптимални вредности.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Да напоменеме дека, заклучно со (4.29), постапката е идентична и за ЛП-задача на минимизација и за ЛП-задача на максимизација. За ЛП-задача на минимизација треба секое од главните ограничувања во (4.29) дополнително да се помножи со $-1$.

**Пример 4.9.** ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{p.o.}\ & x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ & 2x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 10x_4 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

е во каноничен облик. Системот од главните ограничувања е

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 10x_4 = 20. \end{cases}$$

Ако првата равенка се помножи со $-2$ и се додаде на втората и потоа, од равенките во новиот систем, се изразат променливите $x_1$ и $x_2$ добиваме:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 10x_4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - (4x_2 + 6x_3 + 4x_4) \\ x_2 = 4 - (2x_3 + x_4) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -10 + 2x_3 \\ x_2 = 4 - (2x_3 + x_4) \end{cases}$$

Ако во функцијата на целта $x_1$ и $x_2$ се заменат согласно изрази во последниот систем, таа преминува во $f = 3x_3 - x_4 - 22$ . Ставајќи десните страни од знакот „=“ кај секој од изразите во последниот систем да бидат $\geq 0$, ја добиваме следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_3 - x_4 - 22 \\ \text{p.o.}\ & 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -2x_3 \leq -10 \\ & x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Оваа задача ги содржи сите променливи што не се елиминирани во ограничувањата и функцијата на целта. Ако таа може да се реши по $x_3$ и $x_4$, тогаш $x_1$ и $x_2$ ќе се определат врз основа на равенствата во последниот систем равенства.

При трансформација на ЛП-задачата од облик (4.5) во облик (4.29), може да се случи во главните ограничувања кај (4.29) да се елиминира и некоја од променливите $x_j$, $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Тоа значи дека системот (4.29) е задоволен за било која вредност на $x_j$, па и за $x_j \geq 0$. Кај функцијата на целта можни се два случаи: $c_j' = 0$ или $c_j' \neq 0$. Во вториов случај ЛП-задачата од облик (4.29) може и да нема решение. Попрецизно,

- ако (4.29) е ЛП-задача на минимизација и $c_j' < 0$, тогаш $c_j' x_j \to -\infty$ кога $x_j \to +\infty$, па над допуштената област функцијата на целта (и од облик (4.2), и од облик (4.30)) ќе има инфимум еднаков на $-\infty$,
- ако (4.29) е ЛП-задача на максимизација и $c_j' > 0$, тогаш $c_j' x_j \to \infty$ кога $x_j \to +\infty$, па над допуштената област функцијата на целта ќе има супремум еднаков на $+\infty$.

Во овие два случаи, (4.29) нема решение.

Во следните три поглавја ќе се задржиме на неколку особини на функцијата на целта и допуштената област кај задачите на линеарни програмирање, но независно од тоа дека се однесуваат на ЛП-задача. Својствата што дополнително произлегуваат во контекст ЛП-задачите ќе ги разгледуваме од поглавје 4.7, па до крајот на оваа глава.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 4.4. Особини и геометриска интерпретација на функцијата на целта кај ЛП-задача

Функцијата на целта $f$ дефинирана со (4.2) е линеарна функција. Како таква таа е непрекината во секоја точка $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (теорема 2.21.iii)). Бидејќи барем еден од коефициентите $c_1, c_2, \dots, c_n$ е различен од 0, функцијата на целта не е ограничена функција на целиот простор. Но, според теорема на Ваерштрас, ако $C \subset \mathbb{R}^n$ е затворено и ограничено множеството, тогаш функцијата на целта го достигнува и својот минимум и својот максимум на $C$. Тоа не може да се случи во внатрешна точка на $C$, туку во точка од $\partial C$, бидејќи за градиентот на $f$ имаме

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \right) = (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq \mathbf{o}, \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{4.31}$$

Неограниченоста на функција на целта и изразот со кој таа е дефинирана овозможува да се даде специфична геометриска интерпретација и, ако $n = 2$ или $n = 3$, да се направи соодветна графичко претставување. Неограниченоста на функција на целта на $\mathbb{R}^n$ значи дека нејзиното множество вредности е целото множество $\mathbb{R}$, па изразот (4.2) може да се интерпретира како *фамилија од паралелни хиперрамнини* со ист носечки вектор $(c_1, c_2, \dots, c_n) = \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, односно

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{c}} &= \{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = f | f \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = f | f \in \mathbb{R}\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Јасно, хиперрамнината $H_0$ што кореспондира на $f = 0$, минува низ координатниот почеток во $\mathbb{R}^n$. Хиперрамнините за кои $f > 0$ лежат на иста страна од хиперрамнината $H_0$ и, со нараснување на $f$, тие се „оддалечуваат“ од координатниот почеток во насока на векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Оние пак за кои $f < 0$ лежат на другата страна $H_0$ и, со опаѓање на $f$, тие се „оддалечуваат“ од координатниот почеток во насока спротивна од онаа на векторот $\mathbf{c}$.

За $n = 2$, со (4.32) е дефиниран фамилија од паралелни прави. За $f = 0$, ја имаме правата $p_0$: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ и, вообичаено, фамилијата од паралелни прави определени со (4.32), графички ја претставуваме со исцртување на правата $p_0$ (во Декартов правоаголен координатен систем каде оските се означени со ознаките за променливите) и неколку прави што се паралелни[13] со $p_0$. Во линеарното програмирање *задолжително го исцртуваме* и векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, или пак векторот $\lambda\mathbf{c} = (\lambda c_1, \lambda c_2)$ за погодно избрана вредност $\lambda > 0$, така што овој вектор да биде прегледно исцртан во рамките наметнати од ограничената површина врз која се исцртуваат правите. Бројот на прави паралелни со $p_0$ што дополнително се исцртуваат, во принцип е произволен и најчесто се исцртуваат оние што кореспондираат на вредностите за $f$ од $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ или $\{\pm\mu, \pm 2\mu, \pm 3\mu, \dots\}$, за некој $\mu > 0$. Во линеарното програмирање, доколку е неопходно, се исцртуваат и дополнителни прави паралелни со $p_0$, но така што да минуваат низ специфични точки од допуштената област.

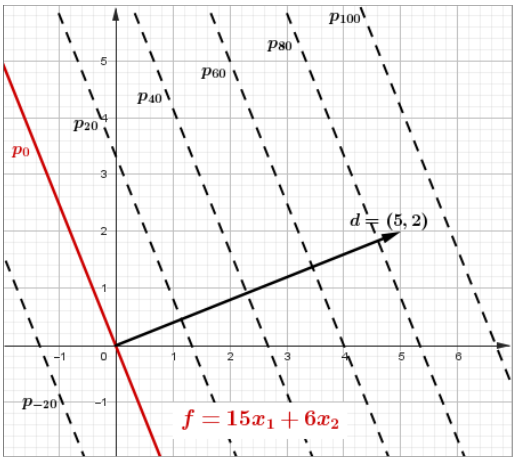
За $n = 3$, со (4.32) е дефиниран фамилија од паралелни рамнини. За $f = 0$, ја имаме рамнината $\Sigma_0$: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$, а фамилијата од паралелни рамнини што е определена со (4.32) графички ја претставуваме со исцртување на рамнината $\Sigma_0$ и, слично како за $n = 2$, неколку рамнини што се паралелни со на $\Sigma_0$. Дополнително, го исцртуваме и векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, или пак векторот $\lambda\mathbf{c} = (\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3)$ за погодно избрана вредност $\lambda > 0$, така што овој вектор да биде прегледно исцртан.

За $n > 3$, графичко преставување на функцијата на целта како за случаите $n = 2$ и $n = 3$ не е можно.

[13] Некои автори на литература на англиски јазик што вклучува содржи од линеарно програмирање, овие прави ги именуваат со „*isoprofit lines*“ ако се работи за ЛП-задача на максимизација (најчесто кога треба да се постигни максимален профит или добивка) и „*isocost lines*“ ако се работи за ЛП-задача на минимизација (најчесто кога треба да се постигни минимизација на трошоци).

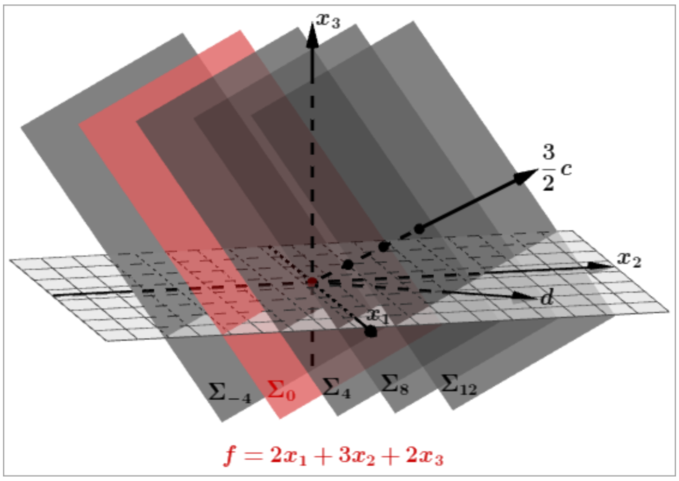
Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Пример 4.10.** На слика 4.1 графички е претставена фамилијата паралелни прави определена со функцијата $f = 15x_1 + 6x_2$ преку исцртување на правите што кореспондираат на вредностите $f \in \{-20, 0, 20, 40, 60, 80, 100\}$. Носечкиот вектор на оваа фамилија е $\mathbf{c} = (15,6)$, но тој не може целосно да се исцрта во ограничениот дел од $x_1Ox_2$ рамнината, па наместо него е исцртан векторот $\mathbf{d} = (5,2) = \lambda\mathbf{c}$, за $\lambda = 1/3$.




Слика 4.1. Графичко претставување на функцијата на целта $f = 15x_1 + 6x_2$ (автори)

**Пример 4.11.** На слика 4.2 графички е претставена фамилијата паралелни рамнини определена со функцијата $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$ преку исцртување на рамнините $\Sigma_{-4}$, $\Sigma_0$, $\Sigma_4$, $\Sigma_8$ и $\Sigma_{12}$ што кореспондираат на вредностите $f \in \{-4, 0, 4, 8, 12\}$. Носечкиот вектор на оваа фамилијата паралелни рамнини е векторот $\mathbf{c} = (2,3,2)$. На слика 4.2 е прикажан векторот $\frac{3}{2}\mathbf{c}$ и неговата проекција $\mathbf{d}$ врз $x_1Ox_2$ рамнината. Врз векторот $\frac{3}{2}\mathbf{c}$ се нанесени и точките во кои тој ги прободува рамнините $\Sigma_0$, $\Sigma_4$, $\Sigma_8$ и $\Sigma_{12}$.




Слика 4.2. Графичко претставување на функцијата на целта $f = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$ (автори)

Графичкото претставување на функцијата на целта во случај на ЛП-задача со три променливи на одлучување, иако е можно, често е исклучително непрегледно, особено ако тоа треба да се направи заедно со допуштената област. Поради ова, при графичко претставување на функција на целта со три променливи се препорачува примена на соодветни софтверски алатки што овозможуваат ротација на просторниот координатен систем, а фамилијата паралелни рамнини да се визуелизира со подвижна рамнина.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 4.5. Особини и геометриска интерпретација на допуштената област кај ЛП-задача

Секој од условите за ненегативност на променливите на одлучување, како и секое од неравенствата во (4.3) определуваат затворен полупростор во $\mathbb{R}^n$, што воедно е и конвексно множество. Ограничувањата од (4.3) што се во облик на равенства определуваат хиперрамнини во $\mathbb{R}^n$ што исто така се затворени и конвексни множества. Што значи дека допуштената област на ЛП-задачата (4.1) е пресек на затворени и конвексни подмножества на $\mathbb{R}^n$. Имајќи ги предвид својство 2.9 и теорема 2.1 ја добиваме точноста на следната теорема.

**Теорема 4.1.** Допуштената област на ЛП-задача е затворено и конвексно множество.

Пресекот на затворените полупростори и хиперрамнини не мора да биде непразен. Доколку пресекот е празно множество, ЛП-задачата нема решение и уште се вели дека е таа е *неодржлива* (или *неизводлива*). Во случај кога допуштената област е непразно множество, како што ќе покажеме понатаму, постоењето на оптимално решение е тесно поврзано со постоењето на екстремални точки на допуштената област. Описот на допуштената област овозможува формулирање на прецизни методи со кои ќе се покаже дали вакви точки постојат, а исто така и нивно прецизно определување.

#### 4.5.1. Екстремални точки на допуштената област на ЛП-задача

За потсетување, точката $\mathbf{x}^* \in X \subset \mathbb{R}^n$ е екстремална точка за $X$ ако не постојат точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и скалар $\lambda \in (0,1)$ така што $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$. Еквивалентно, $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за $X$ ако од

$$\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \text{ за некои } \lambda \in (0,1) \text{ и } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X,$$

следи дека $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

**Теорема 4.2.** Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{p\times n}$ е матрица така што $p > n$, $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ е множеството од редиците на $\mathbf{A}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ и нека $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$. Точката $\mathbf{x}^* \in X$ е екстремална за $X$ ако, и само ако, множеството $A(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{a}_j \in A | \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle = b_j\}$ содржи $n$ линеарно независни вектори.

**Доказ.** Нека $\mathbf{x}^* \in X$ е екстремална точка за $X$ и нека претпоставиме дека $A(\mathbf{x}^*)$ не содржи $n$ линеарно независни вектори. Тогаш системот линеарни равенки

$$\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x} \rangle = 0, \quad \mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*),$$

има барем едно решение $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$. Со помош на овој вектор ќе конструираме два различни вектори чија конвексна линеарна комбинација е векторот $\mathbf{x}^*$.

Нека $\mathbf{a}_k \notin A(\mathbf{x}^*)$. Согласно дефиницијата на $X$ и $A(\mathbf{x}^*)$, $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle < b_k$. Ова значи дека

$$\mathbf{x}^* \in Y = \bigcap_{\mathbf{a}_k \notin A(\mathbf{x}^*)} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}^* \rangle < b_k\}.$$

Секое од множествата во пресекот е отворено множество, а нивниот број е конечен, па множеството $Y$ е исто така отворено (својство 2.9) што овозможува да се најди $\mu > 0$ така што $B_\mu(\mathbf{x}^*) \subset Y$. Нека $\varepsilon = \mu(\|\mathbf{y}\| + 1)^{-1}$ и нека

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{y} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{y}.$$

Јасно е дека $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}^*$ и лесно се проверува дека $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\mu(\mathbf{x}^*) \subset Y$. Уште повеќе $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$. Имено, ако $\mathbf{a}_k \in A(\mathbf{x}^*)$, тогаш $\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}_1 \rangle = b_j = \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x}_2 \rangle$, што значи дека $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ ги задоволуваат и ограничувањата што се активни во $\mathbf{x}^*$.

За вака дефинираните $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ имаме $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, па $\mathbf{x}^*$ не може да биде екстремална точка за $X$.

Обратно, нека $A(\mathbf{x}^*)$ содржи $n$ линеарно независни вектори $\{\mathbf{a}_{i_k} | k \in \{1, \dots, n\}\}$. Тогаш $\mathbf{x}^*$ ќе биде единственото решение на системот линеарни равенки

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\langle \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{x} \rangle = b_{i_k}, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.33}$$

Ако $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X$ и $\lambda \in (0,1)$ се такви што $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)$, тогаш

$$\begin{aligned} b_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle &= \langle \mathbf{a}_j, \lambda \mathbf{u}_1 + (1-\lambda)\mathbf{u}_2 \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1 \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_2 \rangle \\ &\leq \lambda b_j + (1-\lambda) b_j = bj, \end{aligned}$$

и, последователно,

$$\lambda \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1 \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_2 \rangle = b_j \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\big[\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1 \rangle - b_j\big] + (1-\lambda)\big[\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_2 \rangle - b_j\big] = 0.$$

Имајќи предвид дека $\lambda \in (0,1)$, $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1 \rangle - b_j \leq 0$ и $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_2 \rangle - b_j \leq 0$, за секој $\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)$, последното равенство е можно само доколку важи $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1 \rangle - b_j = 0$ и $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}_2 \rangle - b_j = 0$. Но тогаш точките $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X$ исто така ќе бидат решение на системот (4.33). Со оглед на тоа дека $\mathbf{x}^*$ е неговото единственото решение, мора да важи $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{x}^*$, што значи дека $\mathbf{x}^*$ мора да биде екстремална точка. ■

**Последица 4.1.** Ако $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{p \times n}$ е матрица така што $p > n$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, тогаш множеството $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ може да има конечен број на екстремални точки.

**Доказ.** Според претходната теорема, екстремалните точки (доколку постојат) се решенија на системи од облик (4.33), каде $\{\mathbf{a}_{i_k} | k \in \{1, \dots, n\}\}$ е множество од $n$ линеарно независни редици на матрицата $\mathbf{A}$, а бројот на ваквите системи не е поголем од

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{n! \cdot (p-n)!}.$$

■

### 4.5.2. Определување на екстремални точки (директен алгебарски метод)

Имајќи ги предвид начините на премин од еден во друг облик, согласно теорема 4.1 може да се формулира следната постапка за наоѓање на екстремалните точки на допуштената област на дадена ЛП-задача.

Нека е дадена ЛП-задача во општ облик (4.1). Алгебарски, екстремалните точки на нејзината допуштена област се определуваат како што следи[14].

1. Секое од неравенствата во (4.2) и (4.3) се заменува со равенство, со што ќе се добијат вкупно не повеќе од $m + n$ равенства.
2. Од равенствата добиени под 1., се прават сите можни избори од по $n$ различни равенства со кои се формираат системи линеарни со по $n$ равенки, секој по непознатите $x_1, x_2, \dots, x_n$. Бројот на вака формираните системи не е поголем од $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n! \cdot m!}$.
3. Ако $\mathbf{x}$ е *единствено решение* на некој од погоре формираните системи, се проверува дали тоа ги задоволува ограничувањата од (4.2) и (4.3) чии гранични хиперрамнини не биле дел од системот чие решение е $\mathbf{x}$. Доколку проверката покаже дека се задоволени наведените ограничувања, $\mathbf{x}$ ќе биде екстремална точка на допуштената област.

**Пример 4.12.** Нека е дадена ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max \ & f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{p.o.} \ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Нејзината допуштена област е множеството $X \subset \mathbb{R}^3$ определено со

[14] Директниот алгебарски метод за определување на екстремалните точки е најчест начин на определување на екстремалните точки што се среќава во литературата со поелементарни содржини од линеарно програмирање (да се види на пример (Lipschutz, 1966, глава 23)). Од причини наведени во напомена 4.2 во оддел 4.7.2, тој е попрепорачлив за ЛП-задачи со две променливи на одлучување.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$X: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 & (2) \\ x_1 \geq 0 & (3). \\ x_2 \geq 0 & (4) \\ x_3 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Равенствата што се добиваат од изразите (1) – (5) со замена на „≤“ и „≥“ со „=“, се

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Со помош на овие равенства може да формираат вкупно $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ различни системи од три линеарни равенки со три непознати $x_1$, $x_2$ и $x_3$. Системите, нивните решенија (како координати на точки во $\mathbb{R}^3$), како и тоа дали тие го задоволуваат секое од неравенствата (1) – (5) се наведени во табела 4.2.

Табела 4.2. Системи линеарни равенки што кореспондираат на неравенствата (1) – (5), нивни решенија и исполнетост на (1) – (5) (автори)

| Систем | Решение | Исполнува (1) – (5) |
|---|---|---|
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ | $A_1(0,1,2)$ | да |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ | $A_2(1,0,2)$ | да |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | нема решение | / |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ | $A_4(0,0,3)$ | да |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $A_5(0,3,0)$ | не важи $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$ |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $A_6(3,0,0)$ | не важи $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$ |
| $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ | $A_7(0,0,4)$ | не важи $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ |
| $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $A_8(0,2,0)$ | да |
| $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $A_9(2,0,0)$ | да |
| $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ | $A_{10}(0,0,0)$ | да |

Врз основа на претходното, екстремалните точки на допуштената област се $A_1(0,1,2)$, $A_2(1,0,2)$, $A_4(0,0,3)$, $A_8(0,2,0)$, $A_9(2,0,0)$ и $A_{10}(0,0,0)$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 4.5.3. Графичко претставување на допуштената област кај ЛП-задачи со две променливи

Допуштената област на ЛП-задача со две променливи на одлучување, дадена во стандарден, е опишана со систем линеарни неравенства од облик

$$X:\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (4.34)$$

за задача на максимизација, или

$$X:\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (4.35)$$

за задача на минимизација. Геометриски, секој од системите (4.34) и (4.35) определува подмножество од дводимензионалниот евклидски простор $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Во овој простор неравенства од облик

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \le \beta \quad \text{и} \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ge \beta, \qquad (4.36)$$

каде $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$ се дадени броеви така што барем еден од броевите $\alpha_1$ и $\alpha_2$ е различен од 0, определуваат затворени полурамнини во $\mathbb{R}^2$, секоја со гранична права

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta.$$

Ова значи дека допуштената област определена со некој од системите (4.34) и (4.35) е пресек на затворени полурамнини во $\mathbb{R}^2$. Ако тој пресек е непразно и ограничено множество, тогаш допуштената област е конвексен многуаголник во рамнина.

Полурамнините од облик (4.36) графички се претставуваат во Декартов правоаголен координатен систем со оски $x_1$ и $x_2$, со исенчување (шрафирање или обојување) на делот од рамнината чии точки го задоволуваат соодветното неравенство. Доколку графичкото претставување се врши без примена на соодветен софтвер, тогаш се постапува како што следи.

1. Во $x_1Ox_2$ рамнината прво со полна линија[15] се исцртува правата $p$ чија равенка е $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$.
2. Точките што го задоволуваат неравенството $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < \beta$ ќе лежат на едната страна од правата $p$, а оние за кои важи неравенството $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 > \beta$, ќе лежат на другата страна. Во конкретни задачи, за да се определи од која страна на правата е бараната полурамнина може да се постапи на два начини.
   - 2.a. *Тест на една точка*: се избира произволна точка што *не лежи* на $p$ и за неа се проверува дали го задоволува неравенството со кое е определена полурамнината. Ако точката го задоволува неравенството, се исенчува делот од рамнината што е на иста страна од правата $p$ со точката. Во спротивно, се исенчува делот од рамнината што е на другата страна од правата $p$. Како тест-точка обично се избира некоја од точките $O(0,0)$, $E_1(1,0)$ или $E_2(0,1)$. Овие три точки не лежат на иста права, па барем една од нив нема да лежи на правата $p$.
   - 2.b. Алтернативен начин на определување е со помош на векторот $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Овој вектор ја определува насоката на нараснување на вредностите на изразот $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ и е нормален на правата $p$. Ова својство може да се искористи за определување на полурамнините во (4.36). Тоа се прави со исцртување на вектор $\mathbf{n}_1$ со мала должина и со ист правец и насока како $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2)$, а *чија почетна точка лежи на правата* $p$. Полурамнината што го содржи $\mathbf{n}_1$ ќе одговара на неравенството $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \ge \beta$, а онаа што не го содржи $\mathbf{n}_1$ ќе одговара на неравенството $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \le \beta$.

[15] Ако наместо затворена полурамнина, графички треба да се претстави отворена полурамнина, т.е. множеството точки определено со некое од строгите неравенства $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < \beta$ или $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 > \beta$, тогаш правата се исцртува со испрекината линија.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Да напоменеме дека точката $N(\alpha_1, \alpha_2)$ чиј радиус вектор е векторот $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2)$ не мора да го задоволува неравенството $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geq \beta$. Имено, имајќи предвид дека барем еден од броевите $\alpha_1$ и $\alpha_1$ е различен од 0, за оваа точка важи

$$\alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \|\mathbf{n}\|^2 > 0,$$

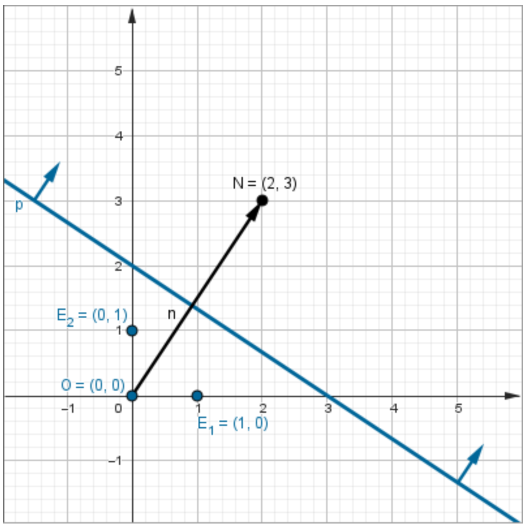
па во случај кога $\|\mathbf{n}\|^2 < \beta$, $N(\alpha_1, \alpha_2)$ нема да припаѓа на полурамнината определена со $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geq \beta$, туку на полурамнината определена со $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leq \beta$ (во случај кога $\|\mathbf{n}\|^2 = \beta$, $N(\alpha_1, \alpha_2)$ лежи на правата определена со $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$).

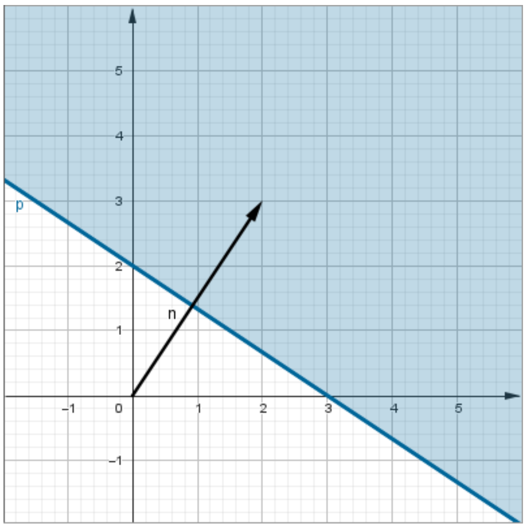
**Пример 4.13.** За да се претстави графички полурамнината

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

во рамнината $x_1 O x_2$ прво ја исцртуваме правата $p$: $2x_1 + 3x_2 = 6$ како на левиот график од слика 4.3. Како што може да се забележи од овој график, ниту една од точките $O(0,0)$, $E_1(1,0)$ или $E_2(0,1)$ не лежи на правата $p$. Тоа ќе го потврди и алгебарската проверка. На пример, заменувајќи ги координатите на точката $O(0,0)$ во изразот за точката $2x_1 + 3x_2$, добиваме: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 6$. Ова воедно покажува дека координатниот почеток не лежи во полурамнината зададена со изразот $2x_1 + 3x_2 \geq 6$. За координатите на крајната точка $N(2,3)$ на $\mathbf{n}$ имаме $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = \|\mathbf{n}\|^2 = 13 > 6$, што значи дека точката $N(2,3)$ го задоволува неравенството $2x_1 + 3x_2 \geq 6$. Според претходното, ќе треба да се обои делот од рамнината што од страната правата $p$ што не ја содржи точката $O(0,0)$ (или, ја содржи точката $N(2,3)$). Тоа го потврдува и насоката на векторот $\mathbf{n} = (2,3)$ (како и двата вектори во левиот график на слика 4.3 со мала должина и имаат иста насока со $\mathbf{n}$, а чии почетни точки лежат на правата $p$).

Полурамнината определена со $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ е обоениот дел од рамнината прикажан на десниот график на слика 4.3.




Слика 4.3. Почетни и помошни елементи за определување на полурамнината $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ (лево) и нејзин графички приказ (десно) (автори)

**Пример 4.14.** Допуштената област на ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ f &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{p.o.}\ \ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

е множеството определено со системот неравенства

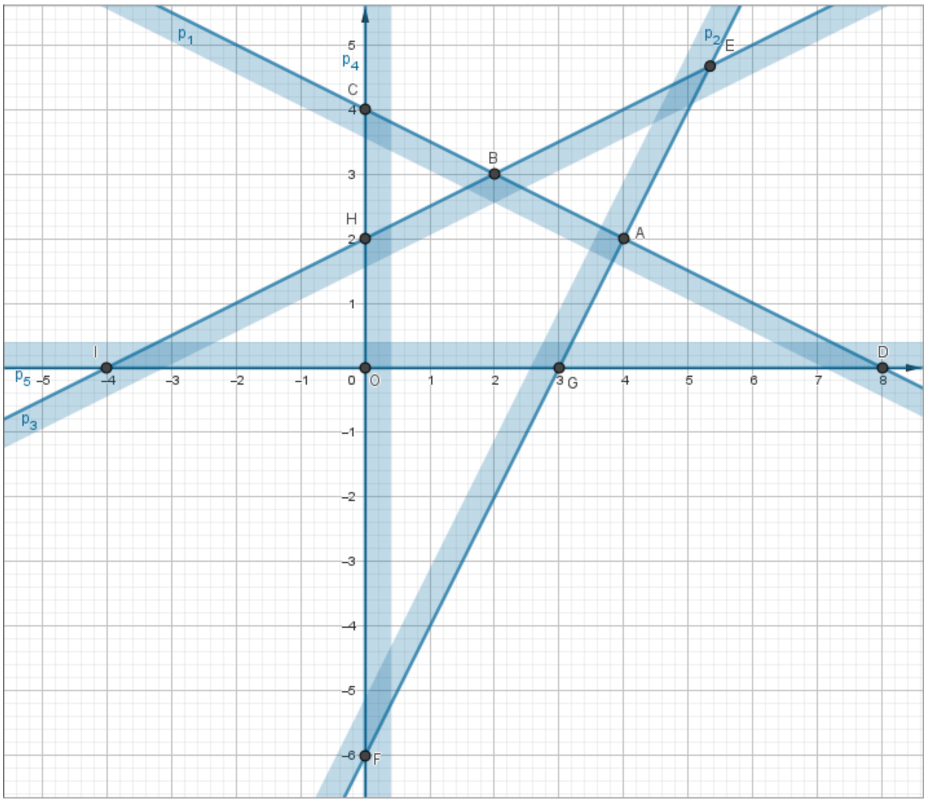
Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$X: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 & (1) \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 & (2) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 & (3). \\ x_1 \geq 0 & (4) \\ x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

Граничните прави на полурамнините определени со изразите (1) – (5) се

$$x_1 + 2x_2 = 8, \quad 2x_1 - x_2 = 6, \quad -x_1 + 2x_2 = 4, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0.$$

Во принцип, во ист координатен систем треба да се исцрта секоја од полурамнините, но тоа може да доведе до исклучително непрегледен цртеж. Затоа, без примена на софтвер кој поддржува графичко претставување на системи линеарни неравенства со две непознати, обично се препорачува првично да се обои само мал појас на страната од граничната права што кореспондира на неравенството на начин што обојувањето лесно може да се отстрани. Кога тоа ќе се направи за секоја од полурамнините, како на слика 4.4, да се обои само делот од рамнината (многуаголник или област што, при услови за ненегативност на двете променливи, ќе бидат лоцирани во првиот квадрант) каде би дошло до преклопување доколку сите полурамнини се целосно прикажани, како на слика 4.5, а останатото обојување да се отстрани.



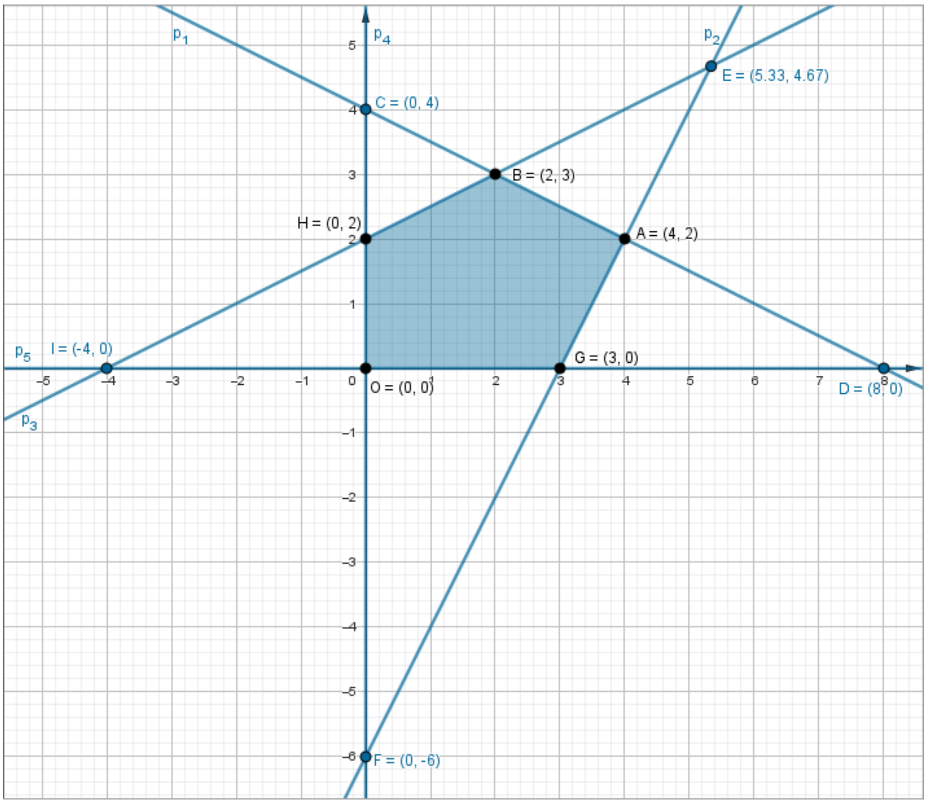

Слика 4.4. Почетни и помошни елементи за определување на допуштената област за ЛП-задачата од пример 4.14 (автори)

Препорачливо е да се определат и пресечните точки на граничните прави по парови, односно да се определат потенцијалните екстремални точки. Постапувајќи како во пример 4.12, со помош на граничните прави треба да се формираат $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ системи од две равенки со две непознати. Решенијата на овие системи се точките

$$A(4,0),\ B(2,3),\ C(0,4),\ D(8,0),\ E\left(\frac{16}{3},\frac{14}{3}\right),\ F(0,-6),\ G(3,0),\ H(0,2),\ I(-4,0) \text{ и } O(0,0),$$

а допуштената област е многуаголникот $OGABH$ (слика 4.5). Неговите темиња се воедно и екстремалните точки.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 4.5. Допуштената област за ЛП-задачата од пример 4.14 (автори)

**Пример 4.15.** Допуштената област на ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ & f = 3x_1 + x_2 \\ \text{p.o.}\ & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

е множеството определено со системот неравенства

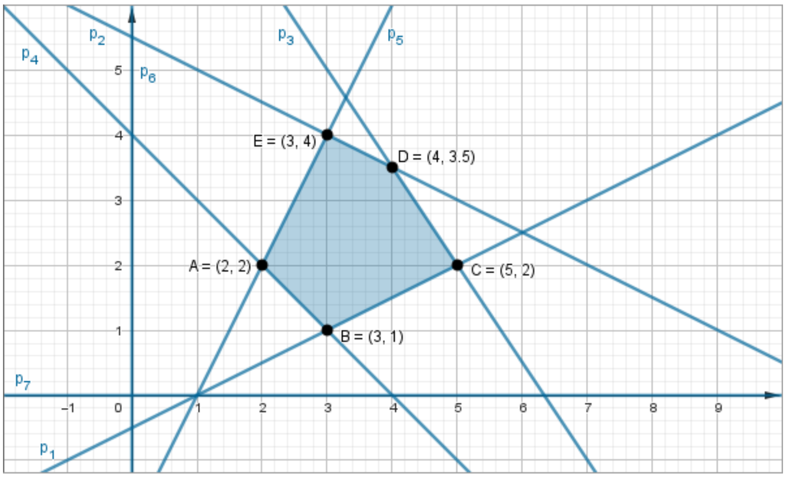
$$X: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 1 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 & (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 19 & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 4 & (4). \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 & (5) \\ x_1 \geq 0 & (6) \\ x_2 \geq 0 & (7) \end{cases}$$

Граничните прави на полурамнините определени со изразите (1) – (7) се

$$x_1 - 2x_2 = 1,\ x_1 + 2x_2 = 11,\ 3x_1 + 2x_2 = 19,\ x_1 + x_2 = 4,\ 2x_1 - x_2 = 2,\ x_1 = 0,\ \ x_2 = 0.$$

Постапувајќи како во претходниот пример, со дополнително алгебарско определување на екстремалните точки (што сега ќе подразбира формирање на $\binom{7}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 5!} = 21$ системи од две равенки со две непознати), како графички приказ на допуштената област ќе се добие многуаголникот $ABCDE$ прикажан на слика 4.6. Неговите темиња чии координати се прикажани на слика 4.6 се неговите екстремални точки.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>



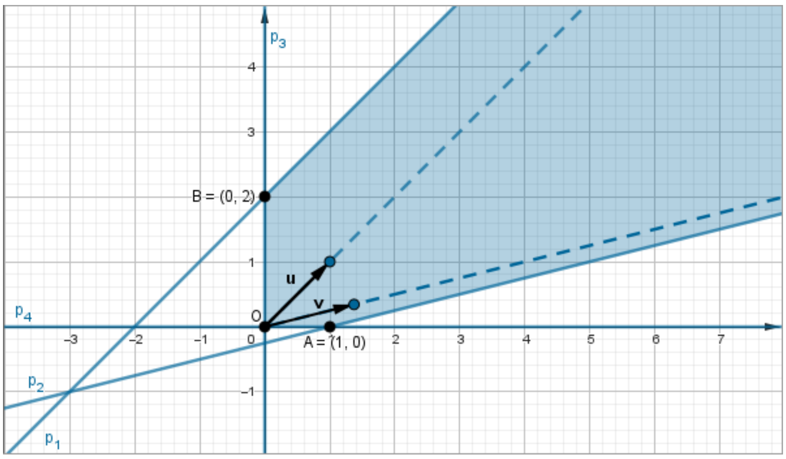

Слика 4.6. Допуштената област за ЛП-задачата од пример 4.15 (автори)

Во претходните два примери допуштената област е ограничено множество. Но тоа не мора да е секогаш случај. Во продолжение ќе наведеме пример ЛП-задача чија допуштена област е неограничена и ЛП-задача чија допуштена област се редуцира на само една точка.

**Пример 4.16.** Допуштената на ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ f &= 5x_1 + x_2 \\ \text{p.o.}\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

е обоениот дел од рамнината прикажан на слика 4.7. Таа има само три екстремални точки $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,2)$, и не е ограничена. Таа ги содржи зраците $R_{\mathbf{u}} = \{\lambda \mathbf{u} | \lambda \geq 0\}$ и $R_{\mathbf{v}} = \{\lambda \mathbf{v} | \lambda \geq 0\}$, каде $\mathbf{u}$ е вектор паралелен на правата $p_1: -x_1 + x_2 = 2$, а $\mathbf{v}$ е вектор паралелен на правата $p_2: x_1 - 4x_2 = 1$.



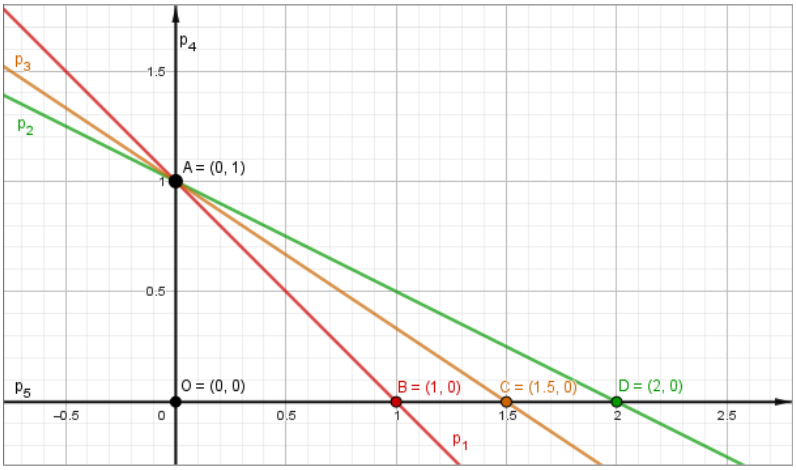

Слика 4.7. Допуштената област за ЛП-задачата од пример 4.16 (автори)

**Пример 4.17.** Допуштената област на ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ f &= 4x_1 + 7x_2 \\ \text{p.o.}\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ -2x_1 - 3x_2 &\leq -3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

се редуцира на само една точка, точката $A(0,1)$. На слика 4.8 се прикажани граничните прави на $p_1$, $p_2$ и $p_3$ на главните ограничувања, и граничните прави $p_4$ ($x_2$-оска) и $p_5$ ($x_1$-оска) на условите за ненегативност. Ограничувањата $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 + 2x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ истовремено се исполнети само за точките од триаголникот $OBA$, а за овие точки неравенството $-2x_1 - 3x_2 \leq -3$ е исполнето само во точката $A$.




Слика 4.8. Допуштената област за ЛП-задачата од пример 4.17 (се состои само од точката $A(1,0)$) (автори)

### 4.5.4. Графичко претставување на допуштената област кај ЛП-задачи со три променливи

Кај ЛП-задача со три променливи на одлучување, дадена во стандарден облик, допуштената област на опишана со систем линеарни неравенства од облик

$$X: \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases} \tag{4.37}$$

за задача на максимизација, или

$$X: \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \geq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases} \tag{4.38}$$

за задача на минимизација. Геометриски, секој од системите (4.37) и (4.38) определува подмножество од тридимензионален евклидски простор $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Во овој простор неравенства од облик

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \leq \beta \quad \text{и} \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \geq \beta, \tag{4.39}$$

каде $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{R}$ се дадени броеви така што барем еден од броевите $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ е различен од 0, определуваат затворени полупростори во $\mathbb{R}^3$, секој со гранична рамнина

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta. \tag{4.40}$$

Ова значи дека областа на дефинираност определена со некој од системите (4.37) и (4.38) ќе биде пресек на затворени полупростори во $\mathbb{R}^3$. Ако тој пресек е непразно и ограничено множество, тогаш областа на дефинираност е конвексен полиедар. Овде термините „полупростор“ и „полиедар“ ги искористивме согласно нивните дефиниции во класичната просторна геометрија.

Полупросторите во $\mathbb{R}^3$ графички се претставуваат во Декартов правоаголен координатен систем со оски именувани исто со променливите на одлучување (во овој случај $x_1$, $x_2$ и $x_3$). Но, за разлика од $\mathbb{R}^2$, слично како при графичкото претставување на функцијата на целта, се наидува на потешкотија тоа да се изведе доволно прецизно, бидејќи треба да се даде соодветна визуализација на тродимензионални неограничени објекти врз ограничена дводимензионална површина (лист хартија или компјутерски екран). Затоа, графичкото претставување на неравенства од облик (4.40) вообичаено

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

се врши на тој начин што се исцртува само делот од полупросторот што се наоѓа во тридимензионалната коцка определена со

$$K_{\alpha,\beta} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \in [\alpha, \beta]\}, \tag{4.41}$$

за погодно избрани вредности $\alpha < 0$ и $\beta > 0$.

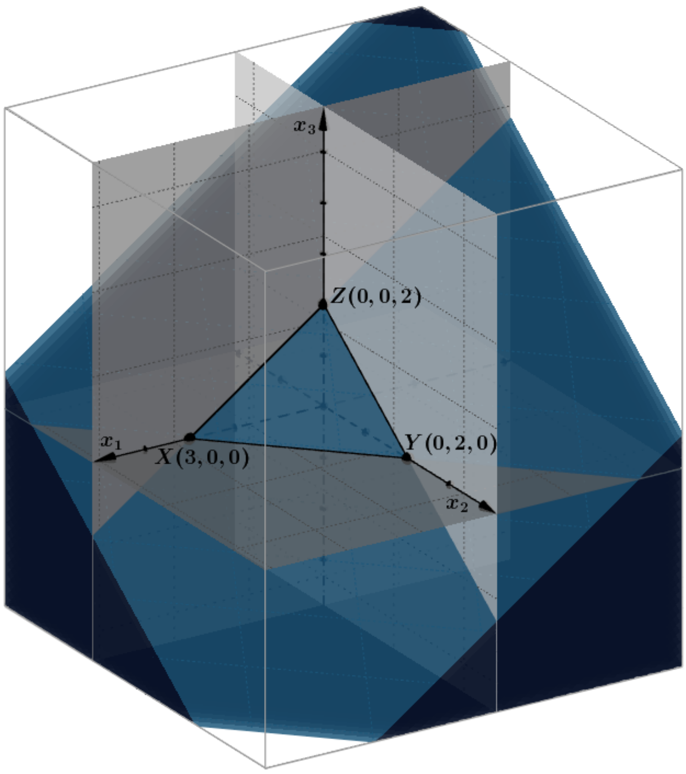
**Пример 4.18.** За да се прикажи графички полупросторот определен со изразот

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 6,$$

поаѓаме од граничната рамнина чија равенка е $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6$. Бидејќи слободниот коефициент е различен од 0, оваа равенка може да се запише во сегментен вид

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1,$$

што претставува равенка на рамнина што оските $x_1$, $x_2$ и $x_3$ ја прободуваат во точките $X(3,0,0)$, $Y(0,2,0)$ и $Z(0,0,2)$. Ова значително ќе го олесни исцртувањето и подобар избор на вредности $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ во (4.41). Координатниот почеток $O(0,0,0)$ го задоволува неравенството во задачата. Ставајќи, на пример, $\alpha = -3$ и $\beta = 5$, за графички да се претстави неравенството $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 6$ ќе се исцрта полиедарот што се добива со отстранување на делот од коцката $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \in [-3,5]\}$ што од неа го отсекува рамнината $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6$, а кој не го содржи координатниот почеток. Телото што ќе се добие на тој начин е прикажано на слика 4.9. За подобра ориентација и вузализација, дополнително се исцртани и координатните рамнини.




Слика 4.9. Графички приказ на полупросторот од пример 4.18 (автори)

Во случај кога графички треба да се прикаже допуштената област на ЛП-задача, одделното претставување на секоја од граничните рамнини често ќе резултира со исклучителна непрегледност на цртежот. Во одделни ситуации тоа може да се надмини со претходна анализа на системи неравенства што се добиваат од условите за ненегативност на променливите кон кои се приклучува *само едно* главно ограничување. Попрецизно, системи неравенства од облик

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$T: \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \leq \beta \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0. \end{cases} \tag{4.42}$$

На пример, ако ова се направи за ЛП-задача на максимизација во стандарден облик (4.6), би добиле $m$ системи од облик (4.42). Ако на нив кореспондираат подмножествата $T_1$, $T_2$ , ..., $T_m$ од $\mathbb{R}^3$, допуштената област $X$ може да се определи преку

$$T_2' = T_1 \cap T_2,\ T_3' = T_2' \cap T_3,\ \dots\ ,\ T_m' = T_{m-1}' \cap T_m = X.$$

Дополнителното определување на екстремалните точки ќе овозможи доволно прецизно исцртување на пресеците.

**Пример 4.19.** Претходната постапка ќе ја илустрираме за соодветно графичко претставување на допуштената област

$$X: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0, \end{cases}$$

на ЛП-задачата од пример 4.12, независно од тоа што претходно веќе се најдени нејзините екстремални точки. Ги разгледуваме потсистемите

$$T_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad T_2: \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

За овие потсистеми имаме:

- Граничната рамнина на неравенството $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ има сегментен облик на равенка
$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} = 1,$$
што значи дека координатните оски ја прободуваат во точките $A(3{,}0{,}0)$, $B(0{,}3{,}0)$ и $C(0{,}0{,}3)$. Бидејќи координатниот почеток $O(0{,}0{,}0)$ го задоволува неравенството $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$, $T_1$ е тетраедар формиран од точки $A$, $B$, $C$ и $O$.
- Граничната рамнина на неравенството $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$ има сегментен облик на равенка
$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = 1,$$
што значи дека координатните оски ја прободуваат во точките $D(2{,}0{,}0)$, $E(0{,}2{,}0)$ и $F(0{,}0{,}4)$. Бидејќи координатниот почеток $O(0{,}0{,}0)$ го задоволува и неравенството $2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$, $T_2$ е тетраедар формиран од овие четири точки.

Тетраедрите $T_1$ и $T_2$ се прикажани на слика 4.10. Допуштената област ќе биде

$$X = T_1 \cap T_2,$$

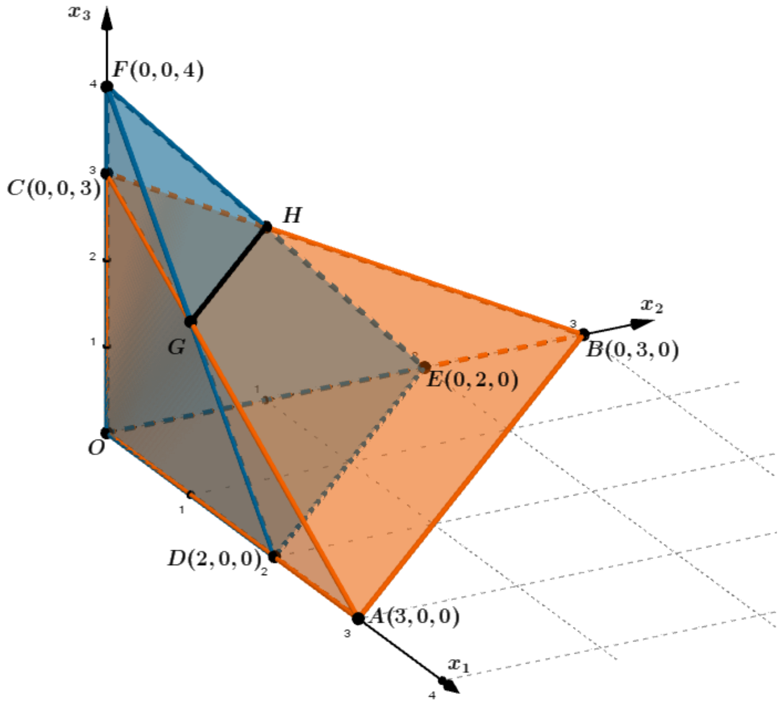
и таа е пресечената пирамида прикажана на слика 4.11.

Ако сега се направи споредба со резултатите од десетте системи од по три линеарни равенки со три непознати чии решенија се наведени во пример 4.12, при ознаките што се таму наведени, имаме

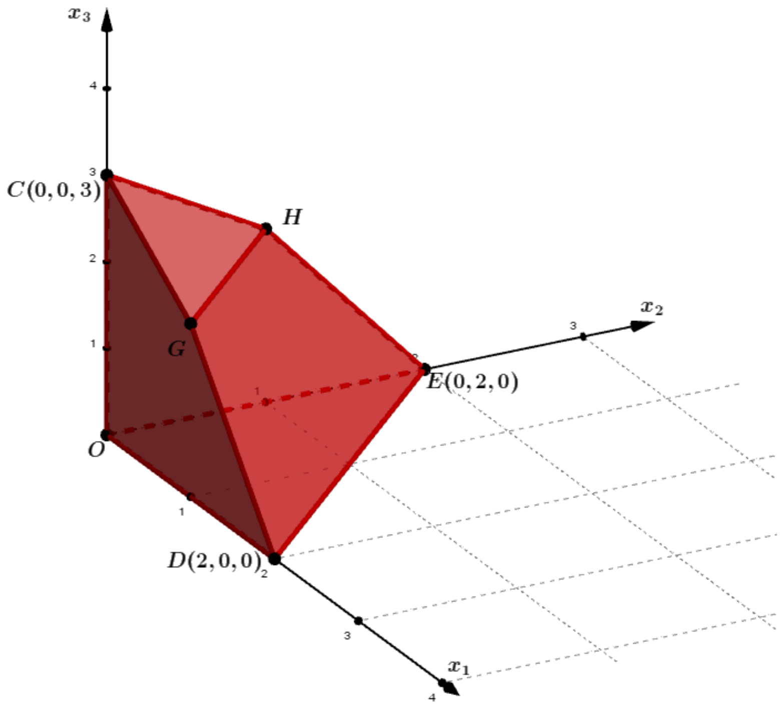
- ќошиња на $T_1$: $O \equiv A_{10}, A \equiv A_6, B \equiv A_5, C \equiv A_4$,
- ќошиња на $T_2$: $O \equiv A_{10}, D \equiv A_9, E \equiv A_8, F \equiv A_7$,
- според слика 4.10 и 4.11, при пресек на $T_1$ и $T_2$ од нив се „отстранети“ деловите што одговараат на полиедрите $CGHF$ (триаголникот $CGH$ останува во пресекот) и $CDABEH$ (четириаголникот $DEHG$ останува во пресекот),

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- точките $G$ и $H$ се точки што лежат и на рамнината $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ и на рамнината $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, и тоа се точки во кои пресечната права на овие две рамнини ги прободува координатните рамнини $x_1Ox_3$ и $x_2Ox_3$, или
    - точката $G$ е пресекот на рамнините $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ и $x_2 = 0$, т.е. $G \equiv A_2$,
    - точката $H$ е пресекот на рамнините $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ и $x_1 = 0$, т.е. $H \equiv A_1$.




Слика 4.10. Помошни тетраедри за графичкиот приказ на допуштената област на ЛП-задачата од пример 4.12 (автори)




Слика 4.11. Допуштената област на ЛП-задачата од пример 4.12 (автори)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 4.6. Базни решенија и базни изводливи решенија

Во теоријата на линеарното програмирање поимите „базни решенија“ и „базни изводливи решенија“ се однесуваат на конвексните многустрани множества што се јавуваат како допуштена област на дадена ЛП-задача. Низ литературата може да се сретнат две суштински различни дефиниции. Едната се однесува на случајот кога допуштената област е дефинирана со систем што содржи неравенства како во (4.3) и (4.4). Другата дефиниција, се однесува на случајот кога допуштената област е зададена со систем што содржи само равенства, односно ако ЛП-задачата е дадена во канонична облик. Тој не мора да биде каноничен облик до кој е дојдено преку премин од некој од стандардните облици.

#### 4.6.1. Базни решенија и базни изводливи решенија за ЛП-задача во општ облик

Нека

- $I_1$, $I_2$ и $I_3$ се по парови дисјунктни конечни индексни множества од кои барем едно е непразно и $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$,
- $\{\mathbf{a}_i | i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$,
- $\{b_i | i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$,

и нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е конвексното многустрано множество опишано со системот равенства и неравенства

$$X\colon \begin{cases} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i, & i \in I_1 \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i, & i \in I_2 \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \geq b_i, & i \in I_3 \end{cases}.$$

**Дефиниција 4.1.** Точката $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ се нарекува *базно решение* за $X$ ако важи

(a) $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i$ за секој $i \in I_2$,

(b) множеството $\{\mathbf{a}_i | \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i, i \in I\}$ содржи $n$ линеарно независни вектори.

Базното решение за $X$ *не мора* да се содржи во $X$.

**Пример 4.20.** Секоја од точките добиени со решавање на системите во пример 4.12 е базно решение за допуштената област на ЛП-задачата од тој пример. Но не секоја од нив се содржи во допуштената област.

**Дефиниција 4.2.** Ако $\mathbf{x}^*$ е базно решение за $X$ така што $\mathbf{x}^* \in X$, тогаш $\mathbf{x}^*$ се нарекува *базно изводливо решение* за $X$.

Теорема 4.2 сега може да се преформулира како што следи.

**Теорема 4.3.** Точката $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ е екстремална точка за допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача ако, и само ако, таа е базно изводливо решение за $X$ (во смисла на дефиниција 4.2).

Ако $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ е базно решение за $X$, множеството $\{\mathbf{a}_i | \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i, i \in I\}$ може да содржи и повеќе од $n$ различни вектори. Јасно е дека во тој случај ова множество ќе содржи барем еден вектор што е линеарна комбинација на останатите вектори.

**Дефиниција 4.3.** Базното решение $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ за $X$ се вели дека е *дегенерирано* ако множеството $\{\mathbf{a}_i | \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^* \rangle = b_i, i \in I\}$ содржи повеќе од $n$ различни вектори.

Дегенерацијата може да се јави и кај базните изводливи решенија.

**Пример 4.21.** Точката $A$ од пример 4.17 е дегенерирано базно изводливо решение.

Низ литературата се сѐ подоминантни алтернативни дефиниции за поимите „базни решенија“ и „базни изводливи решенија“. Се дефинираат само за ЛП-задача во каноничен облик и, врз основа на својствата на така дефинираните базни изводливи решенија, се дефинира алтернативна постапка за определување на екстремални точки.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Доколку каноничниот облик е добиен со премин од ЛП-задача зададена во стандарден облик (или од нејзин кореспондентен матричен, или пак векторски облик), со соодветно модификација, оваа постапка се користи за определување на екстремални точки на почетната ЛП-задача.

