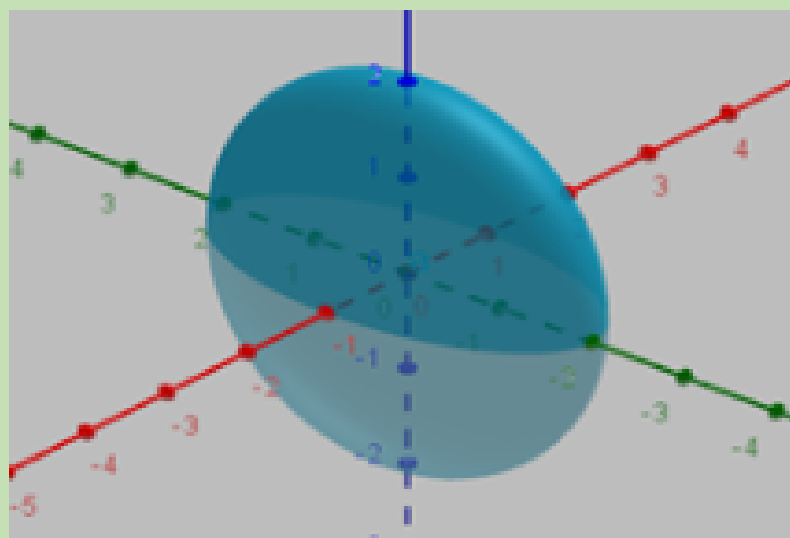


Мартин Лукаревски, Елена Карамазова Гелова

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА



Штип, 2025 година

Мартин Лукаревски; Елена Карамазова Гелова
ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА
ГЕОМЕТРИЈА

Автори

д-р Мартин Лукаревски, редовен професор
д-р Елена Карамазова Гелова, вонреден професор

ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Рецензенти

д-р Костадин Тренчевски, редовен професор
д-р Никола Тунески, редовен професор

Лектор

Лидија Тантуровска

Техничко уредување

д-р Мартин Лукаревски
д-р Елена Карамазова Гелова

Издавач

Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип

За издавачот

уредник на издавачка продукција на УГД

д-р Лилјана Колева Гудева, редовен професор, претседател на Комисија за издавачка
дејност

Објавено во е-библиотека

<https://e-lib.ugd.edu.mk>

DOI <https://www.doi.org/10.46763/9786082771014>

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

512.64(075.8)(076)

514.12(075.8)(076)

ЛУКАРЕВСКИ, Мартин

Збирка задачи по Линеарна алгебра и Аналитичка геометрија
[Електронски извор] / автори Мартин Лукаревски, Елена Карамазова Гелова.
- Штип : Универзитет "Гоце Делчев" - Штип, Факултет за информатика, 2025

Начин на пристапување (URL): <http://e-lib.ugd.edu.mk/1233>. - Текст во
PDF формат, содржи VII, 80 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. -
Опис на изворот на ден 25.02.2025. - Библиографија: стр. 79

ISBN 978-608-277-101-4

1. Карамазова Гелова, Елена [автор]

а) Линеарна алгебра -- Високошколски учебници -- Вежби б) Аналитичка
геометрија -- Високошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 65358853

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



Автори

Д-р Мартин Лукаревски, редовен професор

Д-р Елена Карамазова Гелова, вонреден професор

**ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА И
АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА**

Штип, 2025

ПРЕДГОВОР

Збирката задачи по Линеарна алгебра и Аналитичка геометрија е наменета за користење како учебно помагало за совладување на материјалот од вежбите по предметот Линеарна алгебра со Аналитичка геометрија. Збирката задачи, првенствено е наменета за студентите на Факултет за информатика на насоката Компјутерски науки. Збирката задачи, освен по предметот Линеарна алгебра со Аналитичка геометрија, може да се користи и по предметот Линеарна алгебра, како и останати предмети во кои се изучуваат содржини од Линеарна алгебра и содржини од Аналитичка геометрија. Практикумот се состои од тринаесет глави.

На почеток на првата глава решение се задачи со операции на матрици, а потоа наведени се неколку решени примери со наоѓање на ранг на дадена матрица. Во втората глава наведени се повеќе решени задачи со пресметување вредност на детерминанта на матрица најпрво од втор ред, а потоа од трет, четврти и повисок ред. Третата глава содржи повеќе решени задачи од наоѓање инверзна матрица на дадена матрица со елементарни редични трансформации и со формулата $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$, каде

$\tilde{A}$ е адјунгирана матрица на A . Задачи со решавање на системи линеарни равенки можат да се најдат во четвртата глава. Задачите се решени со Камерово правило, Гаусов метод и теоремата на Кронекер – Капели. Петата глава содржи решени задачи од сопствени вредности и вектори на матрица. Најпрво се наведени задачи од наоѓање на сопствени вредности и вектори на матрица од втор ред, потоа на матрица од трет ред и на крај матрица од n - ти ред. Шестата глава содржи решени задачи од векторско сметање. Решени задачи со линеарна зависност и независност на вектори се наведени во седмата глава. Исто така, во оваа глава се наоѓаат и задачи со наоѓање на линеарна обвивка. Осмата глава е наменета за задали со скаларен, векторски и мешан производ. Деветата целина се состои од решени задачи со примена на скаларниот, векторскиот и мешан производ за пресметување плоштина и волумен. Задачи со нивните решенија од равенка на рамнина во просторот и равенка на права во просторот се наведени во десетата и единаесетата глава соодветно. Во дванесетата глава разработени се растојанијата меѓу точка и рамнина, точка и права, меѓу две прави и меѓу две рамнини. И во последната тринаесета глава се наведени задачи од површини.

СОДРЖИНА	
ПРЕДГОВОР	V
Глава 1	1
Матрици и системи линеарни равенки. Ранг на матрица	1
Ранг на матрица	4
Глава 2	7
Детерминанти	7
Глава 3	13
Инверзни матрици	13
Глава 4	21
Правило на Крамер и системи линеарни равенки	21
Глава 5	29
Сопствени вредности и вектори	29
Глава 6	37
Векторско сметање. Вектори во координатна форма	37
Глава 7	39
Линеарна зависност, независност и линеарна обвивка	39
Глава 8	43
Скаларен, векторски и мешан производ	43
Глава 9 Примени на векторското сметање	51
Глава 10	55
Равенка на рамнина во простор	55
Глава 11	59
Равенка на права во простор	59
Глава 12	69
Растојанија меѓу точки, прави и рамнини	69
Глава 13	75
Површини	75
ЛИТЕРАТУРА	79

Глава 1

Матрици и системи линеарни равенки. Ранг на матрица

За матриците се дефинирани еднаквост, множење со број и собирање. Операцијата собирање се дефинира за матрици со иста димензија.

1. За матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ да се пресмета

$$C = 3A - B \text{ и } D = -2A + 7B.$$

Решение.

$$C = 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$D = -2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 14 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -13 \\ 14 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Две матрици се множат кога бројот на колоните на првата е еднаков со бројот на редиците на втората матрица. За производот на матриците не важи комутативниот закон. Операцијата множење на матрици е асоцијативна и дистрибутивна.

2. Да се најде производот AB на матриците $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Матрицата A има 2 редици и 3 колони, а матрицата B има 3 редици и 4 колони па производот AB постои, и матрицата производ има 2 редици и 4 колони.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & -1 \\ -8 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Провери дали се дефинирани производите AB и BA на матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и

$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и ако се дефинирани пресметај ги.

Решение.

Производот AB е дефиниран бидејќи матрицата A има 3 колони, а матрицата B има 3 редици. Производот BA нема смисла бидејќи бројот на колони на B е различен од бројот на редици на A (1 и 2 соодветно).

Пресметуваме

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Да се најдат производите AB и BA на матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Што забележуваш?

Решение.

Матриците A и B се квадратни, па двата производи AB и BA се дефинирани. Добиваме

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Забележуваме дека матричното множење не е комутативно и дека има делители на нулата (две ненулти матрици ја даваат како производ нултата матрица).

Забелешка:

За квадратни матрици важи

A е делител на нулата $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ нема потполн ранг.

5. Дадени се матриците A и B , $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$. Да се определат производите AB и BA . Што забележувате?

Решение.

За производите AB и BA имаме

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-6) & 3 \cdot (-4) + 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -18 & -28 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-4) \cdot (-6) & 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) \\ (-6) \cdot 1 + (-4) \cdot (-6) & (-6) \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -18 & -28 \end{pmatrix}.$$

Забележуваме дека $AB = BA$. За две матрици коишто го исполнуваат условот $AB = BA$ се вели дека се комутативни.