### 4.6.2. Базни решенија и базни изводливи решенија кај ЛП-задача во каноничен облик

Ако ЛП-задачата е зададена во каноничен облик (4.5), нејзината допуштена област е множеството $X$ опишано со системот

$$X\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}, \tag{4.43}$$

или, ако $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$,

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{o}\}. \tag{4.44}$$

Поради причините што ги наведовме во оддел 4.3.4., претпоставуваме дека

$$rank(\mathbf{A}) = m < n. \tag{4.45}$$

Ако $A_i$, $i = 1,2,\dots,n$ се колоните на матрицата $\mathbf{A}$,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, i = 1,2,\dots,n, \tag{4.46}$$

тогаш од главните ограничувања од (4.43), или од матричното равенство $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ во (4.44), следи дека

$$A_1x_1 + \cdots + A_mx_m + A_{m+1}x_{m+1} + \cdots + A_nx_n = \mathbf{b}. \tag{4.47}$$

Согласно претпоставката (4.45), ако системот (4.47) има барем едно решение, тој ќе има бесконечно многу решенија. Нека $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, m, m+1, \dots n\}$ се такви што $i_1 < \cdots < i_m$, и нека

- $\overline{B} = \{i_1, \dots, i_m\}$,
- $\overline{N} = \{1, \dots, m, m+1, \dots n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\} = \{j_1, \dots, j_{n-m}\}$, $j_1 < \cdots < j_{n-m}$,
- $\mathbf{x}_{\overline{B}} = \left(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\right) \in \mathbb{R}^m$,
- $\mathbf{x}_{\overline{N}} = \left(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m}}\right) \in \mathbb{R}^{n-m}$,
- $\mathbf{B}$ е подматрицата на $\mathbf{A}$ од $m$ –ти ред дефинирана со

$$\mathbf{B} = B\left(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\right) = \begin{bmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_m} \end{bmatrix}, \tag{4.48$'$}$$

- $\mathbf{N}$ е подматрицата на $\mathbf{A}$ со димензија $m \times (n-m)$ дефинирана со

$$\mathbf{N} = N\left(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\right) = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_{n-m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mi_{n-m}} \end{bmatrix}. \tag{4.48$''$}$$

Тогаш (4.47) може да се презапише како што следи

$$A_1x_1 + \cdots + A_mx_m + A_{m+1}x_{m+1} + \cdots + A_nx_n$$
$$= \sum_{i\in\overline{B}} A_ix_i + \sum_{j\in\overline{N}} A_jx_j = \mathbf{B}\mathbf{x}_{\overline{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}} = \mathbf{b},$$

или

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_{\overline{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}} = \mathbf{b}. \tag{4.49}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Во случај кога колоните $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ се линеарно независни, тогаш матрицата $\mathbf{B}$ е инверзибилна и изразот (4.49) овозможува да се опише множеството од сите решенија на системот (4.47). Имено, заради инверзибилноста на $\mathbf{B}$, изразот (4.49) може да се помножи од лево со $\mathbf{B}^{-1}$, по што добиваме

$$\mathbf{x}_{\overline{B}} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{\overline{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}}, \tag{4.50}$$

а множеството од сите решенија на (4.47), согласно дефинициите на $\mathbf{x}_{\overline{B}}$ и $\mathbf{x}_{\overline{N}}$ ќе биде

$$S_{\overline{B}} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \mathbf{x}_{\overline{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}}, \mathbf{x}_{\overline{N}} \in \mathbb{R}^{n-m}\right\}. \tag{4.51}$$

Координатите на векторот $\mathbf{x}_{\overline{N}}$ во (4.50) може да се менуваат произволно во множеството $\mathbb{R}$. Во теоријата на системи линеарни равенки ова се т.н. *слободни* или *небазни променливи*. Координатите пак на векторот $\mathbf{x}_{\overline{B}}$ се т.н. *базни променливи*, а $\mathbf{x}_{\overline{B}}$ се нарекува *базен вектор*. Матрицата $\mathbf{B}$ од (4.48) уште се нарекува *база* за $\mathbf{A}$.

Описот на сите решенија на системот (4.47) даден во (4.51) не е единствен. Со избор на друга база за матрицата $\mathbf{A}$ (т.е. друго множество од $m$ линеарно независни колони на $\mathbf{A}$), за множеството од сите решенија ќе се добие алтернативен опис.

Сега можеме да дадеме алтернативни дефиниции за поимите „базно решение" и „базно изводливо решение" на ЛП-задачата што е зададена во каноничен облик и чија допуштена област е определена со (4.43).

**Дефиниција 4.4.** Нека $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ е дадена матрица така што $rank(\mathbf{A}) = m < n$ и нека $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. За точката $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ се вели дека е *базно решение* за множеството $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$, ако

(a) постојат линеарно независни колони $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ на матрицата $\mathbf{A}$ така што $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = B(A_{i_1}, \dots, A_{i_m})^{-1}\mathbf{b}$,

(b) $x_j = 0$ за секој $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$.

Ако дополнително важи и $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{o}$, тогаш $\mathbf{x}^*$ се нарекува *базно изводливо решение* на $X$.

**Дефиниција 4.5.** За базното решение $\mathbf{x}^*$ се вели дека е *дегенерирано* ако тоа има помалку од $m$ координати различни од 0.

**Теорема 4.4.** Точката $\mathbf{x}^* \in X$ е екстремална точка за допуштената област $X$ на ЛП-задача зададена во каноничен облик ако, и само ако, таа е базно изводливо решение за $X$ (во смисла на дефиниција 4.4).

**Доказ.** Нека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за допуштената област $X$ опишана со (4.44), и нека претпоставиме дека таа не е базно изводливо решение. Согласно описот на $X$ оваа претпоставка ќе значи дека $\mathbf{x}^*$ не е базно решение.

Ако $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, нека $J^* = \left\{j \middle| x_j^* > 0\right\}$. Ако $\mathbf{x}^*$ не е базно решение, тогаш колоните $\{A_j | j \in J\}$ на матрицата $\mathbf{A}$ се линеарно зависни, па постојат $y_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$ од кои барем еден е различен од 0, така што

$$\sum\nolimits_{j \in J} y_j A_j = \mathbf{o}.$$

Нека $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ е векторот чии координати се $y_j$ кога $j \in J$ и 0 во останатите случаи. Нека $\varepsilon > 0$ и нека

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{y} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{y}.$$

За овие два вектори, согласно дефиницијата на $\mathbf{y}$ и тоа што $\mathbf{x}^* \in X$ имаме:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* \pm \varepsilon\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^* \pm \varepsilon\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{o} \pm \varepsilon \sum_{j \in J} y_j A_j = \mathbf{o}$,
2. бидејќи $x_j^* > 0$ за секој $j \in J$, $\varepsilon > 0$ може да се избере така што и двете вредности $x_j^* - \varepsilon y_j$ и $x_j^* + \varepsilon y_j$ да останат позитивни за секој $j \in J$.

Според 1. и 2., за погодно избран $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$. Но во тој случај,

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

што значи дека $\mathbf{x}^*$ е внатрешна точка од отсечка чии крајни точки лежат во $X$, а ова противречи на претпоставката дека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка на $X$.

Според претходното следи дека $\mathbf{x}^*$ е базно решение за $X$ што, заедно со $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{o}$ (по дефиниција на $X$), значи дека $\mathbf{x}^*$ е воедно и базно одржливо решение.

Обратно, нека $\mathbf{x}^* \in X$ е базно изводливо решение. За поедноставување, нека претпоставиме дека согласно дефиниција 4.4 на $\mathbf{x}^*$ кореспондира матрицата

$$\mathbf{B} = B(A_1, \dots, A_m),$$

чии колони се линеарно независни. Јасно, тогаш имаме

$$\mathbf{x}^* = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots 0), \;\; x_i \geq 0, \;\; i = 1, \dots, m, \tag{4.52}$$

$$\mathbf{Ax}^* = \mathbf{Bx}^* = \mathbf{b}. \tag{4.53}$$

Нека претпоставиме дека $\mathbf{x}^*$ не е екстремална точка на $X$. Тогаш постојат вектори $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ и $\lambda \in (0,1)$ такви што $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}''$ и

$$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''. \tag{4.54}$$

Ако

$$\mathbf{x}' = (x_1', \dots, x_m', x_{m+1}', \dots, x_n'),$$

$$\mathbf{x}'' = (x_1'', \dots, x_m'', x_{m+1}'', \dots, x_n''),$$

тогаш, поради претходните претпоставки, според (4.54) добиваме дека

$$\sum_{k=m+1}^{n} \lambda x_k' + (1 - \lambda) x_k'' \; = 0. \tag{4.55}$$

Бидејќи $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$, важи $\mathbf{x}' \geq \mathbf{o}$ и $\mathbf{x}'' \geq \mathbf{o}$, а бидејќи $\lambda \in (0,1)$, ќе важи $\lambda > 0$ и $1 - \lambda > 0$. Ова значи дека секој од собироците на левата страна во изразот од (4.55) е ненегативен, па равенството во (4.55) ќе важи ако, и само ако,

$$x_k' = 0 = x_k'', \qquad k = m + 1, \dots, n. \tag{4.56}$$

Бидејќи $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ како елементи на $X$ го задоволуваат равенството $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, согласно дефиницијата на матрицата $\mathbf{B}$ и (4.56) добиваме дека

$$\mathbf{Bx}' = \mathbf{b} = \mathbf{Bx}''.$$

Последното значи дека равенката $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ има барем три различни решенија $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}''$, што е можно само ако $\mathbf{B}$ е сингуларна (неинверзибилна) матрица. Но тогаш нејзините колони нема да бидат линеарно независни.

Според претходното $\mathbf{x}^*$ е единствената точка за која важи (4.53), па таа мора да биде екстремална точка на $X$. ■

**Последица 4.2.** Допуштената област на ЛП-задача во каноничен облик има конечен број на екстремални точки.

### 4.6.3. Определување на екстремални точки (метод на базни изводливи решенија)

Во случај на ЛП-задача зададена во каноничен облик, дефинициите за „базно решение“ 4.1 и 4.4 се еквивалентни[16], што дозволува за ЛП-задачи во каноничен облик да се дефинира алтернативен метод за определување на базните решенија и базните изводливи решенија (екстремалните точки). Уште повеќе, како што покажува лема 4.1 наведено подолу, овој метод може соодветно да се искористи за да се определат базните решенија и екстремалните точки и на ЛП- задача што е дадена во стандарден облик. За да можеме подоцна полесно да ја опишеме постапката, нека претпоставиме дека ЛП-задача е дадена во следниот каноничен облик

[16] Доказот за еквивалентноста на дефинициите 4.1 и 4.4. може да се најде во (Bertsimas & Tsitsiklis, 1997) како доказ на теорема 2.4.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned}
\max\,(\min)\ \ & f = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \cdots + c_{n+m}x_{n+m} \\
\text{p.o.}\ \ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{1,n+m}x_{n+m} = b_1 \\
& a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{2,n+m}x_{n+m} = b_2 \\
& \qquad\qquad \cdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} + \cdots + a_{m,n+m}x_{n+m} = b_m \\
& x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \cdots, x_{n+m} \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

и притоа матрицата $\mathbf{A}_1 = [a_{ij}]_{m\times(n+m)}$ е со ранг $m$.

**Определување на екстремални точки за канонични облик**

**Чекор 1′.** Се избираат $m$ линеарно независни колони $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$ од матрицата $\mathbf{A}_1$ и се формира матрицата $\mathbf{B} = B\left(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\right)$.

**Чекор 2′.** Линеарната независност на колоните $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$, имплицира постоење на единствено решение $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ на системот $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$.

**Чекор 3′.** Ако $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}) \in \mathbb{R}^m$ е решението (базниот вектор) добиено во претходниот чекор, дефинираме вектор $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m, \overline{x}_{m+1}, \dots, \overline{x}_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ со

$$\overline{x}_j = \begin{cases} \tilde{x}_{i_k}, & \text{ако } j = i_k,\ \ k = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{во спротивно,} \end{cases}$$

што ќе биде базно решение. $\overline{\mathbf{x}}$ е базно изводливо решение (т.е екстремална точка) ако, и само ако, $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o}$ (т.е. ако $\overline{\mathbf{x}}$ нема негативни координати).

**Определување на екстремални точки за ЛП-задача зададена во стандарден облик**

Нека до каноничниот облик (4.57) е дојдено од ЛП-задача во стандарден облик (4.6) или (4.7). Ако нивните матрични облици се (4.9) и (4.10), тогаш за кореспондентните канонични облици имаме $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m]$ или $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}\ \ -\mathbf{I}_m]$, каде $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, додека пак допуштената област на (4.57) ќе биде множеството

$$Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m} | \mathbf{A}_1\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}. \tag{4.58}$$

**Лема 4.1.** Нека $\mathbb{R}^{n+m} \equiv \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

x) Ако $X$ е допуштената област на ЛП-задачата на максимизација дадена во стандарден облик (4.6), тогаш за множеството $Y$ од (4.58) важи

$$Y = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m} |\ \mathbf{Ax} + \mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}, \mathbf{z} \geq \mathbf{o}\}.$$

Точката $\mathbf{x}$ е екстремална точка за множеството $X$ ако, и само ако, $(\mathbf{x}, \mathbf{b} - \mathbf{Ax})$ е екстремална точка за $Y$.

xi) Ако $X$ е допуштената област на ЛП-задачата на минимизација дадена во стандарден облик (4.7), тогаш за множеството $Y$ од (4.58) важи

$$Y = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m} |\ \mathbf{Ax} - \mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}, \mathbf{z} \geq \mathbf{o}\}.$$

Точката $\mathbf{x}$ е екстремална точка за множеството $X$ ако, и само ако, $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax} - \mathbf{b})$ е екстремална точка за $Y$.

**Доказ.** Ќе го покажеме само тврдењето под i). Тврдењето под ii) се покажува на сличен начин.

Нека $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+m}$ е таков што $\mathbf{A}_1\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq 0$. Ако $\mathbf{y}$ се претстави во облик $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$, тогаш јасно е дека ќе важи $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ и $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$. Имајќи предвид дека за матрицата од коефициентите кај главните ограничувања во (4.57) важи $\mathbf{A}_1 = [\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m]$, непосредно следи дека за векторите $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ ќе важи $\mathbf{Ax} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. Што значи

$$Y \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m} |\ \mathbf{Ax} + \mathbf{z} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}, \mathbf{z} \geq \mathbf{o}\}.$$

За да се покаже обратната инклузија, нека $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ е таков што $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{z} \geq \mathbf{o}$ и $\mathbf{Ax} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. Јасно, во тој случај $\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$. Имајќи предвид дека $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, добиваме

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\mathbf{A}_1\mathbf{y} = [\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}_m\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b},$$

од каде следи дека $\mathbf{y} \in Y$.

За да се покаже вториот дел од тврдењето под i), нека $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}\}$ е допуштената област за ЛП-задачата на максимизација во стандарден облик (4.6). Врз основа на првиот дел од тврдењето лесно се покажува дека пресликувањето

$$\phi: X \to Y, \qquad \phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}),$$

е бијекција, и неговото инверзно пресликување е рестрикцијата на проекцијата

$$\pi: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n).$$

од $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ во $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\phi^{-1} = \pi|_Y: Y \to X, \qquad \phi^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{x} = \pi(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Нека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за множеството $X$. Ќе покажеме дека точката $\phi(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*)$ е екстремална точка за $Y$. Нека претпоставиме дека тоа не случај. Тогаш постојат точки $(\mathbf{x}', \mathbf{z}')$ и $(\mathbf{x}'', \mathbf{z}'')$ од $Y$, различни од $(\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*)$, и $\lambda \in (0,1)$ така што

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \lambda(\mathbf{x}', \mathbf{z}') + (1 - \lambda)(\mathbf{x}'', \mathbf{z}'').$$

Од ова равенство следи дека $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''$ што, согласно претпоставката дека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка и $\lambda \in (0,1)$, е можно само доколку

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^* = \mathbf{x}''.$$

Бидејќи $(\mathbf{x}', \mathbf{z}') \in Y$, ќе важи $\mathbf{z}' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}'$. Ова, заедно со погорното равенство, имплицира дека $\mathbf{z}' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Слично се добива дека важи и $\mathbf{z}'' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Според ова точките $(\mathbf{x}', \mathbf{z}')$ и $(\mathbf{x}'', \mathbf{z}'')$ не се различни, што противречи на направената претпоставка, па точката $\phi(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*)$ мора да биде екстремална точка за $Y$.

Обратно, нека $\mathbf{y}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ е екстремална точка за $Y$. Ќе покажеме дека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за $X$. Ако претпоставиме дека тоа не е случај, тогаш постојат точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ такви што $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$, и $\lambda \in (0,1)$, така што $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''$. Нека

$$\mathbf{z}' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}' \ \text{ и } \ \mathbf{z}'' = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}''.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^* &= (\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) \\
&= (\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'', \mathbf{b} - \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'')) \\
&= (\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'', \lambda\mathbf{b} + (1 - \lambda) - \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'')) \\
&= (\lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}'', \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}') + (1 - \lambda)(\mathbf{b} - \mathbf{A})\mathbf{x}'') \\
&= \lambda(\mathbf{x}', \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}') + (1 - \lambda)(\mathbf{x}'', \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}'') \\
&= \lambda(\mathbf{x}', \mathbf{z}') + (1 - \lambda)(\mathbf{x}'', \mathbf{z}'').
\end{aligned}$$

Точките $(\mathbf{x}', \mathbf{z}')$ и $(\mathbf{x}'', \mathbf{z}'')$ се различни (поради $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$). Бидејќи $\lambda \in (0,1)$, од последното следи дека $\mathbf{y}^*$ не е екстремална точка на $Y$, што противречи на направената претпоставка. Па мора $\mathbf{x}^* = \pi(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*) = \pi(\mathbf{y}^*)$ да биде екстремална точка за $X$. ■

Според претходното лема, екстремалните точки на ЛП-задача зададена во стандарден облик (4.6) или (4.7) може да се определат на следниот начин.

**Чекор 1″.** За почетната ЛП-задача се формира кореспондентниот каноничен облик (4.57).

**Чекор 2″.** Врз каноничниот облик се применуваат **Чекор 1′** – **Чекор 3′** од претходно.

**Чекор 3″.** Врз базично изводливо решение добиено во **Чекор 2″** се применува проекцијата $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n)$, и оваа точка ќе биде екстремална точка за допуштената област на ЛП-задачата првично зададена во стандарден облик.

При определување на базичните изводливи решенија за допуштената област на ЛП-задача зададена во каноничен облик (4.57), вкупниот број на можни избори на $m$ линеарно независни колони на матрицата $\mathbf{A}_1 = [a_{ij}]_{m \times (m+n)}$ не е поголем од

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{m!\cdot n!}.$$

При поголем број на променливи не може веднаш да се воочи кои од колоните на матрицата $\mathbf{A}_1$ се линеарно независни, па се формираат матриците за секој можен избор на $m$ колони. Врз вака формираните матрици што не се инверзибилни (што пак е еквивалентно со тоа дека нивните колони, односно соодветните колони на $\mathbf{A}_1$, не се линеарно независни) не се спроведуваат останатите чекори.

Постапката ќе ја илустрираме во следните два примери.

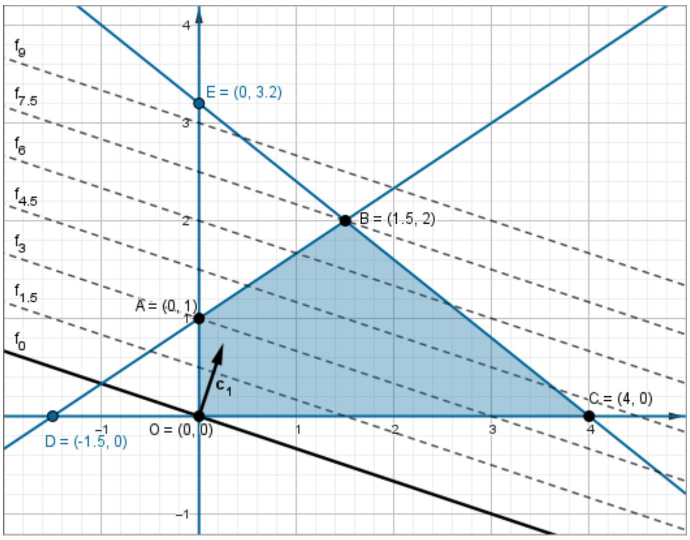
**Пример 4.22.** Ја разгледуваме следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_1 + 3x_2 \\ \text{p.o.}\ & 4x_1 + 5x_2 \le 16 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Нејзината допуштена област, заедно со праменот паралелни прави на правата

$$f_0 : x_1 + 3x_2 = 0,$$

(исцртани со испрекинати линии), и вектор $\mathbf{c}_1$ што е паралелен со векторот $\mathbf{c} = (1,3)$ и кој ја покажува насоката на нараснување на функцијата на целта, се прикажани на слика 4.12.




Слика 4.12. Графички приказ на допуштената област и функцијата на целта за ЛП-задачата од пример 4.22 (автори)

Каноничен облик на дадената задача е

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_1 + 3x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 \\ \text{p.o.}\ & 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 16 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

а на (4.47) кореспондира равенството

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Колоните од кои треба да се формираат базите на матрицата од коефициенти пред променливите во главните ограничување се

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

што претставуваат вектори во $\mathbb{R}^2$. Од нив треба да се формираат матрици со димензија $2 \times 2$. Вкупниот број на матрици со оваа димензија што, во општ случај не мора да бидат со линеарно независни колони, е $\binom{4}{2} = 6$. Тоа се матриците

$$\mathbf{B}_1 = B(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = B(A_1, A_3) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = B(A_1, A_4) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = B(A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_5 = B(A_2, A_4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_6 = B(A_3, A_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Секоја од овие матрици има линеарно независни колони и, како таква, е инверзибилна. Што значи дека врз секоја треба да се примени постапката за определување на базно решение за каноничниот облик на дадената ЛП-задача. Потоа врз така добиените решенија да се примени чекор 3$''$ за да се добијат базните решенија за обликот во кој ЛП-задачата е поставена.

За базните вектори добиваме

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = (x_1, x_2) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 33 \\ 44 \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = (x_1, x_3) = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 44 \end{bmatrix} = \left(-\frac{3}{2}, 22\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(3)} = (x_1, x_4) = \mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 16 \\ 44 \end{bmatrix} = (4, 11),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(4)} = (x_2, x_3) = \mathbf{B}_4^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 \\ -33 \end{bmatrix} = (1, 11),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(5)} = (x_2, x_4) = \mathbf{B}_5^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 16 \\ -33 \end{bmatrix} = \left(\frac{16}{5}, -\frac{33}{5}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(6)} = (x_3, x_4) = \mathbf{B}_6^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = (16, 3).$$

Од тука следи дека базните решенија кај каноничниот облик и кореспондентните базни решенија за стандардниот облик во кој е поставена ЛП-задачата што се добиваат со отфрлање на последните $n - m = 2$ координати на базните решенија кај каноничниот облик, споредени со точките од слика 4.12, се

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}^{(1)} &= (x_1, x_2, 0, 0) = \left(\tfrac{3}{2}, 2, 0, 0\right) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \left(\tfrac{3}{2}, 2\right) \equiv B,\\
\bar{\mathbf{x}}^{(2)} &= (x_1, 0, x_3, 0) = \left(-\tfrac{3}{2}, 0, 22, 0\right) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \left(-\tfrac{3}{2}, 0\right) \equiv D,\\
\bar{\mathbf{x}}^{(3)} &= (x_1, 0, 0, x_4) = (4, 0, 0, 11) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(3)} = (4, 0) \equiv C,\\
\bar{\mathbf{x}}^{(4)} &= (0, x_2, x_3, 0) = (0, 4, 11, 0) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(4)} = (0, 1) \equiv A,\\
\bar{\mathbf{x}}^{(5)} &= (0, x_2, 0, x_4) = \left(0, \tfrac{16}{5}, -\tfrac{33}{5}, 0\right) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(5)} = \left(0, \tfrac{16}{5}\right) \equiv E,\\
\bar{\mathbf{x}}^{(6)} &= (0, 0, x_3, x_4) = (0, 0, 16, 3) &&\Rightarrow \mathbf{x}^{(6)} = (0, 0) \equiv O.
\end{aligned}$$

Базните решенија $\bar{\mathbf{x}}^{(2)}$ и $\bar{\mathbf{x}}^{(5)}$ за каноничниот облик имаат барем една негативна координата, што значи дека тие не може да бидат базни изводливи решенија, односно екстремални точки за каноничниот облик. Последователно, базните решенија $\mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{x}^{(5)}$ не може да бидат екстремални точки за почетниот облик во кој е дадена ЛП-задачата.

**Пример 4.23.** Ја разгледуваме ЛП-задачата што се добива од онаа во пример 4.22 каде наместо ограничувањето $-2x_1 + 3x_2 \leq 3$ стои ограничувањето $x_2 \leq 2$.

Согласно направената модификација, допуштена област на ЛП-задачата, заедно со графичкото претставување на функцијата на целта како прамен паралелни прави паралелни на правата $f_0: 2x_1 + 3x_2 = 0$, исцртани со испрекинати линии и вектор $\mathbf{c}_1$ паралелен со векторот $\mathbf{c} = (1, 3)$ која ја покажува насоката на нараснување на функцијата на целта, се прикажани на слика 4.13.

За каноничниот облик имаме

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned} \max\ f &= x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \\ \text{p.o.} \quad & 4x_1 + 5x_2 + \quad x_3 \qquad\quad = 16 \\ & \qquad\quad\ x_2 + \qquad\ + x_4 \quad = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Колоните на матрицата од коефициенти пред променливите во главните ограничување сега ќе бидат

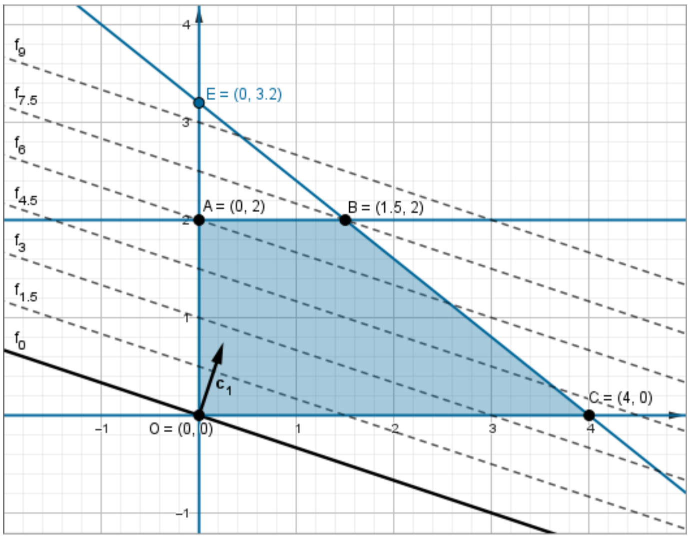
$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а матриците што може да се формираат со овие колона-вектори се

$$\mathbf{B}_1 = B(A_1, A_2) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = B(A_1, A_3) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_3 = B(A_1, A_4) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = B(A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_5 = B(A_2, A_4) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_6 = B(A_3, A_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицата $\mathbf{B}_2$ има линеарно зависни колони (важи $A_1 = 4A_3$), па врз оваа матрица не ги применуваме чекорите 2′, 3′ и 3′′.




Слика 4.13. Графички приказ на допуштената област и функцијата на целта за ЛП-задачата од пример 4.23 (автори)

За останатите матрици ги имаме следните пресметки.

Базни вектори

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = (x_1, x_2) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(3)} = (x_1, x_4) = \mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} = (4,2),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(4)} = (x_2, x_3) = \mathbf{B}_4^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} = (2,6),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(5)} = (x_2, x_4) = \mathbf{B}_5^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{16}{5}, -\frac{33}{5}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(6)} = (x_3, x_4) = \mathbf{B}_6^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \end{bmatrix} = (16,2).$$

Базни решенија за каноничниот облик и оние за почетната ЛП-задача

$$\bar{\mathbf{x}}^{(1)} = (x_1, x_2, 0,0) = \left(\frac{3}{2}, 2,0,0\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \equiv B,$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(3)} = (x_1, 0, 0, x_4) = (4,0,0,2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}^{(3)} = (4,0) \equiv C,$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\overline{\mathbf{x}}^{(4)} = (0, x_2, x_3, 0) = (0,2,6,0) \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(4)} = (0,2) \equiv A,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{(5)} = (0, x_2, 0, x_4) = \left(0, \frac{16}{5}, -\frac{33}{5}, 0\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(5)} = \left(0, \frac{16}{5}\right) \equiv E,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{(6)} = (0,0, x_3, x_4) = (0,0,16,2) \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(6)} = (0,0) \equiv O.$$

Базното решение $\overline{\mathbf{x}}^{(5)}$ има барем една негативна координата, што значи дека таа не може да биде базно изводливо решение (екстремална точка) за каноничниот облик, а ова пак значи дека $\mathbf{x}^{(5)}$ не може да биде екстремална точка за почетниот облик во кој е дадена ЛП-задачата.

**Пример 4.24.** Ја разгледуваме ЛП-задачата од пример 4.14. Каноничниот облик за оваа ЛП-задача е

$$\begin{array}{lrl}
\max f = & 2x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 & \\
\text{p.o.} & x_1 + 2x_2 + x_3 & = 8 \\
& 2x_1 - x_2 + x_4 & = 6 \\
& -x_1 + 2x_2 + x_5 & = 4 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. &
\end{array}$$

За главните ограничувања го имаме равенството

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} (= \mathbf{b}).$$

Колоните од кои треба да се формираат матрици од трет ред со чија помош ќе се определат базните вектори се

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вкупниот број на вакви матрици е $\binom{n+m}{m} = \binom{2+3}{3} = \binom{5}{3} = 10$, и тоа се следните

$$\mathbf{B}_1 = B(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = B(A_1, A_2, A_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = B(A_1, A_2, A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_4 = B(A_1, A_3, A_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = B(A_1, A_3, A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_6 = B(A_1, A_4, A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_7 = B(A_2, A_3, A_4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_8 = B(A_2, A_3, A_5) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_9 = B(A_2, A_4, A_5) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{10} = B(A_3, A_4, A_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Секоја од овие матрици е инверзибилна, па можеме да определиме 10 базни вектори $\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$, $i \in \{1,2,\dots,10\}$, со чија помош ќе се определат базните решенија $\overline{\mathbf{x}}^{(i)}$, $i \in \{1,2,\dots,10\}$ за каноничниот облик и базните решенија $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \{1,2,\dots,10\}$ за ЛП-задачата од пример 4.14.

1. $$\tilde{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ -20 \end{bmatrix},$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$\overline{\mathbf{x}}^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, 0{,}0) = \left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{20}{3}, 0{,}0\right)$, заради негативна координата, не е базно изводливо решение (односно, не е екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right)$, не е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $E$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка не е екстремална.

2. $\tilde{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$\overline{\mathbf{x}}^{(2)} = (x_1, x_2, 0, x_4, 0) = (2{,}3{,}0{,}5{,}0)$ е базно изводливо решение (екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(2)} = (2{,}3)$ е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $B$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка е екстремална.

3. $\tilde{\mathbf{x}}^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_3^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -20 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\overline{\mathbf{x}}^{(3)} = (x_1, x_2, 0{,}0, x_5) = (4{,}2{,}0{,}0{,}4)$ е базно изводливо решение (екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(3)} = (4{,}2)$ е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $A$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка е екстремална.

4. $\tilde{\mathbf{x}}^{(4)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_4^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}$,

$\overline{\mathbf{x}}^{(4)} = (x_1, 0,, x_3, x_4, 0) = (-4{,}0{,}12{,}14{,}0)$ не е базно изводливо решение (односно, не е екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(4)} = (-4{,}0)$ не е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $I$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка не е екстремална.

5. $\tilde{\mathbf{x}}^{(5)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_5^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$,

$\overline{\mathbf{x}}^{(5)} = (x_1, 0, x_3, 0, x_5) = (3{,}0{,}5{,}0{,}7)$ е базно изводливо решение (екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(5)} = (3{,}0)$ е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $G$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка е екстремална.

6. $\tilde{\mathbf{x}}^{(6)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_6^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ 12 \end{bmatrix}$,

$\overline{\mathbf{x}}^{(6)} = (x_1, 0{,}0, x_4, x_5) = (8{,}0{,}0{,}-10{,}12)$ не е базно изводливо решение (не е екстремална точка) кај каноничниот облик,

$\mathbf{x}^{(6)} = (8{,}0)$ не е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

Ова е точката $D$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка не е екстремална.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

7. $\tilde{\mathbf{x}}^{(7)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_7^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$,

   $\overline{\mathbf{x}}^{(7)} = (0, x_2, x_3, x_4, 0) = (0,2,4,8,0)$ е базно изводливо решение (екстремална точка) кај каноничниот облик,

   $\mathbf{x}^{(7)} = (0,2)$ е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

   Ова е точката $H$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка е екстремална.

8. $\tilde{\mathbf{x}}^{(8)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_8^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$,

   $\overline{\mathbf{x}}^{(8)} = (0, x_2, x_3, 0, x_5) = (0,-6,20,0,16)$ не е базно изводливо решение (не е екстремална точка) кај каноничниот облик,

   $\mathbf{x}^{(8)} = (0,-6)$ не е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

   Ова е точката $F$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка не е екстремална.

9. $\tilde{\mathbf{x}}^{(9)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_9^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$,

   $\overline{\mathbf{x}}^{(9)} = (0, x_2, 0, x_4, x_5) = (0,4,0,10,-4)$ не е базно изводливо решение (не е екстремална точка) кај каноничниот облик,

   $\mathbf{x}^{(9)} = (0,4)$ не е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

   Ова е точката $C$ на слика 4.5. Графичкиот приказ потврдува дека оваа точка не е екстремална.

10. $\tilde{\mathbf{x}}^{(10)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{10}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$,

    $\overline{\mathbf{x}}^{(10)} = (0,0, x_3, x_4, x_5) = (0,0,8,6,4)$ е базно изводливо решение (екстремална точка) кај каноничниот облик,

    $\mathbf{x}^{(10)} = (0,0)$ е екстремална точка за ЛП-задачата во стандарден облик.

    Ова е координатниот почеток $O$ за кој графичкиот приказ на слика 4.5 потврдува дека е екстремална точка.

Како што наспоменавме во пример 4.14, допуштената област за ЛП-задачата е многуаголникот $OGABH$. Секоја негова точка може на единствен начин да се претстави како конвексна линеарна комбинација од неговите екстремални точки (теорема 2.9), односно за допуштената област на почетната ЛП-задача важи

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(2)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(3)} + \lambda_3\, \mathbf{x}^{(5)} + \lambda_4 \mathbf{x}^{(7)} + \lambda_5 \mathbf{x}^{(10)}, \sum_{i=1}^{5} \lambda_i = 1 \right\}.$$

### 4.7. Екстремални точки и оптималност

Да се навратиме на кратко на слика 4.12 или слика 4.13 каде, заедно со допуштената област графички е прикажана и функцијата на целта преку неколку ниво прави. Вредностите на функцијата на целта нараснуваат во насока на векторот $\mathbf{c}_1$, па природно е да се очекува дека функцијата на целта $f = x_1 + 3x_2$ својата максимална вредност ќе ја достигне во темето $B\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, т.е. во екстремална точка на допуштената

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

област. Ова е едно од основните својства на задачите на линеарното програмирање на кое ќе се задржиме во ова поглавје.

### 4.7.1. Егзистенција на екстремални точки

Освен случајот кога главните ограничувања и условите за ненегативност „дефинираат" празно множество, постои уште еден случај каде дадена ЛП-задача може и да нема решение, ни онаа на максимизација, ни онаа на минимизација. Тоа е случајот кога допуштената област содржи права на која функцијата на целта не е константна. Попрецизно, имајќи ја предвид дефиницијата 2.13, ја имаме следната дефиниција.

**Дефиниција 4.6.** Непразното множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ се вели дека *содржи права* ако постои $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ така што $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in X$ за секој скалар $\lambda$.

**Теорема 4.5.** При $p > n$, $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ и непразно множество $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, p\}$, следните искази се еквивалентни.

(i) Множеството $X$ не содржи права.

(ii) Множеството $A$ содржи $n$ линеарно независни вектори.

**Доказ.** (i) $\Longrightarrow$ (ii). Нека множеството $X$ не содржи права и нека

$$V = \mathrm{span}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}.$$

Ако претпоставиме дека $A$ не содржи $n$ линеарно независни вектори, тогаш $V$ е вистински потпростор $\mathbb{R}^n$ и неговиот ортогонален комплемент[17] имаме.

$$V^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in V\} \neq \{\mathbf{o}\}.$$

Нека $\mathbf{d} \in V^\perp \setminus \{\mathbf{o}\}$, $\mathbf{x}_0 \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ се произволни. Тогаш за произволен $i \in \{1, \dots, p\}$ ќе важи

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0 \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0 \rangle \leq b_i.$$

Од тука следи дека правата $\{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{d} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ целосно се содржи во $X$, а ова противречи на направената претпоставка дека $X$ не содржи права.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Нека множеството $A$ содржи $n$ линеарно независни вектори. Не се губи од општоста ако се претпостави дека тоа се векторите $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогаш

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{span}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}. \tag{4.58}$$

Нека претпоставиме дека $X$ содржи права, т.е. дека постојат $\mathbf{x}_0 \in X$ и $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$, така што $\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{d}_0 \in X$ за секој $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогаш

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0 \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d}_0 \rangle = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{d}_0 \rangle \leq b_i, \text{ за секои } i \in \{1, \dots, n\} \text{ и } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.59}$$

Ова е можно само доколку

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{d}_0 \rangle = 0 \text{ за секој } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{4.60}$$

Имено, ако се претпостави дека $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_0 \rangle \neq 0$ за некој $j \in \{1, \dots, n\}$, тогаш допуштајќи

- $\lambda \to +\infty$, во случај кога $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_0 \rangle > 0$,
- $\lambda \to -\infty$, во случај кога $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_0 \rangle < 0$,

би се нарушила точноста на неравенството во (4.59).

Поради (4.58) постојат еднозначно определени $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ така што

$$\mathbf{d}_0 = \mu_1\mathbf{a}_1 + \dots + \mu_n\mathbf{a}_n.$$

Тогаш, поради (4.58), (4.60) и својство 2.4.i),

$$\|\mathbf{d}_0\|^2 = \langle \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_0 \rangle = \langle \mu_1\mathbf{a}_1 + \dots + \mu_n\mathbf{a}_n, \mathbf{d}_0 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d}_0 = \mathbf{o},$$

а ова противречи на $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$. Последователно, $X$ не содржи права. ■

[17] Бидејќи во $\mathbb{R}^n$ е дефиниран скаларен производ, $\mathbb{R}^n$ станува унитарен простор. Во (Карчицка, 1990, глава VI, теорема 4) е покажано дека во тој случај $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$. Ова значи дека секој вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ може на единствен начин да се претстави во облик $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ каде $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \in V^\perp$. Дополнително, ако $V$ е вистински векторски потпростор на $\mathbb{R}^n$, тогаш $V^\perp \neq \{\mathbf{o}\}$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

На специјален случај што е опфатен со претходната теорема веќе посочивме кон крајот на поглавје 4.3. Тоа е случајот кога за некоја од променливите не е претпоставен условот за ненегативност, т.е. кога таа може произволно да се менува во множеството реални броеви. На пример, ако тоа е променливата $x_k$, тогаш допуштената област ќе ја содржи правата $\{\lambda\mathbf{e}_k|\lambda \in \mathbb{R}\}$, т.е. целта $x_k$ −оска.

### 4.7.2. Основни теореми на линеарното програмирање

**Теорема 4.6.** Ако допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача е непразно множество, тогаш $X$ има барем една екстремална точка ако, и само ако, $X$ не содржи права.

**Доказ.** Врз основа на поглавјата 4.1, 4.2 и 4.3, допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача секогаш може да се опиши со $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n|\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ за соодветно дефинирана ненулта матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{p\times n}$ и вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Нека $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ е множеството од редиците на матрицата $\mathbf{A}$ и за $\mathbf{x}^* \in X$, нека $A(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{a}_j \in A|\langle\mathbf{a}_j, \mathbf{x}^*\rangle = b_j\}$.

Ако множеството $X$ има барем една екстремална точка $\mathbf{x}^*$, тогаш според теорема 4.2 множеството $A(\mathbf{x}^*) \subseteq A$ содржи $n$ линеарно независни вектори. Од тука, според теорема 4.5 следи дека $X$ не содржи права.

Обратно, нека $X$ не содржи права и нека $\mathbf{x}^* \in X$ е произволна точка. Можни се следните два случаи.

**Случај 1.** $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\} = \mathbb{R}^n$. Тогаш $A(\mathbf{x}^*)$ содржи $n$ линеарно независни вектори, па според теорема 4.2, $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка и доказот е завршен.

**Случај 2.** $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$ е вистински потпростор на $\mathbb{R}^n$. Тогаш ортогоналниот комплемент на $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$ содржи барем еден вектор $\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$. Јасно, во тој случај $\langle\mathbf{a}_j, \mathbf{d}\rangle = 0$, за секој $\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)$. Тогаш за произволен $\lambda \in \mathbb{R}$ ќе важи:

$$\langle\mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d}\rangle = \langle\mathbf{a}_j, \mathbf{x}^*\rangle + \lambda\langle\mathbf{a}_j, \mathbf{d}\rangle = \langle\mathbf{a}_j, \mathbf{x}^*\rangle = b_j, \qquad \forall\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*), \forall\lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.61}$$

што значи дека секое од ограничувањата $\langle\mathbf{a}_i, \mathbf{x}^*\rangle \leq b_i$ што е активно во $\mathbf{x}^*$ останува да биде активно вдолж правата $\{\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d}|\lambda \in \mathbb{R}\}$. Бидејќи $X$ не содржи права, како што $\lambda$ се менува во множеството $\mathbb{R}$, ќе мора да се стигни до некоја вредност за $\lambda$ после (или пред) која некое од ограничувањата $\langle\mathbf{a}_s, \mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d}\rangle \leq b_s$, $s \notin \{j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$, ќе биде нарушено. Ако е тоа ограничувањето $s_0$, за него ќе постои $\lambda^* \in \mathbb{R}$ така што

$$\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}\rangle = b_{s_0}.$$

Ќе покажеме дека $\mathbf{a}_{s_0} \notin \mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$. Бидејќи $s_0 \notin \{j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$, согласно дефиницијата на $A(\mathbf{x}^*)$, $\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{x}^*\rangle \neq b_{s_0}$. Тогаш

$$b_{s_0} = \langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}\rangle = \langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{x}^*\rangle + \lambda^*\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{d}\rangle \neq b_{s_0} + \lambda^*\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{d}\rangle, \tag{4.62}$$

од каде следи дека $\lambda^*\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{d}\rangle \neq 0$ и, последователно, $\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{d}\rangle \neq 0$. Бидејќи $\mathbf{d}$ припаѓа на ортогоналниот комплемент на $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$, заради $\langle\mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{d}\rangle \neq 0$, мора да важи

$$\mathbf{a}_{s_0} \notin \mathrm{span}\{\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}.$$

Според (4.61) и (4.62), важи $A(\mathbf{x}^*) \subset A(\mathbf{x}^*) \cup \{\mathbf{a}_{s_0}\} \subseteq A(\mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d})$ и, ако $k$ е бројот на максимално линеарни независни вектори во $A(\mathbf{x}^*)$, тогаш $A(\mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d})$ ќе содржи барем $k + 1$ линеарно независни вектори.

Повторувајќи ја претходната постапка, доколку е неопходно, за векторот $\mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}$ на местото од $\mathbf{x}^*$, по конечен број на повторувања ќе се стигне до вектор $\mathbf{y}^*$ за кој $A(\mathbf{y}^*)$ ќе содржи $n$ линеарно независни вектори и тој вектор, според теорема 4.2, ќе биде екстремална точка за $X$. ■

**Последица 4.3.** Ако допуштената област на дадена ЛП-задача е непразно множество и ако условот за ненегативност се однесува на секоја од променливите, тогаш допуштената област има барем една екстремална точка.

**Доказ.** Ако условот за ненегативност се однесува на секоја од променливите, тогаш допуштената област целосно се содржи во ненегативниот хипероктант. Бидејќи

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

тој не содржи права, ни допуштената област нема да содржи права, па во случај кога допуштената област е непразно множество, според теорема 4.6, таа ќе има барем една екстремална точка. ■

**Теорема 4.7.** Ако допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача има барем една екстремална точка и ЛП-задачата има оптимално решение, тогаш ЛП-задачата има оптимално решение што е екстремална точка за $X$.

**Доказ.** Нека $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ е допуштената област, $f = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ е функцијата на целта, $f_{opt}$ е оптималната вредност на $f$ и $X_{opt} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = f_{opt}\}$. Согласно претпоставката во теоремата, $X_{opt} \neq \emptyset$. Јасно, $X_{opt} \subseteq X$. Дополнително, $X_{opt}$ е исто така конвексно многустрано множество. При условите во теоремата, според теорема 4.6, $X$ не содржи права. Тогаш и $X_{opt}$ не содржи права, па поради $X_{opt} \neq \emptyset$, $X_{opt}$ има барем една екстремална точка.

Нека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за $X_{opt}$. Ќе покажеме дека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка и за $X$. Ако претпоставиме дека $\mathbf{x}^*$ не е екстремална точка за $X$, тогаш постојат точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ такви што $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ и $\lambda \in (0,1)$, така што $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$. Тогаш, согласно дефиницијата на $X_{opt}$, важи

$$f_{opt} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \rangle = \lambda\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle. \tag{4.63}$$

Ако се претпостави дека $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle \neq f_{opt}$, имајќи предвид дека $\lambda \in (0,1)$ и, последователно, $1-\lambda \in (0,1)$, т.е. и $\lambda > 0$, и $1-\lambda > 0$, согласно (4.36),

- во случај кога ЛП-задачата е задача на максимизација, би важело $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle < f_{opt}$ , $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \leq f_{opt}$ и
$$\begin{aligned} f_{opt} &= \lambda\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \\ &< \lambda f_{opt} + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \\ &\leq \lambda f_{opt} + (1-\lambda) f_{opt} \\ &= f_{opt}, \end{aligned}$$
- во случај кога ЛП-задачата е задача на минимизација, би важело $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle > f_{opt}$ , $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \geq f_{opt}$ и
$$\begin{aligned} f_{opt} &= \lambda\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \\ &> \lambda f_{opt} + (1-\lambda)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \\ &\geq \lambda f_{opt} + (1-\lambda) f_{opt} \\ &= f_{opt}. \end{aligned}$$

Што значи дека $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle = f_{opt}$. Слично се покажува дека мора да важи $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle = f_{opt}$. Тогаш $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X_{opt}$. Но ова ќе значи дека $\mathbf{x}^*$ не може да биде екстремална точка за $X_{opt}$, што пак противречи на направената претпоставка. Значи $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка за $X$ и притоа $f_{opt} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$. ■

**Теорема 4.8.** Ако допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача е непразно множество и има барем една екстремална точка тогаш, или постои екстремална точка во која функцијата на целта $f$ има оптимум, или

(i) $\sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = +\infty$ во случај на ЛП-задача на максимизација.

(ii) $\inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = -\infty$ во случај на ЛП-задача на минимизација.

**Доказ.** Ќе го дадеме доказот само на тврдењето под (i). Тврдењето под (ii) може да се докаже на истиот начин, или пак да се изведи како последица на (i) согласно равенството $\inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = -\sup\{-f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}$.

За да се покаже (i), доволно е да се покаже дека при условите во теоремата, доколку $\sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} < +\infty$, тогаш функцијата на целта $f$ достигнува максимум над $X$ во некоја екстремална точка на $X$. Доказот во основа е повторување на оној на теорема 4.6, со таа разлика што при конструкцијата на точката $\mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}$ ќе треба да внимаваме да не дојде до намалување на вредноста на функцијата на целта што таа ја има во $\mathbf{x}^*$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Нека $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ за соодветно дефинирана ненулта матрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{p\times n}$ и вектор $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p\}$ е множеството од редиците на матрицата $\mathbf{A}$ и за $\mathbf{x}^* \in X$, нека $A(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{a}_j \in A | \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* \rangle = b_j\}$. Дополнително, за точката $\mathbf{x}^* \in X$ ќе сметаме дека има *ранг* $k$, ако $k$ линеарно независни ограничувања (но не повеќе од $k$) се активни во $\mathbf{x}^*$.

Нека $f = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$.

Нека претпоставиме дека $\sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}$ е конечна вредност и нека $\mathbf{x}^* \in X$ има ранг $k < n$. Ќе покажеме дека постои $\mathbf{y}^* \in X$ со ранг поголем од $k$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{y}^* \rangle$.

Бидејќи $k < n$, ортогоналниот комплемент на $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$ содржи барем еден вектор $\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$. Земајќи $-\mathbf{d}$, доколку е неопходно, можеме да претпоставиме дека $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle \geq 0$. Ги разгледуваме следните два можни случаи.

**Случај 1:** $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle > 0$. Го разгледуваме множеството $\{\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d} | \lambda > 0\}$. Тоа е полуправата генерирана од векторот $\mathbf{d}$ со почеток во $\mathbf{x}^*$, но од која е исклучена почетната точка. Слично како во доказот на теорема 4.6, добиваме дека $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d} \rangle = b_j$, за секои $\mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)$ и $\lambda > 0$. Ако $\{\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d} | \lambda > 0\} \subseteq X$, тогаш би добиле дека $\sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = +\infty$, за што претпоставивме дека не е случај. Затоа мора да постојат $\lambda^* > 0$ и $s_0 \notin \{j | \mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$, така што $\langle \mathbf{a}_{s_0}, \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d} \rangle = b_{s_0}$. Нека $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}$. Слично како во доказот на теорема 4.6 се покажува дека $\mathbf{a}_{s_0} \notin \mathrm{span}\{\mathbf{a}_j | \mathbf{a}_j \in A(\mathbf{x}^*)\}$ и дека рангот на $\mathbf{y}^*$ не е помал од $k + 1$. Дополнително, бидејќи $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle > 0$ и $\lambda^* > 0$, имаме

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle + \lambda^* \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle > \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle.$$

**Случај 2:** $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = 0$. Ја разгледуваме права $\{\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{d} | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Бидејќи $X$ не содржи права, повторно стигнуваме до некој вектор $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d}$ со ранг најмалку $k + 1$. За овој вектор имаме $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* + \lambda^*\mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle + \lambda^* \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$.

И во двата случаи добивме вектор $\mathbf{y}^*$ чиј ранг е поголем од оној на $\mathbf{x}^*$ и за кој важи $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}^* \rangle \geq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$. Повторувајќи ја постапката онолку пати колку што е неопходно, ќе стигнеме до вектор $\mathbf{z}^*$ со ранг $n$ (како таков, $\mathbf{z}^*$ ќе биде екстремална точка), и за кој важи $\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}^* \rangle \geq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle$.

Нека $\mathbf{z}_1^*, \dots, \mathbf{z}_r^*$ се сите екстремални точки на $X$ и нека $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ е таков што

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_i^* \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_{i_0}^* \rangle, \text{ за секој } i \in \{1, \dots, r\}. \tag{4.64}$$

Веќе покажавме дека за секој $\mathbf{x} \in X$ постои $j \in \{1, \dots, r\}$ така што $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_j^* \rangle$. Тогаш, согласно (4.64), $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{c}, \mathbf{z}_{i_0}^* \rangle$ за секој $\mathbf{x} \in X$, што значи дека екстремалната точка $\mathbf{z}_{i_0}^*$ е оптимум (во овој случај максимум) за функцијата на целта. ■

**Напомена 4.2.** Како што веќе наспоменавме, низ литературата чест е случајот поимите „базно решение“ и „базно изводливо решение“ да се дефинираат исклучиво во контекст на ЛП-задача во каноничен облик. Како резултат на ваквиот пристап, како основи теореми се наведуваат или две одвоени теореми, или само една во која се вклучени две тврдења што се однесуваат на ЛП-задача на минимизација зададена во каноничен облик. Овие тврдења се подолу наведени како теорема 4.9 и тие може да се сметаат како последици (или специјални случаи) на теоремите 4.6 и 4.7. Ваквиот пристап подразбира и нејзин поинаков доказ што е во согласност со дефиницијата на поимите „базно решение“ и „базно изводливо решение“ дадени во оддел 4.6.2. Иако, од теориски аспект, ваквиот пристап е сосема во ред, при практична примена (особено доколку задачите треба да се решаваат без примена на соодветни софтверски алатки), од него произлегуваат не сосема практични техники на решавање на задачите. За илустрација, да го земеме пример 4.15. Допуштената област $X$ е определена со 5 главни ограничувања и услови за ненегативност за секоја од променливите. Ако екстремалните точки на $X$ се определуваат со директниот алгебарски метод, тогаш треба да се формираат разгледаат

$$\binom{5+2}{2} = \frac{(5+2)!}{2! \cdot 5!} = 21,$$

системи од две линеарни равенки, со две непознати. За овие системи проценката дали имаат единствено решение и, доколку тоа е случај, истото да се определи, е

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

исклучително лесна. Од друга страна, ако екстремалните точки на $X$ се определуваат со методот на базни одржливи решенија, по премин во каноничен облик ќе треба од колоните на матрица со димензија $5 \times 7$ да се креираат

$$\binom{5+2}{5} = \frac{(5+2)!}{5! \cdot 2!} = 21,$$

матрици од петти ред, за секоја од нив да се провери дали е инверзибилна и, доколку е, да се искористи за определување на базно одржливо решение на каноничниот облик. Потоа за секое најдено базно решение на каноничниот облик, преку изоставање на неговите пет последни координати[18], да се добијат екстремалните точки на $X$. Втората постапка би одзела значително подолго време за решавање во однос на директниот алгебарски метод.

**Теорема 4.9. (Основна теорема на линеарното програмирање за ЛП-задачи во каноничен облик)** Нека $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ е матрица таква што $\operatorname{rank}(A) = m < n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$. За ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \min\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{o}, \end{aligned}$$

важат следните тврдења:

(i) ако постои изводливо решение, тогаш постои и базно изводливо решение,

(ii) ако постои оптимално изводливо решение, тогаш постои и оптимално базно изводливо решение.

За директен доказ на теорема 4.9, согласно дефинициите на „базни решенија“ и „базни изводливи решенија“ дадени во оддел 4.6.2, упатуваме на (Luenberger & Ye, 2021, поглавје 2.4), (Minoux, 1986, оддел 2.15), (Карчицка и Коробар, 1974, оддел Б.I.5, теорема 1 и теорема 2) или (Карчицка, 2000, II.3, теорема 3).

Согласно теорема 4.9 (попрецизно, крајниот дел од нејзиниот доказ), за да се определи оптималната вредност на функцијата на целта, доволно е да се определат нејзините вредности во екстремалните точки и потоа да се определи:

- најголемата од нив, за ЛП-задача на максимизација,
- најмалата од нив, за ЛП-задача на минимизација.

**Пример 4.25. а)** Вредностите во екстремалните точки на допуштената област за функцијата на целта $f = 2x_1 + x_2 + 5x_3$ од пример 4.12 се:

$$f(A_1) = f(0,1,2) = 11, \qquad f(A_2) = f(1,0,2) = 12, \qquad f(A_4) = f(0,0,3) = 15,$$
$$f(A_8) = f(0,2,0) = 2, \qquad f(A_9) = f(2,0,0) = 4, \qquad f(A_{10}) = f(0,0,0) = 0.$$

Најголемата од овие вредности е $15$ и таа се достигнува во точката $A_4(0,0,3)$. Ова воедно е решение на ЛП-задачата од пример 4.12. Ако во задачата се бараше да се определи минималната вредност на функцијата на целта, тогаш одговорот ќе гласеше: минималната вредност на функцијата е $0$ и таа се достигнува во точката $A_{10}(0,0,0)$.

**б)** Вредностите во екстремалните точки на допуштената област за функцијата на целта $f = x_1 + 3x_2$ од пример 4.22 се:

$$f\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = f\left(\tfrac{3}{2}, 2\right) = \tfrac{15}{2} = 7{,}5\ , \qquad f\left(\mathbf{x}^{(3)}\right) = f(4{,}0) = 4,$$
$$f\left(\mathbf{x}^{(4)}\right) = f(4{,}0) = 4, \qquad f\left(\mathbf{x}^{(6)}\right) = f(0{,}0) = 0.$$

Најголемата од овие вредности е $7{,}5$, и таа се достигнува во точката $\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Ова воедно е решение на ЛП-задачата од пример 4.22, но и на пример 4.23.

[18] Дополнителен недостаток кај поголем дел од учебниците во кои поимите „базно решение“ и „базно изводливо решение“ се дефинираат само за каноничниот облик, е честото целосно отсуство на лема 4.1, или некој алтернативен резултат што формално и недвосмислено ќе потврди дека, кај ЛП-задачи зададени во *неканоничен* облик, со директниот алгебарски метод и со методот на базни изводливи решенија се определува исто множество од екстремални точки за допуштената област.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**в)** Врз основа на резултатите од пример 4.24, вредностите на функцијата на целта $f = 2x_1 + 3x_2$ од пример 4.14 во екстремалните точки на допуштената област се:

$$f\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = f(B) = f(2,3) = 13, \qquad f\left(\mathbf{x}^{(3)}\right) = f(A) = f(4,2) = 14,$$
$$f\left(\mathbf{x}^{(5)}\right) = f(G) = f(3,0) = 6, \qquad f\left(\mathbf{x}^{(7)}\right) = f(H) = f(0,2) = 6,$$
$$f\left(\mathbf{x}^{(10)}\right) = f(O) = f(0,0) = 0.$$

Најголемата од овие вредности е 14, и таа се достигнува во точката $\mathbf{x}^{(3)} = (4,2)$.

**Пример 4.26.** Функцијата на целта $f = 5x_1 + x_2$ за ЛП-задачата од пример 4.16 е прикажани на слика 4.14 со дел од правите што припаѓаат на праменот паралелни прави определен со $f = 5x_1 + x_2$ (правите $f_0$, $f_2$, $f_5$, $f_{10}$, $f_{20}$, $f_{30}$ и $f_{40}$). Допуштената област $X$ не е ограничена. Притоа, за секој $\lambda > 0$, правата $f_\lambda$: $5x_1 + x_2 = \lambda$ има непразен пресек со $X$. На пример, при $\lambda > 0$, пресеците на правата $f_\lambda$ со секој од зраците $R_\mathbf{u}$ и $R_\mathbf{v}$ од пример 4.16 (што целосно се содржат во $X$) е непразен и лежи во $X$. Ова значи дека

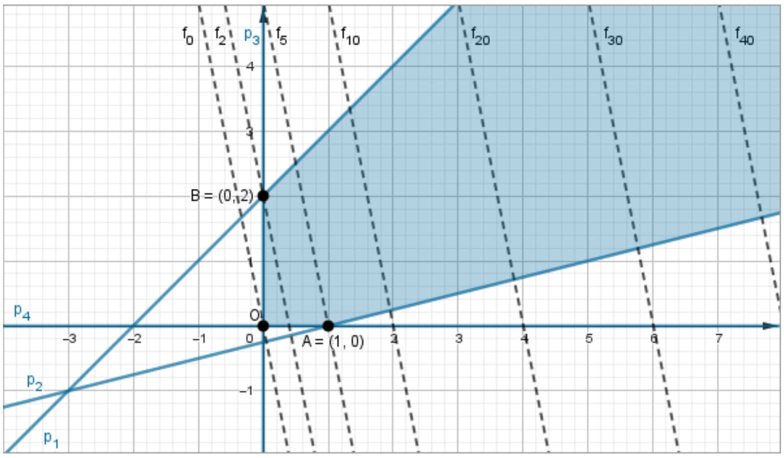
$$\sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = +\infty,$$

т.е. ЛП-задачата нема решение. Од друга страна

$$\inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\} = 0 = f(0,0),$$

па ако наместо ЛП-задача на максимизација, ја разгледувавме ЛП-задачата на минимизација на истата функција на целта, тогаш одговорот на задачата ќе беше дека функцијата $f = 5x_1 + x_2$ достигнува минимум во точката $O(0,0)$ и тој е еднаков на

$$f_{\min} = f(0,0) = 0.$$




Слика 4.14. Допуштената област и функцијата на целта од пример 4.7 (автори)

### 4.7.3. Неединствени решенија кај ЛП-задачи

За дадена ЛП-задача, доколку постојат, оптималните точки не мора да бидат единствени. Иако оптималните вредности се достигнуваат во екстремални точки чиј број е конечен, множеството од оптимални решенија може да биде бесконечно.