6. Да се најдат производите AB и BA на матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

За производите AB и BA имаме

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 21 & 10 \\ 14 & -7 & -2 \\ 2 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 0 \\ 0 & 11 & 2 \\ 8 & 5 & -23 \end{pmatrix}.$$

Па A и B не се комутативни.

7. Дадени се матриците

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Да се најдат сите можни производи.

Решение.

Дефинирани производи се: AB , BA , AC и CB , и притоа

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4) = (7),$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -13 \end{pmatrix},$$

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

8. Покажете дека производ на ортогонални матрици е ортогонална матрица.

Ранг на матрица

9. Најдете ранг на матрицата

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 12 \\ 6 & 5 & 13 \end{pmatrix},$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix},$

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix},$

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение.

Рангот на една матрица не се менува ако се извршат елементарни ридични трансформации. Сакаме матриците да ги трансформираме во форма од која рангот едноставно ќе се прочита.

а) Матрицата $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 12 \\ 6 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ ја трансформираме

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 12 \\ 6 & 5 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)R_1+R_3]{(-4)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 2$.

б) За матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 2$.

в) За рангот на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ се добива

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)R_1+R_2]{(-2)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 2$.

г) За рангот на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)R_2+R_4]{(-2)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 2$.

д) За рангот на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2)R_1+R_2 \\ (-1)R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)R_2+R_3 \\ R_2+R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 2$.

ѓ) За рангот на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имаме.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2)R_1+R_2 \\ (-3)R_1+R_3 \\ 2R_1+R_4 \\ (-4)R_1+R_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{(-4)R_2+R_3 \\ R_2+R_4 \\ 2R_2+R_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-5)R_3+R_4 \\ 3R_3+R_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Па $\text{rang } A = 3$.

Забелешка: Некои од задачите се превземени од (Лукаревски и др. 2015).

Глава 2

Детерминанти

1. Пресметајте ја вредноста на детерминантите на матриците:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Детерминантите на матриците од втор ред се пресметуваат со формулата

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

$$\text{a) За } \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ имаме } \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot (-2) = 6 - 6 = 0,$$

$$\text{б) } \det \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - (1+i)(1-i) = 6 - (1 - i^2) = 6 - 2 = 4.$$

2. Пресметајте ја вредноста на детерминантите на матриците:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Со користење на Сарусовото правило за детерминантите на дадените матрици имаме

а)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 = 39.$$

б)

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = -9.$$

3. Пресметајте ја вредноста на детерминантите на матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- а) со разложување по првата редица
б) со сведување на триаголна форма.

Решение.

а) Детерминантата ја развиваме по првата редица и добиваме:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-5) + 1 \cdot (-3) + 6 \cdot 5 - 4 \cdot 7 = -16. \end{aligned}$$

б) Со заменување на местата на две редици (колони), се менува знакот на детерминантата. Ги заменуваме првата и втората редица:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Во последната детерминанта првата редица ја множиме со -3, -1 и ја додаваме на втората и третата редица соодветно:

$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Понатаму втората редица помножена со -5, -3 и додадена на третата и четвртата соодветно дава:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Во последниот чекор третата редица ја множиме со -7 и ја додаваме на четвртата:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} = -16.$$

4. Пресметајте $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Решение.

Со развивање по втората редица, добиваме:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 41. \end{aligned}$$

5. Пресметај ја вредноста на детерминантата на матрицата:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\det A = -1032$.

6. Пресметајте ја вредноста на детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Развивањето по третата редица дава

$$\begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-4) \begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-4)(t^2 - t - 6) = (t-4)(t-3)(t+2).$$

7. Пресметајте ја вредноста на детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det \begin{pmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 + 1.$

8. Нека M е квадратна матрица и постои разложување на M во четири подматрици (блокови)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

така што дијагоналните матрици A и D се квадратни матрици и B или C е нулта матрица. Тогаш важи:

$$\det M = \det A \cdot \det D.$$

9. Пресметајте ја вредноста на детерминантата на матрицата $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$.

Решение.

Можеме да го искористиме резултатот од претходната задача.

Дадената матрица ја трансформираме со множење на првите две колони со $-c/a$ и додавање на последните две. Со примена на горниот резултат, добиваме:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \\ 0 & b & 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = a^2 \left(d - \frac{bc}{a} \right)^2 = (ad - bc)^2.$$

Без да се користи резултатот за детерминанта на блочна матрица, последната детерминанта ако се развие по последната колона, се добива:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \\ 0 & b & 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} = \left(d - \frac{bc}{a} \right) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & d - \frac{bc}{a} \end{vmatrix}.$$

Сега имаме долно-триаголна детерминанта и повторно се добива $(ad - bc)^2$.

Втор начин на решавање е со развивање на детерминантата по првата редица:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ b & 0 & d \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \\ &= a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

10. Да се пресмета детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Решение.

Првата редица се множи со -1 и се додава на сите редици под неа. Се добива горно-триаголна матрица

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

со детерминанта $(n - 1)!$.

11. Ако матрицата A е ортогонална, тогаш $\det A = 1$ или $\det A = -1$.

12. Ако A и B се квадратни матрици од ист ред, тогаш производите AB и BA се дефинирани и важи:

$$\det (AB) = \det (BA).$$

13. Да се пресмета $A_{k+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & -x & x \end{vmatrix}.$

14. Да се пресмета детерминантата на Хилбертовата матрица

$$A_k = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \cdots & \frac{1}{2k-1} \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$A_k = \frac{[1!2!3!\cdots(k-1)!]^4}{1!2!3!\cdots(2k-1)!}.$$

Забелешка: Некои од задачите се превземени од (Лукаревски и др. 2015).
Објаснување на правилата за решавање може да се најде во Трпеновски и др. (1994),
Лукаревски, (2014) и (Лукаревски, 2019).

Глава 3

Инверзни матрици

1. Најдете инверзна матрица на матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Користејќи дека $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, за матрицата $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ имаме

$$ad-bc = 6 - (1+i) \cdot (1-i) = 6 - (1-i^2) = 4.$$

$$\text{Значи, } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Најдете инверзна матрица на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, со формулата

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}, \text{ каде } \tilde{A} \text{ е адјунгирана матрица на } A.$$

Решение.

За инверзната матрица на $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ имаме

$$a_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad a_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad a_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad a_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad a_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad a_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad a_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1, \text{ па}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Најдете инверзна матрица со елементарни ридични трансформации

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$

б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение. а) За инверзната матрица на $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

имаме

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_1 + R_2 \\ (-3)R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & | & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & | & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)R_3 + R_2 \\ (-3)R_3 + R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-5)R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Се добива $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

б) За инверзната матрица на $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1+R_2 \\ 3R_1+R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}R_2 \\ \frac{1}{7}R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1)R_3+R_1 \\ \frac{1}{2}R_3+R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Се добива $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$

4. Најдете инверзна матрица со формулата $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$, каде $\tilde{A}$ е адјунгирана матрица на A .

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решение.

а) $\det \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$

$$a_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} i & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -i$$

$$a_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = i^2 + 1 = 0$$

$$a_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{vmatrix} = -i$$

$$a_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Се добива $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & -2i \\ 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. Најди инверзна матрица со елементарни редични трансформации

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\text{a) За инверзната матрица на } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ имаме}$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_{23}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)R_1 + R_3} \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -R_2 + R_1 \\ -R_2 + R_3 \\ -R_2 + R_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\begin{matrix} -R_3 + R_1 \\ R_3 + R_2 \\ -R_3 + R_4 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{11}R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right) \\ & \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \frac{4}{11} & -1 & -\frac{8}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{1}{4} & \frac{2}{11} & -\frac{7}{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array} \right) \\ & \text{Се добива } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 & \frac{7}{11} & -\frac{13}{11} \\ \frac{2}{11} & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{9}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{4} & \frac{2}{11} & -\frac{7}{44} \\ -\frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & -13 \\ 2 & 0 & -4 & 9 \\ -1 & \frac{11}{4} & 2 & -\frac{7}{4} \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1+R_2 \\ (-3)R_1+R_3 \\ R_1+R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_3+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 7 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4+R_3 \\ (-1)R_4+R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & -6 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 7 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & -6 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 7 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -12 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 7 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Па } A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 3 & -2 \\ -6 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Најдете инверзна матрица

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$в) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$г) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\text{a) } A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & -19 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } A^{-1} = \frac{1}{285} \begin{pmatrix} 19 & 25 & 15 & 72 \\ 133 & -5 & -60 & 54 \\ 0 & 45 & -30 & -30 \\ -38 & -20 & 45 & -69 \end{pmatrix},$$

$$\text{г) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Нека M е квадратна матрица и постои разложување на M во четири подматрици (блокови)

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

така што A и D се инверзибилни матрици. Тогаш важи:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{8. Дадена е матрицата } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Најди ја нејзината инверзна матрица.}$$

Решение. Матрицата A се разложува на два дијагонални блокови од коишто горниот е $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, до него е нултата матрица, а долниот блок е единичната матрица. Со примена на резултатот од претходната задача за инвертибилна блочна матрица, имаме

$$-\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{па } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Забелешка: Некои од задачите се превземени од (Лукаревски и др. 2015).