**Теорема 4.10.** Ако допуштената област $X$ на дадена ЛП-задача има две или повеќе екстремални точки што се оптимални решенија, тогаш таа има бесконечно многу оптимални решенија.

**Доказ.** Нека функцијата на целта е $f = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$, $f_{opt}$ е нејзината оптимална вредност и нека $E_{opt}$ е множеството од сите екстремални точки што се оптимални решенија на ЛП-задачата. Со оглед на тоа дека множеството од сите екстремални е конечно (последица 4.1 или последица 4.2), $E_{opt}$ е исто така конечно, па при условите во теоремата, $E_{opt} = \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*\}$ за некој $m \geq 2$ и $\mathbf{x}_i^* \neq \mathbf{x}_j^*$ при $i \neq j$. Нека

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1^* + \lambda_2 \mathbf{x}_2^* + \cdots + \lambda_m \mathbf{x}_m^*, \text{ каде } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m \text{ и } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Тогаш од линеарноста на функцијата на целта следи дека

$$f(\mathbf{x}^*)= f(\lambda_1\mathbf{x}_1^* + \lambda_2\mathbf{x}_2^* + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m^*) = \lambda_1 f(\mathbf{x}_1^*) + \lambda_2 f(\mathbf{x}_2^*) + \cdots + \lambda_m f(\mathbf{x}_m^*)$$
$$= \lambda_1 f_{opt} + \lambda_2 f_{opt} + \cdots + \lambda_m f_{opt} = f_{opt},$$

што значи дека и $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение. ■

**Пример 4.27.** Множеството

$$X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

е шестоаголникот $ABCDEF$ прикажан на слика 4.15. Неговите екстремални точки се неговите темиња и соодветните вредностите на функцијата $f = x_1 + x_2$ се:

$f(A) = f(0,2) = 2,\quad f(B) = f(2,0) = 2,\quad f(C) = f(5,0) = 5,$

$f(D) = f(5,3) = 8,\quad f(E) = f(3,5) = 8,\quad f(F) = f(0,5) = 5.$

Најмалата од овие вредности е 2, што значи дека минималната вредност на функцијата $f = x_1 + x_2$ на $X$ е $f_{\min} = 2$. Таа се постигнува во две различни екстремални точки, $A$ и $B$, но и во секоја точка од отсечката

$$\overline{AB} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \lambda\mathbf{r}_A + (1-\lambda)\mathbf{r}_B, \lambda \in [0,1]\}.$$

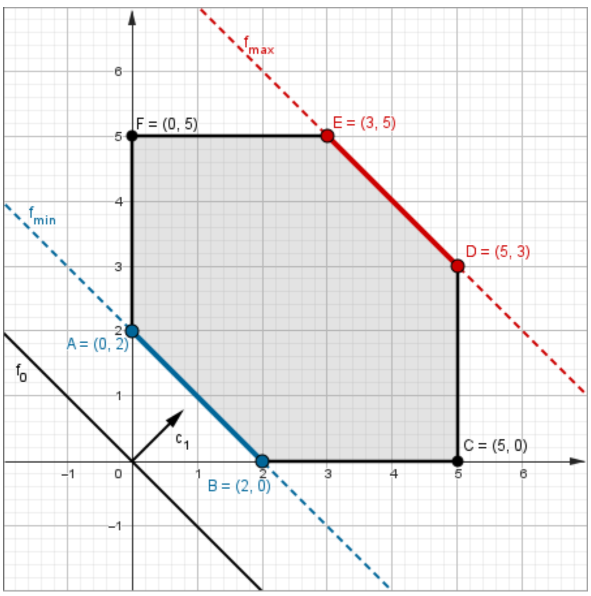
Најголемата од погорните вредности е 8, што значи дека максималната вредност на функцијата $f = x_1 + x_2$ на $X$ е $f_{\max} = 8$. И оваа вредност се постигнува во две различни екстремални точки, $D$ и $E$, но и во секоја точка од отсечката

$$\overline{DE} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \lambda\mathbf{r}_D + (1-\lambda)\mathbf{r}_E, \lambda \in [0,1]\}.$$

Според претходното, ЛП-задачите

$$\begin{aligned} \max\ f &= x_1 + x_2 \\ \text{p.o.}\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} \min\ f &= x_1 + x_2 \\ \text{p.o.}\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

имаат бесконечно оптимуми на допуштената област $X$.




Слика 4.15. Допуштената област и отсечките на кои функцијата на целта од пример 4.27 достигнува минимална вредност и максимална вредност (автори)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## 4.8. Дуалност во линеарно програмирање

Поаѓајќи од ЛП-задача на минимизација во стандарден облик, во оддел 3.7.2 го определивме кореспондентниот Лагранжов дуален проблем на максимизација. Но во линеарното програмирање поимот за дуалност може да се дефинира и да се разгледуваат неговите својства, сосема независно од останатите видови дуалности што се разгледуваат во математичкото програмирање.

### 4.8.1. Дуална задача на ЛП-задача во стандарден облик

Нека е дадена ЛП-задача на максимизација во стандарден облик

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{rl} \max & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.o.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0, \end{array} \tag{4.65}$$

или, во матричен облик,

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{array}{rl} \max & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \\ \text{p.o.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{o}. \end{array} \tag{4.66}$$

**Дефиниција 4.7.** ЛП-задача зададена со

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{rl} \min & g = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{p.o.} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ & \cdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \cdots, y_m \ge 0, \end{array} \tag{4.67}$$

или, во матричен облик,

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{array}{rl} \min & g = \mathbf{b}^T\mathbf{y} = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \\ \text{p.o.} & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} \ge \mathbf{o}, \end{array} \tag{4.68}$$

се нарекува *дуална задача* на ЛП-задачата во (4.65), односно (4.66). А задачите (4.65) и (4.66) се нарекуваат *примарни ЛП-задачи*.

Врз основа на претходната дефиниција може да се наведат следните правила за формирање на дуална ЛП-задача на (4.65).

1. Дуалната ЛП-задача на ЛП-задачата на максимизација (4.65) е ЛП-задача на минимизација.
2. На секое ограничување на примарната ЛП-задача одговара по една променлива $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ во дуалната ЛП-задача и секоја од нив го задоволува условот за ненегативност. Овие променливи се нарекуваат *дуални променливи*, а оние кај примарната ЛП-задача, се т.н. *примарни променливи.*
3. Секоја од дуалните променливи задоволува услов за ненегативност.
4. На секоја променлива $x_1, x_2, \dots, x_n$ од примарната ЛП-задача одговара по едно ограничување во дуалната ЛП-задача.
5. Наместо како линеарни неравенства со знак „≤", главните ограничување во дуалната ЛП-задача се зададени како линеарни неравенства со знак „≥".
6. Слободните коефициенти кај главните ограничувања во примарната ЛП-задача се коефициенти на функцијата на целта кај дуалната ЛП-задача.
7. Коефициенти на функцијата на целта во примарната ЛП-задача се слободните коефициенти кај главните ограничувања во дуалната ЛП-задача.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

8. Матрицата од коефициентите пред променливите во главните ограничувања кај дуалната ЛП-задача е еднаква на транспонираната матрица на матрицата од коефициентите пред променливите во главните ограничувања кај дуалната ЛП-задача.

**Пример 4.28.** Дуалната ЛП-задача за ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max\ & f = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

е следната ЛП-задача на минимизација

$$\begin{aligned} \min\ & g = 6y_1 + 2y_2 \\ \text{p.o.}\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ & 3y_1 - y_2 \geq 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

**Пример 4.29.** Ако кон главните ограничувања на ЛП-задачата на максимизација од претходниот пример додадеме уште едно ограничување како што следи

$$\begin{aligned} \max\ & f = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

дуалната ЛП-задача ќе има три променливи и две главни ограничувања. Тоа е следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \min\ & g = 6y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ \text{p.o.}\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ & 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 3 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Имајќи предвид дека ЛП-задача на минимизација може да се преформулира како ЛП-задача на максимизација, за дуалната ЛП-задача (4.67) (или (4.68)) може исто така да се дефинира дуална ЛП-задача. За овие три ЛП-задачи важи следното тврдење.

**Теорема 4.11.** Дуална ЛП-задача на дуалната ЛП-задача е примарната ЛП-задача.

**Доказ.** Нека е $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{D})$ се зададени со изразите (4.65) и (4.67). Имајќи предвид дека $(\mathcal{D})$ може да се преформулира како ЛП-задача на максимизација од облик

$$(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{D}) \qquad \begin{aligned} \max\ & h = -b_1y_1 - b_2y_2 - \cdots - b_my_m \\ \text{p.o.}\ & -a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \cdots - a_{m1}y_m \leq -c_1 \\ & -a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \cdots - a_{m2}y_m \leq -c_2 \\ & \cdots \\ & -a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \cdots - a_{mn}y_m \leq -c_n \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \cdots, y_m \geq 0, \end{aligned}$$

(каде $h = -g$), за дуалната ЛП-задача $(\mathcal{D}_1)$ на $(\mathcal{P}_1)$ согласно дефиниција 4.7 имаме

$$(\mathcal{D}_1) \qquad \begin{aligned} \min\ & f_1 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n \\ \text{p.o.}\ & -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \geq -b_1 \\ & -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \geq -b_2 \\ & \cdots \\ & -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \cdots - a_{mn}x_n \geq -b_m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Јасно е дека $f = -f_1$, па повторно преминувајќи од ЛП-задача на минимизација во ЛП-задача на максимизација, за последната ЛП-задача добиваме дека $(\mathcal{D}_1)$ е всушност примарниот проблем $(\mathcal{P})$ од (4.65). ■

Поради претходната теорема, за ЛП-задачите $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{D})$ уште се нарекуваат *пар взаемно дуални ЛП-задачи*. Ако за овие задачи се формираат помошните матрици од облик

$$\mathbf{M}_{\max} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & * \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_{\min} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & c_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & * \end{bmatrix}, \qquad (4.69)$$

каде $*$ е недефиниран елемент, тогаш ќе важи

$$\mathbf{M}_{\min}^T = \mathbf{M}_{\max}, \quad \mathbf{M}_{\min} = \mathbf{M}_{\max}^T. \qquad (4.70)$$

Во конкретни примери, овие две релации и матриците во (4.69) може да се искористат за полесно формирање (со помалку грешки) на дуалните ЛП-задачи за ЛП-задачи дадени во стандарден облик, како што тоа е илустрирано во следните два примери.

**Пример 4.30.** Ја разгледуваме следната ЛП-задача на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = 12x_2 - 2x_3 - x_4 \\ \text{p.o.}\ & 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 3 \\ & -8x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 9 \\ & -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Помошната матрица за оваа задача е

$$\mathbf{M}_{\max} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -4 & -2 & 3 \\ -8 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ -3 & 5 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 12 & -2 & -1 & * \end{bmatrix},$$

а помошната матрица за дуалната ЛП-задача ќе биде

$$\mathbf{M}_{\min} = \mathbf{M}_{\max}^T = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -3 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 12 \\ -4 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 7 & * \end{bmatrix}.$$

Со помош на последната матрица, ја добиваме следната дуална ЛП-задача на минимизација,

$$\begin{aligned} \min\ & g = 3y_1 + 9y_2 + 7y_3 \\ \text{p.o.}\ & 4y_1 - 8y_2 - 3y_3 \geq 0 \\ & 7y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 12 \\ & -4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

**Пример 4.31.** Ја разгледуваме следната ЛП-задача на минимизација

$$\begin{aligned} \min\ & f = -4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \text{p.o.}\ & -2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 \geq 8 \\ & x_1 + 4x_2 + 7x_3 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Помошната матрица за оваа задача е

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\mathbf{M}_{\min} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 & 9 \\ -4 & 2 & 6 & * \end{bmatrix},$$

а помошната матрица за дуалната ЛП-задача ќе биде

$$\mathbf{M}_{\max} = \mathbf{M}_{\min}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 9 & * \end{bmatrix}.$$

Со помош на последната матрица, ја добиваме следната дуална ЛП-задача на максимизација,

$$\begin{aligned} \max\ & g = 3y_1 + 8y_2 + 9y_3 \\ \text{p.o.}\ & -2y_1 + 3y_2 + y_3 \le -4 \\ & 2y_1 - 3y_2 + 4y_3 \le 2 \\ & -x_1 - 5x_2 + 7x_3 \le 6 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

### 4.8.2. Својства на пар заемно дуални ЛП-задачи во стандарден облик

При формулацијата на теоремите од овој оддел претпоставуваме дека:

- примарна е ЛП-задачата $(\mathcal{P})$ е зададена во стандардниот облик (4.65) или пак кореспондентниот матричен облик (4.66), и дека $X$ е нејзината допуштена област,
- дуална е ЛП-задачата $(\mathcal{D})$ зададена во облик (4.66) или пак (4.68), и дека $Y$ е нејзината допуштена област.

**Теорема 4.12. (слаба дуалност)**

Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ се допуштени решение за примарната и дуалната ЛП-задача, соодветно, тогаш

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \le b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = g(\mathbf{y})$$

**Доказ.** Имајќи ја предвид ненегативноста на дуалните променливи, ако главното ограничување $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \le b_j$ во примарната ЛП-задача се помножи со кореспондентната дуална променлива $y_j$, тогаш

$$(a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)y_j \le b_jy_j,\ \ j \in \{1, \dots, m\}.$$

Оттука, имајќи ги предвид ограничувањата во дуалната ЛП-задача, се добива дека за произволни $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in Y$ важи:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{y}) &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ &\ge \sum_{j=1}^{m} (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n)y_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_iy_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}x_iy_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j\right)x_i \ge c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

што требаше да се докаже. ■

**Напомена 4.3.** Во случај кога

$$-\infty < \sup_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) < +\infty \ \text{ и } -\infty < \inf_{\mathbf{y}\in Y} g(\mathbf{y}) < +\infty,$$

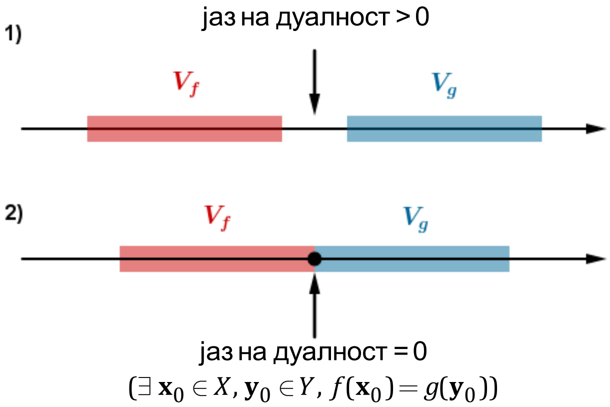
доказот на претходната теорема воедно покажува дека:

- ако $\mathbf{y}_0 \in Y$, тогаш $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{y}_0)$, за секој $\mathbf{x} \in X$, т.е. множеството вредности на функцијата на целта кај ЛП-задачата на максимизација е ограничено од горе со вредноста функцијата на целта на дуалната ЛП-задача на минимизација во било која точка од нејзината допуштена област,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- ако $\mathbf{x}_0 \in X$, тогаш $f(\mathbf{x}_0) \leq g(\mathbf{y})$, за секој $\mathbf{y} \in Y$, т.е. множеството вредности на функцијата на целта кај дуалната ЛП-задачата на минимизација од долу е ограничено со вредноста функцијата на целта на примарната ЛП-задача на максимизација во било која точка од нејзината допуштена област.

Оваа поврзаност графички е прикажана на слика 4.16. Кај задачи на математичко програмирање можна е појава и на позитивен јаз на дуалноста, и на јаз на дуалност еднаков на 0 (постоење на јака дуалност). Теорема 4.14, што ќе ја формулираме и докажеме подолу, посочува дека кај пар взаемно дуални ЛП-задачи јазот на дуалност ќе биде еднаков на 0 (вклучително и случаите кога функциите на целта кај некоја од ЛП-задачите во парот е неограничена на соодветната допуштена област).




Слика 4.16. Поврзаност меѓу множествата вредности на функциите на целта кај примарна задача на максимизација и нејзината дуална задача на минимизација (автори)

**Теорема 4.13.** Нека $\mathbf{x}_0$ е допуштеното решение на ЛП-задачата за максимизација со функција на целта $f$ и $\mathbf{y}_0$ е допуштеното решение на нејзината дуална ЛП-задача за минимизација со функција на цел $g$. Ако $f(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{y}_0)$, тогаш $\mathbf{x}_0$ е оптимално решение за примарната, а $\mathbf{y}_0$ е оптимално решение за дуалната ЛП-задача.

**Доказ.** При условот во теоремата, имајќи ја предвид теорема 4.14, следи дека:

a. за произволен $\mathbf{x} \in X$, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y}_0) = f(\mathbf{x}_0)$, што значи дека $\mathbf{x}_0$ е оптимално решение за примарната ЛП-задача на максимизација,
b. за произволен $\mathbf{y} \in Y$, $g(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{y}_0)$, што значи дека $\mathbf{y}_0$ е оптимално решение за дуалната ЛП-задача на минимизација. ■

**Пример 4.32.** За точките $\mathbf{y}^{(0)} = (1,0,1)$, $\mathbf{x}^{(1)} = (0,1,0,2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0,1,1,0)$ и дуалните ЛП-задачи од пример 4.30 важи $g(\mathbf{y}^{(0)}) = f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = 10$, што значи дека точката $\mathbf{y}_0$ е оптимално решение за дуалната ЛП-задача на минимизација, додека $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ се оптимални решенија на примарната задача на максимизација. Дополнително, согласно теорема 4.11, и секоја друга точка од отсечката што ги поврзува точките $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ ќе биде оптимално решение за примарната ЛП-задача.

Во општ случај, постоењето на оптимално решение на задача на математичко програмирање не мора да имплицира постоење на оптимално решение на дуалната задача, или обратно. Во контекст на Лагранжовата дуалност, едноставен пример за вториов случај е наведен во пример 3.6. Во линеарното програмирање ситуацијата е поинаква.

**Теорема 4.14. (јака дуалност)**

Ако едната од парот дуални ЛП-задачи има оптимално решение, тогаш и другата ЛП-задача има оптимално решение, и притоа оптималните вредности на соодветните функции на целта се еднакви.

**Доказ.** Доволно е да се покаже дека, во случај кога ЛП-задачата (4.65) има оптимално решение, тогаш и дуалната ЛП-задача (4.67) има оптимално решение.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за ЛП-задачата (4.65). Според теоремите 4.7 и 4.8 може да се претпостави дека $\mathbf{x}^*$ е екстремална точка на допуштената област $X$. Според лема 4.1, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ ќе биде екстремална точка на допуштената област на каноничниот облик на ЛП-задачата (4.65). Согласно оддел 4.6.2, постојат $m$ линеарно независни колони $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}$, $i_1 < \cdots < i_m$, на матрицата $[\mathbf{A} \;\; \mathbf{I}_m]$, така што, доколку

- $\overline{B} = \{i_1, \dots, i_m\}$ и $\overline{N} = \{1, \dots, m, m+1, \dots n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\} = \{j_1, \dots, j_{n-m}\}$,
- матриците $\mathbf{B}$ и $\mathbf{N}$ се определени со (4.48′) и (4.48″),
- за даден вектор $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n, \overline{x}_{n+1}, \dots, \overline{x}_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ се дефинирани векторите $\mathbf{x}_{\overline{B}} = \left(\overline{x}_{i_1}, \dots, \overline{x}_{i_m}\right)$ и $\mathbf{x}_{\overline{N}} = \left(\overline{x}_{j_1}, \dots, \overline{x}_{j_{n-m}}\right)$,
- $\overline{\mathbf{c}} = (c_1, \dots, c_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+m}$, каде $c_1, \dots, c_n$ се коефициентите на функцијата на целта во (4.65),
- $\tilde{\mathbf{x}} = \left(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\right) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$,

тогаш:

1. Допуштената област на каноничниот облик се состои од векторите $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ за кои важи $\overline{\mathbf{x}} \geq \mathbf{o}$ и притоа за кореспондентните вектори $\mathbf{x}_{\overline{B}}$ и $\mathbf{x}_{\overline{N}}$ важи
$$\mathbf{x}_{\overline{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}},$$
јасно е дека мора да важи и $\mathbf{x}_{\overline{B}} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{x}_{\overline{N}} \geq \mathbf{o}$.
2. Ако $\mathbf{c}_{\overline{B}}$ и $\mathbf{c}_{\overline{N}}$ се кореспондентните вектори за $\overline{\mathbf{c}}$, тогаш за вредностите на функцијата на целта $\overline{f}$ на каноничниот облик имаме
$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}} &= \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{x}_{\overline{B}} + \overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T\mathbf{x}_{\overline{N}} = \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_{\overline{N}}) + \overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T\mathbf{x}_{\overline{N}} \\ &= \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_{\overline{N}}.\end{aligned} \tag{4.71}$$
3. Бидејќи $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение за ЛП-задачата (4.65), $\overline{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*)$ ќе биде оптимално решение на каноничниот облик што кореспондира на (4.65), а за кореспондентните вектори $\mathbf{x}_{\overline{B}}^*$ и $\mathbf{x}_{\overline{N}}^*$ на $\overline{\mathbf{x}}^*$ ќе важи $\mathbf{x}_{\overline{B}}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ и $\mathbf{x}_{\overline{N}}^* = \mathbf{o}$. Имајќи ја предвид оптималноста на $\overline{\mathbf{x}}^*$, за секое допуштено решение $\overline{\mathbf{x}}$ на каноничниот облик ќе важи $\overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}} \leq \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^*$. Од тука и од (4.71) следи
$$\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_{\overline{N}} \leq \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_{\overline{N}}^* = \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \tag{4.72}$$
и, последователно,
$$\left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_{\overline{N}} \leq 0, \tag{4.73}$$
за кореспондентниот вектор $\mathbf{x}_{\overline{N}}$ на кое било допуштено решение на каноничниот облик. Бидејќи за овие вектори дополнително важи $\mathbf{x}_{\overline{N}} \geq \mathbf{o}$, ќе мора да важи
$$\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq \mathbf{o}. \tag{4.74}$$

Сега може да се дефинира оптимално решение на дуалната ЛП-задача (4.67). Нека
$$\mathbf{y}^* = \left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\right)^T. \tag{4.75}$$

Врз основа на равенството во (4.72), врската помеѓу изразите за функцијата на ЛП-задачата (4.65) и функцијата на целта кај кореспондентниот каноничен облик, како и изразот (4.71) според кој може да се пресметуваат нејзините вредности, имаме
$$\mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{b} = \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T - \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_{\overline{N}}^* = \overline{\mathbf{c}}^T\overline{\mathbf{x}}^* = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*,$$
па според теорема 4.13 доволно е да се покаже дека $\mathbf{y}^*$ е допуштено решение за дуалниот проблем (4.67).

Бидејќи $\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T = \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ и, според (4.74) важи $\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geq \overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T$, за блок матрицата $[\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}]$ имаме
$$(\mathbf{y}^*)^T[\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}] = \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{B} \;\; \mathbf{N}] = \left[\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} \quad \overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right] \geq \left[\overline{\mathbf{c}}_{\overline{B}}^T \;\; \overline{\mathbf{c}}_{\overline{N}}^T\right].$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Ако колоните на $[\mathbf{B}\ \ \mathbf{N}]$ се преуредат за да се добие матрицата $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m]$, тогаш од последниот израз ќе добие дека

$$[(\mathbf{y}^*)^T\mathbf{A}\ \ (\mathbf{y}^*)^T] = [(\mathbf{y}^*)^T\mathbf{A}\ \ (\mathbf{y}^*)^T\mathbf{I}_m] = (\mathbf{y}^*)^T[\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}_m] \geq [\mathbf{c}^T\ \ \mathbf{o}^T],$$

и, последователно, $(\mathbf{y}^*)^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$ и $(\mathbf{y}^*)^T \geq \mathbf{o}^T$, од каде пак следи дека $\mathbf{A}^T\mathbf{y}^* \geq \mathbf{c}$ и $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{o}$, т.е. $\mathbf{y}^*$ е допуштено решение за дуалниот проблем (4.67).

Делот од тврдењето што се однесува на еднаквоста на оптималните вредности е веќе покажан во теорема 4.13. ■

**Теорема 4.15.** Ако функцијата на целта на било која од ЛП-задачите од парот дуални ЛП-задачи е неограничена на соодветната допуштена област, тогаш другата ЛП-задача нема одржливо решение.

**Доказ.** Нека претпоставиме дека функцијата на целта во ЛП-задачата (4.65) не е ограничена на допуштената област. Тогаш

$$\sup\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in X\} = +\infty. \tag{4.76}$$

Ако претпоставиме дека дуалната ЛП-задача (4.67) има одржливо решение $\mathbf{y}_0$, според теорема 4.12, $g(\mathbf{y}_0)$ го ограничува од горе множеството $\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in X\}$, што противречи на (4.76). Значи за допуштената област на ЛП-задачата (4.67) важи $Y = \emptyset$.

Слично се покажува дека во случај кога функцијата на целта во ЛП-задачата (4.67) е неограничена, тогаш $X = \emptyset$. ■

**Напомена 4.4.** Случајот кога $X = \emptyset = Y$ исто така е можен. Ова важи за парот дуални ЛП-задачи од пример 4.31. Имено, ако кај ЛП-задачата на минимизација првото од главните неравенства се помножи со 3, а второто со 2 и потоа ги собереме новите неравенства, ќе се добие неравенството $-13x_3 \geq 25$. Но тоа не може да биде исполнето истовремено со условот за ненегативност $x_3 \geq 0$, што значи дека допуштената област за оваа ЛП-задача е празно множество. Ако кај ЛП-задачата на максимизација се соберат првите две од главните ограничувања, ќе се добие $5y_3 \leq -2$. Ова неравенство не може да биде исполнето истовремено со условот за ненегативност $y_3 \geq 0$, што значи дека допуштената област и на ЛП-задача на максимизација е празно множество.

### 4.8.3. Формирање на дуална задача на ЛП-задача во општ случај; Општа теорема за дуалност

Кај ЛП-задача што не е дадена во стандарден облик, дел од правилата 1. – 8. за формирање на дуална ЛП-задача што беа наведени во 4.8.1 треба да се модифицираат. Кај општ облик на ЛП-задача, главните ограничувања може да бидат линеарни неравенства зададени со која било од релациите „≤“, „≥“ или „=“, а условите за ненегативност не мора да важат за секоја од примарните променливи.

**Теорема 4.16.** Ако за примарната променлива $x_j$ нема услов за ненегативност, на неа во дуалната ЛП-задача одговара линеарно ограничување со знак за равенство.

**Доказ.** Доволно е да го покажеме тврдењето кога е дадена ЛП-задача на максимизација каде главните ограничувања се сите во облика на линеарни неравенства зададени со релацијата „≤“ и каде само за примарната променлива $x_j$ не важи условот за ненегативност. Слично како при премин од општ во стандарден облик, променлива $x_j$ ја заменуваме со изразот $x_j = x_j' - x_j''$, каде $x_j'$ и $x_j''$ се нови променливи за кои важи $x_j', x_j'' \geq 0$. Заменувајќи во (4.65) добиваме

$$\begin{aligned}
\max\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j' - c_jx_j'' + \cdots + c_nx_n \\
\text{p.o.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j' - a_{1j}x_j'' + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j' - a_{2j}x_j'' + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j' - a_{mj}x_j'' + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_j', x_j'', \dots, x_n \geq 0.
\end{aligned}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Последната ЛП-задача на максимизација е во стандарден облик и условите за ненегативност важат за секоја од примарните променливи. При формирање на нејзината дуална ЛП-задача на минимизација, на променливите $x_j', x_j'' \geq 0$ ќе одговараат следните две ограничувања

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j,$$
$$-a_{1j}y_1 - a_{2j}y_2 - \cdots - a_{mj}y_m \geq -c_j.$$

Множејќи го второто неравенство со $-1$ се добива дека системот од главните ограничувања кај дуалната ЛП-задача го содржи потсистемот

$$\begin{cases} a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j \\ a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j \end{cases},$$

што е еквивалентен со равенството

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j,$$

што претставува ограничувањата што одговара на променливата $x_j$. ■

**Теорема 4.17.** На главно ограничување што во примарната ЛП-задача е во облик на равенство „=“, во дуалната ЛП-задача одговара дуална променлива без условот за ненегативност.

**Доказ.** Доволно е да го покажеме тврдењето кога е дадена ЛП-задача на максимизација во која само $i$ –тото главно ограничување е зададено во облик на равенство,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

а останатите главните ограничувања се сите во облик на линеарни неравенства зададени со релацијата „≤“. Тогаш $i$ –тото главно ограничување може да се замени со неравенствата од системот

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \end{cases}.$$

Дуалната ЛП-задача за ЛП-задачата добиена по замената на $i$ –тото ограничување со неравенствата од последниот систем ќе биде од облик

$$\begin{aligned} \min\ & g = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_iy_i' - b_iy_i'' + \cdots + b_my_m \\ \text{p.o.}\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{i1}y_i' - a_{i1}y_i'' + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{i2}y_i' - a_{i2}y_i'' + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ & \cdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{ij}y_i' - a_{in}y_i'' + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ & y_1,\ y_2, \ldots, y_i', y_i'', \ldots, y_m \geq 0. \end{aligned}$$

Ставајќи

$$y_i' - y_i'' = y_i,$$

добиваме

$$b_iy_i' - b_iy_i'' = b_iy_i, \quad a_{ik}y_i' - a_{ik}y_i'' = a_{ik}y_i, k = 1, \ldots, n.$$

Иако за променливите $y_i'$ и $y_i''$ важат условите за ненегативност, нивната разлика $y_i = y_i' - y_i''$ може да биде било која вредност од множеството реални броеви, па за променливата $y_i$ не се вклучува услов за ненегативност. ■

Според претходните теореми дуалната ЛП-задача на каноничниот облик

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{aligned} \max\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{o} \end{aligned},$$

е

$$(\mathcal{D}_2) \quad \begin{aligned} \min\ & g = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \end{aligned},$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

без услов за ненегативност на дуалните променливи, а за ЛП-задача во каноничен облик без услов за ненегативност на примарните променливи

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{aligned} \max\ & f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned},$$

дуалната ЛП-задача ќе биде

$$(\mathcal{D}_3)\quad \begin{aligned} \min\ & g = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{p.o.}\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T \end{aligned}.$$

исто така без условот за ненегативност на дуалните променливи.

Правилата за формирање на дуална ЛП-задача на ЛП-задача зададена во општ облик прегледно се прикажани во следната табела.

Табела 4.3. Врски меѓу примарна и дуална ЛП-задача (автори)

| | Примарна ЛП-задача | Дуална ЛП-задача |
|---|---|---|
| Вид на оптимизација: | максимизација | минимизација |
| | минимизација | максимизација |
| Вектор од коефициенти на функцијата на целта: | $\mathbf{c}$ | $\mathbf{b}$ |
| Вектор од слободни коефициенти кај главни ограничувања: | $\mathbf{b}$ | $\mathbf{c}$ |
| Матрица од коефициенти пред променливите на кај главни ограничувања: | $\mathbf{A}$ | $\mathbf{A}^T$ |
| Ограничувања: | тип на $j$ –то главно ограничување: | $j$ –та променлива на одлучување: |
| | $\leq$<br>$=$<br>$\geq$ | $\geq 0$<br>без ограничување<br>$\leq 0$ |
| | $i$ –та променлива на одлучување: | тип на $i$ –то главно ограничување: |
| | $\geq 0$<br>$\leq 0$<br>без ограничување | $\leq$<br>$\geq$<br>$=$ |

**Напомена 4.5.** Изборот на формулацијата на теоремата за слаба дуалност беше направан врз основа на претходно направената претпоставка дека примарна е ЛП-задача на максимизација и дека таа е зададена во стандарден облик. Оваа теорема, или поточно, неравенството $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y})$ е точно за било кој пар заемно дуални ЛП-задачи каде:

- $f$ е функција на целта и $\mathbf{x}$ е произволно допуштено решение на ЛП-задачата на максимизација од парот дуални ЛП-задачи,
- $g$ функција на целта и $\mathbf{y}$ е произволно допуштено решение на ЛП-задачата на минимизација.

За да се докаже ова својство, треба да се разгледаат повеќе случаи на парови дуални ЛП-задачи. На пример, кај парот дуални ЛП-задачи $(\mathcal{P}_2)$ и $(\mathcal{D}_2)$, ова својство може да се докаже врз основа на тоа што ограничувањето $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T$ може да се запише и во облик $\mathbf{y}^T\mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$, функцијата на целта во облик $\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{b}$, па од условот $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ кај примарниот проблем ќе следи

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq (\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

За паротт дуални ЛП-задачи $(\mathcal{P}_3)$ и $(\mathcal{D}_3)$ во претходниот израз секаде ќе стои равенство. Во овој специјален случај, доколку допуштените области на примарниот и дуалниот проблем се непразни, тогаш секоја точка од допуштената област, и на примарниот, и на дуалниот проблем, е оптимално решение за соодветниот проблем. На пример,

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_3 \\ \text{p.o.}\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_3 = 4, \end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned} \min\ & g = 4y_2 \\ \text{p.o.}\ & y_1 = 0 \\ & y_2 = 4, \end{aligned}$$

формално се пар взаемно дуални ЛП-задачи. Допуштената област на ЛП-задачата на максимизација е правата $L = \{(\alpha, \alpha, 4) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ (да, допуштената област содржи права, и нема екстремални точки), на која функцијата на целта има *константна* вредност. Секоја точка од $L$ е оптимално решение, а оптималната вредност на $f$ е $4$. Допуштената област на ЛП-задачата на минимизација се редуцира на само една точка, точката $(0,4)$, што е воедно и екстремална точка. Минималната вредност на функцијата $g$ во оваа точка е $4$.

Алтернативен пристап при докажување на слабата и јаката дуалност за специфичен пар взаемно дуални ЛП-задачи што не се зададени во стандарден облик е нивно претходно доведување во ваков облик како што следи:

- замена на секое од главните ограничувањата што се зададени во облик на равенства со соодветни две неравенства како што е наведено во оддел 4.3.1,
- претставување на секоја променлива без ограничување како разлика на две нови променливи за кои важат услови за ненегативност како што е наведено во поглавје 4.1,

и потоа да се применат теорема 4.12 и теорема 4.14.

## 4.9. Дополнителни напомени и препораки за продлабочување на знаењата

При изготвувањето на содржините од оваа глава, а со цел што понепречено да го формулираме симплекс методот за решавање на ЛП-задачи во форма во кој е наведен во следната глава, воглавно се раководевме од содржините поврзани со линеарното програмирање изнесени во (Bertsimas & Tsitsiklis, 1997), (Bradley et al., 1977), (Brickman, 2012), (Du et al., 2022), (Giorgi et al., 2023), (Hartley, 1985), (Hu & Kahng, 2016), (Khan & Bari, 2019), (Kreyszig et al., 2011), (Lipschutz, 1966), (Luenberger & Ye, 2021), (Matousek & Gärtner, 2006), (Murtagh, 1981), (Nash & Sofer, 1996), (Sazdanović, 1988), (Sierksma & Zwols, 2015), (Sinha, 2006) и (Veatch, 2021).

Веќе наспоменавме дека при дефинирањето на поимите „базно решение“ и “базно изводливо решение“ може да се забележи различен пристап низ литературата. Дополнително, чест случај е изнесување на теориските резултати во контекст на ЛП-задача зададена во каноничен облик, или пак нагласокот да биде ставен на ЛП-задача на минимизација, особено кога се дефинира дуалноста. Ако се исклучат недостатоците на кои веќе посочивме во напомена 4.2, согласно личните преференции и математички предзнаења, за дел од читателите ваквиот пристап може да биде и поприфатлив за совладување на теоријата и методите на линеарното програмирање. Во оваа насока наша препорака се следните дополнителни наслови наведени во литературата: (Карчицка, 2000), (Карчицка и Коробар, 1974), (Bazaraa et al., 2010) (Minoux, 1986) и (Vujčić et al. 1980).

Линеарното програмирање е неизоставен дел од литературата што се однесува на т.н. операциони истражувања каде може да се најдат дополнителни информации за апликативниот аспект на линеарното програмирање. Од насловите поврзани со операциони истражувања наведени во Литература ги препорачуваме следните: (Barković, 2001), (Bogdanović & Jovanović, 2019), (Winston, 2004), (Крстев и др., 2018b), (Таха, 2010) или поново издание на англиски (Taha, 2017).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 5. МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧИ ОД ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Во линеарното програмирање се развиени неколку методи за решавање на ЛП-задачи. За целите на предметот ќе разгледаме само дел од нив. Во оваа глава ќе се задржиме на графичкиот метод за решавање на ЛП-задачи со две променливи, графичкиот метод за решавање на ЛП-задачи со само две главни ограничување и една од основните верзии на симплекс методот, а во следната глава ќе разгледаме методи за решавање на т.н. транспортни задачи.

## 5.1. Графичко решавање на ЛП-задача со две променливи

Графичкиот метод за решавање на ЛП-задачи со две променливи се применува и за задачи на минимизација, и за задачи на максимизација. Тој се состои од:

- графичко претставување на допуштената област (како во оддел 4.5.3),
- во ист координатен систем, заедно со допуштената област, графички приказ на функцијата на целта (како во поглавје 4.4),
- идентификација на екстремалните точки на допуштената област,
- идентификација на екстремалните точки во кои функцијата достигнува минимум или максимум, и определување на оптималната вредност.

За подобра прецизност, се препорачува екстремалните точки да бидат определени и алгебарски (препорачливо тоа да се направи со директниот алгебарски метод наведен во оддел 4.5.2). Ова се однесува и на определувањето на оптималните вредности на функцијата на целта.

**Пример 5.1.** Да ја разгледаме следната задача.

За задоволување на зголемени дневни потреби од витамини и минерали, на пациент му е препорачан внес на суплементи што содржат специфични витамински и минерални комплекси. Дневниот препорачан внес е барем 12 единици од витаминскиот и барем 8 единици од минералниот комплекс. Овие комплекси се достапни како ампули што содржат 3 единици од витаминискиот и 1 единица од минералниот комплекс, со цена од 50 ден. по ампула, или како таблети што содржат по 2 единици, и од витаминскиот, и од минералниот комплекс, со цена од 40 ден. по таблета. Колку ампули и таблети треба пациентот да консумира дневно согласно препорачаниот внес, а притоа да потроши најмала можна сума пари?

За да се даде одговор на последното прашање, нека $x$ е бројот на ампули, а $y$ е бројот на таблети што треба пациентот дневно да ги консумира за да го запази препорачаниот внес. Согласно информациите во задачата, имаме:

- вкупниот дневен трошок ќе биде $g = 50x + 40y$ денари, и тој треба да биде најмал можен износ,
- вкупниот број на единици од витаминскиот комплекс ќе биде $3x + 2y$, и тој не треба да биде помал од $12$, т.е. треба да важи $3x + 2y \geq 12$,
- вкупниот број на единици од минералниот комплекс ќе биде $x + 2y$, и тој не треба да биде помал од $12$, т.е. треба да важи $x + 2y \geq 8$,
- јасно, $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Задачата понатаму се сведува на решавање на следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \min\ & g = 50x + 40y \\ \text{р.о. } & 3x + 2y \geq 12 \\ & x + 2y \geq 8 \\ & x \geq 0, y \geq 0, \end{aligned}$$

На слика 5.1 се прикажани следните елементи:

- граничните прави $p_1: 3x + 2y = 12$, $p_2: x + 2y = 8$, $p_3: x = 0$ и $p_4: y = 0$ што кореспондираат на главните ограничувања и условите за ненегативност,
- базните решенија, точките $C(4,0)$, $D(0,4)$ и $F(0,0)$, што не се изводливи решенија и базните изводливи решенија (екстремалните точки) $A(2,3)$, $B(0,6)$ и $E(8,0)$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

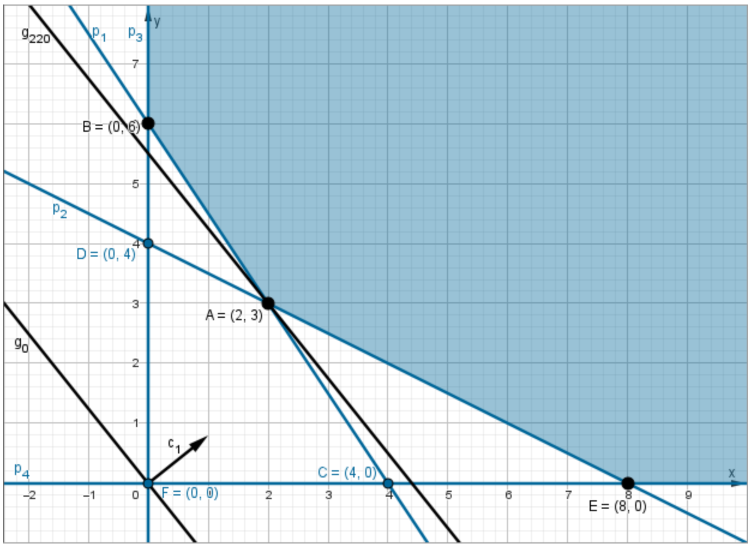
- допуштената област (обоената област од рамнината) и таа не е ограничена,
- правата $g_0: 50x + 40y = 0$ и векторот $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{50}(50{,}40) = \left(1, \frac{4}{5}\right)$ што ја определува насоката на нараснување на функцијата на целта.

Врз основа на овие елементи од графикот на слика 5.1 може да се воочи дека, доколку се оди во насока на векторот $\mathbf{c}_1$, *првата* права од праменот прави определен со $g = 50x + 40y$ што има заедничка точка со допуштената област е онаа што минува низ точката $A(2{,}3)$. Тоа е правата со равенка $g_{220}: 50x + 40y = 220$. Ова може да се потврди и алгебарски. Вредностите на функцијата на целта во екстремалните точки се:

$$g(A) = 220, \qquad g(B) = 240, \qquad g(E) = 400,$$

што значи дека $g = 50x + 40y$ достигнува минимум во точката $A$. Според тоа одговорот на поставената задача ќе биде:

За пациентот да го запази препорачаниот дневен внес од барем 12 единици од витаминскиот и барем 8 единици од минералниот комплекс, со минимален трошок, потребно е дневно да консумира 2 ампули и 3 таблети дневно, со минимален трошок од 220 денари.




Слика 5.1. Елементи за графичко решавање на задачата од пример 5.1 (автори)

**Пример 5.2.** Да ја разгледаме следната задача.

Фирма располага со инвестициски фонд од 100000€ што планира да ги искористи за купување на акции, со повратен годишен приход од 8%, и обврзници со повратен годишен приход од 5%. За намалување на ризик од загуба, барем 20000€ планира да инвестира во обврзници, а инвестицијата во акции да не биде тројно поголема од онаа во обврзници. Согласно претходното, колку треба фирмата да инвестира во акции, а колку во обврзници, за да оствари максимален профит, а притоа да не ги надмине средствата од инвестицискиот фонд?

За да се даде одговор на последното прашање, нека $x$ е сумата што фирмата треба ја вложи во акции, а $y$ е сумата што траба да ја вложи во обврзници. При условите во задачата:

- годишната добивка, изразена во евра, ќе биде $f = 0{,}08x + 0{,}05y$,
- вкупната вложената сума не смее да надмине 100000€, што значи дека $x$ и $y$ треба да го задоволуваат ограничувањето $x + y \leq 100000$,
- инвестицијата во обврзници не смее да биде помала од 20000€, што значи дека треба да важи $y \geq 20000$,
- условот „инвестицијата во акции да не биде тројно поголема од онаа во обврзници“ значи дека $x$ и $y$ треба да го задоволуваат условот $x \leq 3y$,
- јасно, $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Задачата понатаму се сведува на решавање на следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ f &= 0{,}08x + 0{,}05y \\ \text{p.o.}\ \ x + y &\leq 100000 \\ y &\geq 20000 \\ x &\leq 3y \\ x &\geq 0, y \geq 0, \end{aligned}$$

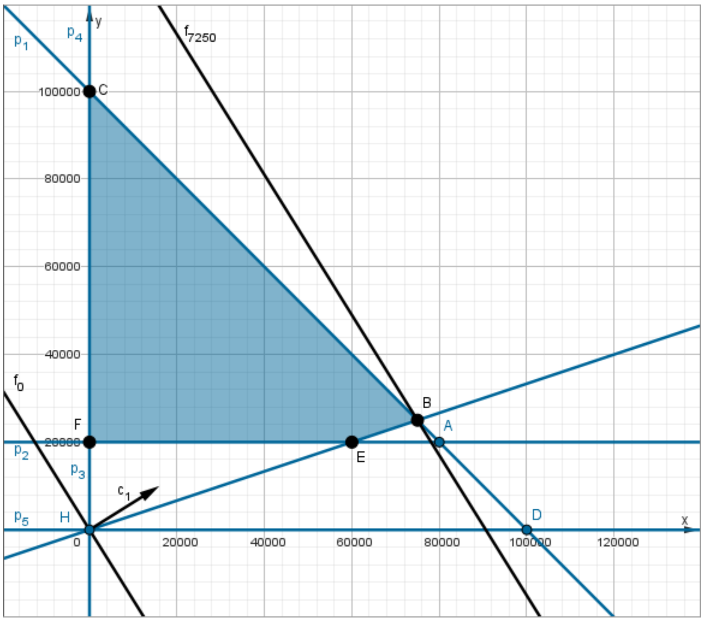
На слика 5.2 се прикажани следните елементи:

- граничните прави $p_1: x + y = 100000$, $p_2: y = 20000$, $p_3: x = 3y$, $p_4: x = 0$ и $p_5: y = 0$ што кореспондираат на главните ограничувања и условите за ненегативност,
- базните решенија, точките $A(80000{,}20000)$, $D(100000{,}0)$ и $H(0{,}0)$, што не се изводливи решенија[19], и базните изводливи решенија (екстремалните точки) $B(75000{,}25000)$, $C(0{,}100000)$, $E(60000{,}20000)$ и $F(0{,}20000)$,
- допуштената област (обоената област од рамнината) и таа е ограничена,
- правата $f_0: 0{,}08x + 0{,}05y = 0$ и векторот $\mathbf{c}_1 = \lambda(0{,}08; 0{,}05)$ што ја определува насоката на нараснување на функцијата на целта, за $\lambda = 200000$.

Врз основа на овие елементи, од графикот на слика 5.2 може да се воочи дека, доколку се оди во насока на векторот $\mathbf{c}_1$, *последната* права од праменот прави определен со $f = 0{,}08x + 0{,}05y$, што има заедничка точка со допуштената област, е онаа што минува низ точката $B(75000{,}25000)$. Нејзината равенка е $0{,}08x + 0{,}05y = 7250$, а на слика 5.2 тоа правата $f_{7250}$. Ова може и алгебарски да се потврди. За вредноста на функцијата на целта во екстремалните точки имаме

$$f(B) = 7250, \qquad f(C) = 5000, \qquad f(E) = 5800, \qquad f(F) = 1000,$$

што значи дека $f = 0{,}08x + 0{,}05y$ достигнува минимум во точката $B(75000{,}25000)$.




Слика 5.2. Елементи за графичко решавање на задачата од пример 5.2 (автори)

Според претходното, одговорот на поставената задача ќе биде:

За фирмата да оствари максимален профит при дополнителните услови, треба да инвестира 75000€ во акции и 25000€ во обврзници.

[19] Ако базните решенија се определуваат со директниот алгебарски метод, тогаш вкупниот број на системи линеарни равенки што може да се формираат од изразите за граничните прави ќе биде 10. Еден од овие системи нема решение (оној формиран од равенките $y = 20000$ и $y = 0$), а три од системите како решение ќе ја дадат точката $H$.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 5.2. Графичко решавање на ЛП-задача со две главни ограничувања

Геометриската интерпретација на допуштената област и функцијата на целта на ЛП-задача што е наведена во претходната глава уште се нарекува *прва геометриска интерпретација*, или *интерпретација во* $\mathbb{R}^n$, каде $n$ е бројот на променливите. При услови за ненегативност на секоја од променливите, допуштената област е секогаш подмножество од ненегативниот хипероктант $\mathbb{R}_+^n$. Покрај оваа интерпретација постои алтернативна, т.н. *втора геометриска интерпретација*, или *интерпретација во* $\mathbb{R}^m$, каде $m$ е бројот на главни ограничувања и се однесува на ЛП-задача зададена во каноничен облик. За повеќе информации околу оваа интерпретација кога $m$ може да биде произволен природен број, упатуваме на (Карчицка, 2000, глава II, поглавје 5), (Yudin & Gol'shtein, 1965, гл. I, оддел 6-3) или (Юдин и Гольштейн, 1969, гл. I, 4.2.). Овде накратко ќе ја појасниме втората геометриска интерпретација за случајот кога е дадена ЛП-задача на максимизација во каноничен облик со две главни ограничувања во контекст на постапката за нејзино графичко решавање.

Нека е дадена ЛП-задачата на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{р.о.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

за која го формираме системот равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = f \end{cases} \tag{5.2}$$

Ако ставиме

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ c_2 \end{bmatrix}, \ \ldots\ , \ \overline{A}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ f \end{bmatrix},$$

добиваме вектори во $\mathbb{R}^3$. Ова овозможува да се разгледува линеарно пресликување (трансформација) $F$ од $\mathbb{R}^n$, т.е. просторот во кој првично геометриски се интерпретира ЛП-задачата (5.1), во просторот $\mathbb{R}^{m+1}$, за $m = 2$, дефинирано со

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\overline{A}_1 + x_2\overline{A}_2 + \cdots + x_n\overline{A}_n, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

За вака дефинираното пресликување, ненегативниот хипероктант ќе $\mathbb{R}_+^n$ ќе се преслика во множеството

$$C = F(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{A}_i \,\middle|\, \lambda_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, n\} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \tag{5.4}$$

што претставува конвексен конус во $\mathbb{R}^3$ генериран од векторите $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$. Нека оските во $\mathbb{R}^3$ ги означиме со $y_1, y_2, y_3$ (или било која друга буква на местото од $y$, но да е различна од $x$). Тогаш конвексниот конус од (5.4) ќе биде со врв во координатниот почеток, а секоја негова точка е може да се претстави како збир на вектори (точки) од зраците

$$R_i = \{\lambda\overline{A}_i | \lambda \geq 0\}, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{5.5}$$

Поради линеарноста на F, конвексните подмножества од $\mathbb{R}^n$ се пресликуваат во конвексни подмножества од $\mathbb{R}^3$. Допуштената област на ЛП-задачата (5.1) исто така ќе се преслика во конвексно множество и тоа се совпаѓа со пресекот на конусот (5.4) со множеството

$$\left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ f \end{bmatrix} \,\middle|\, f \in \mathbb{R} \right\}. \tag{5.6}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Множеството во (5.6) е права која минува низ $(b_1, b_2, 0)$ и е нормална на рамнината $y_1 O y_2$ во $\mathbb{R}^3$. Во зависност од особините на конусот во (5.4), за неговиот пресек со правата во (5.5) може да се добие права, полуправа, отсечка или точка. Попрецизно, можни се следните случаи.

- Пресекот е целта права (5.6). Ова кореспондира на случајот кога ЛП-задачата (5.1) нема оптимално решение, т.е функцијата на целта не е ограничена од горе на допуштената област,
- Некоја полуправа што се содржи во правата (5.6). Ако ЛП-задачата (5.1) има оптимално решение, тогаш полуправата се добива кога $f$ се менува во некој интервал од облик $(-\infty, \lambda_f]$. Ако пак ЛП-задачата (5.1) нема оптимално решение, тогаш полуправата се добива кога $f$ се менува во некој интервал од облик $[\lambda_f, +\infty)$, функцијата на целта има минимум, но не и максимум на допуштената област во (5.1).
- Отсечка, со можност таа да дегенерира во точка. Ова кореспондира на случајот кога ЛП-задачата (5.1) има оптимално решение. Попрецизно, функцијата на целта достигнува минимум $f_{\min}$ и максимум $f_{\max}$ на допуштената област, а отсечката е делот од правата во (5.6) кога $f$ се менува во интервалот $[f_{\min}, f_{\max}]$. Дегенерирањето во точка[20] ќе кореспондира на случајот кога $f_{\min} = f_{\max}$.

Геометриското решавање на ЛП-задачата (5.1) ги опфаќа следните чекори:

1. Исцртување на зраците $R_i, i = 1,2, \dots, n$ од (5.5) и определување на конусот $C$ од (5.4), со напомена дека можен е случајот кога некој од зраците од (5.5) целосно да се содржи во конусот определен со останатите зраци, па $C$ може целосно да се опише и со помал број од векторите $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$.
2. Исцртување на векторот $(b_1, b_2, 0)$ и правата $L$ што минува низ крајната точка од овој вектор, а е нормална на рамнината $y_1 O y_2$ во $\mathbb{R}^3$.
3. Определување на пресекот на конусот $C$ и правата $L$.
4. Определување на точка $Q \in C \cap L$ што има најголема вредност за третата координата. Ако таква точка не постои, тогаш ЛП-задачата (5.1) нема оптимално решение. Пресекот $C \cap L$ е или целата права $L$, или полуправа што се содржи во $L$, а се состои од оние точки од правата (5.6) што се добиваат кога $f$ се менува во некој интервал од облик $[\lambda_f, +\infty)$. Ако пак таква точка постои, тогаш нејзината трета координата $f_Q$ ќе биде оптималната вредност на функцијата, а за оптималното решение
$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*),$$
можни се следните два случи.

   4.a. Постои $i \in \{1,2, \dots . n\}$ така што $Q \in R_i$. Во овој случај $x_j^* = 0$, ако $j \neq i$, а $x_i^*$ е решение на равенката
$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ c_i \end{bmatrix} x_i = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ f_Q \end{bmatrix}.$$

   4.b. Постои $i, j \in \{1,2, \dots . n\}$, $i \neq j$ и точката $Q$ припаѓа на страната на конусот $C$ определена со векторите $\overline{A}_i$ и $\overline{A}_j$. Оваа страна и самата претставува конвексен конус, т.е. таа е множеството дефинирано со
$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ c_i \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ c_j \end{bmatrix} x_j = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ f_Q \end{bmatrix}.$$
   Ова значи дека системот од две линеарни равенки

[20] Ова не значи дека и допуштената област на ЛП-задачата во (5.1) се сведува на точка. Специфичен пример за ова е случајот кога функцијата на целта е константна на допуштената област (иако не мора да биде константна на целиот простор определен со променливите на одлучување).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{cases} a_{1i}x_i + a_{1j}x_j = b_1 \\ a_{2i}x_i + a_{2j}x_j = b_2 \end{cases},$$

има единствено решение $(x_i', x_j')$. Во овој случај координатите на $\mathbf{x}^*$ се определени со $x_i^* = x_i'$, $x_j^* = x_j'$ и $x_k^* = 0$, ако $i \neq k \neq j$.

**Пример 5.3.** Графички ќе ја решиме следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ & f = x_1 + x_6 \\ \text{p.o.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

За оваа ЛП-задача, системот од облик (5.2) е

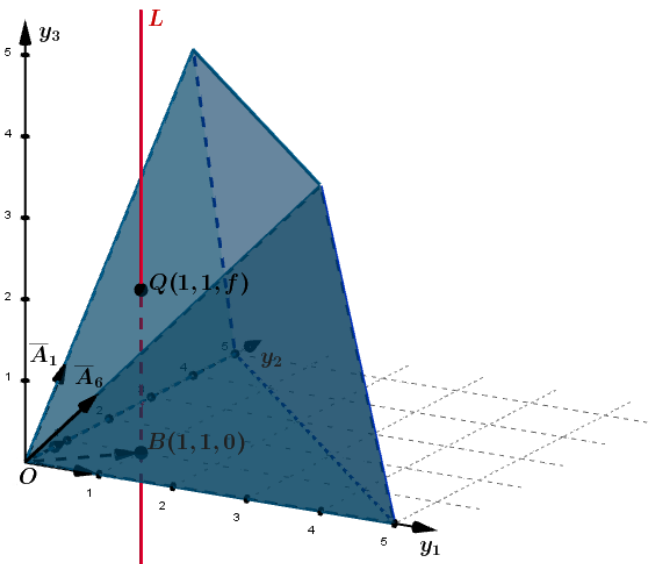
$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 1, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = f \end{cases}$$

од каде следи дека

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_2 = \overline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_4 = \overline{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ f \end{bmatrix}.$$

На слика 5.3. е прикажан *само дел* од конусот генериран од векторите $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2 = \overline{A}_3$, $\overline{A}_4 = \overline{A}_5$ и $\overline{A}_6$ (тој е неограничено множество и не може во целост да се исцрта). Неговите страни се конусите генерирани од паровите вектори:

- $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, овој конус се содржи во координатната рамнина $y_1Oy_3$,
- $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_4$, овој конус се содржи во координатната рамнина $y_1Oy_2$ и е целиот дел од првиот квадрант заедно со ненегативните делови од оските $y_1$ и $y_2$,
- $\overline{A}_4$ и $\overline{A}_6$, овој конус се содржи во координатната рамнина $y_2Oy_3$,
- $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_6$, овој конус е дел од рамнина определена со овие два вектори и минува низ координатниот почеток, а се содржи во $\mathbb{R}^3_+$.