Глава 4

Правило на Крамер и системи линеарни равенки

1. Решете ги системите линеарни равенки со помош на Крамеровото правило.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8, \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 2y - z - 4t = -2 \\ x - 2y + z - 3t = -1 \\ -x + 2y - z - 2t = 1 \\ 2x - 2y - z - t = -6 \end{cases}.$$

Решение.

а) Најпрво ја пресметуваме вредноста на детерминантата Δ чии елементи се коефициентите пред x, y и z .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 6 + 6 + 5 + 8 + 27 = 22 \neq 0, \Delta \neq 0$$

па системот има единствено решение. Понатаму ги пресметуваме Δ_x, Δ_y и Δ_z , така што членовите на детерминантите ги добиваме со замена на коефициентите пред x, y и z соодветно со слободните членови.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -15 + 16 - 6 - 5 + 4 + 72 = 66,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -48 + 3 + 2 + 8 + 4 + 9 = -22,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 6 + 24 - 5 + 32 + 9 = 44,$$

па

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2.$$

б) За детерминантите $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ и Δ_t , имаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 60 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -6 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -60, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 60,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 120, \quad \Delta_t = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

па

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-60}{60} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{120}{60} = 2, \quad t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{0}{60} = 0.$$

2. Решете ги системите линеарни равенки со Гаусовата метода:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 5z = 2 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases} \end{array}$$

Решение.

$$\text{а) За системот } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 5z = 2 \end{cases} \text{ имаме}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-1) \cdot R_1 + R_2 \\ (-1) \cdot R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\frac{5}{2}) \cdot R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Оттука

$$z = \frac{1}{2}$$

$$y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$x + \frac{3}{2}y + 2z = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y - 2z + \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Па решението на системот е $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$.

б) За системот
$$\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 4 \\ 4x + 3y - z + 2t = 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t = 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t = 6 \end{cases}$$
 имаме

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-2)R_1 + R_2 \\ (-4)R_1 + R_3 \\ (-\frac{3}{2})R_1 + R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (-3)R_2 + R_3 \\ 2R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оттука

$$z = -1,$$

$$t = z = -1,$$

$$y = z + 2 = -1 + 2 = 1,$$

$$2x + 2 + 1 - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

Па решението е $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$, $t = -1$.

3. Проверете со теоремата на Кронекер - Капели дали имаат решение следните системи линеарни равенки:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + 2z - 2t = -2 \\ -x + 2y - z + t = 4 \\ -x + y - z + t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 3y + 2z - 2t = -2 \\ x + 2y - z + t = 4 \\ -x - y + 4z - 4t = -4 \end{cases}.$$

Решение.

а) СЛР е со три равенки и четири непознати. За рангот на матрицата A која се состои од коефициентите пред x, y, z и t во дадениот систем имаме

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_1 + R_2 \\ (-1)R_1 + R_3}} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 + R_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

па $\text{rang} A = 2$.

За рангот на проширената матрицата $\bar{A}$ на дадениот систем, која се состои од коефициентите пред x, y, z и t , и од слободните членови во дадениот систем имаме

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{2R_1 + R_2 \\ (-1)R_1 + R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Добиваме $\text{rang} A = 2 = \text{rang} \bar{A}$, што значи системот има решение. Од $\text{rang} A = 2 < n = 4$, каде n е бројот на непознати во системот, добиваме дека системот има бесконечно многу решенија. И тоа:

$$3y = 6, \quad y = 2$$

$$-x + 2y - z + t = 4, \quad -x - z + t = 0, \quad x = t - z = m - n,$$

за $z = n \in \mathbb{R}$, и $t = m \in \mathbb{R}$, па за решението на системот имаме

$$M = \{(m - n, 2, n, m) | m, n \in \mathbb{R}\}.$$

б) За рангот на матрицата A на системот $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ x+y+2z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)R_1+R_2 \\ (-1)R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

па $\text{rang} A = 3$.