Слика 5.3. Елементи за графичко решавање на ЛП-задачата од пример 5.3 (автори)

Дополнителните елементи на слика 5.3 за определување на оптималната вредност и оптималното решение се:

- векторот $(b_1, b_2, 0) = (1,1,0)$, чија крајна точка е точката $B(1,1,0)$,
- правата $L$ што минува низ точката $B(1,1,0)$ и е нормална на рамнината $y_1Oy_2$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- втората точка $Q$ од отсечката што претставува пресек на конусот и правата $L$.

Според слика 5.3, точката $Q(1,1,f)$ има поголема вредност кај третата координата од точката $B(1,1,0)$ (т.е. другата крајна точка на конусот со правата $L$), соодветната вредност за $f$ ќе биде оптималната вредност на функцијата на целта. За да се определи и оптималното решение на ЛП-задачата, прво треба да се определи страната на конусот на која лежи $Q$. Според слика 5.3 тоа е страната, или поточно конусот, определен со векторите $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_6$. Тогаш постојат $x_1', x_6' \in [0, +\infty)$, така што $(x_1', x_6')$ е решение (и тоа единствено) на системот што произлегува од равенството

$$A_1x_1 + A_6x_6 = b, \text{ каде } A_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

Од тој систем произлегува дека $x_1' = x_6' = 1$. Тогаш оптималното решение на дадената ЛП-задача е $\mathbf{x}^* = (x_1', 0,0,0,0, x_6') = (1,0,0,0,0,1)$.

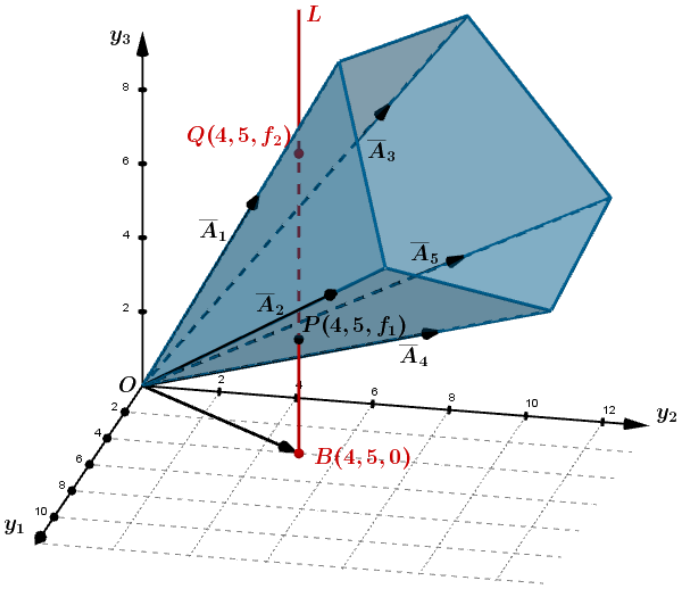
**Пример 5.4.** Графички ќе ја решиме следната ЛП-задача

$$\begin{aligned} \max\ f &= 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ \text{p.o. } & 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 4 \\ & 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Постапувајќи како во претходниот пример ги формираме векторите

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix}4\\4\\7\end{bmatrix}, \overline{A}_2 = \begin{bmatrix}8\\7\\6\end{bmatrix}, \overline{A}_3 = \begin{bmatrix}2\\7\\9\end{bmatrix}, \overline{A}_4 = \begin{bmatrix}5\\9\\4\end{bmatrix}, \overline{A}_5 = \begin{bmatrix}2\\9\\5\end{bmatrix}, \overline{b} = \begin{bmatrix}4\\5\\f\end{bmatrix}.$$

Дел од конусот генериран од векторите $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \overline{A}_4, \overline{A}_5$, векторот $b = (4,5,0)$ и правата $L$ што минува низ крајната точка $B(4,5,0)$ на векторот $b$, се прикажани на слика 5.4.




Слика 5.4. Елементи за графичко решавање на ЛП-задачата од пример 5.4 (автори)

Пресекот на правата $L$ со конусот е отсечката $\overline{PQ}$. Точката $Q$ е повисоко од точката $P$, т.е. нејзината трета координата е со поголема вредност од вредноста на третата координата на $P$. Според ова, иако е доволно да се спроведат 4.a и 4.b само за $Q$, ќе ги спроведеме овие чекори и за точката $P$.

Точката $P$, според слика 5.4, лежи на страната на конусот што е генерирана од векторите $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_4$. Ова значи дека постојат еднозначно определени $x_2', x_4' \in [0, +\infty)$, така што да важи

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\overline{A}_2 x_2' + \overline{A}_4 x_4' = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} x_2' + \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} x_4' = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ f_1 \end{bmatrix} \equiv P.$$

Од првите две редици се добива систем од линеарни равенки, со две непознати

$$\begin{cases} 8x_2 + 5x_4 = 4 \\ 7x_2 + 9x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{11}{37} = x_2' \\ x_4 = \frac{12}{37} = x_4' \end{cases}.$$

На овие две вредности одговара базното изводливо решение

$$\mathbf{x}_1^* = (0, x_2', 0, x_4', 0) = \left(0, \frac{11}{37}, 0, \frac{12}{37}, 0\right),$$

во кое, вредноста на функцијата на целта ќе биде

$$f_1 = 6x_2' + 4x_4' = \frac{114}{37}.$$

Точката $Q$, лежи на страната на конусот што е генерирана од векторите $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_3$, па постојат еднозначно определени $x_1', x_3' \in [0, +\infty)$, така што да важи

$$\overline{A}_1 x_1' + \overline{A}_3 x_3' = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} x_1' + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} x_3' = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ f_2 \end{bmatrix} \equiv Q.$$

Од првите две редици се добива систем од линеарни равенки, со две непознати

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 7x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{10} = x_1' \\ x_3 = \frac{1}{5} = x_3' \end{cases}.$$

Базното изводливо решение што одговара на овие две вредности е

$$\mathbf{x}_2^* = (x_1', 0, x_3', 0,0) = \left(\frac{9}{10}, 0, \frac{1}{5}, 0,0\right), \tag{5.7}$$

а во него вредноста на функцијата на целта ќе биде

$$f_2 = 7x_1' + 9x_3' = \frac{81}{10} > f_1.$$

Ова значи дека $f_2$ е оптималната (максималната) вредност на функцијата на целта и таа се постигнува во точката определена со (5.7).

## 5.3. Симплекс метод

Графичкиот метод за решавање на дадена ЛП-задача не може да се примени за повеќе од три променливи[21] или повеќе од две главни ограничувања. За поголем број на променливи и/или ограничување, остануваат алгебарските методи. Еден метод може веднаш да се опиши врз основа на претходната глава:

- да се определат на екстремалните точки на допуштената област (доколку такви постојат) со примена на директниот алгебарски метод или методот на базни изводливи решенија,
- да се пресметаат вредностите на функцијата на целта во секоја претходно определените екстремални точки,
- да се определи која претходно определените вредности е минимална (за ЛП-задача на минимизација) или максимална (за ЛП-задача на максимизација).

Но, со зголемување на бројот на променливи и/или бројот на ограничување, бројот на пресметки што треба да се изведат станува исклучително голем што е невозможно тие да се изведат во разумен временски период, дури и ако тоа се прави со доволно моќни софтверски алатки. Во ваквите случаи се применува т.н. симплекс методот.

---

[21] Графичкиот метод, по истиот принцип како во поглавје 5.1, може да се примени за решавање и за три променливи. Но графичкото претставување на допуштената област и функцијата на целта, дури и тогаш кога тоа се прави со соодветна софтверска алатка, може да резултира со исклучително непрегледни визуелизации поради што графичкиот метод, особено при поголем број на ограничувања, не се препорачува за решавање на ЛП-задачите со три променливи.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Симплекс методот е итеративен метод за решавање на ЛП-задачи. Првичниот алгоритам е креиран од Џ. Б. Данциг во 1947 г., а врз основа на истиот, за поуспешно решавање на ЛП-задачите, креирани се неколку негови модификации. Една од нив ќе ја разгледаме во ова поглавје.

### 5.3.1. Опис на симплекс алгоритамот

Идејата на симплекс методот се состои во следното. Нека $X$ е допуштената област на дадена ЛП-задача, и нека $X$ е ограничено множество.

(i) Се избира произволна екстремална точка на $X$.

(ii) Се избира произволен раб што минува низ избраната екстремална точка вдолж кој има нараснување на вредностите на функцијата на целта доколку се движиме до другата крајна точка на работ, која исто така е екстремална точка на $X$.

(iii) Другата крајна точка на избраниот раб е нова точка за која, доколку е можно, ја повторуваме постапката од (ii).

(iv) Постапката се повторува се додека не се стигне до екстремалната точка која е оптималното решение, т.е. точка таква што вдолж ниту еден од рабовите на $X$ што излегуваат од таа точка функција на целта повеќе не нараснува.

На тој начин се постигнува значително намалување на бројот на екстремални точки за кои се пресметува вредноста на функција за да се дојде до оптималното решение на ЛП-задачата.

Оваа идеја има соодветна математичка формулација што ќе ја опишеме за ЛП-задача на максимизација зададена во стандарден облик

$$
\begin{array}{rl}
\max & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{p.o.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \cdots \\
& a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \le b_k \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0.
\end{array}
\tag{5.8}
$$

**Забелешка 5.1.** Со цел да се избегне разгледување на специјални случаи претпоставуваме дека:

(1) ограничувачките вредности се ненегативни, т.е. важи $b_i \ge 0$, $i = 1,2, \ldots, k$, и во секое главно ограничување коефициентот пред барем една од променливите е позитивен.

(2) Матрицата од коефициентите пред променливите во главните ограничувања $\mathbf{A}$ е со линеарно независни редици и дека, ако $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = r$, тогаш векторот $\mathbf{c} = (c_1, c_2 \ldots, c_n)$ не е линеарна комбинација на помалку од $r$ редици на $\mathbf{A}$, а векторот $\mathbf{b} = (b_1, b_2 \ldots, b_k)$ не е линеарна комбинација на помалку од $r$ колони на $\mathbf{A}$.

Со воведување на нови променливи $s_1, s_2, \ldots, s_k$ кореспондентниот канoничен облик ќе биде

$$
\begin{array}{rl}
\max & f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_k \\
\text{p.o.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_k = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_k = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 1 \cdot s_k = b_k \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0, \\
& s_1, s_2, \ldots, s_k \ge 0.
\end{array}
\tag{5.9}
$$

**Чекор 1: Формирање на почетна (иницијална) симплекс табела.** Врз основа на (5.9) ја формираме следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 5.1. Почетна симплекс табела (Lipschutz, 1966)

$$
\begin{array}{c}
\\
(R_1)\\
(R_2)\\
\vdots\\
(R_k)\\
(R_{k+1})
\end{array}
\begin{array}{cccc|cccc|c}
P_1 & P_2 & \cdots & P_n & s_1 & s_2 & & s_k & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_k\\
\hline
-c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
\qquad (5.10)
$$

индикатори

Ознаките $(R_1),(R_2),\dots,(R_k),(R_{k+1})$ се помошни ознаки за теориското појаснување, за $R_1,R_2,\dots,R_k,R_{k+1}$ всушност сметаме дека се следните матрици редици:

- $R_i = [\underbrace{a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \dots\ \ a_{ik}}_{\substack{\text{коефициенти пред}\\ x_1,x_2,\dots,x_n}}\ \ \underbrace{0\ \dots\ 0\ \ \overbrace{1}^{\substack{i\text{–то}\\ \text{место}}}\ \ 0\ \dots\ 0}_{\substack{\text{коефициенти пред}\\ s_1,s_2,\dots,s_k}}\ \ b_k\ ],\ i = 1,2,\dots,k,$
- $R_{k+1} = [\ \underbrace{-c_1\ \ -c_2\ \ \dots\ \ -c_n}_{\substack{\text{коефициенти на функција}\\ \text{на цел со променет знак}}}\ \ \underbrace{0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0}_{k-\text{елементи}}\ \ 0\ ].$

Првите $n+k$ елементи на $R_{k+1}$ се т.н. *индикатори.* Симплекс методот може да се примени само врз табела од облик (5.10) доколку постои барем еден негативен индикатор. Во спротивно, велиме дека симплекс табелата е во *терминален облик* (или дека таа е *терминална симплекс табела*).

Ознаките $P_1,P_2,\dots,P_n$ се ознаки за колоните што кореспондираат на променливите на одлучување $x_1,x_2,\dots,x_n$. Следните $m$ колони кореспондираат на помошните променливи $s_1,s_2,\dots,s_k$. Во првите $k$ редици од последната колона се внесени слободните коефициенти на главните ограничување во (5.9), а во најдолното поле од оваа колона се внесува 0, и тоа е вредноста на функцијата на целта во координатниот почеток. Тој воедно е екстремалната точка од која се поаѓа.

Ако $\mathbf{A}$ е матрицата од коефициентите пред променливите кај главните ограничувања во почетниот облик (5.8) на ЛП-задачата, $\mathbf{b}$ е матрицата колона од слободните коефициенти кај главните ограничувања, $\mathbf{c}$ е векторот од коефициентите на функцијата на целта зададен во матричен облик, $\mathbf{I}_k$ е единичната матрица од $k$-ти ред, и $\mathbf{o}$ е нултиот вектор во $\mathbb{R}^k$ во матрична форма, тогаш табелата (5.10) кратко може да се запише во облик (5.11).

Табела 5.2. Компактен облик на почетна симплекс табела (автори)

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{A}$ | $\mathbf{I}_k$ | $\mathbf{b}$ |
| $-\mathbf{c}^T$ | $\mathbf{o}^T$ | $0$ |

(5.11)

**Чекор 2: Определување на базичен коефициент.** Во случај кога симплекс табелата не е во терминален облик постапуваме како што следи.

1. Од колоните со негативен индикатор се избира произволна колона. Кај почетната симплекс табела тоа може да биде некоја од колоните $P_1,P_2,\dots,P_n$. Нека претпоставиме дека е избрана колоната $P_j$. Оваа колона се нарекува *базична колона*.
2. За секој од елементите $a_{1j},a_{2j},\dots,a_{kj}$ што е различен од 0, го пресметуваме количникот $b_i : a_{ij}$, $i = 1,2,\dots,k$. Овие резултати вообичаено се запишуваат странично од табелата како подолу.
3. Од пресметаните количници се определува најмалиот *позитивен* количник. Ако тој е во редицата $R_i$, тогаш *базичен коефициент* е коефициентот $a_{ij}$ и него го

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

маркираме (на пример, со заокружување или ставање рамка околу него). Редицата $R_i$ уште се нарекува *базична редица*.

Табела 5.3. Определување на базичен коефициент кај симплекс табела (автори)

| | $P_1$ | $\cdots$ | $P_j$ | $\cdots$ | $P_n$ | $s_1$ | $s_2$ | | $s_k$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(R_1)$ | $a_{11}$ | $\cdots$ | $a_{1j}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $1$ | $0$ | $\cdots$ | $0$ | $b_1$ | $b_1 : a_{1j}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $(R_i)$ | $a_{i1}$ | $\cdots$ | $\boxed{a_{ij}}$ | $\cdots$ | $a_{in}$ | $0$ | $1$ | $\cdots$ | $0$ | $b_i$ | $\boxed{b_i : a_{ij}}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $(R_k)$ | $a_{k1}$ | $\cdots$ | $a_{kj}$ | $\cdots$ | $a_{kn}$ | $0$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $b_k$ | $b_1 : a_{kj}$ |
| $(R_{k+1})$ | $-c_1$ | $\cdots$ | $-c_j$ | $\cdots$ | $-c_n$ | $0$ | $0$ | $\cdots$ | $0$ | $0$ | |
| | | | базична колона | | | | | | | | |

Ако од позитивните количници $b_i : a_{ij},\ i = 1,2,\ldots,k$, најмалиот кореспондира на повеќе редици, изборот на базичната редицата е сосема произволен.

Натаму вршиме трансформација на табелата што е слична на Гаус-Жордановата постапка за определување на инверзна матрица или решавање на систем линеарни равенки со помош на проширена матрица. Попрецизно, постапуваме како во следниот чекор.

**Чекор 3: Креирање на нова симплекс табела.** Формираме нова табела со ист број редици и колони како табелата (5.10) каде ознаките $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и $s_1, s_2, \ldots, s_k$ остануваат како во претходната табела.

Ако $a_{ij}$ е претходно лоцираниот базичен коефициент и $R_1^*, R_2^*, \ldots, R_{k+1}^*$ се редиците на новата симплекс табела, тогаш тие се определуваа според следните изрази:

1. $i$ –та редица се добива преку изразот
$$R_i^* = \frac{1}{a_{ij}} R_i,$$
и, лево од табелата, кај $i$ –тата редица ја поставуваме ознаката $P_j$. Оваа ознака покрај $i$ –тата редица останува кај секоја наредна симплекс табела;

2. останатите редици се определуваат според изразите
$$R_m^* = R_m - a_{mj} R_i^* = R_m - \frac{a_{mj}}{a_{ij}} R_i, \qquad m \in \{1,2,\ldots,k+1\} \setminus \{i\}.$$

**Чекор 4:** Доколку табелата добиена во чекор 3 има негативен индикатор, тогаш врз неа се повторува претходната постапка. Во спротивно се преминува на следниот чекор.

**Чекор 5: Интерпретација на симплекс табела во терминален облик.** Нека претпоставиме дека е добиена следната табела во терминален облик.

Табела 5.4. Симплекс табела во терминален облик (Lipschutz, 1966)

| | $P_1$ | $P_2$ | $\cdots$ | $P_n$ | $s_1$ | $s_2$ | | $s_k$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| пред некои редици стои некоја ознака од $P_1, P_2, \ldots, P_n$ | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $b_1^*$ |
| | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $b_2^*$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $b_k^*$ |
| | $*$ | $*$ | $\cdots$ | $*$ | $q_1$ | $q_2$ | $\cdots$ | $q_k$ | $v$ |

Тогаш:

1) Оптималното решение на ЛП-задачата (5.8) е точката $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, каде

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$p_i = \begin{cases} b_m^*, & \text{ако } P_i \text{ стои пред } m - \text{тата редица,} \\ 0, & \text{ако } P_i \text{ не стои пред ниту една редица.} \end{cases}, i = 1,2, \dots, n.$$

2) Оптималната (максималната) вредност на функцијата на целта во ЛП-задачата (5.8) е еднаква на $v$.
3) Точката $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ е оптималното решение на дуалната ЛП-задача на ЛП-задачата (5.8).
4) Функција на целта на дуалната ЛП-задача на (5.8) има оптимална (минимална) вредност еднаква на $v$.

Ако интерпретацијата на симплекс табелата наведена во 1) и 2) од чекор 5 се примени и на другите табели од последователните итерации, тогаш последователните симплекс табели ќе кореспондираат на соодветните точки од низата екстремални точки што се добива при примена на (i) – (iv). Во секоја од овие табели, вредноста во долната десна ќелија од табела ќе биде соодветните вредност на функцијата на целта во точката на која се однесува табелата. Повеќе детали за ова ќе наведеме кај дел од примерите што ќе ги разгледаме во следниот оддел. Дополнително, 3) и 4) од чекор 5, упатуваат на тоа дека посочената верзија на симплекс методот може да се примени и за решавање на задача на минимизација, на тој начин што прво за неа ќе се формулира дуалната ЛП-задача на максимизација врз која потоа ќе се примени симплекс методот. Терминалната симплекс табела ќе се интерпретира согласно 3) и 4) од чекор 5.

### 5.3.2. Примери за примена на симплекс методот

**Пример 5.5.** Ја разгледуваме следната задача:

Во кројачка работилница на располагање ги имаат следните материјали: 16m$^2$ памучна ткаенина, 11m$^2$ свила и 15m$^2$ волнена ткаенина. За костум се потребни 2m$^2$ памучна ткаенина, 1m$^2$ свила и 1m$^2$ волнена ткаенина. За наметка се потребни 1m$^2$ памучна ткаенина, 2m$^2$ свила и 3m$^2$ волнена ткаенина. Ако костумот се продава по цена од 30€, а наметка по цена од 50€, по колку од секој вид облека треба да се изработат за да се оствари максимална добивка.

Врз основа на податоците во задачата можеме да ја формираме следната табела што воедно претставува ЛП-табела, и тоа за задача на максимизација.

Табела 5.5. Податочна табела за пример 5.5 (автори)

| | Потребни количини (m$^2$) | | Расположливи количини (m$^2$) |
|---|---|---|---|
| | Костум | Наметка | |
| Памучна ткаенина | 2 | 1 | 16 |
| Свила | 1 | 2 | 11 |
| Волнена ткаенина | 1 | 3 | 15 |
| продажна цена | 30€ | 50€ | |

Нека $x_1$ е бројот на костуми, а $x_2$ е бројот на наметки што треба да се изработат за да се оствари максимален профит. Тој ќе биде еднаков на

$$f = 30x_1 + 50x_2.$$

За да се определат вредностите за $x_1$ и $x_2$ за кои последниот израз има максимална вредност, треба да се реши следната ЛП-задача на максимизација

$$\begin{aligned} \max\ & f = 30x_1 + 50x_2 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Нејзиниот каноничен облик е

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{aligned} \max\ & f = 30x_1 + 50x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \\ \text{p.o.}\ & 2x_1 + x_2 + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 = 16 \\ & x_1 + 2x_2 + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 = 11 \\ & x_1 + 3x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 = 15 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0, \end{aligned}$$

**Формирање на почетна симплекс табела (нулта итерација)**

Табела 5.6. Почетна симплекс табела за пример 5.5 (Lipschutz, 1966)

| $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_{k3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 15 |
| $-30$ | $-50$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

(5.12)

Како базична колона може да ја избереме која било од колоните $P_1$ или $P_2$.

Ќе ја избереме прво колоната $P_1$.

**Прва итерација:** При овој избор на базична колона, за количниците $b_1 : a_{11}$, $b_2 : a_{21}$, $b_3 : a_{31}$ (пресметани странично од следната табела), базичниот коефициент (маркираниот елемент во првата колона) и изразите за понатамошната трансформација на секоја од редиците $R_1, R_2, R_3, R_4$ (изразите наведени странично од табелата) ја добиваме табела 5.7.

Табела 5.7. Дополнителни елементи кон табела 5.5 при избор на колона $P_1$ неопходни за определување на базичен коефициент и изрази за натамошна трансформација на редиците (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{2}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 | $\boxed{16:2=8}$ | $R_1^* = R_1/2$ |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 11 | $11:1=11$ | $R_2^* = R_2 - R_1^*$ |
| 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 15 | $15:1=15$ | $R_3^* = R_3 - R_1^*$ |
| $-30$ | $-50$ | 0 | 0 | 0 | 0 | | $R_4^* = R_4 + 30R_1^*$ |

Во следната табела ќе треба да се стави $P_1$ пред првата редица (редицата што го содржи претходно определениот базичен коефициент).

Согласно претходното, ја добиваме симплекс табелата 5.8.

Табела 5.8. Конечен облик на симплекс табела во прва итерација (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 8 |
| | 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 3 |
| | 0 | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 7 |
| | 0 | $-35$ | 15 | 0 | 0 | 240 |

Последната табела не е во терминален облик бидејќи во последната редица сè уште има негативен индикатор, па постапката за формирање на следна симплекс табела продолжува.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Втора итерација:** Последната табела има само еден индикатор. Тој е во колоната $P_2$, па сега таа ќе биде базична колона. За количниците, базичниот коефициент и изразите за понатамошната трансформација ја добиваме табела 5.9.

Табела 5.9. Дополнителни елементи кон табела 5.8 неопходни за определување на базичен коефициент и изрази за натамошна трансформација на редиците (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $0$ | $8$ | $8:\frac{1}{2}=16$ | $R_1^*=R_1-\frac{1}{2}R_2^*$ |
| | $0$ | $\boxed{\frac{3}{2}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $0$ | $3$ | $\boxed{3:\frac{3}{2}=2}$ | $R_2^*=\frac{2}{3}R_2$ |
| | $0$ | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $1$ | $7$ | $7:\frac{5}{2}=\frac{14}{5}$ | $R_3^*=R_3-\frac{5}{2}R_2^*$ |
| | $0$ | $-35$ | $15$ | $0$ | $0$ | $240$ | | $R_4^*=R_4+35R_2^*$ |

со што, ставајќи $P_2$ пред втората редица, ја добиваме симплекс табелата 5.10.

Табела 5.10. Конечен облик на симплекс табелата за пример 5.5 добиена во втора итерација (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $1$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $7$ |
| $P_2$ | $0$ | $1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $0$ | $2$ |
| | $0$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | $1$ | $2$ |
| | $0$ | $0$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{70}{3}$ | $0$ | $310$ |

Табела 5.10 е во терминален облик, па можеме да го определиме решението на дадената ЛП-задача. Согласно вредностите во последната колона и редиците пред кои се поставени $P_1$ и $P_2$, оптималното решение на ЛП-задачата е во точката $P(7,2)$, а оптималната вредност на функцијата на целта е вредноста во ќелијата долу десно, т.е. $f(P)=310$. Или, одговорот на текстуалната задача е: За да остварат максимална добивка, кројачите треба да изработат 7 костуми и 2 наметки, со максимален профит од 310€.

Ако кај почетната симплекс табела, наместо $P_1$, за базична колона се земе колоната $P_2$, тогаш ќе ги добиеме следните симплекс табели.

Табела 5.11. Почетна симплекс табела со дополнителните елементи неопходни за определување на базичен коефициент и изрази за натамошна трансформација на редиците доколку базична колона е $P_2$ (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | $1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $16$ | $16:1=16$ | $R_1^*=R_1-R_3^*$ |
| $1$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $11$ | $11:2=5{,}5$ | $R_2^*=R_2-2R_3^*$ |
| $1$ | $\boxed{3}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $15$ | $\boxed{15:3=5}$ | $R_3^*=R_3/3$ |
| $-30$ | $-50$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | | $R_4^*=R_4+50R_3^*$ |

Во следната симплекс табела со $P_2$ треба да се маркира третата редица.

Постапувајќи како претходно, ги добиваме симплекс табелите 5.12 – 5.14.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 5.12. Прва итерација и странични пресметки за следна итерација (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{5}{3}$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-\frac{1}{3}$ | $11$ | $11:\frac{5}{3}=6{,}6$ | $R_1^*=R_1-\frac{5}{3}R_2^*$ |
| | $\boxed{\frac{1}{3}}$ | $0$ | $0$ | $1$ | $-\frac{2}{3}$ | $1$ | $\boxed{1:\frac{1}{3}=3}$ | $R_2^*=3R_2$ |
| $P_2$ | $\frac{1}{3}$ | $1$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $5$ | $5:\frac{1}{3}=15$ | $R_3^*=R_3-\frac{1}{3}R_2^*$ |
| | $-\frac{40}{3}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $\frac{50}{3}$ | $250$ | | $R_4^*=R_4+\frac{40}{3}R_2^*$ |

Табела 5.13. Втора итерација и странични пресметки за следна итерација (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $0$ | $1$ | $-5$ | $\boxed{3}$ | $6$ | $\boxed{6:3=2}$ | $R_1^*=\frac{1}{3}R_1$ |
| $P_1$ | $1$ | $0$ | $0$ | $3$ | $-2$ | $3$ | / | $R_2^*=R_2+2R_1^*$ |
| $P_2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $1$ | $4$ | $4:1=4$ | $R_3^*=R_3-R_1^*$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $40$ | $-10$ | $290$ | | $R_4^*=R_4+10R_1^*$ |

Количникот во втората редица во табела 5.13 не е наведен бидејќи тој е негативен.

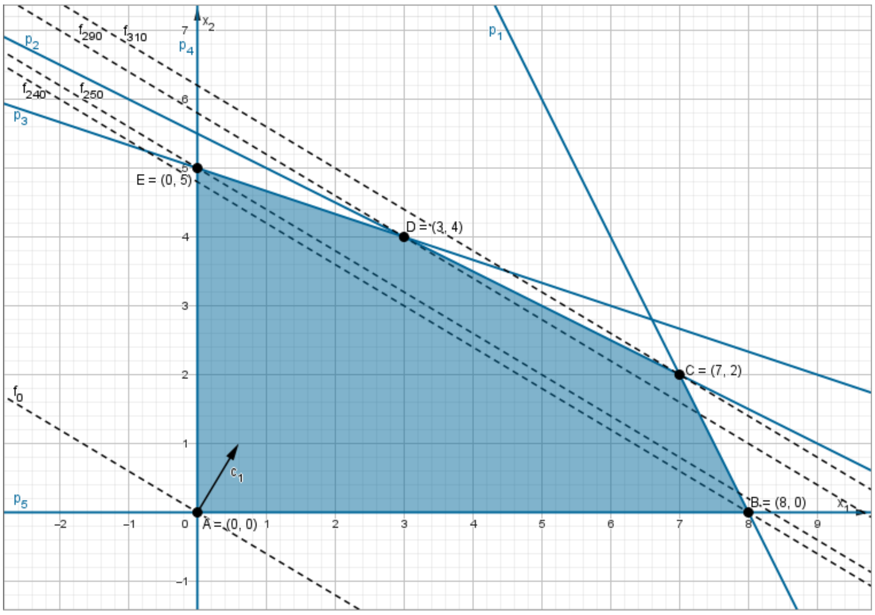
Табела 5.14. Трета итерација и симплекс табела во терминален облик (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $0$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | $1$ | $2$ |
| $P_1$ | $1$ | $0$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $7$ |
| $P_2$ | $0$ | $1$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $0$ | $2$ |
| | $0$ | $0$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{70}{3}$ | $0$ | $310$ |

Според табела 5.14, повторно го добиваме истото решение на ЛП-задачата.

Да се навратиме на геометриската интерпретација на симплекс методот наведена во (i) – (iv) од претходниот оддел. На слика 5.5 е прикажана допуштената област на ЛП-задачата, нејзините екстремални точки $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(7,2)$, $D(3,4)$ и $E(0,5)$, и правите од праменот прави определен со функцијата на целта што минуваат низ екстремалните точки. Елементите на оваа слика се доволни за графичко решавање на дадената ЛП-задача. Решението што може да се воочи од слика 5.5 е исто со она што претходно е добиено со симплекс методот.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 5.5. Елементи за графичко решавање на ЛП-задачата од пример 5.5 (автори)

Иницијалната симплекс табела кореспондира на точката $A(0{,}0)$ или, попрецизно, на координатниот почеток кој се зема за точка од која почнуваме да се движиме до следна екстремална точка по раб по кој имаме нараснување на функцијата.

Кога за базична колона ја зедовме колоната $P_1$, добивме две последователни симплекс табели. Втората кореспондира на оптималното решение $C(7{,}2)$ и оптималната вредност $310$. Ако првата табела се интерпретира како терминалната табела, тогаш таа би кореспондирала на точка чија прва координата е 8, а втората е 0 (десно оваа табела е поставено $P_1$ кај првата редица, а кај другите нема ознака). Вредноста во долното десно поле во оваа табела е $240$. Ова значи дека симплекс табелата кореспондира на точката $B(8{,}0)$ на слика 5.5. Со други зборови, за да се стигни до оптималното решение $C$, од точката $A$ движењето продолжило по работ чија крајна точка е $B$ од која потоа е стигнато до $C$.

Кога за базична колона ја зедовме колоната $P_2$, добивме три последователни симплекс табели, така што третата кореспондира на оптималното решение $C(7{,}2)$ и оптималната вредност $310$. За останатите две табели имаме:

- табелата во првата итерација кореспондира на точката $E(0{,}5)$ во која вредноста на функцијата на целта е $250$,
- табелата во втората итерација кореспондира на точката $D(3{,}4)$ во која вредноста на функцијата на целта е $290$.

Што значи дека сега, до оптималното решение е стигнато движејќи се вдолж рабовите $AE$, $ED$ и $DC$, по редослед $A \to E \to D \to C$.

**Пример 5.6.** Ја разгледуваме следната задача:

За одржување на градината на човек му се потребни барем 10 единици од соединение А и барем по 12 единици од секое од соединенијата В и С. Мешавини од овие соединенија се достапни во облик на раствор кој содржи 5, 2 и 1 единици од соединенијата А, В и С, соодветно, и во облик на прашок кој содржи 1, 2 и 4 единици од соединенијата А, В и С, соодветно. Растворот се продава во стаклена амбалажа по цена од 3€ за една тегла, додека прашокот се продава во картонска амбалажа по цена од 2€ по кутија. По колку од секој вид производ треба да се купат за да се задоволат потребните количини од соединенијата А, В и С, а притоа да се потроши најмала можна сума средства при купувањето?

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Врз основа на податоците во задачата можеме да ја формираме следната табела што воедно претставува ЛП-табела, и тоа за задача на максимизација.

Табела 5.15. Податочна табела за пример 5.6 (автори)

| | Содржина на единици по вид на амбалажа | | Минимум потребни единици |
|---|---|---|---|
| | Тегла | Кутија | |
| Соединение A | 5 | 1 | 10 |
| Соединение B | 2 | 2 | 12 |
| Соединение C | 1 | 4 | 12 |
| продажна цена | 3€ | 2€ | |

Нека $x_1$ е бројот на купени тегли и $x_2$ бројот на купени кутии. Вкупната сума што ќе се потроши за купување е

$$g = 3x_1 + 2x_2.$$

За да се определат вредностите за $x_1$ и $x_2$ при условите во задачата, треба да се најде оптималното решение на следната ЛП-задача на минимизација

$$\begin{aligned} \min\ & g = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{p.o.}\ & 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

На слика (5.3) се прикажани сите потребни елементи за графичко решавање на ЛП-задачата (5.13). Допуштената област $X$ е неограничено множество, со екстремални точки

$$P(0,10), \quad Q(1,5), \quad R(4,2) \quad \text{и} \quad S(12,0),$$

а функцијата на целта $g = 3x_1 + 2x_2$ достигнува минимум на $X$ во точката $Q(1,5)$, и тој е еднаков на 13. Што значи дека одговорот на задачата е: за да се задоволат потребните количини од соединенијата A, B и C, а притоа да се потроши најмала можна сума средства при купувањето, треба да се купат 1 тегла и 5 кутии, и за тоа ќе се потрошат 13€.

За да се примени симплекс методот, прво ја формулираме дуалната ЛП-задача на максимизација за (5.13). Помошната матрица за (5.13) и нејзината транспонирана матрица (види оддел 4.8.1 и изразите (4.69) и (4.70)) се

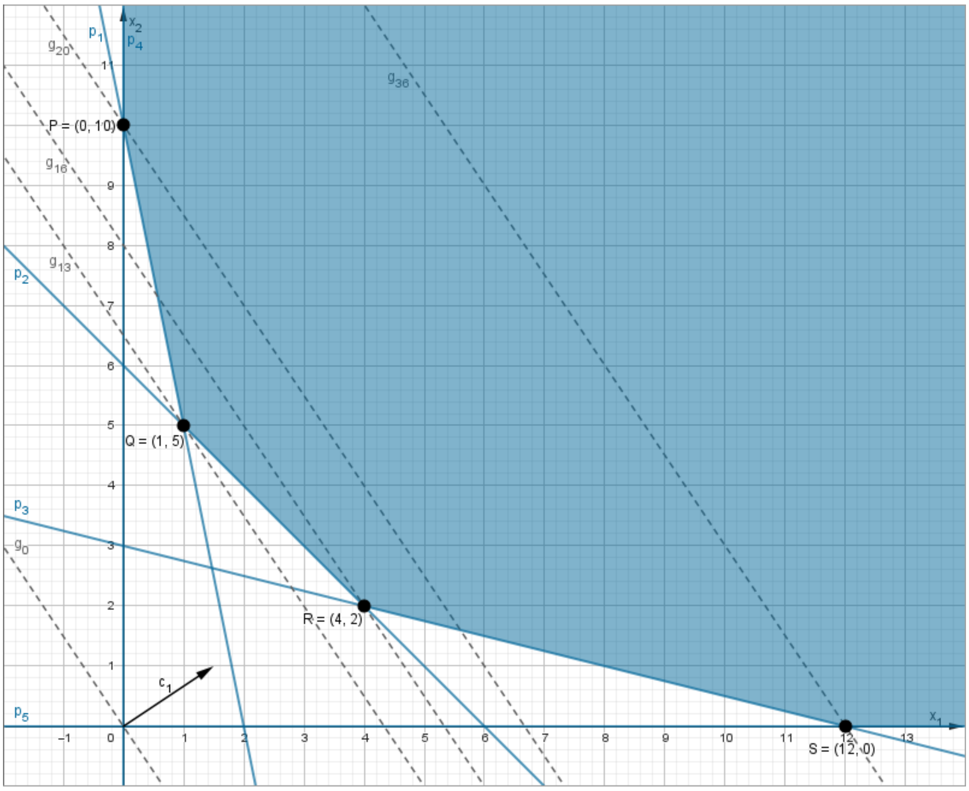
$$\mathbf{M}_{\min} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 12 \\ 1 & 4 & 12 \\ 3 & 2 & * \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_{\max} = \mathbf{M}_{\min}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 10 & 12 & 12 & * \end{bmatrix}.$$

Согласно втората матрица, дуалната ЛП-задача на (5.13) е

$$\begin{aligned} \max\ & f = 10y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ \text{p.o.}\ & 5y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Почетната симплекс табела и неопходните дополнителни пресметки за добивање на симплекс табелите кај одделните итерации се прикажани во табелите 5.16 – 5.18.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 5.6. Елементи за графичко решавање на ЛП-задачата (5.13) (автори)

Табела 5.16. Почетна симплекс табела за ЛП-задача (5.14) и странични пресметки за следна итерација (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5$ | $2$ | $1$ | $1$ | $0$ | $3$ | $3:2=1{,}5$ | $R_1^* = R_1 - 2R_2^*$ |
| $1$ | $\boxed{2}$ | $4$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\boxed{2:2=1}$ | $R_2^* = R_2/2$ |
| $-10$ | $-12$ | $-12$ | $0$ | $0$ | $0$ | | $R_3^* = R_3 + 12R_2^*$ |

Во следната симплекс табела со $P_2$ треба да се маркира втората редица, но со оглед на тоа дека терминалната табела треба да се интерпретира за дуалната ЛП-задача на (5.14), т.е. за (5.13), маркирањето може да се изостави.

Табела 5.17. Прва итерација и странични пресметки за следна итерација (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | $0$ | $-3$ | $1$ | $-1$ | $1$ | $\boxed{1:4=0{,}25}$ | $R_1^* = R_1/4$ |
| $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $1:\frac{1}{2}=2$ | $R_2^* = R_2 - \frac{1}{2}R_1^*$ |
| $-4$ | $0$ | $12$ | $0$ | $6$ | $12$ | | $R_3^* = R_3 + 4R_1^*$ |

Табела 5.18. Втора итерација (терминална симплекс табела) (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $0$ | $1$ | $\frac{19}{8}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{7}{8}$ |
| $0$ | $0$ | $9$ | $1$ | $5$ | $13$ |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Согласно табела 5.18, минималната вредност на функцијата на целта на ЛП-задачата (5.13) е еднаква на 13 и таа се достигнува во точката $Q(1,5)$.

**Напомена 5.1.** Низ литературата често може да сретне препорака изборот на базичната колона да се врши така што таа кореспондира на најмалиот од негативните индикатори. Како што покажува пример 5.5, во општ случај тоа не значи дека изборот на базичната колона според ова правило ќе резултира со помал број на итерации[22].

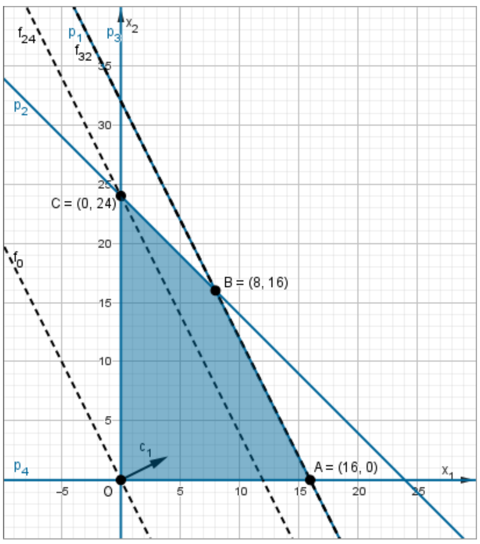
### 5.3.3. ЛП-задачи што немаат единствени решенија

Во (2) од забелешка 5.1 претпоставивме дека векторот од коефициентите на функцијата на целта не е линеарна комбинација на помалку од $r = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$ редици на матрицата $\mathbf{A}$. Ако оваа претпоставка се изостави, тогаш ЛП-задачата може да има и повеќе од едно оптимално решение и, во зависност од изборот на базичната колона, може да се добијат различни терминални табели.

**Пример 5.7.** На слика 5.7 се прикажани потребните елементи за графичко решавање на ЛП-задачата

$$\begin{aligned} \max f &= 2x_1 + x_2 \\ \text{р.о.}\ \ 2x_1 + x_2 &\le 32 \\ x_1 + x_2 &\le 24 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Екстремалните точки се $O(0,0)$, $A(16,0)$, $B(8,16)$ и $C(0,24)$. Функцијата на целта достигнува максимална вредност еднаква на 32 во секоја од точките $A(16,0)$ и $B(8,16)$, а со тоа и во секоја од точка од отсечката $\overline{AB}$.




Слика 5.7. Елементи за графичко решавање на ЛП-задача од пример 5.7 (автори)

Како што може да се забележи, векторот од коефициентите на функцијата на целата $c = (2,1)$ е еднаков (како таков воедно линеарно зависен) со првата редица на матрицата од коефициентите пред променливите во главните ограничувања (т.е. коефициентите пред $x_1$ и $x_2$ кај првото ограничување). Ако на дадената ЛП-задача се примени симплекс методот ги добиваме следните резултати.

[22] Бројот на итерации кај симплекс методот не може однапред да се одреди.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 5.19. Почетната симплекс табела за пример 5.7 (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 32 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 24 |
| $-2$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 |

Ако за базична колона се избере $P_1$, тогаш веќе во првата итерација ќе се добие симплекс табела во терминален облик (табела 5.20), од која се добива решението $A(16,0)$.

Табела 5.20. Прва итерација при базична колона $P_1$ (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 16 |
| | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 8 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 32 |

Ако пак за базична колона се избере $P_2$, тогаш симплекс табела во терминален облик ќе се добие во втора итерација и тоа е табелата 5.21, од која се добива решението $B(8,16)$.

Табела 5.21. Втора итерација при базична колона $P_2$ (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | 0 | 1 | $-1$ | 8 |
| $P_2$ | 0 | 1 | $-1$ | 2 | 16 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 32 |

Во случај на поголем број на променливи и ограничувања тешко се воочува дека векторот од коефициентите на функцијата на целта не е линеарна комбинација на помалку од $r = \mathrm{rank}(\mathbf{A})$ редици на матрицата $\mathbf{A}$, а практичните проблеми не ја исклучуваат можноста од појава токму на вакви ситуации. Ова особено треба да се има предвид при користење на различни софтверски алатки наменети за решавање на ЛП-задачи. Нашето искуство покажува дека, различни апликации може дадат различни решенија на една иста ЛП-задача. Најкарактеристичен пример се алатките Solver вградени во MS Excel[23] и LibreOffice Calc. И двете алатки поддржуваат решавање на ЛП-задачи со примена на симплекс методот. Но, доколку дадена ЛП-задача има повеќе оптимални решенија, овие две алатки може да дадат различни решенија.

### 5.3.4. ЛП-задачи што немаат оптимално решение

Ако допуштената област не е ограничена, тогаш дадена ЛП-задача може и да нема оптимално решение. При нејзино решавање со симплекс методот, овој случај се јавува доколку при формирање на симплекс табелите се стигни до табела која не е во терминален облик но која, и покрај тоа што има негативни индикатори, не може понатаму да се трансформира поради неможност да се лоцираат позитивни количници за ниту една од колоните што содржат негативен индикатор. Во овој случај постапката завршува и одговорот на поставената ЛП-задача е дека таа нема оптимално решение.

[23] Во глава 7 ќе го опишеме начинот на користењето на MS Excel за решавање на ЛП-задачи. Постапката е слична и за LibreOffice/OpenOffice Calc.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Пример 5.8.** Да се навратиме на пример 4.16 (заедно со пример 4.26)

$$\max f = 5x_1 + x_2$$
$$\text{p.o. } -x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Ја формираме следната симплекс табела.

Табела 5.22. Почетната симплекс табела за пример 5.8 (автори)

| $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $2$ |
| $1$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $1$ |
| $-5$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ |

Ако за базична се земе првата колона, тогаш базичниот коефициент ќе биде оној во втората редица од оваа колона и следната симплекс ќе биде табела 5.23.

Табела 5.23. Симплекс табела од прва итерација при избор на колона $P_1$ (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $-3$ | $1$ | $1$ | $3$ |
| $P_1$ | $1$ | $-4$ | $0$ | $1$ | $3$ |
| | $0$ | $-21$ | $0$ | $5$ | $5$ |

Табела 5.23 не може да се трансформира понатаму. Имено, единствен негативен индикатор е оној во втората колона, но за неа не може да се формираат позитивни количници. Оваа симплекс табела кореспондира на екстремалната точка $A(1,0)$ на допуштената област (види слика 4.14 од претходна глава). За оваа точка не постои раб преку кој ќе се стигни до друга екстремална точка во која функцијата на целта е со поголема вредност од онаа во $A$.

Ако за базична се земе втората колона, тогаш базичниот коефициент ќе биде оној во првата редица од оваа и следната симплекс табела ќе биде табела 5.24.

Табела 5.24. Симплекс табела од прва итерација при избор на колона $P_2$ (автори)

| | $P_1$ | $P_2$ | $s_1$ | $s_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_2$ | $-1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $2$ |
| | $-3$ | $0$ | $4$ | $1$ | $9$ |
| | $-6$ | $0$ | $1$ | $0$ | $2$ |

Ни табела 5.24 не може да се трансформира понатаму бидејќи единствен негативен индикатор е оној во првата колона, а за неа не може да се формираат позитивни количници. Оваа симплекс табела кореспондира на екстремалната точка $B(0,2)$ на допуштената област. За оваа точка исто така не постои раб преку кој ќе се стигни до друга екстремална точка во која функцијата на целта е со поголема вредност од онаа во $B$.

## 5.4. Дополнителни напомени

Верзијата на симплекс методот што ја опишавме претходно е една од најчестите верзии што се применува во поновата литература кога станува збор за основниот симплекс метод, иако распоредот на елементите во компактниот облик (5.11) (табела 5.2) може да биде различен и/или табелата да содржи некои дополнителни елементи. Овие видови на табели може да се најдат, на пример, во (Bronson, 1982), (Metzger, 1958), (Sullivan & Mizrahi, 2004), (Taha, 2017) и (Крстев и др., 2018а). Последниов наслов

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

содржи и дополнителни примери за практични задачи што математички може да се формулираат како ЛП-задачи.

Кај одделни ЛП-задачи може да отсуствува конвергенцијата на симплекс методот. Овие случаи може да се јават доколку постојат дегенерирани базни решенија (во смисла на дефинициите 4.3 и 4.5). Алтернативни верзии на симплекс методот што се справуваат со овие случаи се т.н. Big-M методот и двофазниот симплекс метод. Повеќе информации за овие методи може да се најдат, на пример, во (Bazaraa et al., 2010), (Stanimirović et al., 2007) и (Taha, 2017).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 6. ТРАНСПОРНИ ЗАДАЧИ

Класичните транспортни задачи се специјален случај на ЛП-задачи. Тие се првите проблеми на кои се применети методите на линеарното програмирање. Историски, транспортен проблем прв разгледувал францускиот математичар Г. Монж во 1781. На овој проблем, кој се однесува на тоа како со најмал можен труд да се пренесе земја или шут од една до друга локација, се надоврзува Л. В. Канторивич и формулира транспортен проблем што низ литературата е познат како проблем на Монж-Канторович. Проблем поврзан со минимизација на километражата при транспорт на суровини преку железнички сообраќај и начини на решавање е разгледуван и од страна на А. Н. Толстој во 1930[24]. Иако класичните транспортни задачи се ЛП-задачи, за нив се разработени специјални методи за решавање. Она што денес во литературата се подразбира под „основен транспортен проблем“ и специјален метод за негово решавање се опишани од Ф. Л. Хичкок во 1941, па низ литературата методот е уште познат и како метод на Хичкок.

## 6.1. Дефиниција на основен транспортен проблем

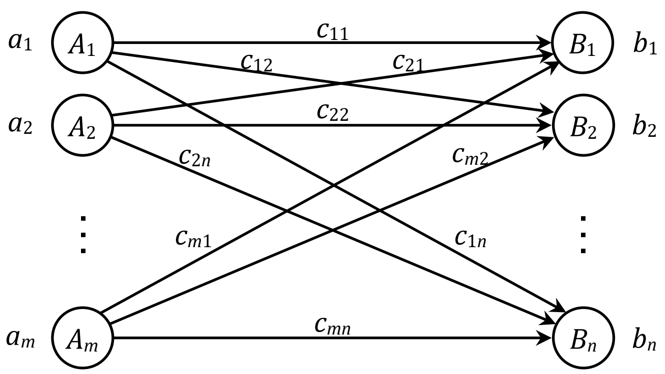
### 6.1.1. Опис на основниот транспортен проблем

**Формулација:** Одредена количина на ресурси што се состои од хомогени[25] единици од ист вид е распоредена во $m$ различни локации $A_1, A_2, \dots, A_m$, во познати количини од по $a_1, a_2, \dots, a_m$ единици, соодветно. Ресурсите во целост треба да се пренесат до $n$ различни локации $B_1, B_2, \dots, B_n$, и тоа во количини $b_1, b_2, \dots, b_n$, соодветно. Ако трошоците за транспорт по единица, од локација $A_i$ до локацијата $B_j$, изнесува $c_{ij}$, $i = 1,2, \dots, m$, $j = 1,2, \dots, n$, како треба да се организира распределбата на ресурсите од локациите $A_1, A_2, \dots, A_m$ до локациите $B_1, B_2, \dots, B_n$ така што вкупниот транспортен трошок да биде минимален?

Локациите $A_1, A_2, \dots, A_m$ уште се нарекуваат *извори*, *испратни пунктови* или *исходишта*. Во практични задачи тоа може да бидат места за прибирање на суровини, магацини, складишта, стоваришта, производни фабрики, итн. Локациите $B_1, B_2, \dots, B_n$ се нарекуваат *понори*, *приемни пунктови* или *дестинации*. Во практични задачи тоа може да бидат магацини, продавници, производни фабрики, итн. Вредноста:

- $a_i$ се нарекува *понуда* на изворот $A_i$, $i = 1,2, \dots, m$,
- $b_j$ се нарекува *побарувачка* на понорот $B_j$, $j = 1,2, \dots, n$.

Транспортниот проблем обично се претставува со следниот дијаграм.




Слика 6.1. Графички приказ на транспортниот проблем (автори)

[24] Во (Schrijver, 2002) е дадена анализа на изворните резултати на А. Н. Толстој и наведено е дека тие резултати претставуваат оптимално решение.

[25] Еднородни и неделиви единици од ист вид. Тоа може, на пример, да бидат производи од ист вид или пак некоја суровина што може да се подели на делови со ист волумен или тежина.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Стрелките во дијаграмот на слика 6.1 се смета дека се поставени од секој извор до секој понор. Секоја од нив означува директната врска, т.е. дека се врши транспорт на ресурси, од еден извор до еден понор. На секоја стрелка ѝ е придружен соодветниот транспортен трошок $c_{ij},\ i = 1,2, \dots, m,\ j = 1,2, \dots, n$. Во практични задачи може да не постои некоја од директните врски, т.е. да нема транспорт од некој понор до некој извор. На овие директни врски им се придружува коефициент $c_{ij} = 0$.

Ако

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.1}$$

т.е. ако вкупната понуда на изворите е еднаква на вкупната побарувачка на понорите, тогаш за транспортниот проблем велиме дека е *затворен* или *избалансиран*. Во спротивно, ако вкупната понуда е помала од вкупната побарувачка, т.е. ако важи

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.2}$$

или обратно, ако вкупната понуда е поголема од вкупната побарувачка, т.е. ако важи

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.3}$$

за транспортниот проблем велиме дека е *отворен* или *неизбалансиран*.

Методот за решавање на транспортен проблем се однесува исклучиво на затворени транспортни проблеми. Во случај на отворен транспортен проблем, за истиот да се реши, прво треба да се изврши негово затворање (балансирање). Тоа се прави на следниот начин.

1. Ако вкупната понуда на изворите е помала од вкупната побарувачка на понорите, се воведува фиктивен извор $A_{m+1}$, со „понуда“

   $$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{6.2'}$$

   а единечните транспортни трошоци од новиот извор до секој од понорите се зема да бидат еднакви на 0,

   $$c_{m+1,j} = 0, \qquad j = 1,2, \dots, n. \tag{6.2''}$$

2. Ако вкупната понуда на изворите е поголема од вкупната побарувачка на понорите, се воведува фиктивен понор $B_{n+1}$, со „побарувачка“

   $$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.3'}$$

   а единечните транспортни трошоци од секој извор до новиот понор се зема да бидат еднакви на 0,

   $$c_{i,n+1} = 0, \qquad i = 1,2, \dots, m. \tag{6.3''}$$

### 6.1.2. Табеларно претставување на основниот транспортен проблем

Ако при претходниот опис на основниот транспортен проблем $x_{ij}$ е количината на единици што треба да се достави од изворот $A_i$ до понорот $B_j$, $i = 1,2, \dots, m,\ j = 1,2, \dots, n$, тогаш транспортниот проблем може да се претстави со помош на табела како следната

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.1. Транспортна табела (автори)

| понори / извори | $B_1$ | $B_2$ | $\cdots$ | $B_n$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | $\cdots$ | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | $\cdots$ | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | $\cdots$ | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| **побарува** | $b_1$ | $b_2$ | $\cdots$ | $b_n$ | |

Во практични задачи, во полето долу десно се внесува некоја од релациите (6.1), (6.2) или (6.3). Доколку транспортниот проблем е отворен, тогаш се формира нова транспортна табела кон која,

- доколку важи релацијата (6.2), пред последната редица се додава редица што ќе кореспондира на фиктивниот извор $A_{m+1}$, во која $a_{m+1}$ и $c_{m+1,j}$, $j = 1,2, \ldots, n$, ќе бидат определени со (6.2′) и (6.2″), а за вредностите $x_{m+1,j}$ треба да важи

$$x_{m+1,j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\,, \qquad j = 1,2, \ldots, n, \tag{6.2‴}$$

- доколку пак важи релацијата (6.3), пред последната колона се додава колона што ќе кореспондира на фиктивниот понор $B_{n+1}$, во која $b_{n+1}$ и $c_{i,n+1}$ $i = 1,2, \ldots, m$ , ќе бидат определени со (6.3′) и (6.3″), а за вредностите $x_{i,n+1}$ треба да важи

$$x_{i,n+1} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,, \qquad i = 1,2, \ldots, m. \tag{6.3‴}$$

### 6.1.3. Математичка формулација на основниот транспортен проблем

При условите во транспортниот проблем имаме:

1. За секоја од количините единици $x_{ij}$ што треба да се пренеси од изворот $A_i$ до понорот $B_j$, треба да важи:
   - $x_{ij} \geq 0$, $i = 1,2, \ldots, m$, $j = 1,2, \ldots, n$,
   - бидејќи ресурсите се состојат од хомогени единици од ист вид, вредноста $x_{ij}$ треба да биде *целобројна* за секои $i = 1,2, \ldots, m$, $j = 1,2, \ldots, n$,
   - вкупниот транспортен трошок ќе изнесува

$$\begin{aligned} f = \quad & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} \\ + \quad & c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots + c_{2n}x_{2n} \\ & \cdots \\ + \, & c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\,. \end{aligned}$$

2. Вкупниот број единици транспортирани од изворот $A_i$ $(i = 1,2, \ldots, m)$ изнесува $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}$ и тој треба да биде еднаков на понудата на изворот, т.е.

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} = a_i, \qquad i = 1,2, \ldots, m.$$

3. Вкупниот број единици што ќе се транспортираат до понорот $B_j$ $(j = 1,2, \ldots, n)$ ќе биде $x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj}$ и тој треба да е еднаков на побарувачката на понорот, т.е.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{mj} = b_j, \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Одговорот на прашањето поставено во транспортниот проблем сега може да се сведе на определување на *целобројни ненегативни* вредности $x_{ij}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$ што ќе претставуваат оптимално решение на ЛП-задача на минимизација од облик

$$\begin{aligned} \min\ f &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{p.o.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, \qquad i = 1,2,\dots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \qquad j = 1,2,\dots,n, \\ x_{ij} &\geq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Елементите на матрицата $\mathbf{A}$ од коефициентите пред променливите во главните ограничувања најлесно може да се воочат ако главните ограничувања се запишат како што следи:

$$\begin{array}{llll} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n} & & & = a_1, \\ & x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n} & & = a_2, \\ & \cdots & & \\ & & x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn} & = a_m, \\ & & & \\ x_{11}+ \qquad\qquad & x_{21}+\cdots & +x_{m1} & = b_1, \\ \quad x_{12}+ & \quad x_{22}+\cdots & \quad +x_{m2} & = b_2, \\ & \cdots & & \\ \qquad\quad x_{1n}+ & \qquad x_{2n}+ & \qquad +x_{mn} & = b_n. \end{array}$$

Од овие изрази се добива дека матрицата $\mathbf{A}$ е со димензија $(m+n) \times (mn)$ и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(m+n)\times(mn)}. \tag{6.5}$$

и соодветниот матричниот облик на (6.4) ќе биде

$$\begin{aligned} \min\ f &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{p.o.}\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

каде

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn}), \\ \mathbf{x} &= (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}), \\ \mathbf{b} &= (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Матрицата

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{m\times n}, \tag{6.7}$$

е т.н. *матрица на трошоци*.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Наместо со $\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn})$, вообичаено е и допуштените решенија да се претставуваат во матричен облик:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = [x_{ij}]_{m\times n}. \tag{6.8}$$

Векторот $\mathbf{x}$ и матрицата $X$ уште се нарекуваат *транспортен план* или *транспортен програм*, а оптималното решение,

$$X_{opt} = X^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^* & x_{m2}^* & \cdots & x_{mn}^* \end{bmatrix} = [x_{ij}^*]_{m\times n},$$

доколку постои, се нарекува *оптимален транспортен план* (*програм*).

Матриците $C$ и $X$, заедно, се со иста функција како и транспортната табела.

**Пример 6.1.** Нека во три извори $A_1$, $A_2$ и $A_3$ се сместени по $a_1 = 5000$, $a_2 = 7000$ и $a_3 = 8000$ единици од некој производ, соодветно, и нека тие единици треба да се транспортираат до четири понори $B_1$, $B_2$, $B_3$ и $B_4$, што имаат потреба од $b_1 = 4000$, $b_2 = 6000$, $b_3 = 4500$ и $b_4 = 5500$ единици од тој производ, соодветно. Трошоците $c_{ij}$ за транспорт од $A_i$ до $B_j$ по единица производ изнесуваат

$$c_{11} = 5, c_{12} = 3, c_{13} = 7, c_{14} = 2,\ c_{21} = 4, c_{22} = 5, c_{23} = 4, c_{24} = 5,$$
$$c_{31} = 4, c_{32} = 7, c_{33} = 5 \text{ и } c_{34} = 7.$$

Во овој случај ја имаме следната транспортна табела.

Табела 6.2. Транспортна табела за пример 6.1 (Sazdanović, 1988)

| ***понори*** / ***извори*** | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | **5** $x_{11}$ | **3** $x_{12}$ | **7** $x_{13}$ | **2** $x_{14}$ | 5000 |
| $A_2$ | **4** $x_{21}$ | **5** $x_{22}$ | **4** $x_{23}$ | **5** $x_{24}$ | 7000 |
| $A_3$ | **4** $x_{31}$ | **7** $x_{32}$ | **5** $x_{33}$ | **7** $x_{34}$ | 8000 |
| ***побарува*** | 4000 | 6000 | 4500 | 5500 | |

Вкупната понуда изнесува $5000 + 7000 + 8000 = 20000$, а вкупната побарувачка изнесува $4000 + 6000 + 4500 + 5500 = 20000$, што значи дека транспортниот проблем е затворен. Кореспондентната ЛП-задача е

$$\begin{aligned} \min\ f = {} & 5x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} \\ & +4x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34} \\ \text{p.o.}\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5000 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 7000 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 8000 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4000 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6000 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4500 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5500 \\ & x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Матрицата на трошоците и матрицата со која се опишуваат допуштените решенијата се

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}.$$

Овие матрици не може да се користат во матричната форма на транспортниот проблем!

Задржувајќи го изразот за функцијата на целта како претходно, матричниот облик ќе биде

$$\min\ f = 5x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24}$$
$$+4x_{31} + 7x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34}$$

$$\text{p.o.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5000 \\ 7000 \\ 8000 \\ 4000 \\ 6000 \\ 4500 \\ 5500 \end{bmatrix},$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3,4.$$

### 6.2. Особини на основниот транспортен проблем

Матрицата на трошоците $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ најчесто има ненегативни елементи, но тоа не е задолжително и, во општ случај, тоа нема да претставува големо нарушување во теориско разгледување и решавањето на транспортниот проблем. Следната теорема укажува на можноста за намалување на вредностите на елементите на $C$ на начин што тоа нема да влијае на оптималноста на функцијата на целта во (6.4) и со тоа, наместо да се работи со матрица на трошоци со големи вредности, да се работи со матрица што во секоја редица и секоја колона има по барем еден елемент еднаков на 0.

**Теорема 6.1.** Оптималноста на функцијата на целта во (6.4) не се менува ако на секој од елементите од иста редица или иста колона на транспортната матрица $C$ се додаде ист број.

**Доказ.** Нека $p_1, p_2, \cdots, p_m$ и $q_1, q_2, \cdots, q_n$ се произволни реални боеви и нека на секој елемент од $i$ –тата редица на матрицата $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ е додаден бројот $p_i$, а на секој елемент од $j$ –тата колона е додаден бројот $q_j$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Со тоа добиваме нова матрица $C'$ чии елементи ќе бидат

$$c'_{ij} = c_{ij} + p_i + q_j, \qquad i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n.$$

Тогаш

$$c_{ij} = c'_{ij} - (p_i + q_j), \qquad i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n,$$

па за функцијата на целта во (6.4) имаме

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_j x_{ij}.$$

Бидејќи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} q_j b_j,$$

следи дека

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{m}p_ia_i-\sum_{j=1}^{n}q_jb_j. \tag{6.9}$$

Со изразот

$$g=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}, \tag{6.10}$$

е дефинирана нова функција на целта на допуштената област во (6.4). Согласно (6.9), за новата функција на цел важи

$$f-g=\sum_{i=1}^{m}p_ia_i+\sum_{j=1}^{n}q_jb_j. \tag{6.11}$$

Собироците на десната страна во (6.11) не зависат од вредностите на променливите $x_{ij},\ i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$, што значи дека $f$ и $g$ се разликуваат за некоја константна вредност, па функцијата $f$ има минимум (максимум) во допуштеното решение $X'=[x'_{ij}]_{m\times n}$ ако, и само ако, $g$ има минимум (максимум) во $X'=[x'_{ij}]_{m\times n}$. ■

Имајќи ја предвид претходната теорема, при соодветен избор на вредности $p_1,p_2,\cdots,p_m$ и $q_1,q_2,\cdots,q_n$, секогаш може да се добие матрица $C'=[c'_{ij}]_{m\times n}$ во која секоја редица и секоја колона содржи барем еден елемент еднаков на 0. Натаму може да се продолжи со решавање на задачата (6.4) со нова функција на цел дадена со изразот (6.10). Ако за неа се определи оптимум, истиот ќе биде оптимум и за функцијата на целта $f$, а соодветната оптимална вредност на $f$ ќе се добие со помош на изразот (6.11).

**Теорема 6.2.** Транспортниот проблем има допуштено решение ако, и само ако, тој е затворен. Во тој случај, допуштената област е ограничено и затворено множество.

**Доказ.** Ако транспортниот проблем е опишан со (6.4) и има допуштено решение $X'=[x'_{ij}]_{m\times n}$, тогаш важат релациите

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x'_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x'_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

што значи дека транспортниот проблем е затворен.

Обратно, нека транспортниот проблем е затворен, нека

$$d=\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\ ,$$

и нека

$$\bar{x}_{ij}=\frac{a_ib_j}{d},\qquad i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n. \tag{6.12}$$

Ќе покажеме дека $\overline{X}=[\ \bar{x}_{ij}\ ]_{m\times n}$ е допуштено решение за ЛП-задачата (6.4).

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{d}=\frac{a_i}{d}\sum_{j=1}^{n}b_j\ =\frac{a_i}{d}d=a_i,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_ib_j}{d}=\frac{b_j}{d}\sum_{i=1}^{m}a_i\ =\frac{b_j}{d}d=b_j,\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

што значи дека се задоволени главните ограничувања во (6.4).

За да се покаже ненегативноста на вредностите во (6.12) прво да забележиме дека вредностите $a_1,a_2,\cdots,a_m$ и $b_1,b_2,\cdots,b_n$ се ненегативни. Природно се наметнува и тоа дека, барем една од вредностите $a_1,a_2,\cdots,a_m$ и барем една од вредностите $b_1,b_2,\cdots,b_n$ е позитивна, што значи дека и збирот $d$ е позитивен. Производите од облик

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$a_i b_j$, $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$, се исто така ненегативни, па и секоја од вредностите во (6.12) ќе биде ненегативна.

За да се покаже дека допуштената област во (6.4) е ограничено множество, да забележиме дека

$$0 \le x_{ij} \le a_i, \qquad \forall i = 1,2,\cdots,m, \tag{6.13}$$

$$0 \le x_{ij} \le b_j, \qquad \forall j = 1,2,\cdots,n. \tag{6.14}$$

Тогаш

$$0 \le x_{ij} \le \min\{a_i, b_j\}, \qquad \forall i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n.$$

Ставајќи $M = \max\{\min\{a_i, b_j\} | i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n\}$, се добива дека допуштената област во (6.4) се содржи во затворената топка од $\mathbb{R}^{mn}$ со центар во координатниот почеток и радиус $M$.

Дека допуштената област е и затворено множество следи од поопштата теорема 4.1. ■

**Теорема 6.3.** Функцијата на целта во (6.4) е ограничена на допуштената област.

**Доказ.** За да се покаже тврдењето во теоремата, собироците во функцијата на целта ги групираме по знак кој, поради $x_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$, ќе зависи само од знакот на соодветниот трошок $c_{ij}$. Имаме

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{c_{ij}>0} c_{ij}x_{ij} + \sum_{c_{ij}<0} c_{ij}x_{ij}.$$

Имајќи предвид дека транспортниот програм $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ мора да ги и задоволува главните ограничувања во (6.4), од последниот израз добиваме

$$f = \sum_{c_{ij}>0} c_{ij}x_{ij} + \sum_{c_{ij}<0} c_{ij}x_{ij} \le \sum_{c_{ij}>0} c_{ij}a_i + \sum_{c_{ij}<0} 0\cdot c_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \max\{0, c_{ij}\}a_i = M,$$

$$f = \sum_{c_{ij}>0} c_{ij}x_{ij} + \sum_{c_{ij}<0} c_{ij}x_{ij} \ge \sum_{c_{ij}>0} 0\cdot c_{ij} + \sum_{c_{ij}<0} c_{ij}a_i \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \min\{0, c_{ij}\}a_i = m.$$

Бидејќи $c_{ij}$, $i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$, и $a_1, a_2, \cdots, a_m$ се конечни вредности, вредностите $m$ и $M$ се исто така конечни, што значи дека функцијата на целта е ограничена и од горе, и од долу на допуштена област во (6.4). ■

**Теорема 6.4.** Затворен транспортен проблем има најмногу $m + n - 1$ линеарно независни главни ограничувања, а за матрицата $\mathbf{A}$ во (6.5) важи $rank(\mathbf{A}) = m + n - 1$.

**Доказ.** Ги собираме првите $m$ ограничувања во (6.4) и тој збир го одземаме од збирот на следните $n - 1$ ограничување. Согласно (6.1), ќе добиеме

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n.$$

Но левата страна на овој израз е еднаков на $\sum_{i=1}^{m} x_{in}$, т.е. овој израз е всушност последното од главните ограничувања, што значи дека тоа е линеарна комбинација на останатите $m + n - 1$ главни ограничувања во (6.4).

Според претходното следи дека $rank(\mathbf{A}) \le m + n - 1$. За да се покаже дека всушност важи равенство, доволно е да се покаже дека $\mathbf{A}$ содржи подматрица со ранг еднаков на $m + n - 1$. Таа подматрица на $\mathbf{A}$ можеме да ја формираме како што следи.

1. Ја отстрануваме последната редица на $\mathbf{A}$.
2. Ако $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2n}, A_{m1}, A_{m2}, \dots, A_{mn}$ се колоните на матрицата $\mathbf{A}$, нека

$$\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}, \dots, \overline{A}_{1n}, \overline{A}_{21}, \overline{A}_{22}, \dots, \overline{A}_{2n}, \overline{A}_{m1}, \overline{A}_{m2}, \dots, \overline{A}_{mn},$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

се кореспондентните колони што се добиваат со отстранување на последната редица, и нека $\widetilde{\mathbf{A}}$ е матрицата со колони

$$\overline{A}_{11}, \overline{A}_{12}, \dots, \overline{A}_{1n}, \overline{A}_{2n}, \dots, \overline{A}_{mn},$$

што значи гиземаме првите $n$ колони и потоа секоја $n$ –та наредна колона.

Вака формираната матрица е квадратна матрица од ред $n+m-1=m+n-1$ и важи

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{I}_m \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{O}_{(n-1)\times m} \end{bmatrix},$$

каде $\mathbf{I}_m$ и $\mathbf{I}_{n-1}$ се единичните матрици од $m$ –ти и $(n-1)$ –ви ред, $\mathbf{O}_{(n-1)\times m}$ е нулта матрица, а $\mathbf{E}_1$ е матрица со димензија $m \times (n-1)$ во која сите елементи од првата редица се еднакви на 1, а останатите елементи се еднакви на 0. Матрицата $\widetilde{\mathbf{A}}$ е еквивалентна со матрицата

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{O}_{(n-1)\times m} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix},$$

па ќе важи $\operatorname{rank}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \operatorname{rank}(\overline{\mathbf{A}})$. $\overline{\mathbf{A}}$ е долнотриаголна квадратна матрица со сите елементи по главна дијагонала еднакви на единица. Како таква таа е инверзибилна, па нејзиниот ранг е еднаков на нејзиниот ред, што значи дека $\operatorname{rank}(\widetilde{\mathbf{A}}) = \operatorname{rank}(\overline{\mathbf{A}}) = m+n-1$. ■

Согласно претходната теорема, базните изводливи решенија на затворен транспортен проблем имаат најмногу $m+n-1$ елементи различни од 0, а согласно теоремите 6.2 и 6.3, затворен транспортен проблем има оптимално решение. Имајќи ја предвид теорема 4.9, ја имаме следната теорема.

**Теорема 6.5.** Секој затворен транспортен проблем има оптимално решение со најмногу $m+n-1$ позитивни компоненти.

Следното тврдење што ќе го наведеме без доказ[26], се однесува на условот под кој оптималното решение има целобројни компоненти.

**Теорема 6.6.** Ако (6.4) е затворен транспортен проблем и притоа секоја од вредностите $a_i$, $i=1,2,\dots,m$ и $b_j$, $j=1,2,\dots,n$, е целобројна, тогаш секоја од базните променливи во однос на било која база се целобројни.

### 6.3. Решавање на затворен транспортен проблем

За решавање на затворен транспортен проблем може да се примени симплекс методот, но тоа би било нерационално поради големиот број на променливи. Поради ова, за решавање на транспортните проблеми е креиран метод со кој пресметките значително се намалуваат. Методот на решавање се состои од два фази:

- избор на почетно одржливо решение,
- проверка на оптималноста на почетното одржливо решение и, доколку е неопходно, негово оптимизирање.

#### 6.3.1. Определување на почетно базно одржливо решение

Почетно одржливо решение на даден транспортен проблем може да се избере на различни начини. На пример, едно допуштено решение е решението $\overline{X} = [\,\overline{x}_{ij}\,]_{m\times n}$ конструирано во доказот на теорема 6.2. Но тоа најчесто не го задоволува условот за целобројност на неговите компоненти и не содржи најмногу $m+n-1$ компоненти различни од 0. Најчесто користени методи за конструирање на почетни базни одржливи решенија чии компоненти се целобројни и најмногу $m+n-1$ од нив различни од 0 се:

- методот на северозападен агол,
- методот на минимални трошоци, и

[26] За доказ на теорема 6.6. упатуваме на (Sinha, 2006, теорема 19.4 и последица 19.5)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- методот на максимални разлики или т.н. Вогелов апроксимативен метод.

Независно од тоа кој од овие методи ќе се користи, за дадениот транспортен проблем се формира т.н. *почетна транспортна табела* на истиот начин како табелата 6.1, но така што првично во неа да се внесени само вредностите од матрицата на трошоците. Делот од табелата 6.1 што припаѓа и на редицата што кореспондира на изворот $A_i$ и на колоната што кореспондира на понорот $B_j$ се смета за една целина и се нарекува *поле* $(i, j)$, или *ќелија* $(i, j)$. Со секој од методите се врши пополнување на дел од полињата (распоредување на ресурсите) во почетната транспортна табела според однапред зададени правила специфични за секој метод поодделно.

При описот на методите претпоставуваме дека е зададен затворен транспортен проблем со $m$ извори $I_1, I_2, \dots, I_m$, со понуда $a_1, a_2, \dots, a_m$, соодветно, $n$ понори $P_1, P_2, \dots, P_n$, со побарувачка $b_1, b_2, \dots, b_n$, соодветно, и матрица на трошоци $C = [c_{ij}]_{m\times n}$.

**Пример 6.2.** За илустрација на методите што ќе ги разгледаме ќе го користиме транспортниот проблем со четири извори $I_1$, $I_2$, $I_3$ и $I_4$, чии понуди се $a_1 = 400$, $a_2 = 600$, $a_3 = 300$ и $a_4 = 700$, соодветно, и пет понори $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$, со побарувачки $b_1 = 350$, $b_2 = 150$, $b_3 = 350$, $b_4 = 500$ и $b_5 = 650$, соодветно, и матрица на трошоци

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 5 & 9 \\ 9 & 11 & 4 & 7 & 9 \\ 11 & 6 & 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Почетната транспортна табела за овој транспортен проблем ќе биде следната табела.

Табела 6.3. Транспортна табела за пример 6.2 (Sazdanović, 1988)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** | 400 |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | 350 | 150 | 350 | 500 | 650 | |

Дадениот транспортен проблем е затворен бидејќи

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 400 + 600 + 300 + 700 = 2000,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 350 + 150 + 350 + 500 + 650 = 2000.$$

### 6.3.1.1. Метод на северозападен агол

За да се определи почетно одржливо решение според методот на северозападен се поаѓа од полето $(1,1)$, т.е. полето што се наоѓа во северозападниот агол на почетната транспортна табела. Во ова поле се внесува вредноста

$$\overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\},$$

а вредностите $a_1$ во колоната „понудува“ и вредноста $b_1$ во редицата „побарува“ се намалуваат за $\overline{x}_{11}$. Бидејќи

$$\overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = a_1 \quad \text{или} \quad \overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = b_1,$$

можни се следните три случаи:

1. $\overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = a_1 < b_1$. Во овој случај вредноста $a_1$ во последната колона ќе се намали на 0. Ова значи дека понудата на изворот $I_1$ е целосно исцрпена и понатаму кон $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ и $P_5$ не е можен транспорт на ресурси, па останатите

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

полиња од редица што соодветствуваат на изворот $I_1$, т.е. полињата $(1,2), \dots, (1, n)$, натаму не се пополнуваат (оваа редица ја исклучуваме). Во примерите што ќе ги разгледаме, исклучувањето ќе биде нагласено со привремено затемнување на редицата.

2. $\overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = b_1 < a_1$. Во овој случај вредноста $b_1$ во последната редица ќе се намали на 0, што значи дека побарувачката на понорот $P_1$ е целосно задоволена и кон овој понор веќе не се врши транспорт од ниту еден од изворите, т.е. колоната $P_1$ натаму се исклучува.
3. $\overline{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = a_1 = b_1$. Во овој случај, и вредноста $a_1$ во последната колона, и вредноста $b_1$ во последната редица, ќе се намалат на 0. Ова значи дека понудата на изворот $I_1$ е целосно исцрпена и побарувачката на понорот $P_1$ е целосно задоволена, и понатаму не се врши транспорт ниту од $I_1$ кон некој од понорите $P_2, \dots, P_n$, ниту од некој од изворите $I_2, \dots, I_m$ кон понорот $P_1$. Изворот $I_1$ и понорот $P_1$ натаму се исклучуваат.

По завршувањето на претходната постапка се исклучува редицата што кореспондира на изворот $I_1$ или колоната што кореспондира на понорот $P_1$, или пак и двете. Остатокот од табелата може да се смета за нова почетна табела за која се повторува претходната постапка со некое од полињата $(2,1)$ за случајот 1, $(1,2)$ за случајот 2, или пак $(2,2)$ за случајот 3. Тоа ќе претставува „ново“ поле во северозападен агол. На ваков начин табелата се пополнува се додека сите вредности во последната колона и последната редица не се намалат на 0, што е можно согласно претпоставката дека транспортниот проблем е затворен. Вкупниот број на полиња во кои е внесена позитивна вредност не е поголем од $m + n - 1$.

**Пример 6.3.** Со методот на северозападен агол ќе го определиме почетното одржливо решение на транспортниот проблем од пример 6.2.

**Чекор 1.** Бидејќи $\overline{x}_{11} = \min\{400, 350\} = 350$, во полето $(1,1)$ внесуваме 350, а вредностите 350 најдолу во колоната $P_1$ и 400 крајно десно во редицата $I_1$ ги намалуваме за $\overline{x}_{11} = 350$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.4. Прв чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ 50 |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | 150 | 350 | 500 | 650 | |

Бидејќи во последната редица кај колоната $P_1$ добивме вредност 0, во оваа колона натаму не се вршат измени и неа привремено ја затемнивме.

**Чекор 2.** Постапката ја повторуваме за последната табела, но без затемнетата колона и со непречкртаните вредности во последна колона, што значи дека сега поле во северозападен агол е полето $(1,2)$. Бидејќи $x_{12} = \min\{50, 150\} = 50$, во ќелијата $(1,2)$ внесуваме 50, а вредностите 150 најдолу во колоната $P_1$ и 50 крајно десно во редицата $I_1$ (непречкртаната вредност), ги намалуваме за $\overline{x}_{12} = 50$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.5. Втор чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ 100 | 350 | 500 | 650 | |

**Чекор 3.** Во последната табела, без затемнетите колона и редица, но со непречкртани вредности во последна колона, поле во северозападен агол е $(2{,}2)$. Бидејќи $\overline{x}_{22} = \min\{600{,}100\} = 100$, во полето $(2{,}2)$ внесуваме 100, а вредностите 100 најдолу во колоната $P_2$ и 600 крајно десно во редицата $I_2$, ги намалуваме за $\overline{x}_{22} = 100$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.6. Трет чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** | **5** | **9** | ~~600~~ 500 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ ~~100~~ 0 | 350 | 500 | 650 | |

**Чекор 4.** Во последната табела, ново поле во северозападен агол е $(2{,}3)$. Бидејќи $\overline{x}_{23} = \min\{500{,}350\} = 350$, во полето $(2{,}3)$ внесуваме 350, а вредностите 350 најдолу во колоната $P_3$ и 500 крајно десно во редицата $I_2$ ги намалуваме за $\overline{x}_{23} = 350$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.7. Четврти чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** 350 | **5** | **9** | ~~600~~ ~~500~~ 150 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ ~~100~~ 0 | ~~350~~ 0 | 500 | 650 | |

**Чекор 5.** Во последната табела, ново поле во северозападен агол е $(2{,}4)$. Бидејќи $\overline{x}_{24} = \min\{150, 500\} = 150$, во полето $(2{,}4)$ внесуваме 150, а вредностите 350 најдолу во

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

колоната $P_3$ и 500 крајно десно во редицата $I_2$ ги намалуваме за $\overline{x}_{24} = 150$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.8. Петти чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| ***понори*** ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** 350 | **5** 150 | **9** | ~~600~~ ~~500~~ ~~150~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ ~~100~~ 0 | ~~350~~ 0 | ~~500~~ 350 | 650 | |

**Чекор 6.** Во последната табела, ново поле во северозападен агол е $(3,4)$. Бидејќи $\overline{x}_{34} = \min\{300, 350\} = 300$, во полето $(3,4)$ внесуваме 300, а вредностите 350 најдолу во колоната $P_4$ и 300 крајно десно во редицата $I_3$ ги намалуваме за $\overline{x}_{34} = 300$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.9. Шести чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| ***понори*** ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** 350 | **5** 150 | **9** | ~~600~~ ~~500~~ ~~150~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** 300 | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ ~~100~~ 0 | ~~350~~ 0 | ~~500~~ ~~350~~ 50 | 650 | |

**Чекор 7.** Во последната табела, ново поле во северозападен агол е $(4,4)$. Бидејќи $\overline{x}_{44} = \min\{700, 50\} = 50$, во полето $(4,4)$ внесуваме 50, а вредностите 50 најдолу во колоната $P_4$ и 700 крајно десно во редицата $I_4$ ги намалуваме за $\overline{x}_{44} = 50$, по што табелата ќе се трансформира во следната табела.

Табела 6.10. Седми чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на северозападен агол (автори)

| ***понори*** ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | ~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** 350 | **5** 150 | **9** | ~~600~~ ~~500~~ ~~150~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** 300 | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** 50 | **11** | ~~700~~ 650 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ ~~100~~ 0 | ~~350~~ 0 | ~~500~~ ~~350~~ ~~50~~ 0 | 650 | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Чекор 8.** Во последната табела непополнето остана само полето $(4{,}5)$ и во него треба да се внеси вредноста $\overline{x}_{45} = \min\{650, 650\} = 650.$

При рачно определување на почетното одржливо решение не се врши затемнување на редиците и колоните. Наместо тоа во полињата каде понатаму не се вршат промени се става некој од знаците -, / или x. Не се врши ни пречкртување на вредности во крајната десна колона и најдолната редица. Вообичаено, прво странично десно од табелата се препишуваат соодветните вредности од крајната десна колона, а под секоја колона соодветните вредности од најдолната редица, или се постапува како претходно, но така што тоа да може лесно да се отстрани за понатамошни пресметки од друг вид. Тоа се прави и за претходно внесените знаци -, / или x. Вообичаениот краен изглед на табелата е прикажан во табела 6.11.

Табела 6.11. Конечен облик на транспортната табела за пример 6.2 по определување на почетното одржливо решение според методот на северозападен агол (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5**<br>350 | **7**<br>50 | **8** | **3** | **1** | 400<br>~~400~~ ~~50~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4**<br>100 | **9**<br>350 | **5**<br>150 | **9** | 600<br>~~600~~ ~~500~~ ~~150~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7**<br>300 | **9** | 300<br>~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9**<br>50 | **11**<br>650 | 700<br>~~700~~ ~~650~~ 0 |
| ***побарува*** | 350<br>~~350~~ 0 | 150<br>~~150~~ ~~100~~ 0 | 350<br>~~350~~ 0 | 500<br>~~500~~ ~~350~~ ~~50~~ 0 | 650<br>~~650~~ 0 | |

Но може последната редица и колона да се изостават.

Согласно табела 6.11, почетното одржливо решение е

$$\overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 350 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 350 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 650 \end{bmatrix},$$

а вредноста на функцијата на целта во ова решение е

$$f = 5 \cdot 350 + 7 \cdot 50 + 4 \cdot 100 + 9 \cdot 350 + 5 \cdot 150 + 7 \cdot 300 + 9 \cdot 50 + 11 \cdot 650 = \boxed{16100}.$$

### 6.3.1.2. Метод на минимални трошоци

При определување на почетно одржливо решение со методот на северозападен агол воопшто не се земаат предвид поединечните трошоци за транспорт. Од овие причини, методот на северозападен агол најчесто резултира со почетно одржливо решение кое, од аспект на барањето вкупниот транспортен трошок да биде најмал, е најнеповолно. Во почетното одржливо решение определено во пример 6.2, најголема количина е внесена во полето $(4{,}5)$ иако, од полињата во кои се распределени ресурсите, тоа е со најголем транспортен трошок. Овој недостаток на методот на северозападен агол до некаде се надминува со т.н. методот на минимални коефициенти (трошоци) кој овозможува определување на „поповолно“ почетно одржливо решение.

При пополнувањето на почетната транспортна табела преку методот на најмали трошоци поаѓаме од полето со најмал трошок

$$c_{rs} = \min\{c_{ij} \big| i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n\}.$$

Во слободниот дел од ова поле се внесува вредноста

$$\overline{x}_{rs} = \min\{a_r, b_s\},$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

а вредностите $a_r$ во колоната „понудува“ и вредноста $b_r$ во редицата „побарува“ се намалуваат за $\overline{x}_{rs}$. Слично како кај методот на северозападен агол, можни се следните три случаи:

1. $\overline{x}_{rs} = \min\{a_r, b_s\} = a_r < b_s$. Во овој случај вредноста $a_r$ во последната колона ќе се намали на 0 и понатаму не може да се распределуваат ресурси во останатите полиња од редицата што кореспондира на изворот $I_r$, па оваа редица натаму ја исклучуваме.
2. $\overline{x}_{rs} = \min\{a_r, b_s\} = b_s < a_r$. Во овој случај вредноста $b_s$ во последната редица ќе се намали на 0 и понатаму не може да се распределуваат ресурси во останатите полиња од колоната што кореспондира на понорот $P_s$, па оваа колона натаму ја исклучуваме.
3. $\overline{x}_{rs} = \min\{a_r, b_s\} = a_r = b_s$. Во овој случај, и вредноста $a_r$ во последната колона, и вредноста $b_s$ во последната редица, ќе се намалат на 0 и понатаму, во останатите полиња од редицата што кореспондира на изворот $I_r$ и од колоната што кореспондира на понорот $P_s$, не може да се распределуваат ресурси. Оваа редица и оваа колона натаму ги исклучуваме.

Понатаму постапката се повторува со најмалиот од останатите елементи од матрицата на трошоци, а ќе заврши тогаш кога сите вредности во последната колона и последната редица не се намалат на 0. И во овој случај вкупниот број на полиња во кои е внесена позитивна вредност не е поголем од $m + n - 1$.

**Пример 6.4.** Со методот на минимални трошоци ќе го определиме почетното одржливо решение на транспортниот проблем од пример 6.2.

**Чекор 1.** Полето од табелата во пример 6.2 со најмал трошок (еднаков на 1) е $(1,5)$. Во него внесуваме $\overline{x}_{15} = \min\{400, 650\} = 400$, а вредностите 650 во колоната $P_5$ и 400 во редицата $I_4$ ги намалуваме за $\overline{x}_{15} = 400$. Тогаш новата вредност во редицата $I_4$ и последната колона ќе биде еднаква на 0 и оваа редица понатаму ја исклучуваме (слично како кај методот на северозападен агол исклучените редици и колони привремено ќе бидат се затемнети). На тој начин ја добиваме следната табела.

Табела 6.12. Прв чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | 350 | 150 | 350 | 500 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 2.** Кај незатемнетите полиња од претходната табела, најмал трошок е 2 и тој одговара на полето $(2,1)$. Во ова поле внесуваме $\overline{x}_{21} = \min\{600,350\} = 350,$ а вредностите 350 во колоната $P_1$ и 600 во редицата $I_2$ ги намалуваме за $\overline{x}_{31} = 350$. Со тоа претходната табела се трансформира во следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.13. Втор чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** | **9** | ~~600~~ 250 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | 150 | 350 | 500 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 3.** Кај незатемнетите ќелии од претходната табела, најмалиот трошок е 4 и тој одговара на две полиња: $(2,2)$ и $(3,3)$. Бидејќи овие две полиња не припаѓаат ниту на иста редица, ниту на иста колона[27], можеме истовремено да ги пополниме: полето $(2,2)$ со $\overline{x}_{22} = \min\{250,150\} = 150$, а полето $(3,3)$ со $\overline{x}_{33} = \min\{300,350\} = 300$. Притоа, вредностите 150 најдолу во колоната $P_1$ и непречкртаната вредност 250 во редицата $I_2$ ги намалуваме за $\overline{x}_{22} = 150$, а вредностите 350 најдолу во колоната $P_3$ и вредност 300 во редицата $I_3$, ги намалуваме за $\overline{x}_{33} = 300$. На тој начин претходната табела се трансформира во следната табела.

Табела 6.14. Трет чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** | **9** | ~~600~~ ~~250~~ 100 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ 0 | ~~350~~ 50 | 500 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 4.** Кај незатемнетите ќелии од претходната табела, најмал трошок е 5 и тој одговара на полето $(2,4)$. Во него внесуваме $\overline{x}_{24} = \min\{100,500\} = 100$, а вредностите 500 најдолу во колоната $P_4$ и непречкртаната вредност 100 во редицата $I_2$ (и последна колона) ги намалуваме за $\overline{x}_{24} = 100$. Со тоа претходната табела се трансформира во следната табела.

[27] Ако двете полиња припаѓаат на иста редица или иста колона, тогаш прво се пополнува полето во кое може да се внесе поголема вредност.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.15. Четврти чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| извори \ понори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** 100 | **9** | ~~600~~ ~~250~~ ~~100~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ 0 | ~~350~~ 50 | ~~500~~ 400 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 5.** Кај незатемнетите ќелии од претходната табела, најмал трошок е 7 и тој одговара на полето $(4{,}3)$. Во него внесуваме $\overline{x}_{43} = \min\{700, 50\} = 50$, а вредностите 50 најдолу по колоната $P_3$ и вредноста 700 до редицата $I_4$ ги намалуваме за $\overline{x}_{24} = 50$. Со тоа претходната табела се трансформира во следната табела.

Табела 6.16. Петти чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| извори \ понори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** 100 | **9** | ~~600~~ ~~250~~ ~~100~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** 50 | **9** | **11** | ~~700~~ 650 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ 0 | ~~350~~ ~~50~~ | ~~500~~ 400 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 6.** Од незатемнетите полиња од претходната табела, најмал трошок е 9 и тој одговара на полето $(4{,}4)$. Во него внесуваме $\overline{x}_{44} = \min\{650{,}400\} = 400$, а вредностите 400 во колоната $P_4$ и вредноста 650 во редицата $I_4$ ги намалуваме за $\overline{x}_{44} = 400$. Со тоа претходната табела се трансформира во следната табела.

Табела 6.17. Шести чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| извори \ понори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** 100 | **9** | ~~600~~ ~~250~~ ~~100~~ 0 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** 50 | **9** 400 | **11** | ~~700~~ ~~650~~ 250 |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | ~~150~~ 0 | ~~350~~ ~~50~~ | ~~500~~ ~~400~~ 0 | ~~650~~ 250 | |

**Чекор 7.** Слично како кај методот на северозападен агол, останува да се пополни уште полето (4,5), во кое сега ја впишуваме вредноста $\overline{x}_{45} = \min\{250, 250\} = 250$. На тој

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

начин, крајниот изглед на табелата по завршување на постапката, ќе биде од како оној во табела 6.18.

Табела 6.18. Седми чекор при определување на почетното одржливо решение за пример 6.2 според методот на минимални трошоци (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** 100 | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** 50 | **9** 400 | **11** 250 |

Согласно табела 6.18, почетното одржливо решение добиено со методот на минимални трошоци е

$$\overline{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 350 & 150 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 400 & 250 \end{bmatrix},$$

а вредноста на функцијата на целта во ова решение е

$$f = 1 \cdot 400 + 2 \cdot 350 + 4 \cdot 150 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 300 + 7 \cdot 50 + 9 \cdot 400 + 11 \cdot 250 = \boxed{10100}.$$

Како што може да се забележи, почетното одржливо решение добиено со методот на минимални трошоци е поповолно во однос на она добиено со методот на северозападен агол. Вкупните трошоци, од 16100, се намалени на 10100.

### 6.3.1.3. Метод на максимални разлики (Вогелов апроксимативен метод)

Главната разлика меѓу методот на максимални разлики и претходните два методи, е критериумот за избор на полето во кое ќе се распредели соодветниот минимум од достапните количини во изворот и потребните количини во понорот. Тоа се однесува и на претходно модифицираните (намалените) количини кај изворите и понорите. При изборот на полето се спроведува следната постапка.

i) За секоја редица и за секоја колона се определува апсолутната вредноста на разликата од *двата најмали транспортни трошоци* во редицата, односно колоната. Ако за редиците се добиени разликите $RD_i$, $i = 1,2,\dots,m$, тие се запишуваат во дополнителна колона кај транспортната табела. Слично, ако за колоните се добиени разликите $CD_j$, $j = 1,2,\dots,n$, тие се запишуваат во дополнителна редица кај транспортната табела.

ii) Се избира редицата или колоната во која е пресметана *најголемата* разлика.

iii) Во избраната редица се избира полето со најмал транспортен трошок.

iv) Ако избраното поле е $(r,s)$, во него се внесува $\overline{x}_{rs} = \min\{a_r, b_s\}$, а понудата на изворот $I_s$ и побарувачката на понорот $P_s$ се намалуваат за $\overline{x}_{rs}$.

v) Ако понудата на изворот $I_s$ е целосно испразнета и/или побарувачката на понорот $P_s$ е целосно задоволена, соодветната редица и/или колона понатаму се исклучува.

vi) Претходните чекори се повторуваат со редуцираната транспортна табела.

**Пример 6.5.** Со методот на максимални разлики ќе го определиме почетното одржливо решение на транспортниот проблем од пример 6.2.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Чекор 1.** Двата најмали транспортни трошоци во првата редица од почетната транспортна табела се $c_{14} = 3$ и $c_{15} = 1$. Нивната разлика (по апсолутна вредност) е $2$ и таа се внесува во дополнителната колона, во редицата на изворот $I_1$. Постапувајќи на ист начин за останатите редици и колони, ги добиваме следните резултати.

Табела 6.19. Определување на разлики по редици и колони за транспортната табела 6.2 според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** | $RD_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** | 400 | 2 |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 | 2 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 | 3 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 | 1 |
| ***побарува*** | 350 | 150 | 350 | 500 | 650 | | |
| $CD_j$ | 3 | 2 | 3 | 2 | 8 | | |

Најголемата разлика, т.е. најголемата вредност во редицата $CD_j$ или колоната $RD_i$ е вредноста 8 во редицата $CD_j$, и таа е во колоната $P_5$. Во оваа колона најмалиот трошок е во полето $(1,5)$, па во ова поле внесуваме $\overline{x}_{15} = \min\{400, 650\} = 400$ и за толку ја намалуваме, и понудата од $I_1$ (таа ќе се сведе на 0, па целата редица ја исклучуваме) и побарувачката на $P_5$ (таа сега ќе редуцира на 250). Со тоа ќе ја добиеме следната табела во која, без да се зема предвид исклучената/затемнетата редица, дополнително се пресметани и разликите на двата најмали трошоци по редици и колони.

Табела 6.20. Распределба на ресурси во табела 6.19 и определување на нови вредности за разлики по редици и колони според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** | $RD_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 | - |
| $I_2$ | **2** | **4** | **9** | **5** | **9** | 600 | 2 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 | 3 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 | 1 |
| ***побарува*** | 350 | 150 | 350 | 500 | ~~650~~ 250 | | |
| $CD_j$ | 7 | 2 | 3 | 2 | 0 | | |

**Чекор 2.** Најголемата разлика во претходната табела е 7, таа кореспондира на колоната $P_1$. Во оваа колона (без затемнето поле) најмалиот трошок е во полето $(2,1)$. Во ова поле внесуваме $\overline{x}_{21} = \min\{600{,}350\} = 350$ и за толку ја намалуваме и понудата од $I_2$ (таа ќе стане 250) и побарувачката на $P_1$ (таа ќе се сведе на 0 и оваа колона ја затемнуваме). Со тоа ќе ја добиеме следната табела во која, без да се земат предвид затемнетата редица и затемнетата колона, дополнително се пресметани и разликите на двата најмали трошоци по редици и колони.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.21. Распределба на ресурси во табела 6.20 и определување на нови вредности за разлики по редици и колони според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** | $RD_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 | - |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** | **9** | ~~600~~ 250 | 1 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** | **9** | 300 | 3 |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 | 1 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | 150 | 350 | 500 | ~~650~~ 250 | | |
| $CD_j$ | - | 2 | 3 | 2 | 0 | | |

**Чекор 3.** Најголемата разлика во претходната табела е 3, таа кореспондира на:

- колоната $P_3$ во која најмал трошок е 4 и кој кореспондира на ќелијата $(3,3)$, и
- редицата $I_3$ во која најмал трошок е 4 и кој кореспондира само на ќелијата $(3,3)$,

што значи дека имаме само една ќелија што може да се пополни. Во $(3,3)$ внесуваме $\overline{x}_{33} = \min\{300,350\} = 300$ и за толку ја намалуваме и понудата од $I_3$ (таа ќе се сведе на 0 и оваа редица ја затемнуваме) и побарувачката на $O_3$ (таа ќе се стане 50). На тој начин ќе ја добиеме следната табела во која, без да се земат предвид затемнетите редица и колон, се пресметани и разликите на двата најмали трошоци по редици и колони.

Табела 6.22. Распределба на ресурси во табела 6.21 и определување на нови вредности за разлики по редици и колони според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***понудува*** | $RD_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 | - |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** | **9** | ~~600~~ 250 | 1 |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 | - |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 | 1 |
| ***побарува*** | ~~350~~ 0 | 150 | ~~350~~ 50 | 500 | ~~650~~ 250 | | |
| $CD_j$ | - | 2 | 2 | 4 | 2 | | |

**Чекор 4.** Најголемата разлика во претходната табела е 4, таа кореспондира на колоната $P_4$. Во оваа колона (без затемнетите полиња) најмалиот трошок е во ќелијата $(2,4)$. Во оваа ќелија внесуваме $\overline{x}_{24} = \min\{250, 500\} = 250$ и за толку ја намалуваме и побарувачката од $P_4$ (таа ќе стане 250) и понудата на $I_2$ (таа ќе се сведе на 0 и оваа колона ја затемнуваме). Со тоа ќе ја добиеме следната табела во која, без да се земат предвид затемнетите редици и колона, се пресметани и разликите по редици и колони.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.23. Распеделба на ресурси во табела 6.22 и определување на нови вредности за разлики по редици и колони според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **понудува** | $RD_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 | ~~400~~ 0 | - |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** 250 | **9** | ~~600~~ ~~250~~ 0 | - |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** | ~~300~~ 0 | - |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** | **11** | 700 | - |
| **побарува** | ~~350~~ 0 | 150 | ~~350~~ 50 | ~~500~~ 250 | ~~650~~ 250 | | |
| $CD_j$ | - | - | - | - | - | | |

**Чекор 5.** Во последната табела останаа полиња само од една редица и тие може да се пополнат по редослед на најмалите трошоци, со изразите

$$x_{42} = \min\{150,700\} = 150,$$
$$x_{43} = \min\{50,700 - x_{42}\} = \min\{50,550\} = 50,$$
$$x_{44} = \min\{250,700 - x_{42} - x_{43}\} = \min\{250,500\} = 250,$$
$$x_{45} = \min\{250,700 - x_{42} - x_{43} - x_{44}\} = \min\{250,250\} = 250,$$

по што се добива следната транспортна табела во која се отстранети затемнувањата, помошните колони и пречкртувањата што ги правевме во текот на распределувањето на количините

Табела 6.24. Финална распеделба на ресурси во транспортната табела за пример 6.2 според Вогеловиот апроксимативен метод (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** 250 | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** 150 | **7** 50 | **9** 250 | **11** 250 |

Согласно табела 6.24, почетното одржливо решение добиено со методот на минимални трошоци е

$$\overline{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 350 & 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 50 & 250 & 250 \end{bmatrix},$$

а вредноста на функцијата на целта во ова решение е

$$f = 1 \cdot 400 + 2 \cdot 350 + 5 \cdot 250 + 4 \cdot 300 + 6 \cdot 150 + 7 \cdot 50 + 9 \cdot 250 + 11 \cdot 250 = \boxed{9800}.$$

Како што може да се забележи, почетното одржливо решение добиено со Вогеловиот апроксимативен метод е поповолно во однос на почетните одржливи решенија добиени со методот на северозападен агол и методот на минимални трошоци. Вкупните трошоци сега се намалени на 9800.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

### 6.3.2. Циклични низи полиња, базни изводливи решенија и дегенерација

При определување на почетните одржливи решенија со некој од методите што претходно ги разгледавме, се пополнуваат најмногу $m + n - 1$ полиња од транспортната табела, а останатите остануваат празни. Заедничка особина на методите е тоа што изводливите (допуштените) решенија што се добиваат преку овие методи се воедно и базни изводливи решенија на ЛП-задачата (6.4). Но не секое почетно одржливо решение на кое кореспондира транспортна табела со пополнети најмногу $m + n - 1$ полиња е воедно и базно изводливо решение. Критериум кој овозможува утврдување на тоа дали едно почетно одржливо решение е базно (или не е), е поврзан со т.н. циклични низи полиња.

**Дефиниција 6.1.** За дадена конечна подредена низа полиња од транспортната табела се вели дека е *циклична низа полиња* ако таа е со следните особини:

1) било кои две полиња во низата се различни,
2) било кои две последователни полиња припаѓаат на иста редица или иста колона,
3) било кои три последователни полиња не припаѓаат на иста редица или иста колона,
4) првото и последното поле од низата припаѓаат на иста редица или иста колона.

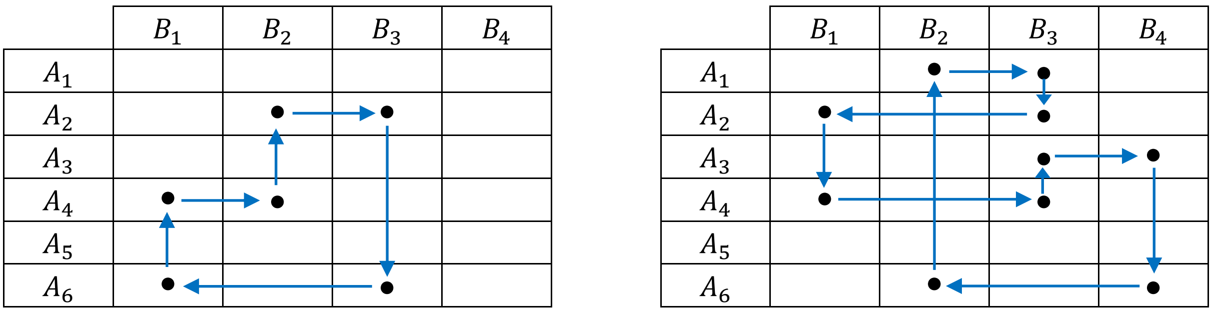
Во спротивно, за низата полиња се вели дека е *ациклична*.

**Пример 6.6.** На слика 6.2 се прикажани следните подредени низи полиња

- лево, подредената низа $\{(2,2),(2,3),(6,3),(6,1),(4,1),(4,2)\}$,
- десно, подредената низа $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(4,1),(4,3),(3,3),(3,4),(6,4),(6,2)\}$.

И двете низи се циклични. Движејќи се во насока на стрелките, за ниту една од овие низи, ако не е однапред посочено, не може да се процени кое поле е почетно, а кое крајно.

**Својство 6.1.** Одржливото решение на затворен транспортен проблем е базно изводливо решение (во смисла на дефинициите 4.2 и 4.4) ако тоа кореспондира на транспортна табела во која пополнетите полиња не содржат циклични низи полиња.




Слика 6.2. Примери на циклични низи полиња во транспортна табела (автори)

Претходното својство често се користи како алтернативна дефиниција за базно одржливо решение на транспортен проблем: За одржливото решение на транспортниот проблем се вели дека е *ациклично*, ако тоа не содржи циклична низа. Ако тоа воедно има најмногу $m + n - 1$ компоненти различни од 0, тогаш тоа се нарекува базично одржливо решение.

**Својство 6.2.** Почетните одржливи решенија на затворен транспортен проблем добиени со методот на северозападен агол, методот на минимални трошоци или Вогеловиот метод, се воедно и базни изводливи (одржливи) решенија.

Согласно општата дефиниција за дегенерација кај базните изводливи решенија за ЛП-задачи, ако во соодветната транспортна табела има само $p < m + n - 1$ пополнети полиња, базното изводливо решение е дегенерирано. Дегенерацијата може да се јави во било која фаза од решавањето на транспортниот проблем и таа треба да

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

се отстрани штом се појави. Тоа се постигнува на следниот начин. Се избира слободно поле со најмал можен трошок, но така што со него и со дел од веќе пополнетите полиња (или сите) да не може да се формира циклична низа. Во тоа поле се впишува $\delta_1$ што сметаме дека е вредност блиска на 0 ($\delta_1 \approx 0$). Ако $k = (m+n-1) - p \geq 2$, постапката се повторува сѐ додека вкупниот број на пополнети полиња не сигне до $m+n-1$. Во $k$ од нив би биле внесени $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$, за кои сметаме дека се позитивни бесконечно мали вредности.

**Пример 6.7.** Во следната транспортна табела е прикажано почетно базно решение добиено со методот на минимални трошоци за транспортен проблем со три извори, со понуда наведена во последната колона, и четири понори со побарувачка наведена во последната редица. Исто почетно базно решение се добива и со Вогеловиот метод. Во табелата е извршена корекција на дегенерацијата со внес на позитивната вредност $\delta \approx 0$ во полето $(2{,}4)$. Имено, од првично непополнетите полиња, со најмал трошок беа полињата $(2{,}2)$ и $(2{,}4)$. Полето $(2{,}2)$ не можеше да се користи за отстранување на дегенерацијата, бидејќи со него ќе можеше да се формира цикличната низа полиња $\{(2{,}2), (2{,}3), (3{,}3), (3{,}2)\}$.

Табела 6.25. Пример на транспортна табела со извршена корекција на дегенерација (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | ***понудува*** |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** 200 | **7** | **8** | **5** 120 | 320 |
| $I_2$ | **3** | **2** | **1** 60 | **2** $\delta$ | 60 |
| $I_3$ | **3** | **3** 80 | **6** 100 | **5** | 180 |
| ***побарува*** | 200 | 80 | 160 | 120 | |

### 6.3.3. Дуалност и критериум за оптималност; Тест за оптималност

Базните изводливи решенија може, но не мора да бидат и оптимални. На пример базните изводливи решенија добиени со методот на северозападен агол и методот на минимални трошоци за транспортниот проблем од пример 6.2 не може да бидат оптимални, бидејќи со Вогеловиот метод е добиено базно одржливо решение што, од аспект на што помал вкупен транспортен трошок, е поповолно. Големиот број на променливи кај даден транспортен проблем природно го наметнува прашањето како, на ефикасен начин, ќе се утврди дали веќе најдено базно изводливо решение е оптимално или не е. До одговорот може да се дојде преку својствата на слаба и јака дуалност на ЛП-задачата (6.4) и нејзината дуална ЛП-задача.

Согласно правилата за формирање на дуална ЛП-задача наведени во оддел 4.8.6, дуална на ЛП-задачата (6.4) е следната ЛП-задача на максимизација

$$\max\ g = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \qquad \text{p.o. } u_i + v_j \leq c_{ij}, \qquad i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n. \tag{6.15}$$

Дуалните променливи $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ се без ограничување (без услов за ненегативност) бидејќи главните ограничувања во (6.4) се во облик на равенства. На секој извор во транспортната задача (6.4) одговара по една дуална променлива од $u_1, u_2, \ldots, u_m$, а на секој понор одговара по една дуална променлива од $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Овие променливи уште се нарекуваат и *потенцијали* на изворите и понорите.

ЛП-задачите (6.4) и (6.15) не се во стандарден облик, па за нив треба да се покажат соодветните теореми за слаба и јака дуалност.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Теорема 6.7. (Слаба дуалност за транспортен проблем)**

Ако $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ е одржливо решение на (6.4) и $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ е одржливо решение на (6.15), тогаш

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{6.16}$$

**Доказ.** Врз основа на дефиницијата на функцијата на целта во (6.15) и главните ограничувања во (6.4), имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)u_i + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)v_j\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}u_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}u_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}v_j\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\left(u_i + v_j\right).\end{aligned}$$

Од главните ограничувања во дуалната ЛП-задача (6.15) и условите за *ненегативност* на примарните променливи следи дека $x_{ij}\left(u_i + v_j\right) \leq x_{ij}c_{ij}$, за секои $i = 1,2,\dots,m$ и $j = 1,2,\dots,n$. Од тука следи дека

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\left(u_i + v_j\right) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

што, заедно со претходното равенство, го имплицира тврдењето во теоремата. ■

Веќе наспоменавме дека во дел од литературата што содржи теорија на линеарно програмирање, основните теореми на линеарното програмирање, вклучително и оние што се однесуваат на дуалноста, се формулирани поаѓајќи од ЛП-задача на минимизација во каноничен облик каков што е и обликот на ЛП-задачата (6.4). Доказите што се наведуваат за теоремата за јака дуалност се слични[28] на оној даден за теорема 4.14. Во доказот наведен подолу е постапено согласно напомена 4.5.

**Теорема 6.8. (Јака дуалност за транспортен проблем)**

Ако едната од ЛП-задачите (6.4) и (6.15) има оптимално решение, тогаш и другата ЛП-задача има оптимално решение, и притоа оптималните вредности на соодветните функции на целта се еднакви.

**Доказ.** Стандардниот облик на ЛП-задачата (6.4) е

$$\begin{aligned}&\min\ f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\\ &\text{p.o.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i, \qquad i = 1,2,\dots,m,\\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} -x_{ij} \geq -a_i, \qquad i = 1,2,\dots,m,\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \qquad j = 1,2,\dots,n,\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} -x_{ij} \geq b_j, \qquad j = 1,2,\dots,n,\\ &\qquad x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,\dots,m, \qquad j = 1,2,\dots,n.\end{aligned} \tag{6.17}$$

[28] (Bertsimas & Tsitsiklis, 1997, теорема 4.4)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

За овој облик, дуалната ЛП-задача треба да содржи $2m + 2n$ дуални променливи. Со промена на редоследот по кој се наведени главните ограничувања, матрицата од коефициентите пред примарните променливи може да се запиши како матрица од облик

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix},$$

па ако дуалните променливи за (6.17) ги означиме со[29]

$$u_1^+, u_2^+, \dots, u_m^+, u_1^-, u_2^-, \dots, u_m^-, v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+, v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-,$$

тогаш дуалната ЛП-задача на (6.17) ќе биде од облик

$$\begin{aligned} &\max\ G = \sum_{i=1}^{m} a_i(u_i^+ - u_i^-) + \sum_{j=1}^{n} b_j(v_j^+ - v_j^-) \\ &\text{p.o.} \quad (u_i^+ - u_i^-) + \left(v_j^+ - v_j^-\right) \le c_{ij}, \qquad i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n, \\ &\qquad u_i^+, u_i^-, v_j^+, v_j^- \ge 0, \qquad i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Ако $\tilde{X} = \left[\tilde{x}_{ij}\right]_{m\times n}$ е оптимално решение за ЛП-задачата (6.4), тоа ќе биде оптимално решение и за ЛП-задачата (6.17). Тогаш (според теорема 4.14), дуалниот проблем (6.18) исто така има оптимално решение

$$(\tilde{u}_1^+, \tilde{u}_2^+, \dots, \tilde{u}_m^+, \tilde{u}_1^-, \tilde{u}_2^-, \dots, \tilde{u}_m^-, \tilde{v}_1^+, \tilde{v}_2^+, \dots, \tilde{v}_n^+, \tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-), \tag{6.19}$$

и притоа важи

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(\tilde{u}_i^+ - \tilde{u}_i^-) + \sum_{j=1}^{n} b_j(\tilde{v}_j^+ - \tilde{v}_j^-) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij}. \tag{6.20}$$

Нека

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^+ - \tilde{u}_i^-,\ i = 1,2,\dots,m, \text{ и } \tilde{v}_j = \tilde{v}_j^+ - \tilde{v}_j^-,\ j = 1,2,\dots,n. \tag{6.21}$$

Тогаш, согласно неравенствата во (6.18) и (6.20) се добива дека за овие вредности важи

$$\tilde{u}_i + \tilde{v}_j \le c_{ij}, \qquad \forall i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n \tag{6.23}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\tilde{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij}. \tag{6.23}$$

Вредностите $\tilde{u}_i$, $i = 1,2,\dots,m$, и $\tilde{v}_j$, $j = 1,2,\dots,n$, може да бидат со произволен знак и, согласно (6.22), тие припаѓаат на допуштената област на (6.15). Од (6.23) и теорема 6.7 следи дека вредноста на функцијата на целта $g$ од (6.15) во било која точка од допуштената област ќе биде помала или еднаква од нејзината вредност во $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$, што значи дека со (6.21) е определено оптимално решение на (6.15).

Обратно, ако $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$ е оптимално решение за (6.15), тогаш за произволни $\tilde{u}_i^+, \tilde{u}_i^-, \tilde{v}_j^+, \tilde{v}_j^- \ge 0$ што ги задоволуваат равенствата во (6.21), согласно неравенствата во главните ограничувања во (6.15), векторот од (6.19) всушност ќе биде оптимално решение за (6.18). Применувајќи ја повторно теорема 4.14 за парот дуални ЛП-задачи (6.17) и (6.18), следи дека (6.17), а со тоа и (6.4), има оптимално решение $\tilde{X} = [\tilde{x}_{ij}]_{m\times n}$ за кое воедно важи (6.22). ■

[29] Ги искористивме ознаките предложени во (Sharma, 2016, оддел 9.5.1), но формулација и/или доказ на теорема за јака дуалност кај транспортен проблем во наведениот извор не се дадени.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Теорема 6.9. (Комплементарна ненапнатост[30] за транспортен проблем)**
Одржливото решение $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ на транспортниот проблем (6.4) и одржливото решение $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ на неговиот дуален проблем (6.15) се оптимални решенија за соодветните ЛП-задачи ако, и само ако,

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0, \qquad \forall i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n. \tag{6.23}$$

**Доказ.** Врз основа на теорема 6.7 добиваме дека за секое одржливо решение $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ на (6.4) и за секое одржливо решение $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n)$ на неговиот дуален проблем (6.15), важи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0. \tag{6.24}$$

Бидејќи согласно дефиницијата на допуштената област во (6.4), $x_{ij} \geq 0$, а согласно дефиницијата на допуштената област во (6.15), $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, за секои $i = 1,2,\dots,m$ и $j = 1,2,\dots,n$, имаме

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0, \qquad \forall i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n. \tag{6.25}$$

Сега тврдењето во теоремата следи од теорема 6.8. ■

**Теорема 6.10. (Критериум за оптималност на базно изводливо решение)**
Базното изводливо $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ на транспортниот проблем (6.4) е оптимално ако, и само ако, постојат $u_i, v_j \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$, така што

$$\begin{gathered} u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \forall\, i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,n\,, \text{ и} \\ u_i + v_j = c_{ij}, \text{ секогаш кога } x_{ij} > 0. \end{gathered} \tag{6.26}$$

**Доказ.** Следи непосредно од теорема 6.9, како и фактот дека во случај кога $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ е базно изводливо решение, само за вредностите на базните променливи $x_{ij}$ (што ги има најмногу $m + n - 1$), може да важи $x_{ij} > 0$, а за останатите важи $x_{ij} = 0$. ■

Врз основа на претходната теорема, оптималноста на базно изводливо решение на даден транспортен проблем се проверува согласно следниот тест.

**Тест за оптималност**

Ако $X = [x_{ij}]_{m\times n}$ е базно изводливо решение, за проверка на неговата оптималност се спроведуваат следните чекори.

**Чекор 1.** За секоја од компонентите на $X$ за која важи $x_{ij} > 0$ се формира равенката $u_i + v_j = c_{ij}$. Овие равенки заедно формираат систем равенки

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ ако } x_{ij} > 0. \tag{6.27}$$

по непознатите $u_i$, $i = 1,2,\dots,m$, и $v_j$, $j = 1,2,\dots,n$, (вкупно $m + n$ непознати) со најмногу $m + n - 1$ линеарни равенки. Во случај на недегенерирано базно изводливо решение, системот (6.27) има точно $m + n - 1$ равенки и бесконечно многу решенија (главната матрица на овој систем е транспонираната матрица на онаа во (6.5)). За да се определи едно решение, се зема некоја од вредностите за $u_i$ $(i = 1,2,\dots,m)$ или $v_j$ $(j = 1,2,\dots,n)$ да биде еднаква на 0 и системот се решава по останатите променливи. Штом овие вредности се определат, тие се запишуваат во дополнителна колона и редица на

[30] анг. Complementary Slackness. Низ литературата може да се сретнат различни формулации на т.н. теорема за комплементарна ненапнатост, а може да бидат формулирани и две теореми, т.н. теорема за слаба и теорема за јака комплементарна ненапнатост. За формулацијата, доказите и последиците на овие теореми упатуваме на (Карчицка, 2000, глава IV, лема 2, теорема 3 и теорема 4) и (Sinha, 2006, теорема 15.6, последица 15.3, теорема 15.7 и поглавје 19.5). Во (Chvátal, 1983) е дефинирана само една теорема за комплементарна напнатост и врз основа на истата е дефиниран општ критериум оптималност на одржливо решение кај ЛП-задача на максимизација во стандарден облик (Chvátal, 1983, теорема 5.2 и теорема 5.3). Овие теореми се сметаат за еквивалентни форми на теоремите за дуалност во линеарното програмирање.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

транспортната како потенцијали $u_i$, $i = 1,2, \dots, m$ на изворите и потенцијали $v_j$, $j = 1,2, \dots, n$, на изворите.

**Чекор 2.** Се формираат следните разлики

$$\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = c_{ij}, \text{ ако } (i,j) \text{ не е базно поле.} \quad (6.28)$$

Овие вредности обично исто така се внесуваат во соодветните полиња од транспортната табела и најчесто се ставаат во мали или средни загради. Од аспект на знакот, за разликите од (6.28) можни се следните случаи:

- За секоја од разликите важи $\overline{c}_{ij} \geq 0$. Тогаш базното решение е оптимално. Притоа
    - ако за секоја од разликите важи $\overline{c}_{ij} > 0$, тогаш $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ е единственото оптимално решение на транспортната задача,
    - ако постои разлика за која важи $\overline{c}_{ij} = 0$, тогаш $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ не е единствено решение.
- Постои разлика така што да важи $\overline{c}_{ij} < 0$. Во овој случај $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ не е оптимално решение и понатаму тоа се модифицира.

### 6.3.4. Модификација на базен транспортен програм

Ако базното решение $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ не е оптимално тоа понатаму се модифицира во ново базно решение. Најчесто применуван метод е т.н. *метод на модифицирана дистрибуција*[31] што се состои во прераспределба на количините ресурси кај базното решение за кое е утврдено дека не е оптимално. Постапката на модификација се состои од следните чекори (за да се добие поцелосен увид на целата постапка на оптимизација на базно решение, ќе го задржиме континуитетот на нумерирањето на чекорите од погоре).

**Чекор 3.** Од негативните разлики $\overline{c}_{ij}$ добиени во чекор 2, се избира онаа што има најмала вредност. Ако постојат две или повеќе исти најмали вредности, ја избираме онаа што одговара на најмал можен трошок $c_{ij}$. Нека претпоставиме дека на овој начин е избрана разликата $\overline{c}_{i_0 j_0}$. Таа одговара на полето $(i_0, j_0)$. Ова поле не е базно и, како такво тоа е празно.

Во полето $(i_0, j_0)$ ја впишуваме величината $\epsilon$ чија вредност дополнително се определува.

**Чекор 4.** Поаѓајќи од полето $(i_0, j_0)$, со помош на базни полиња ја формираме цикличната низа

$$\{(i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\} \quad (6.29)$$

Бидејќи одржливото решение што го модифицираме е базно и недегенерирано, ваква низа секогаш можеме да формираме. Дополнително, согласно дефиницијата на циклична низа, низата во (6.29) ќе има најмалку четири елементи, а вкупниот број на елементи ќе биде парен број, што значи дека $k$ е *непарен* број.

**Чекор 5.** Количините во полињата $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ ги модифицираме така што, наместо претходните количини, $x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \dots, x_{i_k j_k}$, во овие полиња да бидат распределени количините

$$x_{i_1 j_1} - \epsilon, x_{i_2 j_2} + \epsilon, \dots, x_{i_k j_k} - \epsilon, \quad (6.30)$$

т.е., поаѓајќи од второто поле и движејќи се по полињата од низата (6.29), по наведениот редослед, наизменично одземаме и, во следно поле, додаваме $\epsilon$. Попрецизно, кај

[31] Низ литературата на англиски јазик, овој метод најчесто се именува со MODI method (од анг. **Mo**dified **Di**stribution Method), а може да се сретне и под називот „*метод на потенцијали*", или „$u - v$ *метод*". Развиен е од страна на Џ. Б. Данциг врз основа на симплекс методот за ЛП-задачите преку модифицирање на функцијата на целта со воведување на т.н. симплекс множители, што претставуваат потенцијали на понорите и изворите.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$(i_1, j_1), (i_3, j_3), \dots, (i_k, j_k),$$

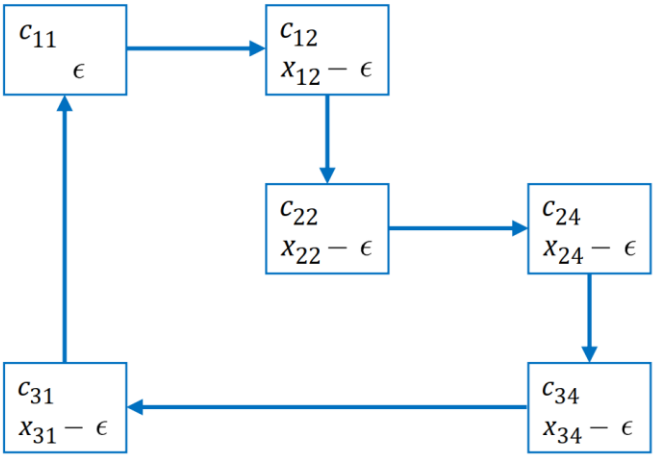
количината на ресурси *ја намалуваме* за $\epsilon$, а кај останатите полиња

$$(i_2, j_2), (i_4, j_4), \dots, (i_{k-1}, j_{k-1}),$$

количината на ресурси *ја зголемуваме* за $\epsilon$. Со тоа вкупната количина што претходно била распределена во полињата $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ нема да се промени. Имено, по прераспределување, вкупната количина во полињата од низата (6.29) ќе биде

$$\epsilon + \left(x_{i_1 j_1} - \epsilon\right) + \left(x_{i_2 j_2} + \epsilon\right) + \cdots + \left(x_{i_k j_k} - \epsilon\right) = x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} + \cdots + x_{i_k j_k}.$$

На слика 6.3 шематски е прикажано прераспределувањето на количините ресурси по цикличната низа полиња $\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,4), (3,1)\}$ во која полето $(1,1)$ не е базно поле, а сите останати полиња од низата се базни полиња.




Слика 6.3. Прераспределба на ресурси по циклична низа полиња (Sazdanović, 1988)

**Чекор 6.** Во полето $(i_0, j_0)$ треба да се внесе најголема можна количина, но притоа во полињата каде што вршиме намалување, не смее да се добие негативна вредност, т.е. мора да важи

$$x_{i_1 j_1} - \epsilon \geq 0, x_{i_3 j_3} - \epsilon \geq 0, \dots, x_{i_k j_k} - \epsilon \geq 0.$$

За да се постигни ова, доволно е да земеме

$$\epsilon = \min\{x_{i_1 j_1}, x_{i_3 j_3}, \dots, x_{i_k j_k}\}.$$

По завршување на чекор 6 ќе се добие ново базично одржливо решение. Ако тоа е дегенерирано, прво се врши корекција на дегенерацијата. Ако тоа не е дегенерирано, се преминува на проверка на неговата оптималност.

Чекорите 1. – 6. вообичаено се сметаат како еден итерација преку која од даден базен транспортен програм се доаѓа до нов транспортен програм.

**Пример 6.8.** Со примена на тестот за оптималност ќе потврдиме дека базниот транспортен програм $\overline{X}_1$ добиен во пример 6.3 не е оптимален и ќе ја спроведеме целосната постапка за негово оптимизирање.

Поаѓаме од последната табела во пример 6.3 во која последната колона и последната редица ќе ги замениме со помошни колона и редица за внес на потенцијалите на изворите и понорите, т.е. од транспортната табела 6.26.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.26. Појдовна проширена транспортна табела за оптимизација на почетно одржливо решение за пример 6.2 добиено со методот на северозападен агол (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** 50 | **8** | **3** | **1** | |
| $I_2$ | **2** | **4** 100 | **9** 350 | **5** 150 | **9** | |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** 300 | **9** | |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** 50 | **11** 650 | |
| ***потенц. на понори*** | | | | | | |

**Итерација 1**

**Пресметување на потенцијалите.** За табела 6.26 треба да се определат вредности за вкупно 9 потенцијали, потенцијалите на изворите $u_1, u_2, u_3, u_4$ и потенцијалите на понорите $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$. Врз основа на коефициентите кај базните полиња формираме систем од 8 равенки со 9 непознати врз основа на кој, ставајќи $u_1 = 0$, ги определуваме останатите 8 потенцијали.

$$\begin{cases} c_{11} = 5 = u_1 + v_1 \\ c_{12} = 7 = u_1 + v_2 \\ c_{22} = 4 = u_2 + v_2 \\ c_{23} = 9 = u_2 + v_3 \\ c_{24} = 5 = u_2 + v_4 \\ c_{34} = 7 = u_3 + v_4 \\ c_{44} = 9 = u_4 + v_4 \\ c_{45} = 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \xRightarrow{u_1=0} \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 7 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 7 \\ u_2 = -3 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 7 \\ u_2 = -3 \\ v_3 = 12 \\ v_4 = 8 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 7 \\ u_2 = -3 \\ v_3 = 12 \\ v_4 = 8 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = 1 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_2 = 7 \\ u_2 = -3 \\ v_3 = 12 \\ v_4 = 8 \\ u_3 = -1 \\ u_4 = 1 \\ v_5 = 10 \end{cases}.$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните потенцијали, разликите $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ за слободните полиња се:

$$\overline{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 12) = \boxed{-4}$$
$$\overline{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 + 8) = \boxed{-5}$$
$$\overline{c}_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 1 - (0 + 10) = \boxed{-9}$$
$$\overline{c}_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (-3 + 5) = 0$$
$$\overline{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (-3 + 10) = 2$$
$$\overline{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (-1 + 5) = 5$$
$$\overline{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (-1 + 7) = 5$$
$$\overline{c}_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (-1 + 12) = \boxed{-7}$$
$$\overline{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (-3 + 10) = 2$$
$$\overline{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (1 + 5) = 5$$
$$\overline{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (1 + 7) = \boxed{-2}$$
$$\overline{c}_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 7 - (1 + 12) = \boxed{-6}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.27. Транспортна табела добиена од табела 6.26 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 350 | 7 50 | 8 (-4) | 3 (-5) | 1 (-9) | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 (0) | 4 100 | 9 350 | 5 150 | 9 (2) | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | 9 (5) | 11 (5) | 4 (-7) | 7 300 | 9 (2) | $u_3 = -1$ |
| $I_4$ | 11 (5) | 6 (-2) | 7 (-6) | 9 50 | 11 650 | $u_4 = 1$ |
| потенц. на понори | $v_1 = 5$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 12$ | $v_4 = 8$ | $v_5 = 10$ | |

Со оглед на тоа дека барем една од разликите $\overline{c}_{ij}$ е негативна, почетното одржливо решение не е оптимално и тоа треба да се модифицира.

**Модификација на дистрибуцијата:** Од негативните вредности што ги добивме за $\overline{c}_{ij}$, најмалата е $\overline{c}_{15} = -9$. Таа одговара на слободното поле $(1,5)$. Со него и со дел од останатите базни полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(1,5), (4,5), (4,4), (2,4), (2,2), (1,2)\},$$

која во следната табела е означена со сино обоените полиња и стрелките.

Табела 6.28. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.27 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 350 | 7 50 | 8 (-4) | 3 (-5) | 1 (-9) | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 (0) | 4 100 | 9 350 | 5 150 | 9 (2) | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | 9 (5) | 11 (5) | 4 (-7) | 7 300 | 9 (2) | $u_3 = -1$ |
| $I_4$ | 11 (5) | 6 (-2) | 7 (-6) | 9 50 | 11 650 | $u_4 = 1$ |
| потенц. на понори | $v_1 = 5$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 12$ | $v_4 = 8$ | $v_5 = 10$ | |

Ставајќи $\epsilon$ во полето $(1,5)$ и, движејќи се во насока на стрелките, наизменично одземајќи $\epsilon$ и во следно поле додавајќи $\epsilon$, ја добиваме следната табела.

Табела 6.29. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.28 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 350 | 7 $50 - \epsilon$ | 8 (-4) | 3 (-5) | 1 (-9) $\epsilon$ | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 (0) | 4 $100 + \epsilon$ | 9 350 | 5 $150 - \epsilon$ | 9 (2) | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | 9 (5) | 11 (5) | 4 (-7) | 7 300 | 9 (2) | $u_3 = -1$ |
| $I_4$ | 11 (5) | 6 (-2) | 7 (-6) | 9 $50 + \epsilon$ | 11 $650 - \epsilon$ | $u_4 = 1$ |
| потенц. на понори | $v_1 = 5$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 12$ | $v_4 = 8$ | $v_5 = 10$ | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела што треба да се намалат за $\epsilon$, а тоа се вредностите во полињата $(4,5), (2,4), (1,2)$, па

$$\epsilon = \min\{650, 150, 50\} = 50.$$

Бидејќи вредноста во полето $(1,2)$ се намалува на 0, ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и воедно цикличната низа $\{(1,5), (4,5), (4,4), (2,4), (2,2), (1,2)\}$ се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметките за потенцијалите и разликите, ја добиваме следната табела.

Табела 6.30. Транспортна табела добиена од табела 6.26 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 1 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 350 | **7** | **8** | **3** | **1** 50 |
| $I_2$ | **2** | **4** 150 | **9** 350 | **5** 100 | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** 300 | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** 100 | **11** 600 |

Табела 6.30 содржи недегенерирано одржливо решение за кое лесно се проверува дека е базно (т.е. не содржи ниту една циклична низа од базни полиња). Во следната итерација ќе треба да се провери неговата оптималност. Во случај тоа да е оптимално решение постапката завршува. Во спротивно, се продолжува со промена на распределбата на количините во последната табела.

**Итерација 2**

**Пресметување на потенцијалите:** Врз основа податоците во базните полиња од последната табела формираме нов систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1 = 0$.

$$\begin{cases} c_{11} = 5 = u_1 + v_1 \\ c_{15} = 1 = u_1 + v_5 \\ c_{22} = 4 = u_2 + v_2 \\ c_{23} = 9 = u_2 + v_3 \\ c_{24} = 5 = u_2 + v_4 \\ c_{34} = 7 = u_3 + v_4 \\ c_{44} = 9 = u_4 + v_4 \\ c_{45} = 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \overset{u_1=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_5 = 1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_5 = 1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_5 = 1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 7 = u_3 + v_4 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_5 = 1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 \\ v_5 = 1 \\ v_2 = -2 \\ v_3 = 3 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}.$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$\overline{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 2) = 9$
$\overline{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 3) = 5$
$\overline{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$
$\overline{c}_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (6 + 5) = \boxed{-9}$
$\overline{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (6 + 1) = 2$
$\overline{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (8 + 5) = \boxed{-4}$
$\overline{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (8 - 2) = 5$
$\overline{c}_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (8 + 3) = \boxed{-7}$
$\overline{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (8 + 1) = 0$
$\overline{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 + 5) = \boxed{-4}$
$\overline{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (10 - 2) = \boxed{-2}$
$\overline{c}_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 7 - (10 + 3) = \boxed{-6}$.

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.31. Транспортна табела добиена од табела 6.30 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| **понори** / **извори** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **потенц. на извори** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5<br>350 | 7 (9) | 8 (5) | 3 (4) | 1<br>50 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 (-9) | 4<br>150 | 9<br>350 | 5<br>100 | 9 (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | 9 (-4) | 11 (5) | 4 (-7) | 7<br>300 | 9 (0) | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | 11 (-4) | 6 (-2) | 7 (-6) | 9<br>100 | 11<br>600 | $u_4 = 10$ |
| **потенц. на понори** | $v_1 = 5$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Поради постоење на негативни вредности за $\overline{c}_{ij}$, базното одржливо решение што кореспондира на последната табела не е оптимално, па продолжуваме со негова модификација.

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.31.** Најмалата од негативните вредности добиени за $\overline{c}_{ij}$ е $-9$ и таа одговара на слободното поле $(2,1)$. Со него и со дел од останатите базични полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(2,1),(2,4),(4,4),(4,5),(1,5),(1,1)\},$$

која во следната табела е прикажана со сино обоените полиња и стрелките.

Табела 6.32. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.31 (автори)

| **понори** / **извори** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | **потенц. на извори** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5<br>350 | 7 (9) | 8 (5) | 3 (4) | 1<br>50 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 (-9)<br>• | 4<br>150 | 9<br>350 | 5<br>100 | 9 (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | 9 (-4) | 11 (5) | 4 (-7) | 7<br>300 | 9 (0) | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | 11 (-4) | 6 (-2) | 7 (-6) | 9<br>100 | 11<br>600 | $u_4 = 10$ |
| **потенц. на понори** | $v_1 = 5$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Ставајќи $\epsilon$ во полето $(2,1)$ и, движејќи се во насока на стрелките, наизменично одземајќи $\epsilon$ и во следно поле додавајќи $\epsilon$, ја добиваме следната табела.

Табела 6.33. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.32 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** $350-\epsilon$ | **7** **(9)** | **8** **(5)** | **3** **(4)** | **1** $50+\epsilon$ | $u_1=0$ |
| $I_2$ | **2** **(-9)** $\epsilon$ | **4** 150 | **9** 350 | **5** $100-\epsilon$ | **9** **(2)** | $u_2=6$ |
| $I_3$ | **9** **(-4)** | **11** **(5)** | **4** **(-7)** | **7** 300 | **9** **(0)** | $u_3=8$ |
| $I_4$ | **11** **(-4)** | **6** **(-2)** | **7** **(-6)** | **9** $100+\epsilon$ | **11** $600-\epsilon$ | $u_4=10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1=5$ | $v_2=-2$ | $v_3=3$ | $v_4=-1$ | $v_5=1$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините што треба да се намалат за $\epsilon$. Тоа се вредностите во полињата $(1,1),(2,4),(4,5)$, па имаме

$$\epsilon=\min\{350,100,600\}=100.$$

Вредноста во полето $(2,4)$ ќе намали на 0 и ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и цикличната низа $\{(2,1),(2,4),(4,4),(4,5),(1,5),(1,1)\}$ се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметките за потенцијалите и разликите за слободните полиња, ја добиваме следната табела.

Табела 6.34. Транспортна табела добиена од табела 6.30 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 2 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 250 | **7** | **8** | **3** | **1** 150 |
| $I_2$ | **2** 100 | **4** 150 | **9** 350 | **5** | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** | **7** 300 | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** | **9** 200 | **11** 500 |

Оваа табела содржи недегенерирано одржливо решение за кое лесно се проверува дека е базно и чија оптималност треба да се провери во следната итерација.

**Итерација 3**

**Пресметување на потенцијалите:** Врз основа податоците во базните полиња од последната табела формираме нов систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1,u_2,u_3,u_4,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1=0$.

$$\begin{cases} c_{11}=5=u_1+v_1 \\ c_{15}=1=u_1+v_5 \\ c_{21}=2=u_2+v_1 \\ c_{22}=4=u_2+v_2 \\ c_{23}=9=u_2+v_3 \\ c_{34}=7=u_3+v_4 \\ c_{44}=9=u_4+v_4 \\ c_{45}=11=u_4+v_5 \end{cases} \xRightarrow{u_1=0} \begin{cases} v_1=5 \\ v_5=1 \\ 2=u_2+v_1 \\ 4=u_2+v_2 \\ 9=u_2+v_3 \\ 7=u_3+v_4 \\ 9=u_4+v_4 \\ 11=u_4+v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=5 \\ v_5=1 \\ u_2=-3 \\ 4=u_2+v_2 \\ 9=u_2+v_3 \\ 7=u_3+v_4 \\ 9=u_4+v_4 \\ u_4=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=5 \\ v_5=1 \\ u_2=-3 \\ v_2=7 \\ v_3=12 \\ 7=u_3+v_4 \\ v_4=-1 \\ u_4=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=5 \\ v_5=1 \\ u_2=-3 \\ v_2=7 \\ v_3=12 \\ u_3=8 \\ v_4=-1 \\ u_4=10 \end{cases}.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$\bar{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 7) = 0$

$\bar{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 12) = \boxed{-4}$

$\bar{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$

$\bar{c}_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (-3 - 1) = 9$

$\bar{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (-3 + 1) = 11$

$\bar{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (8 + 5) = \boxed{-4}$

$\bar{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (8 + 7) = \boxed{-4}$

$\bar{c}_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (8 + 12) = \boxed{-16}$

$\bar{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (8 + 1) = 0$

$\bar{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 + 5) = \boxed{-4}$

$\bar{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (10 + 7) = \boxed{-11}$

$\bar{c}_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 7 - (10 + 12) = \boxed{-15}$.

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.35. Транспортна табела добиена од табела 6.34 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 250 | **7** **(0)** | **8** **(-4)** | **3** **(4)** | **1** 150 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 100 | **4** 150 | **9** 350 | **5** **(9)** | **9** **(11)** | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | **9** **(-4)** | **11** **(-4)** | **4** **(-16)** | **7** 300 | **9** **(0)** | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | **11** **(-4)** | **6** **(-11)** | **7** **(-15)** | **9** 200 | **11** 500 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = 5$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 12$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Базното одржливо решение што кореспондира на последната табела не е оптимално ($\bar{c}_{13} < 0$), па продолжуваме со негова модификација.

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.35.** Најмалата од негативните вредности за $\bar{c}_{ij}$ е $-16$, и таа одговара на слободното поле $(3,3)$. Со помош на ова поле и дел од базните полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(3,3),(3,4),(4,4),(4,5),(1,5),(1,1),(2,1),(2,3)\},$$

што во следната табела е означено со сино обоените полиња и стрелките.

Табела 6.36. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.35 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** 250 | **7** **(0)** | **8** **(-4)** | **3** **(4)** | **1** 150 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 100 | **4** 150 | **9** 350 | **5** **(9)** | **9** **(11)** | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | **9** **(-4)** | **11** **(-4)** | **4** **(-16)** • | **7** 300 | **9** **(0)** | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | **11** **(-4)** | **6** **(-11)** | **7** **(-15)** | **9** 200 | **11** 500 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = 5$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 12$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Ставајќи $\epsilon$ во полето $(3,3)$ и, движејќи се во насока на стрелките, наизменично одземајќи $\epsilon$, а во следно поле додавајќи $\epsilon$, ја добиваме следната табела.

Табела 6.37. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.36 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 <br> $250-\epsilon$ | 7 (0) | 8 (-4) | 3 (4) | 1 <br> $150+\epsilon$ | $u_1=0$ |
| $I_2$ | 2 <br> $100+\epsilon$ | 4 <br> 150 | 9 <br> $350-\epsilon$ | 5 (9) | 9 (11) | $u_2=-3$ |
| $I_3$ | 9 (-4) | 11 (-4) | 4 (-16) <br> $\epsilon$ | 7 <br> $300-\epsilon$ | 9 (0) | $u_3=8$ |
| $I_4$ | 11 (-4) | 6 (-11) | 7 (-15) | 9 <br> $200+\epsilon$ | 11 <br> $500-\epsilon$ | $u_4=10$ |
| потенц. на понори | $v_1=5$ | $v_2=7$ | $v_3=12$ | $v_4=-1$ | $v_5=1$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела кои треба да се намалат за $\epsilon$, а тоа се вредностите во полињата $(3,4),(4,5),(1,1),(2,3)$:

$$\epsilon=\min\{300,500,250,350\}=250.$$

Бидејќи вредноста во полето $(1,1)$ се намалува на 0, ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и цикличната низа $\{(3,3),(3,4),(4,4),(4,5),(1,5),(1,1),(2,1),(2,3)\}$ се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметки за потенцијалите и разликите за слободните полиња, ја добиваме следната табела.

Табела 6.38. Транспортна табела добиена од табела 6.34 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 3 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 | 7 | 8 | 3 | 1 <br> 400 |
| $I_2$ | 2 <br> 350 | 4 <br> 150 | 9 <br> 100 | 5 | 9 |
| $I_3$ | 9 | 11 | 4 <br> 250 | 7 <br> 50 | 9 |
| $I_4$ | 11 | 6 | 7 | 9 <br> 450 | 11 <br> 250 |

Оваа табела содржи недегенерирано одржливо решение за кое лесно се проверува дека е базично. Со неа ја започнуваме следната итерација.

**Итерација 4**

**Пресметување на потенцијалите:** Врз основа податоците во базните полиња од последната табела формираме нов систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1,u_2,u_3,u_4,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1=0$.

$$\begin{cases} c_{15}=1=u_1+v_5\\ c_{21}=2=u_2+v_1\\ c_{22}=4=u_2+v_2\\ c_{23}=9=u_2+v_3\\ c_{33}=4=u_3+v_3\\ c_{34}=7=u_3+v_4\\ c_{44}=9=u_4+v_4\\ c_{45}=11=u_4+v_5\end{cases} \overset{u_1=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} v_5=1\\ 2=u_2+v_1\\ 4=u_2+v_2\\ 9=u_2+v_3\\ 4=u_3+v_3\\ 7=u_3+v_4\\ 9=u_4+v_4\\ 11=u_4+v_5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5=1\\ 2=u_2+v_1\\ 4=u_2+v_2\\ 9=u_2+v_3\\ 4=u_3+v_3\\ 7=u_3+v_4\\ 9=u_4+v_4\\ u_4=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5=1\\ 2=u_2+v_1\\ 4=u_2+v_2\\ 9=u_2+v_3\\ 4=u_3+v_3\\ 7=u_3+v_4\\ v_4=-1\\ u_4=10\end{cases}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ v_3 = -4 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ u_2 = 13 \\ v_3 = -4 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ v_1 = -11 \\ v_2 = -9 \\ u_2 = 13 \\ v_3 = -4 \\ u_3 = 8 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\overline{c}_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0 - 11) = 16$$
$$\overline{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 9) = 16$$
$$\overline{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 - 4) = 12$$
$$\overline{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$$
$$\overline{c}_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (13 - 1) = \boxed{-7}$$
$$\overline{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (13 + 1) = \boxed{-5}$$
$$\overline{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (8 - 11) = 12$$
$$\overline{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (8 - 9) = 12$$
$$\overline{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (8 + 1) = 0$$
$$\overline{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 - 11) = 12$$
$$\overline{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (10 - 9) = 5$$
$$\overline{c}_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 7 - (10 - 4) = 1$$

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.39. Транспортна табела добиена од табела 6.38 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| *понори* / *извори* | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | *потенц. на извори* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (16) | **7** (16) | **8** (12) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** 100 | **5** (-7) | **9** (-5) | $u_2 = 13$ |
| $I_3$ | **9** (12) | **11** (12) | **4** 250 | **7** 50 | **9** (0) | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | **11** (12) | **6** (5) | **7** (1) | **9** 450 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| *потенц. на понори* | $v_1 = -11$ | $v_2 = -9$ | $v_3 = -4$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Базното одржливо решение што кореспондира на последната табела не е оптимално ($\overline{c}_{24} < 0$), па продолжуваме со негова модификација.

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.39.** Најмалата од негативните разлики е $\overline{c}_{24} = -7$. Таа одговара на слободното поле $(2,4)$. Со помош на ова поле и дел од базните полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(2,4), (2,3), (3,3), (3,4)\},$$

што во следната табела е означено со сино обоените полиња и стрелките.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.40. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.39 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 (16) | 7 (16) | 8 (12) | 3 (4) | 1 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 350 | 4 150 | 9 100 | 5 (-7) ● | 9 (-5) | $u_2 = 13$ |
| $I_3$ | 9 (12) | 11 (12) | 4 250 | 7 50 | 9 (0) | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | 11 (12) | 6 (5) | 7 (1) | 9 450 | 11 250 | $u_4 = 10$ |
| потенц. на понори | $v_1 = -11$ | $v_2 = -9$ | $v_3 = -4$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Ставајќи $\epsilon$ во полето $(2{,}4)$ и, движејќи се во насока на стрелките, наизменично одземајќи $\epsilon$ и во следно поле додавајќи $\epsilon$, ја добиваме следната табела.

Табела 6.41. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.40 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 (16) | 7 (16) | 8 (12) | 3 (4) | 1 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 2 350 | 4 150 | 9 $100 - \epsilon$ | 5 (-7) $\epsilon$ | 9 (-5) | $u_2 = 13$ |
| $I_3$ | 9 (12) | 11 (12) | 4 $250 + \epsilon$ | 7 $50 - \epsilon$ | 9 (0) | $u_3 = 8$ |
| $I_4$ | 11 (12) | 6 (5) | 7 (1) | 9 450 | 11 250 | $u_4 = 10$ |
| потенц. на понори | $v_1 = -11$ | $v_2 = -9$ | $v_3 = -4$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела кои треба да се намалат за $\epsilon$, а тоа се вредностите во полињата $(2{,}3)$ и $(3{,}4)$:

$$\epsilon = \min\{100, 50\} = 50.$$

Бидејќи вредноста во полето $(3{,}4)$ се намалува на 0, ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и цикличната низа $\{(2{,}4), (2{,}3), (3{,}3), (3{,}4)\}$, се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметки за потенцијалите и разликите за слободните полиња, ја добиваме следната табела.

Табела 6.42. Транспортна табела добиена од табела 6.38 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 4 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 5 | 7 | 8 | 3 | 1 400 |
| $I_2$ | 2 350 | 4 150 | 9 50 | 5 50 | 9 |
| $I_3$ | 9 | 11 | 4 300 | 7 | 9 |
| $I_4$ | 11 | 6 | 7 | 9 450 | 11 250 |

И табела 6.42 содржи недегенерирано одржливо решение за кое лесно се проверува дека е базично. Со неа ја започнуваме следната итерација.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Итерација 5**

**Пресметување на потенцијалите:** Врз основа податоците во базните полиња од последната табела формираме нов систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1 = 0$.

$$\begin{cases} c_{15} = 1 = u_1 + v_5 \\ c_{21} = 2 = u_2 + v_1 \\ c_{22} = 4 = u_2 + v_2 \\ c_{23} = 9 = u_2 + v_3 \\ c_{24} = 5 = u_2 + v_4 \\ c_{33} = 4 = u_3 + v_3 \\ c_{44} = 9 = u_4 + v_4 \\ c_{45} = 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \xRightarrow{u_1=0} \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 9 = u_2 + v_3 \\ u_2 = 6 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ v_3 = 3 \\ u_2 = 6 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ v_1 = -4 \\ v_2 = -2 \\ v_3 = 3 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 1 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$\bar{c}_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0 - 4) = 9$
$\bar{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 2) = 9$
$\bar{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 3) = 5$
$\bar{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$
$\bar{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (6 + 1) = 2$
$\bar{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (1 - 4) = 12$
$\bar{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (1 - 2) = 12$
$\bar{c}_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 7 - (1 - 1) = 7$
$\bar{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (1 + 1) = 7$
$\bar{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 - 4) = 5$
$\bar{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (10 - 2) = \boxed{-2}$
$\bar{c}_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 7 - (10 + 3) = \boxed{-6}$

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.43. Транспортна табела добиена од табела 6.42 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| *извори* \ *понори* | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | *потенц. на извори* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (5) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** 50 | **5** 50 | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (12) | **11** (12) | **4** 300 | **7** (7) | **9** (7) | $u_3 = 1$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) | **7** (-6) | **9** 450 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| *потенц. на понори* | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Базното одржливо решение што кореспондира на претходната табела не е оптимално ($\bar{c}_{42} < 0$), па продолжуваме со негова модификација.

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.24.** Најмалата од негативните разлики е $\bar{c}_{43} = -6$. Таа одговара на слободното поле $(4,3)$. Со помош на ова поле и дел од базните полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(4,3), (4,4), (2,4), (2,3)\},$$

што во следната табела е означено со сино обоените полиња и стрелките.

Табела 6.44. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.43 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (5) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** 50 | **5** 50 | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (12) | **11** (12) | **4** 300 | **7** (7) | **9** (7) | $u_3 = 1$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) | **7** (-6) | **9** 450 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| потенц. на понори | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Модификацијата на дистрибуцијата ја вршиме како што е посочено во следната табела.

Табела 6.45. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.44 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | потенц. на извори |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (5) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** $50 - \epsilon$ | **5** $50 + \epsilon$ | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (12) | **11** (12) | **4** 300 | **7** (7) | **9** (7) | $u_3 = 1$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) | **7** (-6) $\epsilon$ | **9** $450 - \epsilon$ | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| потенц. на понори | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела кои треба да се намалат за $\epsilon$, а тоа се вредностите во полињата $(2,3)$ и $(4,4)$:

$$\epsilon = \min\{450, 50\} = 50.$$

Бидејќи вредноста во полето $(2,3)$ се намалува на 0, ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и цикличната низа $\{(4,3), (4,4), (2,4), (2,3)\}$ се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметки за потенцијалите и разликите за слободните полиња, ја добиваме следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.46. Транспортна табела добиена од табела 6.42 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 5 (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** | **5** 100 | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** | **7** 50 | **9** 400 | **11** 250 |

Табела 6.46 содржи недегенерирано одржливо решение. Уште повеќе ова е исто со почетното одржливо решение добиено со методот на минимални трошоци. Ова значи дека треба да очекуваме тестот за оптималност што ќе го спроведеме во следната итерација да покаже дека ова базно изводливо решение не е оптимално.

**Итерација 6**

**Пресметување на потенцијалите:** Врз основа податоците во базните полиња од последната табела формираме нов систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1 = 0$.

$$\begin{cases} c_{15} = 1 = u_1 + v_5 \\ c_{21} = 2 = u_2 + v_1 \\ c_{22} = 4 = u_2 + v_2 \\ c_{24} = 5 = u_2 + v_4 \\ c_{33} = 4 = u_3 + v_3 \\ c_{43} = 7 = u_4 + v_3 \\ c_{44} = 9 = u_4 + v_4 \\ c_{45} = 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \xRightarrow{u_1=0} \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ 7 = u_4 + v_3 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ 7 = u_4 + v_3 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 4 = u_2 + v_2 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 7 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ v_1 = -4 \\ v_2 = -2 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 7 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\bar{c}_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0 - 4) = 9$$
$$\bar{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 2) = 9$$
$$\bar{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 - 3) = 11$$
$$\bar{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$$
$$\bar{c}_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 9 - (6 - 3) = 6$$
$$\bar{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (6 + 1) = 2$$
$$\bar{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (7 - 4) = 6$$
$$\bar{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (7 - 2) = 6$$
$$\bar{c}_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 7 - (7 - 1) = 1$$
$$\bar{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (7 + 1) = 1$$
$$\bar{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 - 4) = 5$$
$$\bar{c}_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 6 - (10 - 2) = \boxed{-2}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Врз основа на овие пресметки, ја добиваме следната табела.

Табела 6.47. Транспортна табела добиена од табела 6.46 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (11) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** (6) | **5** 100 | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (6) | **11** (6) | **4** 300 | **7** (1) | **9** (1) | $u_3 = 7$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) | **7** 50 | **9** 400 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = -3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Базното одржливо решение што кореспондира на последната табела не е оптимално ($\bar{c}_{42} < 0$), па продолжуваме со негова модификација.

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.47.** Табелата содржи само една негативна разлика $\bar{c}_{42} = -2$. Таа одговара на слободното поле $(4,2)$. Со помош на ова поле и дел од базните полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(4,2),(4,4),(2,4),(2,2)\},$$

што во следната табела е означено со сино обоените полиња и стрелките.

Табела 6.48. Формирање на циклична низа за транспортна табела 6.47 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (11) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** 150 | **9** (6) | **5** 100 | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (6) | **11** (6) | **4** 300 | **7** (1) | **9** (1) | $u_3 = 7$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) | **7** 50 | **9** 400 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = -3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Модификацијата на дистрибуцијата ја вршиме како што е посочено во следната табела.

Табела 6.49. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж цикличната низа формирана кај транспортна табела 6.48 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** (9) | **7** (9) | **8** (11) | **3** (4) | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** $150 - \epsilon$ | **9** (6) | **5** $100 + \epsilon$ | **9** (2) | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** (6) | **11** (6) | **4** 300 | **7** (1) | **9** (1) | $u_3 = 7$ |
| $I_4$ | **11** (5) | **6** (-2) $\epsilon$ | **7** 50 | **9** $400 - \epsilon$ | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = -4$ | $v_2 = -2$ | $v_3 = -3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела кои треба да се намалат за $\epsilon$, а тоа се вредностите во полињата $(2,2)$ и $(4,4)$:

$$\epsilon = \min\{150, 400\} = 150.$$

Бидејќи вредноста во полето $(2,2)$ се намалува на 0, ова поле преминува во слободно поле (останува празно) и цикличната низа $\{(4,2), (4,4), (2,4), (2,2)\}$ се прекинува.

Отстранувајќи ги податоците од пресметки за потенцијалите и разликите за слободните полиња, ја добиваме следната табела.

Табела 6.50. Транспортна табела добиена од табела 6.46 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 6 (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** | **7** | **8** | **3** | **1** 400 |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** | **9** | **5** 250 | **9** |
| $I_3$ | **9** | **11** | **4** 300 | **7** | **9** |
| $I_4$ | **11** | **6** 150 | **7** 50 | **9** 250 | **11** 250 |

Табела 6.50 содржи недегенерирано одржливо решение. Уште повеќе ова е исто со почетното одржливо решение добиено со Вогеловиот метод. Во следната итерација ќе ја провериме неговата оптималност.

**Итерација 7**

**Пресметување на потенцијалите:** Новиот систем од 8 линеарни равенки со 9 непознати $u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$, за чие решавање повторно ставаме $u_1 = 0$, е:

$$\begin{cases} c_{15} = 1 = u_1 + v_5 \\ c_{21} = 2 = u_2 + v_1 \\ c_{24} = 5 = u_2 + v_4 \\ c_{33} = 4 = u_3 + v_3 \\ c_{42} = 6 = u_4 + v_2 \\ c_{43} = 7 = u_4 + v_3 \\ c_{44} = 9 = u_4 + v_4 \\ c_{45} = 11 = u_4 + v_5 \end{cases} \xRightarrow{u_1=0} \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ 6 = u_4 + v_2 \\ 7 = u_4 + v_3 \\ 9 = u_4 + v_4 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 5 = u_2 + v_4 \\ 4 = u_3 + v_3 \\ v_2 = -4 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 7 \\ v_2 = -4 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_5 = 1 \\ v_1 = -4 \\ u_2 = 6 \\ u_3 = 7 \\ v_2 = -4 \\ v_3 = -3 \\ v_4 = -1 \\ u_4 = 10 \end{cases}$$

**Пресметување на разликите за слободните полиња:** Врз основа на претходно пресметаните вредности за потенцијалите, за слободните полиња ги добиваме следните разлики $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

$$\overline{c}_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0 - 4) = 9$$
$$\overline{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 - 4) = 11$$
$$\overline{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 - 3) = 11$$
$$\overline{c}_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 3 - (0 - 1) = 4$$
$$\overline{c}_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 4 - (6 - 4) = 2$$
$$\overline{c}_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 9 - (6 - 3) = 6$$
$$\overline{c}_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 9 - (6 + 1) = 2$$
$$\overline{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (7 - 4) = 6$$
$$\overline{c}_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 11 - (7 - 4) = 8$$
$$\overline{c}_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 7 - (7 - 1) = 1$$
$$\overline{c}_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 9 - (7 + 1) = 1$$
$$\overline{c}_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 11 - (10 - 4) = 5$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Ниту една од претходните разлики не е негативна, што значи дека табела 6.50 кореспондира на оптимално базно решение. Тоа е и единственото оптимално решение, бидејќи секоја од разликите $\bar{c}_{ij}$ е поголема од 0.

Транспортната табела за оваа итерација е дадена во табела 6.51.

Претходните итерации укажуваат на две карактеристики на транспортниот проблем од овој пример, што не се јавуваат во секој случај:

- со некој од методите за определување на почетно одржливо решение е добиено оптимално решение (во овој случај тоа е почетно одржливо решение добиено со Вогеловиот метод),
- со примена на методот на модифицирана дистрибуција врз едно од почетните одржливи решенија, со последователните итерации е добиена низа од базни изводливи решенија што ги содржи почетните одржливи решенија добиени со останатите два методи.

Табела 6.51. Транспортна табела од пример 6.8 за итерација 7 со пресметани нови потенцијали и разлики што ја потврдуваат оптималноста на кореспондентното решение (автори)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. на извори*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **5** **(9)** | **7** **(11)** | **8** **(11)** | **3** **(4)** | **1** 400 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **2** 350 | **4** **(2)** | **9** **(6)** | **5** 250 | **9** **(2)** | $u_2 = 6$ |
| $I_3$ | **9** **(6)** | **11** **(8)** | **4** 300 | **7** **(1)** | **9** **(1)** | $u_3 = 7$ |
| $I_4$ | **11** **(5)** | **6** 150 | **7** 50 | **9** 250 | **11** 250 | $u_4 = 10$ |
| ***потенц. на понори*** | $v_1 = -4$ | $v_2 = -4$ | $v_3 = -3$ | $v_4 = -1$ | $v_5 = 1$ | |

Низата базни изводливи решенија добиена со итерациите 1. – 6. и соодветните вредности за транспортните трошоци е како што следи.

$$Y^{(0)} = \overline{X}_1 = \begin{bmatrix} 350 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 350 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 650 \end{bmatrix}, \quad f(Y^{(0)}) = 16100,$$

($\overline{X}_1$ е почетно одржливо решение добиено со метод на северозападен агол)

$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 350 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 150 & 350 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 600 \end{bmatrix}, \quad f(Y^{(1)}) = 15650,$$

$$Y^{(2)} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 100 & 150 & 350 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 500 \end{bmatrix}, \quad f(Y^{(2)}) = 14750,$$

$$Y^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 350 & 150 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 250 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 & 500 \end{bmatrix}, \quad f(Y^{(3)}) = 10750,$$

$$Y^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \\ 350 & 150 & 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 & 500 \end{bmatrix}, \quad f(Y^{(4)}) = 10400,$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$Y^{(5)} = \overline{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 350 & 150 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 400 & 250 \end{bmatrix}, \quad f\left(Y^{(4)}\right) = 10100,$$

($\overline{X}_2$ е почетно одржливо решение добиено со метод на минимални трошоци)

$$Y^{(6)} = \overline{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 350 & 0 & 0 & 250 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 50 & 250 & 250 \end{bmatrix} = X_{opt}, \quad f\left(Y^{(6)}\right) = 9800,$$

($\overline{X}_3$ е почетно одржливо решение добиено со Вогелов метод)

Во пример 6.10 е даден транспортен проблем кај кој не е можно да се воспостави ваква поврзаност меѓу почетните одржливи решенија добиени со сите три методи.

Во следниот пример ќе ја илустрираме постапката за решавање на транспортен проблем со дегенерирано почетно одржливо решение.

**Пример 6.9.** Поаѓаме од табела 6.25 во пример 6.7 каде веќе е извршена корекција на дегенерацијата. Полето што е искористено за корекција на дегенерацијата, т.е. полето во кој е внесен симболот $\delta$, се смета за базно поле.

**Итерација 1**

**Пресметување на потенцијалите и разликите:** За потенцијалите сега ќе формираме систем од 6 линеарни равенки со 7 непознати $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$, за чие решавање повторно ставаме $u_1 = 0$.

$$\begin{cases} c_{11} = 3 = u_1 + v_1 \\ c_{14} = 5 = u_1 + v_4 \\ c_{23} = 1 = u_2 + v_3 \\ c_{24} = 2 = u_2 + v_4 \\ c_{32} = 3 = u_3 + v_2 \\ c_{33} = 6 = u_3 + v_3 \end{cases} \overset{u_1=0}{\Longrightarrow} \begin{cases} v_1 = 3 \\ v_4 = 5 \\ v_3 = 4 \\ u_2 = -3 \\ v_2 = 1 \\ u_3 = 2 \end{cases}$$

од каде, за разликите $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ за слободните полиња, добиваме:

$$\overline{c}_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 7 - (0 + 1) = 6$$
$$\overline{c}_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 8 - (0 + 4) = 4$$
$$\overline{c}_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 3 - (-3 + 3) = 3$$
$$\overline{c}_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 2 - (-3 + 1) = 4$$
$$\overline{c}_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (2 + 3) = \boxed{-2}$$
$$\overline{c}_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 5 - (2 + 5) = \boxed{-2}$$

Табела 6.52. Транспортна табела добиена од табела 6.25 со пресметани потенцијали и разлики (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** 200 | **7** (6) | **8** (4) | **5** 120 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **3** (3) | **2** (4) | **1** 60 | **2** $\delta$ | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | **3** (-2) | **3** 80 | **6** 100 | **5** (-2) | $u_3 = 2$ |
| **потенц. на понори** | $v_1 = 3$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 5$ | |

Базното одржливо решение што кореспондира на последната табела не е оптимално ($\overline{c}_{31} < 0$ и $\overline{c}_{34} < 0$), па продолжуваме со негова модификација.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Модификација на дистрибуцијата во табела 6.52.** Табелата содржи две еднакви негативни разлики е $\bar{c}_{31} = -2 = \bar{c}_{34}$. Помал транспортен трошок има во полето што кореспондира на $\bar{c}_{31}$, т.е. полето $(3,1)$. Со помош на ова поле и дел од базните полиња можеме да ја формираме цикличната низа

$$\{(3,1),(3,3),(2,3),(2,4),(1,4),(1,1)\}.$$

Модификацијата на дистрибуцијата ја вршиме како во следната табела.

Табела 6.53. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж соодветно избрана циклична низа кај транспортна табела 6.52 (автори)

| **понори** / **извори** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | **понудува** |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3**<br>$200-\epsilon$ | **7** (6) | **8** (4) | **5**<br>$120+\epsilon$ | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **3** (3) | **2** (4) | **1**<br>$60+\epsilon$ | **2**<br>$\delta-\epsilon$ | $u_2 = -3$ |
| $I_3$ | **3** (-2)<br>$\epsilon$ | **3**<br>80 | **6**<br>$100-\epsilon$ | **5** (-2) | $u_3 = 2$ |
| **потенц. на понори** | $v_1 = 3$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 5$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме како најмалата од количините во последната табела кои треба да се намалат за $\epsilon$,

$$\epsilon = \min\{100, \delta, 200\} = 150.$$

Бидејќи $\delta \approx 0$, ќе мора да важи $\epsilon = \delta$. Дополнително, во вакви случаи, кај базните полиња од цикличната низа преку која вршиме модификација на дистрибуцијата:

- полето со вредност $\delta$ каде треба да ја одземаме истата оваа вредност, го оставаме празно, т.е. за соодветната променлива во кореспондентното решение земаме вредност 0,
- во полето со вредност $\epsilon$ го впишуваме симболот $\delta$,
- кај останатите базни полиња каде додаваме или одземаме вредност $\epsilon$, сметаме дека се додава или одзема 0,

со што ја добиваме следната табела.

Табела 6.54. Транспортна табела добиена од табела 6.53 со модификација на дистрибуцијата опишана во итерација 1 (автори)

| **понори** / **извори** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3**<br>200 | **7** | **8** | **5**<br>120 |
| $I_2$ | **3** | **2** | **1**<br>60 | **2** |
| $I_3$ | **3**<br>$\delta$ | **3**<br>80 | **6**<br>100 | **5** |

Во споредба со табелата од која почнавме, извршена е само дислокација на $\delta$. Но табелата содржи недегенерирано одржливо решение. Во следната итерација ќе ја провериме неговата оптималност.

**Итерација 2**

Постапувајќи како во претходната итерација, за потенцијалите и разликите за слободните полиња ќе ги добиеме оние прикажани во следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.55. Транспортна табела добиена од табела 6.54 со пресметани нови потенцијали и разлики (автори)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | понудува |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 3 200 | 7 (4) | 8 (2) | 5 120 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | 3 (5) | 2 (4) | 1 60 | 2 (4) | $u_2 = -5$ |
| $I_3$ | 3 $\delta$ | 3 80 | 6 100 | 5 (5) | $u_3 = 0$ |
| потенц. на понори | $v_1 = 3$ | $v_2 = 3$ | $v_3 = 6$ | $v_4 = 5$ | |

Базното одржливо решение што кореспондира на претходната табела, е оптимално решение (табела 6.55 не содржи негативни разлики) и тоа е единствено (табелата не содржи разлики еднакви на 0). Формално, во ова решение фигурира симболот $\delta$. Но тој, како и вредностите во слободните полиња, сметаме дека е еднаков на 0, што значи дека оптималното решение е

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 80 & 100 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ова е дегенерирано оптимално решение.

Вкупниот транспортен трошок за оптималното решение изнесува

$$f(X_{opt}) = 200 \cdot 3 + 120 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 80 \cdot 3 + 100 \cdot 6 = 2100.$$

**Напомена 6.1.** Во претходните два примери пресметките за потенцијалите на изворите и понорите, и оние за разликите $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ за слободните полиња, ги изведувавме настрана од транспортните табели, а потоа ја наведувавме табелата што се добива кога тие ќе бидат внесени. Но за таква формалноста при пресметките нема потреба. На пример, ако е земено $u_1 = 0$, во редицата што кореспондира на првиот извор се лоцираат базните (зафатените) полиња. Транспортните трошоци од овие полиња ќе бидат еднакви на потенцијалите на понорите што на тие полиња соодветствуваат и тие веднаш се запишуваат во последната редица. Потоа се проверува дали во колоните каде веќе се пресметани потенцијали има дополнителни базни полиња. Доколку тоа е случај, вредноста на потенцијалот на понорот се одзема од вредноста на транспортниот трошок. Разликата што ќе добие ќе биде потенцијал на изворот што кореспондира на тоа поле, па тој се внесува во соодветната редица од колоната со потенцијали на изворите. По конечен број пресметки ќе биде определени сите потенцијали. Штом ова заврши, се пресметуваат разликите за слободните полиња: од транспортниот трошок што кореспондира на такво поле се одземаат вредностите на потенцијалите на соодветниот извор и понор. Да напоменеме дека, наместо $u_1 = 0$, на почетокот од пресметувањето на потенцијалите за било кој од нив може да се земе дека е еднаков на 0, и потоа да се определат другите потенцијали.

**Пример 6.10.** Го разгледуваме транспортниот проблем зададен со табела 6.56.

Табела 6.56. Табеларно зададена транспортна задача (Манчевска, 2010)

| понори / извори | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | понудува |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 3 | 6 | 7 | 2 | 2 | 2000 |
| $I_2$ | 4 | 1 | 1 | 3 | 5 | 1500 |
| $I_3$ | 7 | 2 | 4 | 6 | 3 | 3000 |
| $I_4$ | 2 | 3 | 2 | 1 | 8 | 4000 |
| побарува | 1500 | 2500 | 1000 | 3000 | 2500 | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Почетното одржливо решение $Y_{sz}^{(0)}$ што се добива со методот на северозападен агол, низата базни одржливи решенија што потоа се добиваат со примена на методот на модифицирана дистрибуција и соодветните на вкупни транспортни трошоци се:

$$Y_{sz}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1500 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 1000 & 1500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1500 & 2500 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{sz}^{(0)}\right) = 44500,$$

$$Y_{sz}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2000 & 2000 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{sz}^{(1)}\right) = 37000,$$

$$Y_{sz}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 1000 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 1000 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{sz}^{(2)}\right) = 27000,$$

$$Y_{sz}^{(3)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 1000 & 0 & 1000 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{sz}^{(3)}\right) = 20000,$$

$$Y_{sz}^{(4)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{sz}^{(4)}\right) = 18000.$$

Притоа, како што ќе покажеме подолу, $Y_{sz}^{(4)}$ е оптимално решение, но не е единствено.

Почетното одржливо решение $Y_{mt}^{(0)}$ што се добива со методот на минимални трошоци, низата базни одржливи решенија што потоа се добиваат со методот на модифицирана дистрибуција и соодветните на вкупни транспортни трошоци се:

$$Y_{mt}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 500 & 1000 & 1000 & 0 & 500 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{mt}^{(0)}\right) = 21500,$$

$$Y_{mt}^{(1)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 1000 & 0 & 1000 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{mt}^{(1)}\right) = 20000,$$

$$Y_{mt}^{(2)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \ f\left(Y_{mt}^{(2)}\right) = 18000.$$

Почетното одржливо решение $Y_{vam}^{(0)}$ што ќе се добие со Вогеловиот метод соодветните на вкупни транспортни трошоци се:

$$Y_{vam}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1000 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{vam}^{(0)}\right) = 20000,$$

Ова е дегенерирано базно решение. Имајќи ја предвид транспортната табела со која е зададен транспортниот проблем, за отстранување на дегенерацијата, од слободните

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

полиња не може да се изберат полињата (1,2), (2,1), (2,5) или (3,1), бидејќи со нив потоа ќе може да се формираат цикличните низи:

$\{(1,2),(1,5),(3,5),(3,2)\}$,

$\{(2,1),(2,2),(3,2),(3,5),(5,1),(1,1)\}$,

$\{(2,5),(3,5),(3,2),(2,2)\}$, и

$\{(3,1),(3,5),(1,5),(1,1)\}$,

соодветно. Од останатите слободни полиња, поле со најмал трошок е полето (2,3). Ставајќи $\delta \approx 0$ во ова поле, ќе се добие недегенерирано базно решение. Тоа решение нема да биде оптимално. Модификацијата на дистрибуцијата[32] ќе се врши со ставање $\epsilon$ во полето (4,1) и формирање на цикличната низа

$$\{(4,1),(4,3),(2,3),(2,2),(3,2),(3,5),(5,1),(1,1)\}.$$

Соодветната вредноста за $\epsilon$ што потоа ќе се добие ќе биде $\epsilon = 1000$, и со неа ќе се добие истото оптимално решение како со претходните два методи, т.е.

$$Y_{vam}^{(1)} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 500 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 & 1000 \\ 1000 & 0 & 0 & 3000 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{vam}^{(1)}\right) = 18000,$$

Како што може да се забележи, почетните одржливи решенија $Y_{sz}^{(0)}$, $Y_{mt}^{(0)}$ и $Y_{vam}^{(0)}$ не се дел од итеративните низи решенија добиени со некој од останатите два методи.

Оптималното решение не е единствено. Во следната табела, со која воедно се потврдува оптималноста на решенијата $Y_{sz}^{(4)} = Y_{mt}^{(2)} = Y_{vam}^{(1)}$, се наведени соодветните потенцијали и разликите за слободните полиња што кореспондираат на ова решение.

Табела 6.57. Транспортна табела за потврдување на оптималноста на решенијата $Y_{sz}^{(4)} = Y_{mt}^{(2)} = Y_{vam}^{(1)}$ (Манчевска, 2010)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. по редици*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** 500 | **6** **(5)** | **7** **(6)** | **2** **(0)** | **2** 1500 | $u_1 = 0$ |
| $I_2$ | **4** **(1)** | **1** 500 | **1** 1000 | **3** **(1)** | **5** **(3)** | $u_2 = 0$ |
| $I_3$ | **7** **(3)** | **2** 2000 | **4** **(2)** | **6** **(3)** | **3** 1000 | $u_3 = 1$ |
| $I_4$ | **2** 1000 | **3** **(3)** | **2** **(2)** | **1** 3000 | **8** **(7)** | $u_4 = -1$ |
| ***потенц. по колони*** | $v_1 = 3$ | $v_2 = 1$ | $v_3 = 1$ | $v_4 = 2$ | $v_5 = 2$ | |

Разликата $\overline{c}_{14}$ е еднаква на 0. Што значи дека оптималните решенија $Y_{sz}^{(4)} = Y_{mt}^{(2)} = Y_{vam}^{(1)}$ не се единственото оптимално решение. За да се определи друго базно оптимално решение повторно се користи методот на модифицирана дистрибуција, но сега според следните правила:

- од транспортната табела што кореспондира на оптимално базно решение се избира поле во кое вредноста на разликата $\overline{c}_{ij} = 0$ и во него се внесува $\epsilon$,
- со избраното поле и дел од базните полиња се формира циклична низа, низ која се врши прераспределба на количините согласно методот на модифицирана дистрибуција.

[32] За деталите околу вредностите за потенцијалите, разликите кај слободните полиња и модификацијата на дистрибуцијата, упатуваме на (Манчевска, 2010, пример 3.4.2).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Согласно овие правила, ако во полето $(1{,}4)$ внесеме $\epsilon$, тогаш можеме да ја формираме цикличната низа $\{(1{,}4),(4{,}4),(4{,}1),(1{,}1)\}$ и ги модифицираме вредностите во овие полиња како што е прикажано во следната табела

Табела 6.58. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж соодветно избрана циклична низа кај транспортна табела 6.57 (Манчевска, 2010)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. по редици*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** $500-\epsilon$ | **6** **(5)** | **7** **(6)** | **2** **(0)** $\epsilon$ | **2** 1500 | $u_1=0$ |
| $I_2$ | **4** **(1)** | **1** 500 | **1** 1000 | **3** **(1)** | **5** **(3)** | $u_2=0$ |
| $I_3$ | **7** **(3)** | **2** 2000 | **4** **(2)** | **6** **(3)** | **3** 1000 | $u_3=1$ |
| $I_4$ | **2** $1000+\epsilon$ | **3** **(3)** | **2** **(2)** | **1** $3000-\epsilon$ | **8** **(7)** | $u_4=-1$ |
| ***потенц. по колони*** | $v_1=3$ | $v_2=1$ | $v_3=1$ | $v_4=2$ | $v_5=2$ | |

Вредноста $\epsilon$ ја определуваме така што да важи

$$\epsilon=\min\{500{,}3000\}=500,$$

со што ја добиваме следната табела со модифицирана распределба (сега празно останува полето $(1{,}1)$).

Табела 6.59. Транспортна табела добиена со модификација на дистрибуцијата во табела 6.57 (Манчевска, 2010)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** | **6** | **7** | **2** 500 | **2** 1500 |
| $I_2$ | **4** | **1** 500 | **1** 1000 | **3** | **5** |
| $I_3$ | **7** | **2** 2000 | **4** | **6** | **3** 1000 |
| $I_4$ | **2** 1500 | **3** | **2** | **1** 2500 | **8** |

На оваа табела кореспондира базно недегенерирано изводливо решение. Во следната табела се дадени соодветните потенцијали и разлики за слободните полиња.

Табела 6.60. Табела 6.59 дополнета со потенцијали и разлики (Манчевска, 2010)

| ***понори*** / ***извори*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | ***потенц. по редици*** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | **3** **(0)** | **6** **(5)** | **7** **(6)** | **2** 500 | **2** 1500 | $u_1=0$ |
| $I_2$ | **4** **(1)** | **1** 500 | **1** 1000 | **3** **(1)** | **5** **(3)** | $u_2=0$ |
| $I_3$ | **7** **(3)** | **2** 2000 | **4** **(2)** | **6** **(3)** | **3** 1000 | $u_3=1$ |
| $I_4$ | **2** 1500 | **3** **(3)** | **2** **(2)** | **1** 2500 | **8** **(7)** | $u_4=-1$ |
| ***потенц. по колони*** | $v_1=3$ | $v_2=1$ | $v_3=1$ | $v_4=2$ | $v_5=2$ | |

Во табела 6.60 нема негативни разлики $\overline{c}_{ij}$, што значи дека решението

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \\ 0 & 500 & 1000 & 500 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 & 1000 \\ 1500 & 0 & 0 & 2500 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(Y) = 18000,$$

е исто така оптимално решение.

### 6.4. Решавање на отворен транспортен проблем

Проблемите од праксата што може математички да се формулираат како класичен транспортен, најчесто не се затворени. Вкупните ресурсите достапни кај изворите може да не се доволни за да се задоволат потребите на понорите, или пак вкупниот капацитет на понорите да биде помал од вкупната понуда на изворите. Ако природата на практичниот проблем дозволува делумно задоволување на побарувањата на понорите или делумно дистрибуирање на ресурсите од изворите (што е најчест случај во праксата), за ваквите проблеми може да се даде одговор на тоа како треба да изврши соодветно пренесување на ресурси од изворите кон понорите, а притоа да се направи најмал можен вкупен трошок за транспортирање преку *затварање на транспортниот проблем со воведување на фиктивен извор или фиктивен понор* како што е наведено во оддел 6.1.1 и *модификација на дел од методите за определување на почетно базно изводливо решение* како што следи.

1. Методот на северозападен агол се применува на сосема ист начин.
2. Методот на минимални трошоци се применува така што трошоците во полињата што соодветствуваат на фиктивниот извор или фиктивниот понор (тие се еднакви на 0 и секогаш ќе бидат најмали) не се земаат предвид сè додека тоа е можно.
3. Вогеловиот апроксимативен метод се применува така што за почетната транспортна табела, сè додека е можно, се смета дека редицата што кореспондира на фиктивниот извор, односно колоната што кореспондира на фиктивниот понор е претходно исклучена.

Во случај на појава на дегенерација, за нејзино отстранување, секогаш кога е можно се користат слободни полиња што не припаѓаат на редицата на фиктивниот извор, односно колоната на фиктивниот понор.

**Пример 6.11.** Во четири рудници се ископани 100, 150, 120 и 110 тони руда што треба се доставуваат до три фабрики. Секоја од фабриките има тековна потреба од 150 тони руда. Трошоците за транспорт на еден тон руда се дадени во следната табела.

Табела 6.61. Трошоци за транспорт на рудата до фабриките (автори)

| ***фабрики*** / ***рудници*** | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 11 | 14 | 10 |
| $R_2$ | 10 | 12 | 13 |
| $R_3$ | 12 | 11 | 15 |
| $R_4$ | 14 | 11 | 10 |

Да се определи план на транспорт на рудата со цел да се постигни најмал транспортен трошок, а притоа да се запазат тековните потреби на фабриките.

**Решение.** Вкупната количина на ископана руда изнесува $480$ тони, а вкупната побарувачка на трите фабрики изнесува $450$ тони, што значи побарувачката на фабриките е помала од „понудата“ на рудниците. Воведуваме фиктивна фабрика $F_4$ со побарувачка $480 - 450 = 30$ тони. Транспортни трошоци по еден тон руда од секој од рудниците до фиктивната фабрика земаме да бидат еднакви на 0 и ја формираме следната транспортна табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.62. Почетна транспортна табела за пример 6.11 (автори)

| ***фабрики*** / ***рудници*** | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | ***понуда*** |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | **11** | **14** | **10** | **0** | 100 |
| $R_2$ | **10** | **12** | **13** | **0** | 150 |
| $R_3$ | **12** | **11** | **15** | **0** | 120 |
| $R_4$ | **14** | **11** | **10** | **0** | 110 |
| ***побарувачка*** | 150 | 150 | 150 | 30 | |

Почетното одржливо решение $Y_{sz}^{(0)}$ што се добива со методот на северозападен агол, низата базни одржливи решенија што потоа се добиваат со примена на методот на модифицирана дистрибуција и соодветните на вкупни транспортни трошоци се:

$$Y_{sz}^{(0)} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 30 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{sz}^{(0)}\right) = 5200,$$

$$Y_{sz}^{(1)} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 70 & 0 \\ 120 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 30 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{sz}^{(1)}\right) = 4710,$$

$$Y_{sz}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 50 & 30 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{sz}^{(2)}\right) = 4650.$$

Последното решение е оптимално и *дегенерирано* базно решение. Деталите за добивање на претходната низа се оставаат на читателот.

Почетното одржливо решение $Y_{mt}^{(0)}$ што се добива со методот на минимални трошоци, согласно посочената модификација на овој метод, и соодветниот вкупен трошок за транспорт се:

$$Y_{mt}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 40 & 30 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{sz}^{(0)}\right) = 4740.$$

Ова е дегенерирано решение чија дегенерација може да се отстрани со поставување на $\delta \approx 0$ во полето $(1,1)$ на соодветната транспортна табела. Табелата што ќе се добие по пресметување на потенцијалите и разликите $\overline{c}_{ij}$ за слободните полиња, заедно со полињата по кои треба да се изврши модификација на дистрибуцијата, се дадени во следната табела.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.63. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж соодветно избрана циклична низа кај транспортна табела што кореспондира на почетно одржливо решение на транспортниот проблем од пример 6.11 добиено со методот на минимални трошоци и отстранета дегенерација (автори)

| фабрики / рудници | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | потенц. по редици |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 11 $\delta$ | 14 $30-\epsilon$ | 10 $40+\epsilon$ | 0 30 | $u_1 = 0$ |
| $R_2$ | 10 150 | 12 (-1) | 13 (4) | 0 (1) | $u_2 = -1$ |
| $R_3$ | 12 (-2) | 11 120 | 15 (2) | 0 (-3) | $u_3 = 3$ |
| $R_4$ | 14 (3) | 11 (-3) $\epsilon$ | 10 $110-\epsilon$ | 0 (0) | $u_4 = 0$ |
| потенц. по колони | $v_1 = 11$ | $v_2 = 14$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 0$ | |

За $\epsilon$ имаме: $\epsilon = \min\{30,110\} = 30$. По завршување на модификацијата на дистрибуцијата и рекалкулација на потенцијалите и разликите $\bar{c}_{ij}$ за слободните полиња, ќе се добие следната табела.

Табела 6.64. Модификацијата на дистрибуцијата од табела 6.63 и пресметки на новите потенцијали и разлики (автори)

| фабрики / рудници | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | потенц. по редици |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 11 $\delta$ | 14 (3) | 10 70 | 0 30 | $u_1 = 0$ |
| $R_2$ | 10 150 | 12 (2) | 13 (4) | 0 (1) | $u_2 = -1$ |
| $R_3$ | 12 (1) | 11 120 | 15 (5) | 0 (0) | $u_3 = 0$ |
| $R_4$ | 14 (3) | 11 30 | 10 80 | 0 (0) | $u_4 = 0$ |
| потенц. по колони | $v_1 = 11$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 0$ | |

На табела 6.64 одговара решението

$$Y_{mt}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 70 & 30 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 80 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{sz}^{(1)}\right) = 4650,$$

кое, заради отсуството на негативни разлики, е оптимално, но и дегенерирано. Како што може да се забележи, тоа се разликува од оптималното решение $Y_{sz}^{(2)}$.

Почетното одржливо решение $Y_{mt}^{(0)}$ што се добива со Вогеловиот метод, согласно посочената модификација на овој метод, е:

$$Y_{vam}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 50 & 30 \end{bmatrix}, \qquad f\left(Y_{vam}^{(0)}\right) = 4650,$$

и тоа се совпаѓа со решението $Y_{sz}^{(2)}$ .

Но постои и трето оптимално решение, различно од претходните две!

Прво да забележиме дека решенијата $Y_{sz}^{(2)} = Y_{vam}^{(0)}$ може да се добијат од $Y_{mt}^{(1)}$ со редистрибуција на количините од табелата за испитување на оптималноста на $Y_{mt}^{(1)}$, како

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

што тоа е наведено во следната табела, за $\epsilon = 30$. Оваа модификација одговара на изборот на полето $(4{,}4)$, во кое $\overline{c}_{44} = 0$, и преку кое, со дел од базните полиња, ќе се формира циклична низа од сино обоените полиња.

Табела 6.65. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж циклична низа кај транспортна табела што одговара на $Y_{mt}^{(1)}$ за добивање на решенијата $Y_{sz}^{(2)} = Y_{vam}^{(0)}$ (автори)

| фабрики / рудници | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | потенц. по редици |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | **11** $\delta$ | **14** (3) | **10** $70+\epsilon$ | **0** $30-\epsilon$ | $u_1 = 0$ |
| $R_2$ | **10** 150 | **12** (2) | **13** (4) | **0** (1) | $u_2 = -1$ |
| $R_3$ | **12** (1) | **11** 120 | **15** (5) | **0** (0) | $u_3 = 0$ |
| $R_4$ | **14** (3) | **11** 30 | **10** $80-\epsilon$ | **0** $\epsilon$ | $u_4 = 0$ |
| **потенц. по колони** | $v_1 = 11$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 0$ | |

Третото оптимално решение ќе се добие со помош на табелата за испитување на оптималноста на решенијата $Y_{sz}^{(2)} = Y_{vam}^{(0)}$. Таа табела, заедно со потенцијалите, разликите $\overline{c}_{ij}$ за слободните полиња и новата циклична низа по која ќе се врши редистрибуција се дадени во следната табела.

Табела 6.66. Наизменично додавање и одземање на $\epsilon$ вдолж соодветна циклична низа кај транспортна табела што одговара на решенијата $Y_{sz}^{(2)} = Y_{vam}^{(0)}$ за добивање на алтернативно трето оптимално решение (автори)

| фабрики / рудници | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | потенц. по редици |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | **11** $\delta$ | **14** (3) | **10** 100 | **0** (0) | $u_1 = 0$ |
| $R_2$ | **10** 150 | **12** (2) | **13** (4) | **0** (1) | $u_2 = -1$ |
| $R_3$ | **12** (1) | **11** $120-\epsilon$ | **15** (5) | **0** (0) $\epsilon$ | $u_3 = 0$ |
| $R_4$ | **14** (3) | **11** $30+\epsilon$ | **10** 50 | **0** $30-\epsilon$ | $u_4 = 0$ |
| **потенц. по колони** | $v_1 = 11$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 0$ | |

Решението што ќе се добие по редистрибуцијата назначена во претходната табела (заменувајќи го $\delta$ со 0) е:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 50 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(Y_3) = 4650.$$

Според претходното имаме три различни оптимални решенија на транспортниот проблем што се добива со затварање на почетниот отворен транспортен проблем:

$$Y_{sz}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 50 & 30 \end{bmatrix} = Y_{vam}^{(0)}, \qquad Y_{mt}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 70 & 30 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 80 & 0 \end{bmatrix} \text{ и}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 50 & 0 \end{bmatrix}.$$

Врз основа на овие три решенија може да се добијат три различни планови на транспорт на рудата со цел да се запазат тековните потреби на фабриките и воедно да се постигни најмал транспортен трошок. Бараните транспортни планови се добиваат врз основа на првите три колони кај горните оптимални решенија. Во сите три случаи имаме најмал можен вкупен транспортен трошок од 4650 монетарни единици. Притоа,

- ако се примени транспортниот план што произлегува од оптималното решение $Y_{sz}^{(2)} = Y_{vam}^{(0)}$, залихите на ископана руда во $R_1$, $R_2$ и $R_3$ ќе бидат целосно распределени до фабриките, а кај рудникот $R_4$ ќе остани залиха од 30 тони,
- ако се примени транспортниот план што произлегува од оптималното решение $Y_{mt}^{(1)}$, залихите на ископана руда во $R_2$, $R_3$ и $R_4$ ќе бидат целосно распределени до фабриките, а кај рудникот $R_1$ ќе остани залиха од 30 тони,
- ако се примени транспортниот план што произлегува од оптималното решение $Y_3$, залихите на ископана руда во $R_1$, $R_2$ и $R_4$ ќе бидат целосно распределени до фабриките, а кај рудникот $R_3$ ќе остани залиха од 30 тони.

**Пример 6.12.** Дневните потреби од безалкохолен пијалак од ист вид за секој од три угостителски објекти изнесуваат по 200 литри и истите може да се набават од четири дистрибутивни центри. Трошоците за набавка на еден литар се дадени во следната табела.

Табела 6.67. Транспортни трошоците за достава на пијалак (автори)

| ***угост. обј.*** / ***дистр. цен.*** | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | 10 | 11 | 12 |
| $C_2$ | 9 | 15 | 12 |
| $C_3$ | 10 | 11 | 8 |
| $C_4$ | 12 | 9 | 7 |

Ако во дистрибутивните центри бараниот безалкохолен пијалак е тековно достапен во количини од по 140, 135, 160 и 140 литри, да се состави транспортен план со цел вкупните трошоци за набавка да бидат минимални.

**Решение.** Вкупната побарувачка изнесува 600 литри, додека вкупната количина на залиха во четирите дистрибутивни центри изнесува 575 литри, што значи дека имаме отворен транспортниот проблем. За негово затворање се воведува фиктивен центар $C_5$ со „понуда“ од 600 – 575 = 25 литри и трошоци за набавка од 0 ден. по литар кон секој од угостителските објекти. За затворениот проблем ја имаме следната транспортна табела.

Табела 6.68. Транспортна табела за пример 6.12 (автори)

| ***угост. обј.*** / ***дистр. цен.*** | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | ***понуда*** |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | **10** | **11** | **12** | 140 |
| $C_2$ | **9** | **15** | **12** | 135 |
| $C_3$ | **10** | **11** | **8** | 160 |
| $C_4$ | **12** | **9** | **7** | 140 |
| $C_4$ | **0** | **0** | **0** | 25 |
| ***побарувачка*** | 200 | 200 | 200 | |

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Заради краткост, во продолжение се наведени почетното одржливо решение добиено со Вогеловиот метод и финалните табели од секоја итерација во која се внесени соодветните потенцијали, разликите $\overline{c}_{ij}$ за слободните полиња и цикличните низи по кои треба се врши модификација на дистрибуцијата.

Табела 6.69. Почетно одржливо решение добиено со Вогеловиот метод (автори)

| ***угост. обј.*** / ***дистр. цен.*** | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | **10** | **11** 140 | **12** |
| $C_2$ | **9** 135 | **15** | **12** |
| $C_3$ | **10** 65 | **11** 35 | **8** 60 |
| $C_4$ | **12** | **9** | **7** 140 |
| $C_4$ | **0** | **0** 25 | **0** |

На табела 6.69 кореспондира базно изводливо решение што не е дегенерирано и за кое вкупните трошоци за набавка изнесуваат 5250 денари.

Табела 6.70. Итерација 1 (автори)

| ***угост. обј.*** / ***дистр. цен.*** | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | ***потенц. по редици*** |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | **10** (10) | **11** 140 | **12** (4) | $u_1 = 0$ |
| $C_2$ | **9** 135 | **15** (5) | **12** (5) | $u_2 = -1$ |
| $C_3$ | **10** 65 | **11** $35 - \epsilon$ | **8** $60 + \epsilon$ | $u_3 = 0$ |
| $C_4$ | **12** (3) | **9** (-1) $\epsilon$ | **7** $140 - \epsilon$ | $u_4 = -1$ |
| $C_4$ | **0** (1) | **0** 25 | **0** (3) | $u_5 = -11$ |
| ***потенц. по колони*** | $v_1 = 10$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 8$ | |

Модификација за вредност $\epsilon = \min\{35{,}140\}$, што ќе резултира со базно одржливо решение од *следната* табела.

Табела 6.71. Итерација 2 (автори)

| ***угост. обј.*** / ***дистр. цен.*** | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | ***потенц. по редици*** |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | **10** (-1) $\epsilon$ | **11** $140 - \epsilon$ | **12** (3) | $u_1 = 0$ |
| $C_2$ | **9** 135 | **15** (6) | **12** (5) | $u_2 = -2$ |
| $C_3$ | **10** $65 - \epsilon$ | **11** (1) | **8** $95 + \epsilon$ | $u_3 = -1$ |
| $C_4$ | **12** (3) | **9** $35 + \epsilon$ | **7** $105 - \epsilon$ | $u_4 = -2$ |
| $C_4$ | **0** (0) | **0** 25 | **0** (2) | $u_5 = -11$ |
| ***потенц. по колони*** | $v_1 = 11$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 9$ | |

Модификација за вредност $\epsilon = \min\{65{,}140{,}105\} = 65$, што ќе резултира со базно одржливо решение од *следната* табела

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.72. Итерација 3 (автори)

| угост. обј. / дистр. цен. | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | потенц. по редици |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | **10** 65 | **11** 75 | **12** (3) | $u_1 = 0$ |
| $C_2$ | **9** 135 | **15** (5) | **12** (4) | $u_2 = -1$ |
| $C_3$ | **10** (1) | **11** (1) | **8** 160 | $u_3 = -1$ |
| $C_4$ | **12** (4) | **9** 100 | **7** 40 | $u_4 = -2$ |
| $C_4$ | **0** (1) | **0** 25 | **0** (2) | $u_5 = -11$ |
| **потенц. по колони** | $v_1 = 10$ | $v_2 = 11$ | $v_3 = 9$ | |

Табела 6.72 не содржи негативни разлики, ниту разлики еднакви на 0. Ова значи дека базното одржливо решение

$$X = \begin{bmatrix} 65 & 75 & 0 \\ 135 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \\ 0 & 100 & 40 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix},$$

е единственото оптимално решение на затворениот транспортен проблем. Вкупниот трошок за набавка изнесува 5225 денари.

Задоволително решение на првичниот проблем, т.е. планот за набавка што може да се направи за да се задоволат што е можно повеќе од потребните количини на угостителските објекти, со најмал трошок за набавка, се добива врз основа на првите четири редици од матрицата со која е претставено оптималното решение на транспортниот проблем добиен со затварање. Трошоците за набавка ќе останат исти, 5225 денари.

## 6.5. Проблем на назначување; Унгарски метод

Проблемот на назначување (распределување, асигнација) е специјален случај на транспортен проблем. Во основниот облик, тој може да се опиши како што следи.

**Формулација:** За извршување на $n$ работни задачи $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ треба да се ангажираат $n$ извршувачи $R_1, R_2, \dots, R_n$. Трошокот за извршување (времето, или некој друг коефициент што би претставувал еквивалент на способноста за извршување) на задачата $Z_j$ од страна на извршувачот $R_i$ изнесува $c_{ij}$, $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$. Назначувањето треба да биде направено така што:

1. на секој извршувач да му се додели само една работна задача,
2. секоја работна задача да биде извршена од страна на еден извршувач,
3. вкупните трошоци за изведување да бидат минимални.

Решението на дадениот проблем математички може да се претстави во облик на матрица

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

каде $x_{ij}$ има вредност 1 ако задачата $Z_j$ треба да му се додели на извршителот $R_i$, а во спротивно $x_{ij}$ прима вредност 0, $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$. Ова е т.н. *услов за бинарност* на непознатите $x_{ij}$. Дополнително, за вредностите $x_{ij}$, $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, треба да важи:

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- заради условот 1,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{6.31}$$

- заради условот 2,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,\dots,n, \tag{6.32}$$

- заради условот 3, вкупниот трошок

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

за изведување на работните задачи треба да биде минимален.

Ограничувачките равенства (6.31) и (6.32) овозможуваат условот за бинарност на променливите $x_{ij}$, $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$, да се замени со условот за нивна ненегативност и целобројност. Со тоа проблемот на распределба на работните задачи се сведува на *затворен* транспортен проблем со ист број на извори (во овој случај извршувачи) и понори (во овој случај работни задачи), каде понудата на секој од изворите и потребите на секој од понорите се исти и еднакви на 1:

$$\begin{aligned} \min\ f &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{p.o.}\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,\dots,n, \\ &x_{ij} \ge 0, \qquad i,j \in \{1,2,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Специфичноста на ограничувачките услови кај проблемот на распределба на работни задачи укажува на тоа дека овој проблем е наполно опишан ако е позната матрицата на трошоци

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

што овозможува примена на побрз метод на решавање во однос на оној кај општиот затворен транспортен проблем, познат под името *унгарски метод*[33], кој вклучува само соодветно трансформирање на матрицата на трошоци (6.34).

Алгоритамот се базира на теорема 6.1.

**Опис на унгарскиот метод**

Алгоритамот на унгарскиот метод се состои од следните последователни чекори.

**Чекор 1.** Во секоја редица во матрицата на трошоци се определува најмалата вредност и истата се одзема од секој елемент од соодветната редица.

**Чекор 2.** Во новата матрица, во секоја колона се определува најмалата вредност и истата се одзема од секој елемент од соодветната колона.

[33] Именуван е во чест на двајца унгарски математичари Dénes König и Jenő Egerváry (или Eugene Egerváry) кои, независно еден од друг, го формулирале алгоритмот за т.н. бипартитни графови.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Чекор 3.** Вршиме распределба на работните задачи преку елементите еднакви на 0 од матрицата добиена во чекор 2, како што следи:

(i) Избираме произволна редица или колона во која има барем една нула која не е претходно пречкртана. По правило, се избира онаа редица или колона која има само една нула која претходно не е пречкртана. Ако сите редици или колони со непречкртани нули содржат повеќе нули, тогаш обично произволно се избира и редица (или колона) и една од непречкртаните нули што таа ги содржи. Избраната нула ја заокружуваме.

(ii) За секоја избрана нула, и во редицата, и во колоната на која таа припаѓа се пречкртуваат сите останатите нули.

(iii) Постапките (i) и (ii) се повторува се додека било која нула од матрицата добиена во чекор 2 не е заокружена или пак пречкртана.

**Чекор 4. Тест за оптималност:** Ако бројот на заокружени нули е еднаков на $n$ што, дополнително, при доследно спроведување на чекор 1 и чекор 2 ќе значи дека во секоја редица и во секоја колона има *само по една* заокружена нула, тогаш е најдено оптимално решение на проблемот на доделување на работни задачи.

Доделувањето на задачите се врши по принципот: ако заокружената нула припаѓа на $i-$ тата редица и на $j(i)$ $-$тата колона, тогаш $x_{i,j(i)}=1$, т.е. на извршувачот $R_i$ му се доделува задачата $Z_{i(j)}$, кратко означено: $R_i \longrightarrow Z_{i(j)}$, $i=1,2,\dots,n$, а сите останати елементи на матрицата $X$ ќе бидат еднакви на 0.

Вкупниот минимален трошок за извршување на сите работни задачи ќе изнесува

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}=\sum_{i=1}^{n} c_{i,j(i)}.$$

Во случај кога кај делот (i) од чекор 3 од две или повеќе непречкртани нули е направен произволен избор, обично решението не е единствено, но минималниот трошок останува ист.

Ако бројот на заокружени нули е помал на $n$, тогаш продолжуваме со чекор 5.

**Чекор 5.** Преку редици и/или колоните се исцртуваат *најмал можен број* на хоризонтални и/или вертикални линии така што истите *да ги покријат сите нули во матрицата* добиена од чекор 3 (и заокружените, и пречкртаните). Најчесто линиите што треба да се повлечат, а притоа нивниот број да биде минимален, не се веднаш воочливи. За да се избегне исцртување поголем број на линии од она што е неопходно може да се примени следната постапка:

5.1. ја маркираме секоја редица во која нема заокружена нула,

5.2. ги маркираме сите колони (кои претходно не се маркирани), а кои имаат нула во некоја од претходно маркираните редици,

5.3. ги маркираме сите редици (кои претходно не се маркирани), а кои имаат *заокружена* нула во некоја од претходно маркираните колони,

5.4. постапките 5.1 – 5.3 ги повторуваме се додека можеме да маркираме редици и/или колони,

5.5. исцртуваме хоризонтална линија преку секоја *немаркирана* редица и секоја *маркирана* колона.

**Чекор 6.** Од елементите кои не се покриени со некоја од линиите исцртани преку редиците и/или колоните во чекор 5 се избира најмалиот. Нека неговата вредност ја означиме со $\epsilon$. Внимавајќи на тоа каде се повлечени хоризонтални и/или вертикални линии формираме нова $n \times n$ матрица на тој начин што:

- од елементите кои не се покриени со ниту една хоризонтална и вертикална линија ја одземаме вредноста $\epsilon$,
- елементите што се покриени само со хоризонтална или само со вертикална линија остануваат непроменети,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

- на елементите што се покриени и со хоризонтална и со вертикална линија им ја додаваме вредноста $\epsilon$.

**Чекор 7.** Врз матрицата добиена во чекор 6 ја повторуваме постапката почнувајќи од чекор 3.

**Напомена 6.2.** Честопати хоризонталните и/или вертикалните линии што треба да се исцртаат така да бидат покриени сите нули, а нивниот број да биде минимален, се воочливи по завршување на чекор 2. Во тој случај исцртување може веднаш да се направи и проверката на оптималноста се сведува на следното: Ако вкупниот број на исцртаните линии (кој може да биде најмногу $n$) е помал од $n$, тогаш оваа матрица не може да се искористи за добивање на оптимално решение и со нејзина помош формираме нова матрица како во чекор 6. Ако пак вкупниот број на исцртани линии е еднаков на $n$, тогаш во матрицата можеме да определиме $n$ елементи еднакви на нула од кои секоја припаѓа на точно една редица и точно една колона. Заокружувајќи ги овие нули, распределбата на задачите ќе се врши по принципот опишан во чекор 4.

**Пример 6.13.** За промоција на производите на една компанија ангажирани се тројца службеници кои моментално се лоцирани во три различни градови $A_1$, $A_2$ и $A_3$. Секој од службениците треба да ја продолжи промоцијата во само еден од нови три градови $B_1$, $B_2$ и $B_3$, а притоа во еден град може да престојува само еден службеник. Трошоците за превоз (изразени во денари) од секој од градовите $A_1$, $A_2$ и $A_3$, секој од градовите $B_1$, $B_2$ и $B_3$, се дадени во следната табела.

Табела 6.73. Патни трошоци од една до друга група градови (автори)

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_2$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 250 | 400 | 200 |
| $A_2$ | 400 | 600 | 400 |
| $A_3$ | 350 | 350 | 250 |

На кој начин треба да се прераспределат тројцата службеници за притоа да се направи најмал трошок за нивен превоз?

**Решение:** Ја формираме матрицата на трошоци и истата ја трансформираме согласно чекорите 1 и 2 од унгарскиот метод.

Подвлечените елементи во првата матрица се минималните вредности *по редици*, а во втората се минималните вредности *по колони*.

$$C=\begin{bmatrix}250 & 400 & \underline{200}\\ \underline{400} & 600 & 400\\ 350 & 350 & \underline{250}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}50 & 200 & \underline{0}\\ \underline{0} & 200 & 0\\ 100 & \underline{100} & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}=C^*.$$

Хоризонтални и/или вертикални линии што во последната матрица би ги покриле сите нули може да се исцртаат на следните пет начини, но вкупниот број на исцртани линии не може да се редуцира на помалку од 3.

$$\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

што значи дека со помош на матрицата

$$C^*=\begin{bmatrix}50 & 100 & 0\\ 0 & 100 & 0\\ 100 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

можеме да определиме оптимално решение на поставениот проблем во задачата. Од нулите на оваа матрица треба да се изберат 3 (т.е. онолку колку што имаме редици, односно колони) така што било која од избраните нули да припаѓа на само една редица и на само една колона. Бидејќи оваа матрица има и редици и колони кои содржат само

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

по една нула (првата редица, првата и втората колона) избираме една од нив и ја заокружуваме единствената нула во истата (или исцртуваме правоаголна рамка околу неа како подолу). Нека е тоа првата редица.

Единствената нула во првата редица припаѓа и на третата колона која содржи и други нули кои ги пречкртуваме како што следи

$$C^* = \begin{bmatrix} 50 & 100 & \boxed{0} \\ 0 & 100 & \cancel{0} \\ 100 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Останатите непречкртани нули исто така ги заокружуваме, тие се единствени нули во првата и втората колона, односно непречкртани нули од втората и третата редица.

$$C^* = \begin{bmatrix} 50 & 100 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 100 & \cancel{0} \\ 100 & \boxed{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Маркираните нули во матрицата $C^*$ се елементите $c_{13}^*$, $c_{21}^*$ и $c_{32}^*$. Ова значи дека минималниот трошок за превоз ќе биде еднаков на збирот на елементите $c_{13}$, $c_{21}$ и $c_{32}$ од матрицата $C$ или, подолу маркираните елементи

$$C = \begin{bmatrix} 250 & 400 & \boxed{200} \\ \boxed{400} & 600 & 400 \\ 350 & \boxed{350} & 250 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$c_{13} + c_{21} + c_{32} = 200 + 400 + 350 = 950 \text{ ден.},$$

и истиот одговара на следниот распоред на службениците: $A_1 \longrightarrow B_3,\ A_2 \longrightarrow B_1,\ A_3 \longrightarrow B_1$.

**Пример 6.14.** Секоја од петте различни компоненти на еден производ може да се изработи на пет различни машини. Времето што на секоја машина ѝ е потребно за изработка на одделните компонентите, изразено во минути, е дадено во следната табела.

Табела 6.74. Потребни минути за изработка на компонентите по машини (автори)

| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $K_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 130 | 135 | 140 | 60 | 55 |
| $M_2$ | 100 | 120 | 110 | 50 | 35 |
| $M_3$ | 140 | 80 | 155 | 60 | 80 |
| $M_4$ | 150 | 145 | 160 | 80 | 80 |
| $M_5$ | 200 | 120 | 185 | 110 | 105 |

На кој начин ќе се распредели изработката на компонентите по машини така што на секоја машина да се изработи само една компонента и притоа вкупното време за изработка да биде минимално?

**Решение:** Трансформацијата на кореспондентната матрица согласно чекор 1 и чекор 2 од унгарскиот метод е следната (подвлечените елементи во првата матрица се минималните вредност по редици, а во втората матрица, минималните вредности по колони):

$$\begin{bmatrix} 130 & 135 & 140 & 60 & \underline{55} \\ 100 & 120 & 110 & 50 & \underline{35} \\ 140 & 80 & 155 & \underline{60} & 80 \\ 150 & 145 & 160 & \underline{80} & 80 \\ 200 & 120 & 185 & 100 & \underline{105} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 75 & 80 & 85 & 5 & \underline{0} \\ \underline{65} & 85 & \underline{75} & 15 & 0 \\ 80 & 20 & 95 & \underline{0} & 20 \\ 70 & 65 & 80 & 0 & 0 \\ 95 & \underline{15} & 80 & 5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 15 & 0 \\ 15 & 5 & 20 & 0 & 20 \\ 5 & 50 & 5 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преминуваме на чекор 3. Почнуваме од првата редица во која има само една нула која воедно припаѓа на петтата колона. Околу оваа нула исцртуваме рамка, а останатите нули во петтата колона ги пречкртуваме како подолу.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 70 & 0 & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & 0 & 20 \\ 5 & 50 & 5 & 0 & \xcancel{0} \\ 30 & 0 & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}.$$

Од останатите редици и колони бираме произволно една од оние што имаат само една непречкртана нула. Такви се третата, четвртата и петтата редица и, првата, втората и третата колона. Ја избираме првата колона и околу единствената нула во оваа колона и исцртуваме рамка околу неа. Оваа нула воедно припаѓа на редица која содржи уште една непречкртана нула и таа ја пречкртуваме:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \xcancel{0} & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & 0 & 20 \\ 5 & 50 & 5 & 0 & \xcancel{0} \\ 30 & 0 & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}.$$

Од редиците и колоните што содржат само една неврамена и непречкртана нула (сега тоа се третата, четвртата и петтата редица и втората колона) повторно произволно бираме една и ја повторуваме постапката. При избор на третата редица добиваме:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \xcancel{0} & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \xcancel{0} & \xcancel{0} \\ 30 & 0 & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}.$$

Останува уште само да се постави рамка околу нулата во последната редица:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \xcancel{0} & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \xcancel{0} & \xcancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}.$$

**Тестирање на оптималноста.** Бројот на заокружени нули во последната матрица е $4 < 5$ , што значи дека од оваа матрица не може да се определи оптимално решение на поставениот проблем.

**Исцртување на минимален број на хоризонтални и вертикални линии:** За определување на редиците и колоните преку кои ќе се исцрта линија ќе ја примениме постапката опишана во чекор 5. Во последната матрица има само една редица која не содржи заокружена нула. Тоа е четвртата редица. Оваа редица ја маркираме со стрелката поставена десно од матрицата:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \xcancel{0} & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \xcancel{0} & \xcancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}$$

Четвртата и петтата колона имаат нула (врамена или пречкртана) во маркираната редица. Овие колони исто така ги маркираме со стрелки поставени под колоните:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \xcancel{0} & 15 & \xcancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \xcancel{0} & \xcancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 5 & \xcancel{0} \end{bmatrix}$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Две од немаркираните редици, првата и третата, имаат *вратена* нула во маркираните колони. И овие две редици ги маркираме со стрелки поставени десно од матрицата:

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \cancel{0} & 15 & \cancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 5 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Од немаркираните колони нема ниту една која има нула во последно маркираните редици и тука завршува постапката на маркирање на редици и колони.

Исцртуваме хоризонтална линија преку *секоја немаркирана редица* и *секоја маркирана колона* (или вкупно $4 < 5$ линии што воедно е индикатор за неоптималност).

$$\begin{bmatrix} 10 & 65 & 10 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \cancel{0} & 15 & \cancel{0} \\ 15 & 5 & 20 & \boxed{0} & 20 \\ 5 & 50 & 5 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 5 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Последната матрица ја модифицираме согласно постапката во чекор 6.

Најмалата вредност во последната матрица која не е покриена со ниту една линија изнесува $\epsilon = 5$. Оваа вредност ја одземаме од секој од елементите што не се покриени со ниту една линија, а ја додаваме кон секој од елементите покриени со две линии. Останатите елементи не се менуваат!

$$\begin{bmatrix} 10-\epsilon & 65-\epsilon & 10-\epsilon & 5 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 15+\epsilon & 0+\epsilon \\ 15-\epsilon & 5-\epsilon & 20-\epsilon & 0 & 20 \\ 5-\epsilon & 50-\epsilon & 5-\epsilon & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 5 & 5+\epsilon & 0+\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 20 & 5 \\ 10 & 0 & 15 & 0 & 20 \\ 0 & 45 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Натаму, за поседната матрица го применуваме алгоритамот, од чекор 3. Имаме:

$$\begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 70 & 0 & 20 & 5 \\ 10 & 0 & 15 & 0 & 20 \\ 0 & 45 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ 30 & 0 & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 70 & 0 & 20 & 5 \\ 10 & \cancel{0} & 15 & 0 & 20 \\ 0 & 45 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ 0 & 70 & 0 & 20 & 5 \\ 10 & \cancel{0} & 15 & \boxed{0} & 20 \\ 0 & 45 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Понатаму заокружувањето на нули може да се направи на два начини:

$$\begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & 70 & \cancel{0} & 20 & 5 \\ 10 & \cancel{0} & 15 & \boxed{0} & 20 \\ \cancel{0} & 45 & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 5 & 60 & 5 & 5 & \boxed{0} \\ \cancel{0} & 70 & \boxed{0} & 20 & 5 \\ 10 & \cancel{0} & 15 & \boxed{0} & 20 \\ \boxed{0} & 45 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 30 & \boxed{0} & 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}. \tag{6.35}$$

И во двата случаи имаме по пет заокружени нули, што значи дека со матриците

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

добиени преку матриците во (6.35), соодветно, со внесување на вредност 1 на местата од заокружените нули, и вредност 0 на местото од останатите елементи, или со

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

$$\begin{cases} M_1 \longrightarrow K_5 \\ M_2 \longrightarrow K_1 \\ M_3 \longrightarrow K_4 \\ M_4 \longrightarrow K_3 \\ M_5 \longrightarrow K_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} M_1 \longrightarrow K_5 \\ M_2 \longrightarrow K_3 \\ M_3 \longrightarrow K_4 \\ M_4 \longrightarrow K_1 \\ M_5 \longrightarrow K_2 \end{cases},$$

соодветно, се дадени две различни оптимални решенија на поставениот проблем. И во двата случаи, вкупното минимално време изнесува

$$c_{15} + c_{21} + c_{34} + c_{43} + c_{52} = c_{15} + c_{23} + c_{34} + c_{41} + c_{52} = 495 \text{ min}.$$

Проблемите на назначување на работни задачи што се јавуваат во праксата често се неизбалансирани. За нивно решавање се постапува како кај транспортниот проблем или, попрецизно, ако $m$ е бројот на извршувачи, а $n$ е бројот на работни задачи, при што $m \neq n$, тогаш:

- ако $m > n$, се воведуваат $m - n$ *фиктивни работни задачи*, а трошоците за извршување (време или друг вид коефициенти), за секој од извршувачите и за секоја од фиктивните работни задачи се зема да бидат еднакви на 0,
- ако $m < n$, се воведуваат $m - n$ *фиктивни извршители*, а трошоците за извршување (време или друг вид коефициенти), за секој од фиктивните извршувачи и за секоја од работните задачи се зема да бидат еднакви на 0.

**Пример 6.15.** На четири различни работни места $R_1$, $R_2$ , $R_3$ и $R_4$ треба да се вработат работници што имаат ист вид и степен на образование. На објавениот конкурс се пријавени шест кандидати кои ги исполнуваат барањата во конкурсот. За донесување на одлука кои од кандидатите ќе бидат примени, спроведено е тестирање што се состои од четири различни тестови изработени согласно специфичните карактеристики на соодветните работни места. Оценувањето на резултатите од тестирањата, изразено во негативни поени, е дадено во следната табела.

Табела 6.75. Освоени негативни поени на кандидатите по тестови (автори)

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 5 | 4 | 1 | 1 |
| $K_2$ | 4 | 3 | 2 | 3 |
| $K_3$ | 4 | 2 | 5 | 4 |
| $K_4$ | 4 | 4 | 4 | 3 |
| $K_5$ | 5 | 3 | 5 | 2 |
| $K_6$ | 1 | 6 | 6 | 6 |

Кои од кандидатите ќе бидат примени и на кои од работните места, за вкупниот број на негативни поени на примените кандидати да биде минимален?

**Решение:** Дадениот проблем е проблем на распределба на работни задачи чие оптимално решение треба да го минимизира вкупниот број на негативни поени на примените кандидати. Но, проблемот е неизбалансиран. Бидејќи бројот на кандидатите $m = 6$ е поголем од бројот на работните места $n = 4$, воведуваме две фиктивни работни места за кои се зададени два дополнителни тестови (исто така фиктивни) на кои секој од кандидатите освоил 0 негативни поени. Табеларниот приказ на освоените негативни поени и кореспондентната матрица сега ќе бидат од облик

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Табела 6.76. Табела што кореспондира на табела 6.75 по балансирање на проблемот и матрица што на неа соодветствува (автори)

| | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 5 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $K_2$ | 4 | 3 | 2 | 3 | 0 | 0 |
| $K_3$ | 4 | 2 | 5 | 4 | 0 | 0 |
| $K_4$ | 4 | 4 | 4 | 3 | 0 | 0 |
| $K_5$ | 5 | 3 | 5 | 2 | 0 | 0 |
| $K_6$ | 1 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 |

$$C=\begin{bmatrix}5&4&1&1&0&0\\4&3&2&3&0&0\\4&2&5&4&0&0\\4&4&4&3&0&0\\5&3&5&2&0&0\\1&6&6&6&0&0\end{bmatrix}$$

За секоја од редиците во матрицата $C$, минималните елементи имаат вредност 0, па оваа матрица останува непроменета по првиот чекор од унгарскиот алгоритам. Одиме директно на вториот чекор.

$$\begin{bmatrix}5&4&\underline{1}&\underline{1}&\underline{0}&\underline{0}\\4&3&2&3&0&0\\4&\underline{2}&5&4&0&0\\4&4&4&3&0&0\\5&3&5&2&0&0\\\underline{1}&6&6&6&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&2&0&0&0&0\\3&1&1&1&0&0\\3&0&4&3&0&0\\3&2&3&2&0&0\\4&1&4&0&0&0\\0&4&5&5&0&0\end{bmatrix}.$$

Преминуваме на распределба на работните задачи преку нулите на последната матрица (по колони):

$$\begin{bmatrix}4&2&0&0&0&0\\3&1&1&1&0&0\\3&0&4&3&0&0\\3&2&3&2&0&0\\4&1&4&0&0&0\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&2&0&0&0&0\\3&1&1&1&0&0\\3&\boxed{0}&4&3&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&2&3&2&0&0\\4&1&4&0&0&0\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&2&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&1&1&1&0&0\\3&\boxed{0}&4&3&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&2&3&2&0&0\\4&1&4&0&0&0\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}4&2&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&1&1&1&0&0\\3&\boxed{0}&4&3&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&2&3&2&0&0\\4&1&4&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}.$$

Понатаму распределбата може да се направи на два начини:

$$\begin{bmatrix}4&2&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&1&1&1&\boxed{0}&\cancel{0}\\3&\boxed{0}&4&3&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&2&3&2&\cancel{0}&\boxed{0}\\4&1&4&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{bmatrix}4&2&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&1&1&1&\cancel{0}&\boxed{0}\\3&\boxed{0}&4&3&\cancel{0}&\cancel{0}\\3&2&3&2&\boxed{0}&\cancel{0}\\4&1&4&\boxed{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\boxed{0}&4&5&5&\cancel{0}&\cancel{0}\end{bmatrix}.$$

И во двата случаи, бројот на заокружени нули е 6 и еднаков на редот на матрицата $C$, па можеме да ги определиме следните две оптимални решенија на проблемот на работни задачи дефиниран со матрицата $C$:

$$X_1=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad X_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Иако овие две матрици се различни, во контекст на прашањето за поставено во задачата, даваат ист одговор. Треба да бидат примени кандидатите:

$K_1$, со препорака за прием на работното место $R_3$,
$K_3$, со препорака за прием на работното место $R_2$,
$K_5$, со препорака за прием на работното место $R_4$,
$K_6$, со препорака за прием на работното место $R_1$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

при што, вкупниот број на негативни поени ќе изнесува 5.

Да напоменеме дека ако, на пример, кандидатот $K_4$ на тестот $T_2$ имаше 2 наместо 4 негативни поени, тогаш одговорот на прашањето за поставено во задачата немаше да биде еднозначен како погоре. За работните места $R_1$, $R_3$ и $R_4$ останува погорната препорака, но за работното место $R_2$ ќе може да биде избран било кој од кандидатите $K_3$ и $K_4$. И во двата случаи, вкупниот број на негативни поени останува 5.

**Пример 6.16.** За собирање на градежниот отпад од четири градежни локации, во даден момент може да се ангажираат само три камиони. Времето, изразено во минути, за кое секој од камионите може да пристигне до некоја од локациите, е дадено во следната табела.

Табела 6.77. Потребни часови за пристигање на камионите до секоја локација (автори)

| *локации* / *камиони* | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 35 | 55 | 55 | 45 |
| $K_2$ | 50 | 55 | 45 | 35 |
| $K_3$ | 50 | 45 | 35 | 35 |

На кој начин ќе се изврши распределбата на камионите ако секој камион треба да биде испратен на само една локација, на една локација може да биде испратен само еден камион, а притоа вкупното време на пристигнување да биде минимално?

**Решение:** Дадениот проблем е неизбалансиран: бројот на камионите $m = 3$ е помал од бројот на локациите $n = 4$ на кои треба да се распределат. Воведуваме фиктивен камион $K_4$, за кој секое од времињата потребни за пристигнување до било која од локациите е еднакво на 0. Табеларниот приказ на времињата и кореспондентната матрица сега ќе бидат од облик:

Табела 6.78. Табела што кореспондира на табела 6.77 по балансирање на проблемот и матрица што на неа соодветствува (автори)

| | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | 35 | 55 | 55 | 45 |
| $K_2$ | 50 | 55 | 45 | 35 |
| $K_3$ | 50 | 45 | 35 | 35 |
| $K_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$C = \begin{bmatrix} 35 & 55 & 55 & 45 \\ 50 & 55 & 45 & 35 \\ 50 & 45 & 35 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

За матрицата со редуцирани елементи имаме.

$$\begin{bmatrix} \underline{35} & 55 & 55 & 45 \\ 50 & 55 & 45 & \underline{35} \\ 50 & 45 & \underline{35} & 35 \\ \underline{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Преминуваме на распределба на работните задачи преку нулите на последната матрица (почнувајќи од прва редица):

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 20 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{0} & 20 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & \boxed{0} \\ 15 & 10 & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{0} & 20 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & \boxed{0} \\ 15 & 10 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{0} & 20 & 20 & 10 \\ 15 & 20 & 10 & \boxed{0} \\ 15 & 10 & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Бројот на заокружени нули е 4 и е еднаков на редот на матрицата $C$, што значи дека добивме оптимално решение (и тоа единствено):

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Согласно ова решение, распоредот на камионите по локации ќе биде:

$$K_1 \longrightarrow L_1, \qquad K_2 \longrightarrow L_4, \qquad K_3 \longrightarrow L_3.$$

Вкупното време на пристигнување ќе биде,

$$c_{11} + c_{24} + c_{33} = 35 + 35 + 35 = 105 \text{ min}.$$

На локацијата $L_2$ нема да се испрати ниту еден камион.

### 6.6. Дополнителни напомени и препораки за продлабочување на знаењата

Покрај методот на модифицирана дистрибуција, низ литературата може да се сретне уште еден сличен метод на оптимизација. Тоа е т.н. Stepping Stone методот. Од насловите на македонски јазик наведени во Литература, повеќе информации за овој метод и неговата практична примена може да се најдат во (Крстев и др., 2018a) и (Крстев и др., 2018b).

На почетокот од оваа глава наспоменавме дека класичните транспортни задачи се меѓу првите видови на задачи што се разгледувани во линеарното програмирање. Низ литературата, особено во онаа што е наменета за изучување на операционите истражувања, можат да се најдат повеќе наслови каде за транспортните задачи се наведени поголем број на практични примери, од поедноставни, до посложени, како што се оние поврзани со претовар (анг. transshipment) на патници и материјални ресурси. Од насловите што се наведени во делот Литература упатуваме на следните: (Barković, 2001), (Bogdanović & Jovanović, 2019), (Bronson, 1982), (Chvátal, 1983), (Metzger, 1958), (Hillier & Lieberman, 1995), (Hillier, 2024), (Murty, 1983), (Sharma, 2016), (Sinha, 2006), (Stanimirović et al., 2007), (Taha, 2017) или македонскиот превод на постаро издание на овој наслов (Таха, 2010).

Математичкиот модел на транспортната задача денес е неизоставен дел од теоријата на мрежни токови и оптимизации на мрежи. Мрежните модели денес се применуваат во најразлични подрачја: сообраќајни, електрични, телекомуникациски и компјутерски мрежи, производство и дистрибуција, проектни планирања, управување со ресурси или пак финансиско планирање. Мрежните репрезентации се од исклучителна важност при отсликувањето на врските помеѓу компонентите на даден систем (технички, социјален или економски). Како дополнителни наслови за надградување на знаењата во оваа насока, ги издвојуваме следните: (Ahuja et al., 1993), (Balakrishnan, 2019), (Bazaraa et al., 2010), (Bertsekas, 1998), (Bertsekas & Gallager, 1992), (Bertsimas & Tsitsiklis, 1997, глава 7), (Evans & Minieka, 2017), (Lawler, 1976), (Pinheiro, 2023), (Srikant & Ying, 2014) и (Крстев и др., 2018b, глава 12).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

# 7. РЕШАВАЊЕ НА ЛП-ЗАДАЧИ СО ПОМОШ НА СОФТВЕР

Денес постојат повеќе комерцијални софтверски апликации што ефикасно може да се справат со обемните пресметки потребни за примена на симплекс методот кај ЛП-задачи со поголем број на променливи и/или ограничувања, а за просечните корисници, денешните персонални сметачки машини се доволно моќни за поддршка на решавање на ЛП-задачи со разумен број на променливи и/или ограничувања. Дотолку повеќе, што симплекс методот е вграден во апликациите за табеларни пресметки, како што се MS Excel и LibreOffice Calc. Начинот на користење е сличен, па во оваа глава ќе го опишеме само користењето на MS Excel. За комерцијални цели, една од почесто користените алатки за оптимизации, е софтверската апликација LINGO. Во оваа глава накратко ќе го опишеме користењето на нејзината поедноставена верзија LINDO.

Користењето на овие апликации ќе го илустрираме на два примери. Едниот е ЛП-задача на максимизација во стандарден облик, наведена во пример 7.1 подолу, а другата е пример 6.12 од претходната глава. Секоја од алатките поддржува решавање и на ЛП-задача на минимизација. И кај двете апликации се поддржани ЛП-задачи во општ облик што не мора претходно да биде запишана во стандарден облик.

**Пример 7.1.** Со примена на софтвер да се реши следната ЛП-задача.

$$\begin{aligned} \max\ & f = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{p.o.}\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 60 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 48 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

## 7.1. Решавање на ЛП-задачи со помош на апликацијата LINDO

LINDO или, попрецизно Classic LINDO, е поедноставена верзија на софтверскиот пакет LINGO. Главната разлика е во тоа што LINDO поддржува само задачи од линеарно и целобројно програмирање, додека LINGO и дополнителните верзии, LINGO API и What'sBEST!, поддржуваат и задачи од нелинеарно програмирање. Пробните верзии на овие апликации може да се преземат од следниот линк:

https://www.lindo.com/index.php/ls-downloads,

а соодветните официјални упатства може да се преземат од следниот линк:

https://www.lindo.com/index.php/ls-downloads/user-manuals.

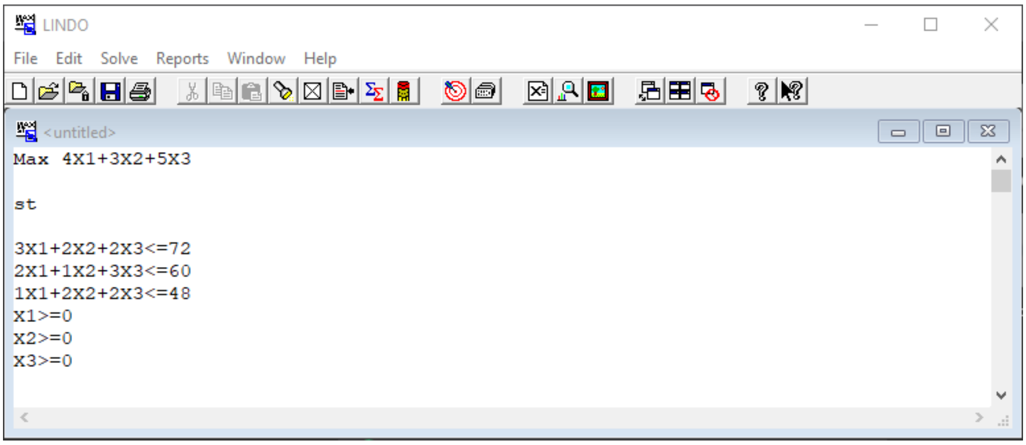
Работата со LINDO е едноставна. Синтаксата при внес на изразите за функцијата на целта и ограничувањата е скоро идентична со онаа што вообичаено се користи за испишување на соодветните математички изрази во ЛП-задачите.

За да се реши пример 7.1 постапуваме како што следи.

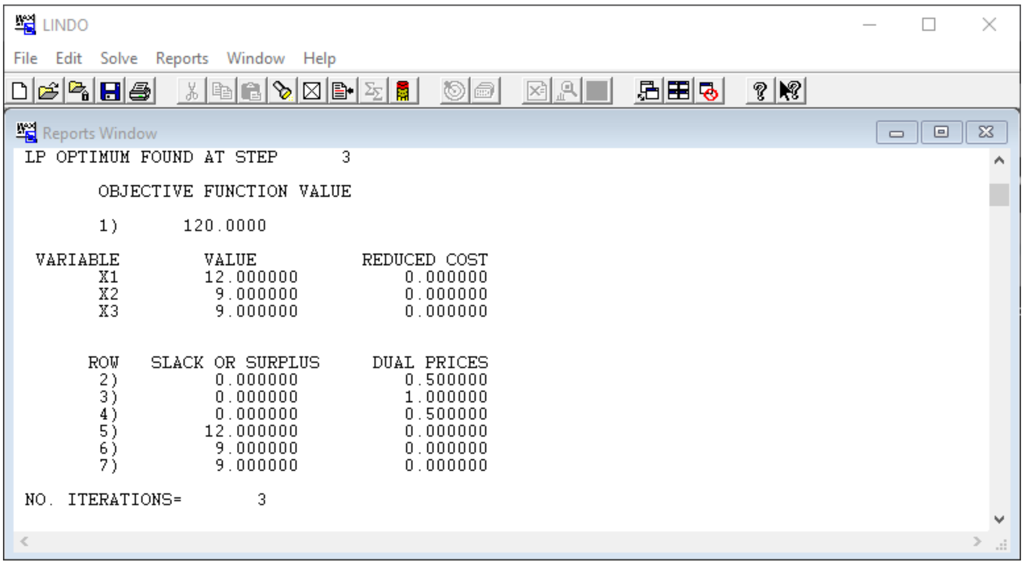
1. Се стартува апликацијата и во внатрешниот прозорец што ќе се отвори се внесуваат изразите прикажани на слика 7.1. Ако треба да се реши задача на минимизација, наместо Max, ќе се впиши Min. Кратенката „st", што треба да се внеси по изразот за функцијата на целта означува „subject to". Иако не е задолжително, се препорачува:
    - за променливите да се користат големите латинични букви (X наместо x),
    - пред променливите за кои не е наведена вредност за коефициентот, како кај променливата $x_2$ во второто, и променливата $x_1$ кај третото главно ограничување, да се внесе 1,
    - кај променливите што „отсуствуваат" во главните ограничувања, како коефициент да се внесе 0,
    - условите за ненегативност што се прикажани на слика 7.1, често може и да се изостават (LINDO поаѓа од претпоставката дека овој услов треба да биде задоволен).

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

2. За да се добие решението, може да се оди со Ctrl+S преку тастатурата или да се притисни на иконачето што се наоѓа на лентата со алатки на горниот дел од главниот прозорец на LINDO.
3. Пред да биде прикажано решението, ќе се појави дијалог-прозорец преку кој корисникот може да побара да биде вклучена Sensitivity Analysis (или т.н. анализа на сензитивности) како дел од извештајот, или не. Доколку корисникот има потреба од истата, ја селектира опцијата Yes и се затвара следниот прозорец со краток извештај.
4. Доколку не е веднаш воочлив прозорецот Reports, истиот може да се прикаже во главниот прозорец со минимизирање на прозорецот во кој првично беа внесени изразите за функцијата на целта и ограничувањата или пак, преку јазичето Window (кај главната лента со менија). да се избере Reports Window.




Слика 7.1. Внес на изразите за решавање на ЛП-задачата од пример 7.1 (автори)



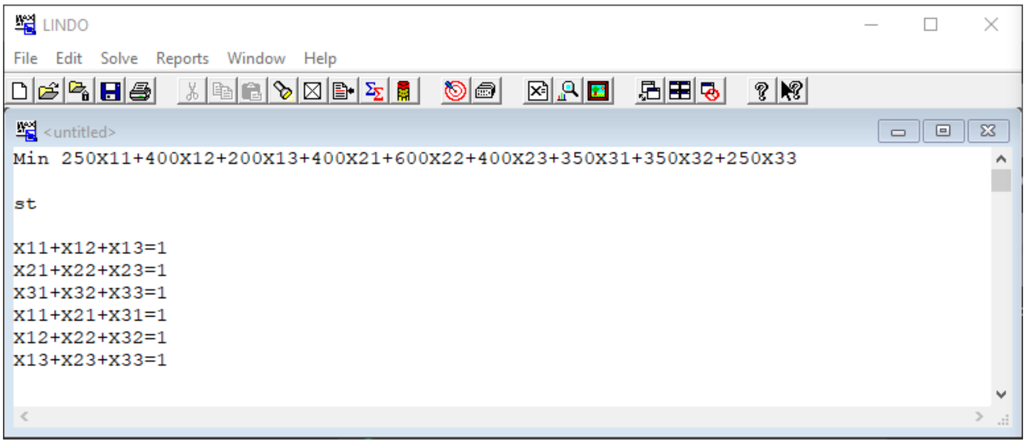

Слика 7.2. Резултатот за ЛП-задачата од пример 7.1 добиен со LINDO (автори)

Врз основа на резултатите прикажани на слика 7.2 (колоните VARIABLE и VALUE), оптималното решение на ЛП-задачата од пример 7.1 е $x_1 = 12$, $x_2 = 9$ и $x_3 = 9$, а оптималната вредност на функцијата на целата е $f_{\max} = 120$.

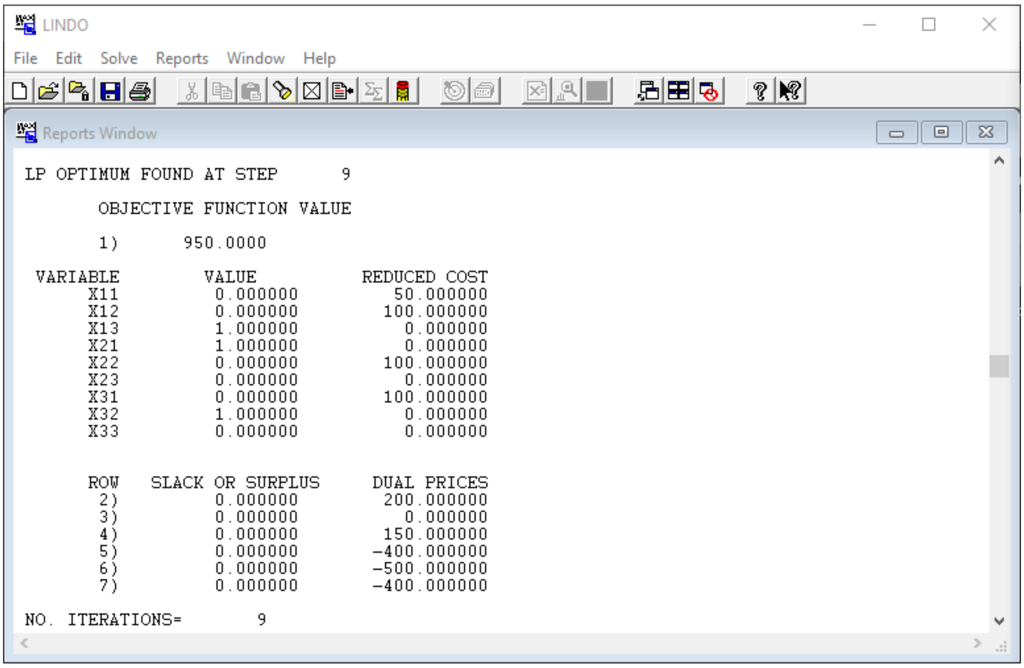
LINDO може да се користи и за решавање на транспортни задачи и задачи на распоредување, но само ако тие се запишани во облик на ЛП-задачи.

На слика 7.3 се прикажани изразите што треба да се внесат за да се реши задачата на распоредување од пример 6.12, а на слика 7.4 се прикажани резултатите добиени со LINDO.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>




Слика 7.3. Внес на изрази за проблемот на распоредување од пример 6.12 (автори)




Слика 7.4. Резултатот за проблемот на распоредување од пример 6.12 добиен со LINDO (автори)

Врз основа на резултатите во колоните VARIABLE и VALUE прикажани на слика 7.4, можеме да ја формираме матрицата

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и таа кореспондира на матрицата $C^*$ од решението на пример 6.12 (заокружените нули на $C^*$ кореспондираат на елементите од $X$ што се еднакви на 1, а незаокружените елементи на $C^*$ кореспондираат на елементите од $X$ што се еднакви на 0), односно на матрицата $C$, врз основа на која го формулиравме одговорот во пример 6.12. Според слика 7.4, вредноста на функцијата на целата е еднаква на 950 денари, што е еднаква на вредноста за минимален вкупниот трошок за превоз во решението на пример 6.12.

На сличен начин се постапува и при внес на соодветни изрази за поопшт транспортен проблем.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## 7.2. Решавање на ЛП-задачи со помош на MS Excel

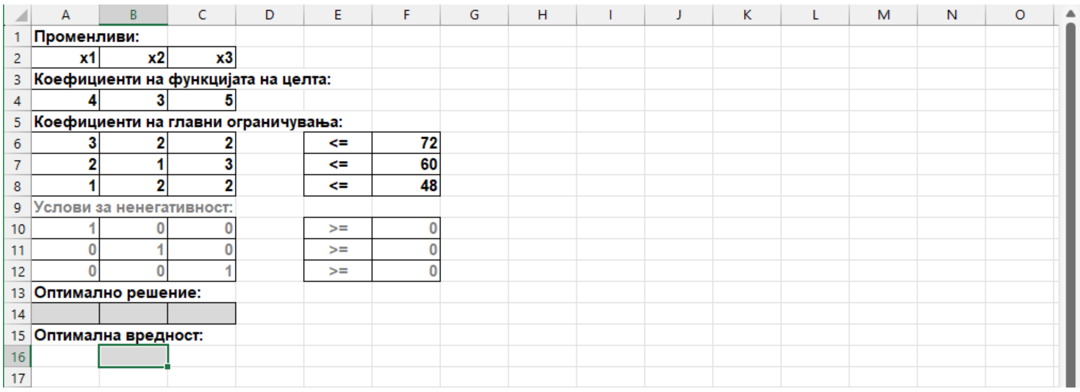
За решавање на ЛП-задачи со помош на MS Excel, потребна е алатката Solver. Оваа алатка не се јавува во лентите алатки што се достапни непосредно по инсталацијата на MS Office. Нејзиното вклучување во (или исклучување од) алатките се прави дополнително, преку File → Options → Add-Ins → Go… (копче што се наоѓа најдолу од прозорецот). Во дијалог-прозорецот што ќе се отвори, се чекира опцијата Solver Add-In и се кликнува на копчето Ok. Доколку е неопходно, MS Excel се затвара и потоа повторно се отвара. Ако по инсталацијата на MS Office не се избришани привремените датотеки (Temporary Files), тогаш алатката Solver ќе биде достапна кај јазичето Data.

Решавањето подразбира соодветно внесување на коефициентите на функцијата на целта, главните ограничувања и условите за ненегативност.

Постапките за решавање на ЛП-задача како во пример 7.1 и транспортна задача (или задача на распоредување) се разликуваат, па ќе ги опишеме одделно.

### Постапка за решавање на ЛП-задачата од пример 7.1

1. Се отвора празен работен лист во MS Excel и, за подобра прегледност, покрај коефициентите, се внесуваат соодветни коментари. На слика 7.5 е прикажан еден од начините на кои тоа може да се направи. Доколку документот се сними, тој понатаму може, со соодветни модификации да се користи и за други ЛП-задачи на минимизација или максимизација. Во овој чекор не се внесуваат формули за пресметки.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Променливи: | | | | | |
| 2 | x1 | x2 | x3 | | | |
| 3 | Коефициенти на функцијата на целта: | | | | | |
| 4 | 4 | 3 | 5 | | | |
| 5 | Коефициенти на главни ограничувања: | | | | | |
| 6 | 3 | 2 | 2 | | <= | 72 |
| 7 | 2 | 1 | 3 | | <= | 60 |
| 8 | 1 | 2 | 2 | | <= | 48 |
| 9 | Услови за ненегативност: | | | | | |
| 10 | 1 | 0 | 0 | | >= | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | | >= | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | | >= | 0 |
| 13 | Оптимално решение: | | | | | |
| 14 | | | | | | |
| 15 | Оптимална вредност: | | | | | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | | | | |

Слика 7.5. Почетни елементи за решавање на ЛП-задачата од пример 7.1 (автори)

2. Согласно претходно внесените елементи, следно е внесување на потребните формули во специфични ќелии како што следи.

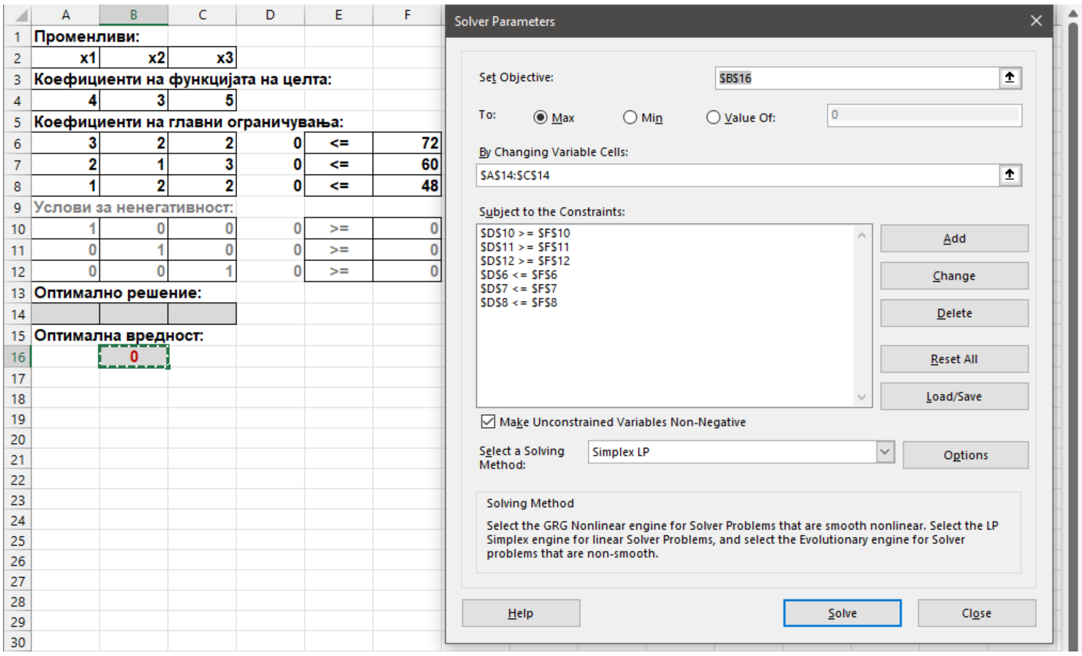
   D6 =SUMPRODUCT(A6:C6,A14:C14)
   D7 =SUMPRODUCT(A7:C7,A14:C14)
   D8 =SUMPRODUCT(A8:C8,A14:C14)
   D10 =SUMPRODUCT(A10:C10,A14:C14)
   D11 =SUMPRODUCT(A11:C11,A14:C14)
   D12 =SUMPRODUCT(A12:C12,A14:C14)
   B16 =SUMPRODUCT(A4:C4,A14:C14)

   По внес на овие изрази, во соодветните ќелии секаде ќе се прикажи вредност 0.

3. Во овој чекор се препречува да се селектира ќелијата B16 и потоа да се активира Solver-от, по што ќе се отвори дополнителен прозорец како оној прикажан на слика 7.6. Непосредно по отворањето на прозорецот Solver Parameters може да е пополнета само лентата десно од „Set Objective:“. Доколку и таа е празна, во

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

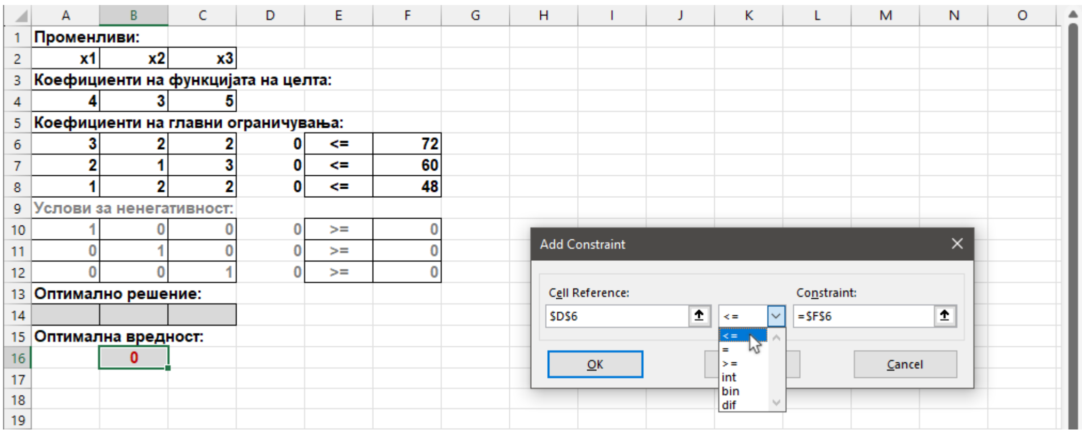
неа се позиционира курсорот и веднаш потоа се кликнува врз ќелијата B16. Останатите полиња се пополнуваат како што е наведено по сликата.




Слика 7.6. Приказ на прозорецот со потребните параметри за Solver-от да може да ја реши ЛП-задачата од пример 7.1 (автори)

Во лентата за внес непосредно под „By Changing Variable Cells“ се внесуваат ќелиите во кои треба да се прикажи оптималното решение, во овој случај, ќелиите A14:C14. За прецизен внес, се позиционира курсорот во лентата и потоа да се селектираат ќелиите A14:C14.

Во полето под „Subject to the Constraints“, се додаваат ограничувањата (за дадената ЛП-задача вредностите во ќелиите D6, D7 и D8 треба да бидат помали или еднакви на соодветните вредности во ќелиите F6, F7 и F8, а оние во D10, D11 и D12, треба да бидат поголеми или еднакви на 0, т.е. вредности во ќелиите F10, F11 и F12). Додавањето на ограничувањата се врши преку копчето Add.




Слика 7.7. Внес на ограничувања за ЛП-задача (автори)

На слика 7.7 е прикажан дијалог-прозорецот што се отвара по кликнување на ова копче. На пример, за првото од ограничувањата во ЛП-задачата, во левата лента се позиционира курсорот и се кликнува на ќелијата D6, од паѓачкото мени се избира релацијата <=, а во десната лента се позиционира курсорот и се кликнува на ќелијата F6. Постапката се повторува за секое ограничување. Ако

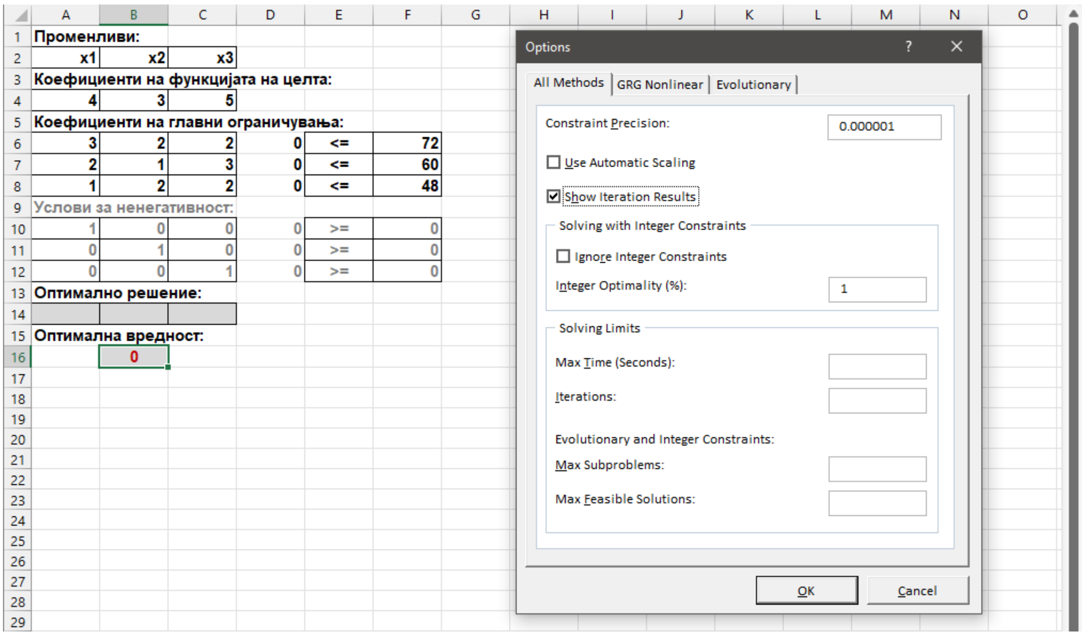
Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

сите главни ограничувања се ист знак „≤“, „=“ или „≥“, тогаш, наместо само D6 може да се селектираат сите ќелии D6:D8, и потоа, наместо само F6, да се селектираат сите ќелии F6:F8.

Опцијата „Make Unconstrained Variables Non-Negative“ вообичаено е селектирана. Таа треба да се деселектира доколку за некоја од променливите не важи условот за ненегативност. Ако за секоја од променливите важи условот за ненегативност, при чекирана опција, внесување на изрази што кореспондираат на условите за ненегативност под „Subject to the Constraints“ може да се изостави.

Во полето каде што на слика 7.6 стои „Simplex LP“, стандардното поставување е опцијата „GRG Nonlinear“, и таа треба да се промени од соодветното паѓачко мени.

Ако не се потребни резултатите од итерациите, останува да се кликне на копчето Solve по што, доколку ЛП-задачата има решение, ќе се прикажи крајниот резултат. За ЛП-задачата од пример 7.1, тој е прикажан на слика 7.10. Ако треба да се прикажат резултатите од одделните итерации што ги изведува алгоритамот во MS Excel, прво треба да се кликни на копчето Options, по што ќе се прикажи дијалог-прозорецот на слика 7.8. Во овој прозорец се чекира опција „Show Iteration Results“. При работа со поголем број на променливи и/или ограничувања, во овој дијалог-прозорец може да се поставaт дополнителни ограничувања во полињата под „Solving Limits“. Потоа се кликнува на копчето Ok, по што се враќаме на прозорецот Solver Parameters.

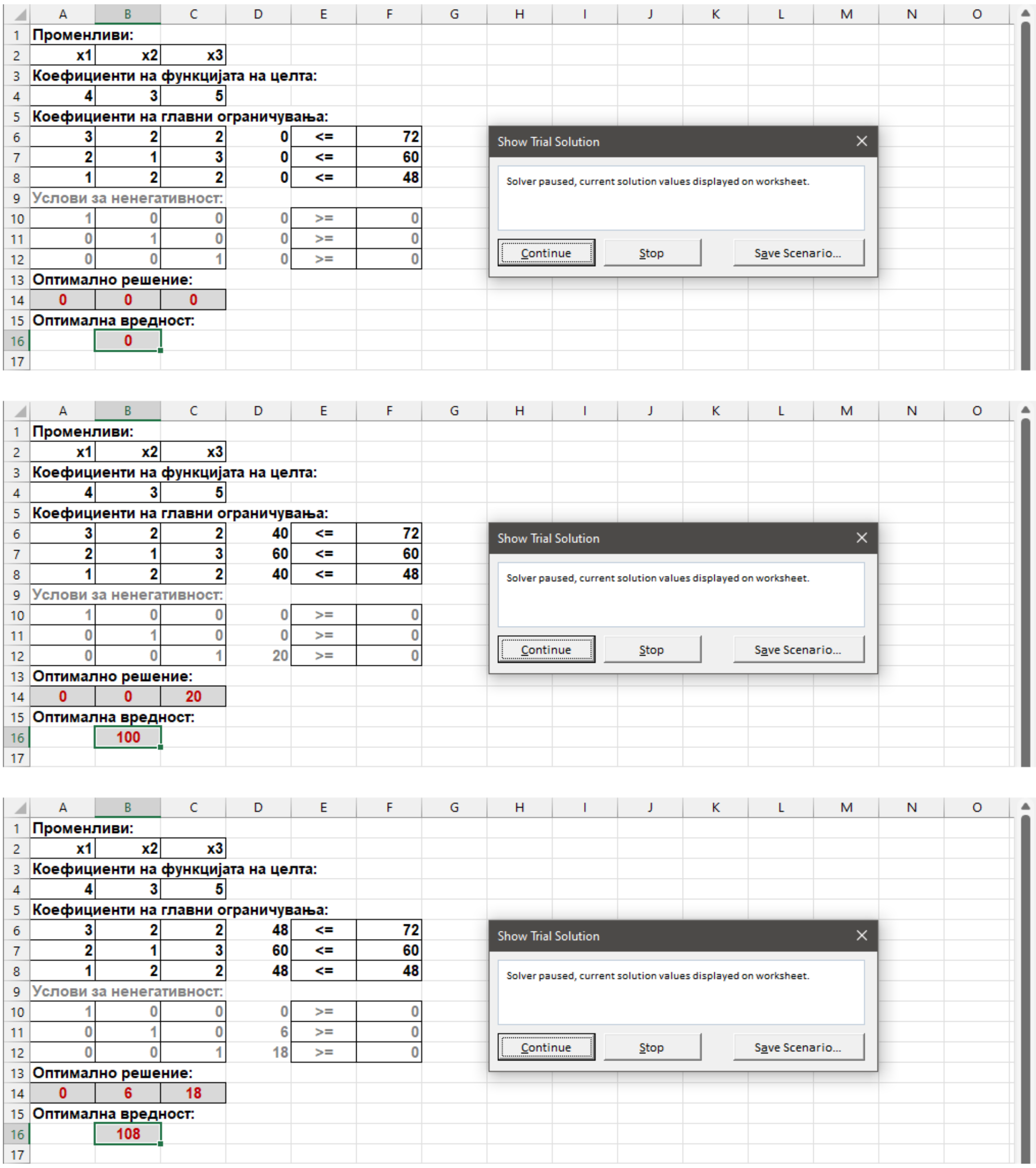



Слика 7.8. Опција за приказ на резултати од последователни итерации (автори)

Доколку е избрана опцијата за приказ на итерациите, по кликнување на копчето Solve ќе се прикажи прозорецот Show Trial Solution (слика 7.9) и ќе се појават вредности, најчесто секаде 0, во полињата за приказ на оптималното решение. Во овој прозорец треба да се кликни на копчето Continue и тој одново ќе се појавува се додека MS Excel не стигни до решението или не констатира дека ЛП-задачата нема решение (или дека постапката не конвергира, како што е прикажано на долниот дел на слика 7.11). Да напомeнеме дека чести се случаите кога во ќелиите за приказ на решението и вредноста на функцијата на целта, нема да се забележи никаква промена дури и по неколку кликнувања на копчето Continue (како што е случај за ЛП-задачата од пример 7.1). На слика 7.9, од горе кон долу, се прикажани резултатите од различните итерации добиени со MS

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Excel за примерот 7.1 пред да се стигни до конечното решение што прикажано на слика 7.10.

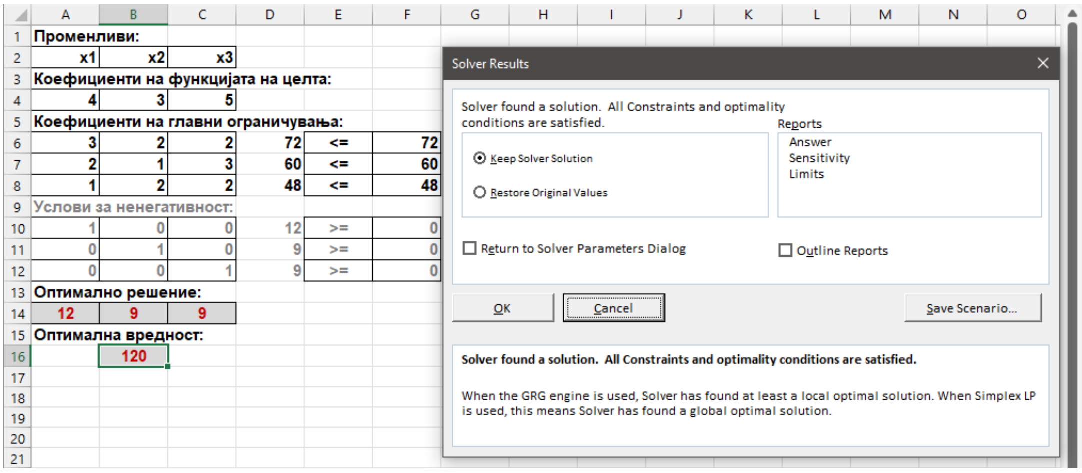



Слика 7.9. Различни последователни итерации добиени со MS Excel што претходат на крајното решение на ЛП-задачата од пример 7.1 (автори)

4. Последниот чекор е интерпретација на резултатите добиени со MS Excel во контекст на дадената ЛП-задача, особено ако таа е формулирана врз основа на некој практичен проблем. Според резултатите прикажани на слика 7.10, MS Excel најде решение на задачата од пример 7.1 и тоа: оптималното решение е $x_1 = 12$, $x_2 = 9$ и $x_3 = 9$, а оптималната вредност на функцијата на целата е $f_{\max} = 120$.

**Напомена 7.1.** При поголем број променливи и ограничувања, заради заштеда на време, не се препорачува користењето на опцијата за приказ на одделните итерации ако за тоа нема потреба.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

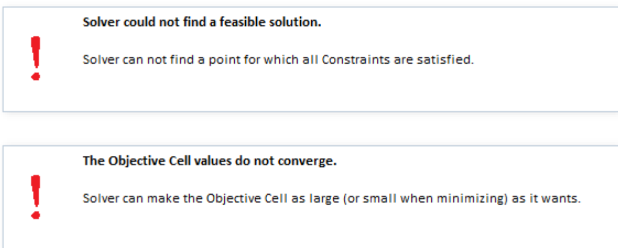



Слика 7.10. Дијалог-прозорец со потврда за најдено решение (автори)

**Напомена 7.2.** Дијалог-прозорецот прикажан на слика 7.10 може да се затвори преку кликнување на копчето Ok. Доколку е потреба и анализа на сензитивности, пред затворање на дијалог прозорецот се селектира опцијата „Sensitivity“ од полето под Reports. Извештајот ќе биде прикажан на нов работен лист поставен пред оној во кој е беа внесени податоците за задачата. За овие извештаи да бидат согласно однапред поставени стандарди потребно е да се направи поинаков избор на ќелиите во кои се внесуваат податоците од задачата[34].

**Напомена 7.3.** Резултатите од итерациите добиени со MS Excel не мора секогаш да се совпаѓаат со оние добиени без примена на софтвер (случај на нееднинствени оптимални решенија).

Освен порака „Solver found solution. All Constraints and optimality are satisfied“, во дијалог-прозорецот Solver Results од слика 7.10, може да се појави некоја од пораките прикажани на слика 7.11. Пораката „Solver could not find a feasible solution“, значи дека ЛП-задачата нема решение (што може да се должи или на тоа дека допуштена област да е празно множество, или на тоа дека функцијата на целта не е неограничена допуштената област). Пораката „The Objective Cell values do not converge“ исто така може да значи дека функција на целта да не е неограничена допуштената област, но може да значи дека низата допуштени решенија на ЛП-задачата што се добиваат со симплекс методот не конвергира или, попрецизно, постои т.н. циклична низа на допуштени решенија во која методот „заглавува“. Неа одново и одново ја генерира и постапката на решавање не може да заврши (пример за оваа појава е наведен во (Taha, 2017, проблем 3-54, стр. 157)).




Слика 7.11. Други можни пораки во дијалог-прозорецот Solver Results (автори)

[34] Заради ограничувањата што произлегуваат од наставната содржина, анализата на сензитивности не е опфатена со овој учебник. Сама по себе таа е исклучително важна, како од теориски, така и од практичен аспект. Обликот на извештаите е тесно поврзан со практичната примена на овој вид анализа. Имено, нејзината интерпретацијата во голема мера зависи од областа во која таа треба да се направи, а тоа од своја страна подразбира специфичен начин на првично именување на променливите и ограничувањата во согласност со карактеристиките на софтверските алатки што се користат за нејзиното изведување.

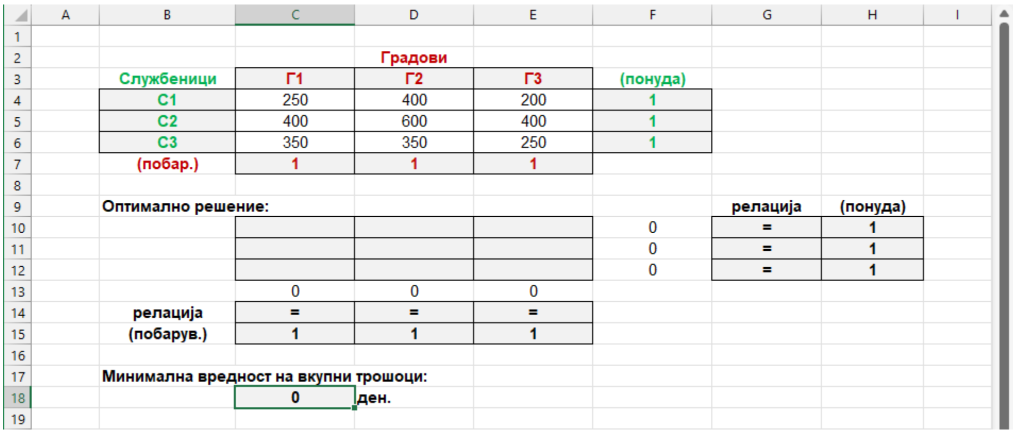
Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Постапка за решавање на задачата на распоредување од пример 6.12**

Подолу опишаната постапка може да се примени и на поопшт транспортен проблем. За проблемот на распоредување од пример 6.12 во нов работен лист во MS Excel ги спроведуваме следните чекори.

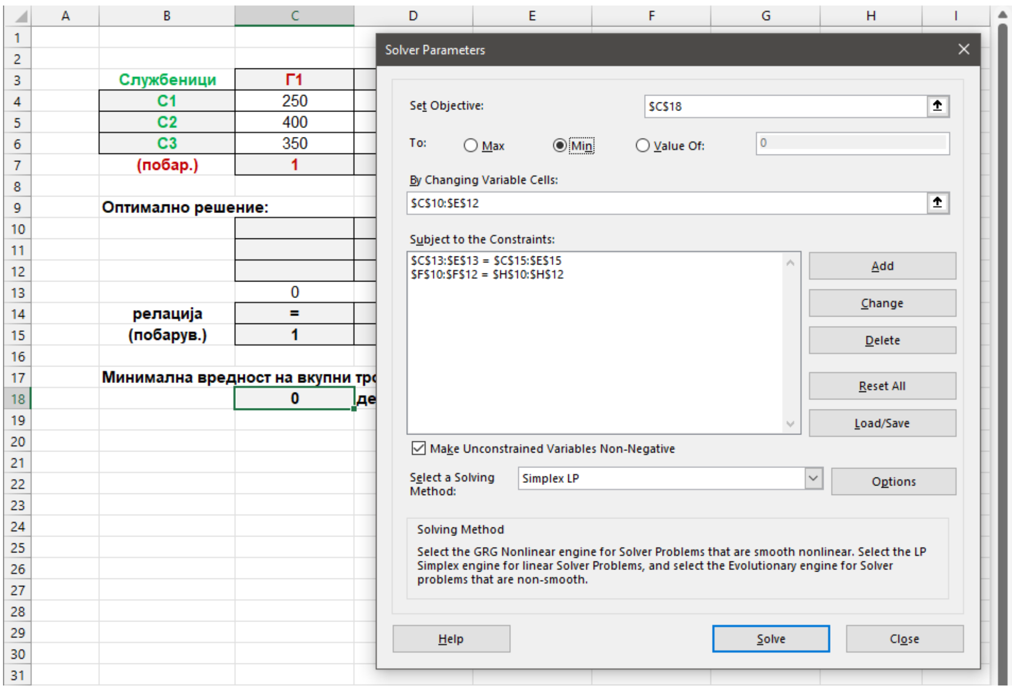
1. Со исклучок на ќелиите каде има вредност 0, креираме „табели“ со прикажаниот внес на текст и нумерички вредности како на слика 7.12.
2. Вредностите 0 се резултат на внес на следните формули:

F10 =SUM(C10:E10)
F11 =SUM(C11:E11)
F12 =SUM(C12:E12)
C13 =SUM(C10:C12)
D13 =SUM(D10:D12)
E13 =SUM(E10:E12)
C18 =SUMPRODUCT(C4:E6,C10:E12)



| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | Градови | | | | | |
| 3 | | Службеници | Г1 | Г2 | Г3 | (понуда) | | | |
| 4 | | C1 | 250 | 400 | 200 | 1 | | | |
| 5 | | C2 | 400 | 600 | 400 | 1 | | | |
| 6 | | C3 | 350 | 350 | 250 | 1 | | | |
| 7 | | (побар.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | Оптимално решение: | | | | | релација | (понуда) | |
| 10 | | | | | | 0 | = | 1 | |
| 11 | | | | | | 0 | = | 1 | |
| 12 | | | | | | 0 | = | 1 | |
| 13 | | | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 14 | | релација | = | = | = | | | | |
| 15 | | (побарув.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | Минимална вредност на вкупни трошоци: | | | | | | | |
| 18 | | | 0 | ден. | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |

Слика 7.12. Потребни елементи за примена на алатката Solver за решавање на пример 6.12 (автори)




Слика 7.13. Елементи што се внесуваат во прозорецот Solver Parameters (автори)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

3. Се активира алатката Solver и во дијалог-прозорецот се внесуваат параметрите прикажани на слика 7.13. Сега имаме минимизација на функцијата на целта, па наместо Max се избира Min.

Резултатот по примената на Solver-от е прикажан на слика 7.14. Врз основа на вредностите во ќелиите C10:E12 можеме да ја формираме матрицата

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и таа кореспондира на матрицата $C^*$ од решението на пример 6.12. Вредноста на функцијата на целта за ова допуштено решение е онаа од ќелијата C18. Ова се воедно оптималното решение и оптималната вредност добиени во пример 6.12 без примена на софтвер, како и оптималното решение и оптималната вредност добиени со LNDO.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | Градови | | | | | |
| 3 | | Службеници | Г1 | Г2 | Г3 | (понуда) | | | |
| 4 | | C1 | 250 | 400 | 200 | 1 | | | |
| 5 | | C2 | 400 | 600 | 400 | 1 | | | |
| 6 | | C3 | 350 | 350 | 250 | 1 | | | |
| 7 | | (побар.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | Оптимално решение: | | | | | релација | (понуда) | |
| 10 | | | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 | |
| 11 | | | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 | |
| 12 | | | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 | |
| 13 | | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 14 | | релација | = | = | = | | | | |
| 15 | | (побарув.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | Минимална вредност на вкупни трошоци: | | | | | | | |
| 18 | | | 950 | ден. | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |

Слика 7.14. Решението на пример 6.12 добиено со алатката Solver од MS Solver (автори)

**Напомена 7.4.** За читателите што се заинтересирани за тестирање на алатката Solver во LibreOffice/OpenOffice Calc за решавање на ЛП-задачи, да напомeнеме дека таа алатка е достапна со самата инсталација на овие канцелариски пакети и е сместена во главното мени, во паѓачкото мени кај јазичето Tools. Ако се имаат предвид разликите во синтаксата кај одделни формули (на пример, наместо со запирка, во формулата SUMPRODUCT низите C4:E6 и C10:E12 треба да се одвојат со точка-запирка), чекорите од претходните два примери се скоро исти или лесно се прилагодуваат за работа со Solver-от во LibreOffice/OpenOffice Calc. Резултатот добиен со OpenOffice Calc за пример 6.12 е прикажан на слика 7.15.

solver_opt =SUMPRODUCT(C4:E6;C10:E12)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | Градови | | | | | |
| 3 | | Службеници | Г1 | Г2 | Г3 | (понуда) | | | |
| 4 | | C1 | 250 | 400 | 200 | 1 | | | |
| 5 | | C2 | 400 | 600 | 400 | 1 | | | |
| 6 | | C3 | 350 | 350 | 250 | 1 | | | |
| 7 | | (побар.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | Оптимално решение: | | | | | релација | (понуда) | |
| 10 | | | 0 | 0 | 1 | 1 | = | 1 | |
| 11 | | | 1 | 0 | 0 | 1 | = | 1 | |
| 12 | | | 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 | |
| 13 | | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 14 | | релација | = | = | = | | | | |
| 15 | | (побарув.) | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | Минимална вредност на вкупни трошоци: | | | | | | | |
| 18 | | | 950 | ден. | | | | | |
| 19 | | | | | | | | | |

Слика 7.15. Решението на пример 6.12 добиено со алатката Solver во OpenOffice Calc (автори)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## 8. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

**Задача 1.** Да се определи скаларниот производ $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \rangle$, растојанието $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ и аголот меѓу векторите $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$, ако:

а) $\mathbf{x}_1 = (3, -2, 7, 5)$, $\mathbf{y}_1 = (6, 2, -3, 0)$,

б) $\mathbf{x}_2 = (4, -1, 6, 5)$, $\mathbf{y}_2 = (0, 1, -7, -5)$,

в) $\mathbf{x}_3 = (2, 3, -5, -7, 1)$, $\mathbf{y}_3 = (5, 3, -2, -4, -1)$.

Да се провери дали векторите $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y}_2$ се линеарно независни или не.

**Задача 2.** Да се определат вредностите за $m$ и $n$, така што векторите:

а) $\mathbf{x} = (2m, -2, 5, m)$ и $\mathbf{y} = (-1, 3m, 3, m)$,

б) $\mathbf{x} = (n, -2, 3, -1, 0)$ и $\mathbf{y} = (2, 3, n, -1, 4)$,

да бидат ортогонални.

**Задача 3.** Да се напиши равенката на хиперрамнината што минува низ точката $A(-5, 4, 0, 3, -4)$ и е паралелна со хиперрамнината $H: x_1 - 7x_2 + x_4 - 2x_5 = 6$.

**Задача 4.** Да се покаже дека,

а) единичната топка $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n |\ \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ е конвексно множество,

б) ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ се такви што $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, тогаш множеството

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

е конвексно.

**Задача 5.** Да се покаже дека, ако $K \subset \mathbb{R}^n$ е конвексно множество, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ и $\mu \geq 0$, тогаш и множествата:

а) $K + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{y} + \mathbf{x}_0 | \mathbf{y} \in K\}$,

б) $\mu K = \{\mu \mathbf{y} | \mathbf{y} \in K\}$,

се конвексни множества.

**Задача 6.** Да се покаже дека следните функции се конкавни:

а) $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + x + 5$,

б) $f(x, y, z) = -x^4 - y^2 + 2y + z + 1$.

**Задача 7.** Да се покаже дека следните функции се конвексни:

а) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x > 0$, $y > 0$,

б) $f(x, y, z) = -x^4 - y^2 + 2y + 1$.

**Задача 8.** Да се најдат седлестите точки на Лагранжовата функција придружена на проблемот:

а) $\min\ 2x^2 + y^2$
 p.o. $2x + 3y - 6 = 0$,

б) $\min\ x^2 + xy + y^2$
 p.o. $x^2 + y^2 = 1$.

**Задача 9.** Да се најдат минималната и максималната вредност на функцијата

а) $f(x, y) = 2x + y$, при ограничување $x^2 + 4y^2 \leq 16$,

б) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, при ограничување $x^2 + y^2 \leq 1$.

**Задача 10.** Графички да се претставаат полурамнините:

а) $3x_1 + 2x_2 \geq 12$,

б) $2x_1 - 3x_2 \leq 6$ ,

в) $4x_1 + 2x_2 \geq -6$,

г) $3x_1 - 4x_2 \geq -12$.

**Задача 11.** Графички да се претставаат множествата:

а) $X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

б) $X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

в) $X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,   г) $X: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

д) $X: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,   ѓ) $X: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ 6x_1 + x_2 \geq 12 \end{cases}$.

**Задача 12.** Доколку постојат, да се определат точките од областа $X$ во кои функцијата $f$ има минимална и максимална вредност, ако:

а) $f = x_1 + x_2$,
$X: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

б) $f = 2x_1 + x_2$,
$X: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

в) $f = x_1 + 2x_2$,
$X: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

г) $f = 4x_1 + x_2$,
$X: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

д) $f = 2x_1 + 2x_2$,
$X: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$,

ѓ) $f = 2x_1 + 2x_2$,
$X: \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Резултатите под а), б) и в) да се проверат со определување на екстремалните точки на множеството $X$ преку директниот алгебарски метод, а оние под г), д) и ѓ), со определување на екстремалните точки на множеството $X$ преку методот на базни изводливи решенија.

**Задача 13.** Следните ЛП-задачи да се запишат во останатите облици:

а) $\max\ f = 3x_1 + 2x_2 + x_3$
р.о. $4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 3$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

б) $\min\ f = 7x_1 + 2x_2 + x_3$
р.о. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} x_3 \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

**Задача 14.** Со симплекс методот да се решат следните ЛП-задачи на максимизација:

а) $\max\ f = x_1 + 5x_2$
р.о. $2x_1 + x_2 \leq 10$
$x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

б) $\max\ f = 3x_1 + x_2$
р.о. $x_1 + x_2 \leq 2$
$2x_1 + 3x_2 \leq 12$
$3x_1 + x_2 \leq 12$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

в) $\max\ f = 2x_1 + 4x_2 + x_3$
p.o. $-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$
$-x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 5$
$x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 7$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

г) $\max\ f = 2x_1 + x_2 + x_3$
p.o. $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 20$
$2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 60$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 90$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

д) $\max\ f = x_1 + 2x_2 + 4x_3$
p.o. $8x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 30$
$-2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 5$
$-2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

ѓ) $\max\ f = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$
p.o. $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 12$
$2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 15$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

**Задача 15.** Со симплекс методот да се решат следните ЛП-задачи на минимизација:

а) $\min\ f = 3x_1 + 4x_2$
p.o. $x_1 + x_2 \geq 3$
$2x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

б) $\min\ f = 6x_1 + 3x_2$
p.o. $x_1 + x_2 \geq 4$
$3x_1 + 4x_2 \geq 12$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

в) $\min\ f = x_1 + 2x_2 + 4x_3$
p.o. $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4$
$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 6$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

г) $\min\ f = x_1 + 3x_2 + 2x_3$
p.o. $3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$
$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$
$-2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

д) $\min\ f = x_1 + 2x_2 + x_3$
p.o. $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \geq 12$
$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$
$x_1 - x_2 - x_3 \geq -8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

ѓ) $\min\ f = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4$
p.o. $-2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 2$
$-x_1 + x_2 + x_4 \geq 1$
$5x_1 - 3x_3 - 3x_4 \geq 12$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

**Задача 16.** На пет различни локации $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ и $L_5$ за откуп на млеко се собрани 400, 200, 300, 350 и 250 литри, соодветно. Млекото треба да се дистрибуира до четири погони за преработка $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$ што може да преработат по 300, 350, 550 и 300 литри млеко, соодветно. Притоа важат следните цени за транспорт.

Табела 8.1. Трошоци за транспорт за еден литар млеко (автори)

| ***погони*** / ***откуп. цен.*** | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | 5 | 3 | 3 | 7 |
| $L_2$ | 6 | 4 | 2 | 4 |
| $L_3$ | 7 | 6 | 4 | 8 |
| $L_4$ | 6 | 5 | 5 | 9 |
| $L_4$ | 10 | 8 | 9 | 9 |

Да се определи план за транспорт на млекото со цел да се постигни најмал транспортен трошок, а притоа да се дистрибуира вкупната откупена количина и да бидат запазени можностите за преработка на погоните. Почетното одржливо решение да се определи според методот на северозападен агол.

**Задача 17.** Реконструкција на патна мрежа се врши на четири критични места $M_1$, $M_2$, $M_3$ и $M_4$, каде треба да работат тимови од по 15 работници. За изведување на реконструкцијата се ангажирани три градежни фирми $F_1$, $F_2$ и $F_3$ од различни градови што имаат 20, 25 и 15 работници со потребна квалификација, соодветно. Трошоците за

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

превоз, по работник, од секој од градовите, до секое од критичните места, се дадени во следната табела.

Табела 8.2. Трошоци за транспорт по работник (автори)

| *место* / *фирма* | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 25 | 30 | 35 | 20 |
| $F_2$ | 45 | 40 | 20 | 35 |
| $F_3$ | 30 | 35 | 45 | 25 |

Да се определи распределба на работниците на местата на реконструкција така што вкупниот транспортен трошок за превоз да биде минимален. Почетното одржливо решение да се определи според:

а) методот на северозападен агол,

б) методот на минимални трошоци,

в) Вогеловиот апроксимативен метод.

Што може да се заклучи за почетните одржливи решенија и оптималното решение на задачата?

**Задача 18.** Раководителот на научно-истражувачки проект треба да назначи четири истражувачи $I_1$, $I_2$, $I_3$ и $I_4$ за работа врз четири различни проблеми $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$. Врз основа на претходни резултати, раководителот ги направил проценките наведени во табела 8.3 за времето (изразено во денови) што на секој од истражувачите би му било потребно да го заврши истражувањето на секој од проблемите.

Табела 8.3. Денови потребни за завршување на одделни истражувања (автори)

| *проблем* / *истраж.* | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | 15 | 14 | 18 | 12 |
| $I_2$ | 13 | 12 | 15 | 11 |
| $I_3$ | 12 | 15 | 15 | 13 |
| $I_4$ | 12 | 14 | 18 | 14 |

На кој начин треба се распоредат истражувачите за истражувањето да заврши во најкус можен временски период?

**Задача 19.** Уредникот на списание на располагање има подеднакво добри четири верзии на статија за карактеристиките на четирите годишни времиња. Бројот на страници посветени на секое годишно време во одделните верзии на статиите се наведени во следната табела.

Табела 8.4. Бројот на страници во статија за секое годишно време (автори)

| *год. време* / *верзија* | *пролет* | *лето* | *есен* | *зима* |
|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | 5 | 4 | 3 | 7 |
| $V_2$ | 6 | 6 | 5 | 4 |
| $V_3$ | 4 | 5 | 7 | 7 |
| $V_4$ | 6 | 7 | 5 | 4 |

Заради заштеда на број на страници, уредникот одлучил да направи избор на делови од четирите статии, така што од секоја статија ќе го избере делот што се однесува на само едно годишно време. Колку различни избори може да направи уредникот на верзиите и соодветните делови, така што крајниот вкупен број на страници на конечната верзија да биде минимален, а притоа таа да содржи дел за секое годишно време?

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

**Напомена 8.1.** За проверка на точноста на графичкиот приказ на множествата $X$ од задачите 10 – 12 се препорачува користење на софтвер што поддржува соодветна визуализација на неравенства во Декартов правоаголен координатен систем. Препорака на авторите е користење на GeoGebra. Во (Karamazova Gelova et al., 2023) се наведени прецизни инструкции за користење на оваа апликација за соодветно графичко претставување и на функцијата на целата и допуштената област, како и графичко решавање на ЛП-задачи со две променливи на одлучување.

Prezemeno od elena.gelova (15 May 2026 - 21:57)

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## ЛИТЕРАТУРА


Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., Orlin, J. B. (1993), *Network flows: theory, algorithms and applications*. Prentice Hall.

Andréasson, N., Evgrafov, A., & Patriksson, M. (2007). *An introduction to continuous optimization*. Studentlitteratur AB.

Balakrishnan, V. K. (2019). *Network Optimization*. CRC Press.

Barković, D. (2.izd.) (2001). *Operacijska istraživanja*. Osijek: Sveučilište Josipa Strossmayera, Ekonomski fakultet.

Bartle, R. G. (1976). *The elements of real analysis*. John Wiley & Sons.

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2010). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear programming : theory and algorithms*. Wiley-Interscience.

Berkovitz, L. D. (2001). *Convexity and optimization in* $R^n$. Wiley-Interscience.

Bertsekas, D. P. (1996). *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P. (1998). *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P. (2nd ed.) (1999). *Nonlinear programming*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P. (2009). *Convex Optimization Theory*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P. (2015). *Convex Optimization Algorithms*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P. (3rd ed.) (2016). *Nonlinear programming*. Athena Scientific.

Bertsekas, D. P., & Gallager, R. G. (2nd ed.). (1992). *Data networks*. Prentice Hall.

Bertsekas, D. P., Nedić, A., & Ozdaglar, A. (2003). *Convex analysis and optimization*. Athena Scientific.

Bertsimas, D., & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to linear optimization*. Athena Scientific.

Bogdanović, D., & Jovanović, I. (2019). *Operaciona istraživanja 1*. Univerzitet u Beogradu.

Boyd, S. P., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

Bradley, S. P., Hax, A. C., & Magnanti, T. L. (1977). *Applied Mathematical Programming*. Addison Wesley Publishing Company.

Brickman, L. (2012). *Mathematical Introduction to linear programming and game theory*. Springer Science & Business Media.

Bronson, R. (1982). *Schaum's outline of theory and problems, of operations research*. McGraw-Hill Book Company.

Calafiore, G. C., & Ghaoui, L. E. (2014). *Optimization models*. Cambridge University Press.

Chvátal, V. (1983). *Linear Programming*. New York: W. H. Freeman and Company

Cohn, D. L. (2nd ed.) (2013). *Measure Theory*. Springer.

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Santa Monica, CA: RAND Corporation. https://www.rand.org/pubs/reports/R366.html.

Dantzig, G. B. (1985). *Impact of Linear Programming on Computer Development* (Technical report SOL 85-7). Stanford University, Systems Optimization Laboratory, Department of Operations Research.

Dantzig, G. B., Orden, A., & Wolfe, P. (1953). *Notes on Linear Programming: Part I The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form Under Linear Inequality Restraints*. The RAND Corporation.

Du, D., Pardalos, P. M., Hu, X., & Wu, W. (2022). *Introduction to Combinatorial Optimization*. Springer.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Eiselt, H. A., & Sandblom, C. (2019). *Nonlinear optimization: Methods and Applications*. Springer Nature.

Evans, J., Minieka, E., (2nd ed.). (2017). *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*. CRC Press.

Giorgi, G., Jiménez, B., & Novo, V. (2023). *Basic Mathematical Programming Theory*. Springer Nature.

Hartley, R. (1985). *Linear and Nonlinear Programming: An Introduction to Linear Methods in Mathemathical Programming*. John Wiley & Sons.

Hillier, F. (2024). *Introduction to Operations Research* ISE.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2nd ed.) (1995). *Introduction to Mathematical Programming*. Mcgraw-Hill.

Hu, T. C., & Kahng, A. B. (2016). *Linear and integer programming made easy*. Springer.

Kantorovich, L. V. (Jul. 1960). Mathematical Methods of Organizing and Planning Production. *Management Science, Vol. 6, No. 4*, pp. 366-422.

Karamazova Gelova, E., Kocaleva Vitanova, M. and Mančevska, S. (2023), Solving tasks from linear programming using GeoGebra. *Proceedings of the CODEMA 2022*. pp. 121-148. https://eprints.ugd.edu.mk/31463/.

Keller, A. A. (2018). *Mathematical Optimization Terminology*. Academic Press.

Khan, S., & Bari, A. (2019). Linear and integer programming. Cambridge Scholars Publishing.

Koopmans, T. C. (editor) (1951). Activity Analysis of Production and Allocation. *Cowles Commission for Research in Economics, Monograph No. 13*.

Krantz, S. G. (2014). *Convex analysis*. CRC Press.

Kreyszig, E., Kreyszig, H., & Norminton, E. J. (2011). *Advanced engineering mathematics*. John Wiley.

Lawler, E. L. (1976). *Combinatorial Optimization*. Oxford University Press, USA.

Lipschutz, S. (1966). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Finite Mathematics*. McGraw-Hill Book Company.

Luenberger, D. G. (1997). *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2021). *Linear and nonlinear programming*. Springer Nature.

Magnanti, T. L. (1974). *Fenchel and Lagrange duality are equivalent*. Operations Research Center: Massachusetts Institute of Technology.

Mangasarian, O. L. (1994). *Nonlinear programming*. SIAM.

Matoušek, J., & Gärtner, B. (2006). *Understanding and using linear programming*. Springer Science & Business Media.

Metzger R. W. (1958). *Elementary mathematical programming*. John Wiley & Sons.

Minoux, M. (1986). *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons.

Murtagh, B. A. (1981). *Advanced linear programming: Computation and practice*. McGraw-Hill

Murty, K. G. (1983). *Linear Programming*. John Wiley & Sons, Inc.

Nash, S. G., & Sofer, A. (1996). *Linear and nonlinear programming*. McGraw-Hill Companies.

Neralić, L. (2003). *Uvod u matematičko programiranje*. Zagreb: Udžbenici sveučilišta u Zagrebu.

Peressini, A. L., Sullivan, F. E., & Uhl, J. J. (1993). *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer.

Pinheiro, C. A. R. (2023). *Network Science: Analysis and Optimization Algorithms for Real-World Applications*. John Wiley & Sons.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton University Press

Rockafellar, R. T. (1974). *Conjugate duality and optimization*. SIAM.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J. (2009). *Variational analysis*. Springer Science & Business Media.

Ruszczyński, A. P. (2006). *Nonlinear optimization*. Princeton University Press.

Sarker, R. A., & Newton, C. S. (2008). *Optimization modelling: A Practical Approach*. CRC PressI Llc.

Sazdanović, S. (1988). *Linearno programiranje*. Beograd: Naučna knjiga.

Schrijver, A. (2002). On the history of the transportation and maximum flow problems. *Math. Program. 91*, pp 437–445. https://doi.org/10.1007/s101070100259

Sharma, J. K. (2016). *Operations research: theory and applications*. Trinity

Sierksma, G., & Zwols, Y. (3rd ed.) (2015). *Linear and integer optimization: Theory and Practice*. CRC Press.

Simons, S. (1995). Minimax Theorems and Their Proofs. In: Du, DZ., Pardalos, P.M. (eds) *Minimax and Applications. Nonconvex Optimization and Its Applications, vol 4.* (pp. 1-23). Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-3557-3_1

Sinha, S. M. (2006). *Mathematical Programming: Theory and Methods*. Elsevier Science Publishing Company.

Srikant, R., & Ying, L. (2014). *Communication networks: An Optimization, Control and Stochastic Networks Perspective*. Cambridge University Press.

Stanimirović, P. S., Stojković, N. V., & Petković, M. D. (2007). *Matematičko programiranje*. Niš: Prirodno-matematički fakultet.

Sullivan, M., Mizrahi, A. (8th ed.)(2004). *Mathematics: an applied approach*. John Wiley.

Taha, H. A. (10th ed.) (2017). *Operations research: An Introduction*. Pearson Education Limited.

Teofanov, N. & Žigić, M. (2018). *Osnovi optimizacije*. Novi Sad: Prirodno–matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku.

Valentine, F. A. (1964). *Convex Sets*. McGraw-Hill.

Veatch, M. H. (2021). *Linear and convex optimization: A Mathematical Approach*. John Wiley & Sons.

Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1953). *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press

Vujčić, V., Ašić, M., Miličić, N. (1980). *Matematičko programiranje*. Beograd: Matematički institut.

Winston, W. L. (2004). *Operations Research*. Duxbury Resource Center.

Yudin, D. B., & Gol'shtein, E. G. (1965). *Linear programming*. Israel Program for Scientific Translations.

Zălinescu, C. (2002). *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific.

Абрамов, Л. М., и Капустин, В. Ф. (1976). *Математическое программирование*. ЛГУ

Караманов, В. Г. (5-е изд.) (2004). *Математическое программирование*. ФИЗМАТЛИТ

Карчицка, Д. Л. (1990). *Конечно-димензионални векторски простори*. Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“.

Карчицка, Д. Л. (2. изд.) (2000). *Теорија и методи на линеарното програмирање*. Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“.

Карчицка, Д. Л., и Коробар, Д. П. (1974) *Основи на линеарно програмирање*. Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Математички институт со нумерички центар.

Крстев, А., Здравев, З., и Карамазова Гелова, Е. (2018). Основи на операциони истражувања (Практикум). Штип: Универзитет „Гоце Делчев“.

Крстев, А., Здравев, З., и Лукаревски, М. (2018). Основи на операциони истражувања (Скрипта). Штип: Универзитет „Гоце Делчев“.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>


Манчевска, С. (2010). *Квантитивни методи (авторизирани предавања)*. Битола: Универзитет Св. „Климент Охридски“, Технички факултет - Битола.

Оровчанец, М., и  Соколоски, П. (2024). *Метрички простори*. Скопје: Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Природно-математички факултет.

Таха, Х. А. (2010). *Операциони истражувања*. МАГОР.

Трпеновски, Б., Целакоски, Н., и Чупона, Ѓ. (1994). *Виша математика, кн. III (аналитична геометрија и функции од повеќе променливи)*. Скопје: Просветно дело

Трпеновски, Б., Целакоски, Н., и Чупона, Ѓ. (1994). *Виша математика, кн. IV (одбрани делови)*. Скопје: Просветно дело

Юдин, Д.Б., Гольштейн, Е.Г. (1969). *Линейное программирование (теория, методы и приложения)*. Москва: Наука.

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

## БИОГРАФСКИ ПОДАТОЦИ ЗА АВТОРИТЕ

д-р Елена Карамазова Гелова е вонреден професор на Факултет за информатика, Катедра за математика и статистика, при Универзитет „Гоце Делчев“ во Штип

д-р Александар Крстев е редовен професор на Факултет за информатика, Катедра - информациски системи и технологии, при Универзитет „Гоце Делчев“ во Штип

д-р Соња Манчевска е редовен професор на Факултетот за информатички и комуникациски технологии – Битола, Катедра за интелигентни системи, моделирање и симулации, при Универзитет „Св. Климент Охридски“ – Битола

Prezemeno od elena.gelova <15 May 2026 - 21:57>

ISBN 978-608-277-148-9