За рангот на проширената матрица $\bar{A}$ на дадениот систем имаме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-1)R_1+R_2 \\ (-1)R_1+R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{array} \right),$$

од тука $\text{rang} \bar{A} = 3$. Значи $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3 = n$, каде n е бројот на непознати во дадениот систем, од каде добиваме дека системот има единствено решение и тоа

$$z = -\frac{1}{6}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{23}{6}.$$

в) За системот $\begin{cases} x+3y+2z-2t=-2 \\ x+2y-z+t=4 \\ -x-y+4z-4t=-4 \end{cases}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)R_1+R_2 \\ R_1+R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2R_2+R_3 \\ (-1)R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па рангот на матрицата на СЛР е $\text{rang} A = 2$.

За рангот на проширената матрица $\bar{A}$ на дадениот систем имаме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 & -4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-1)R_1+R_2 \\ R_1+R_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2R_2+R_3 \\ (-1)R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right),$$

значи $\text{rang} \bar{A} = 3$.

Добиваме $\text{rang} A \neq \text{rang} \bar{A}$, што значи системот нема решение.

4. За кои вредности на параметарот p , системите линеарни равенки имаат решение?

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + 4z - t = 3 \\ x - 2y + 3z + t = 2 \\ x + y + 4z - t = p + 1 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - z + 4t = 2 \\ x - 3y + 2z - 3t = -1 \\ x + 7y - 4z + 11t = p \end{cases}.$$

Решение.

а) За рангот на матрицата A на системот $\begin{cases} x + y + 4z - t = 3 \\ x - 2y + 3z + t = 2 \\ x + y + 4z - t = p + 1 \end{cases}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па $\text{rang} A = 2$. СЛР има решение ако рангот на проширената матрица на дадениот систем $\bar{A}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & p+1 \end{array} \right),$$

е еднаков на 2. Со истите трансформации

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & p+1 \end{array} \right) \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-2 \end{array} \right)$$

рангот на последната матрица е еднаков на 2 за $p - 2 = 0$, па $p = 2$.

Може да се забележи дека првата и третата равенка во СЛР се разликуваат само во слободниот член, па за тој да има решение треба $3 = p + 1 \Rightarrow p = 2$.

б) За рангот на матрицата A на системот $\begin{cases} x + 2y - z + 4t = 2 \\ x - 3y + 2z - 3t = -1 \\ x + 7y - 4z + 11t = p \end{cases}$ имаме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

па $\text{rang} A = 2$. СЛР има решение само ако $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$.

Рангот на проширената матрица на дадениот систем $\bar{A}$ го добиваме од

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & | & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -3 & | & -1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & | & p \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)R_1+R_2 \\ (-1)R_1+R_3}]{(-1)R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & | & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & | & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & | & p-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & | & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & p-5 \end{pmatrix}$$

Тој е еднаков на 2 само ако $p - 5 = 0$, односно $p = 5$.

Глава 5

Сопствени вредности и вектори

1. Да се најдат карактеристичниот полином, сопствените вредности и сопствените вектори на дадените матрици од втор ред:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Карактеристичниот полином на матрицата $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ го наоѓаме од

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 \\ &= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3. \end{aligned}$$

Сопствените вредности ги наоѓаме со изедначување на карактеристичниот полином со нула т.е. $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, па $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, се сопствени вредности.

Сопствените вектори ги добиваме со решавање на системот $(A - \lambda E) \cdot x = 0$, т.е.

$$Ax = \lambda x.$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ од каде } \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

За $\lambda_1 = 3$ имаме:

$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$. Решение на последниот систем е $x_1 = x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите (t, t) , $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се сопствени вектори на A , придружени на сопствената вредност $\lambda_1 = 3$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивен претставник, на пример за $t=1$ сопствениот вектор е $(1, 1)$.

За $\lambda_2 = -1$ имаме:

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$. Решение на последниот систем е $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите $(t, -t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се

сопствени вектори на A , придружени на сопствената вредност $\lambda_2 = -1$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивни претставник, на пример за $t=1$ сопствениот вектор е $(1, -1)$.

б) За карактеристичниот полином на матрицата $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ имаме:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \\ &= 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4. \end{aligned}$$

Сопствените вредности ги наоѓаме со изедначување на карактеристичниот полином со нула т.е. $\det(B - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$, па $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$, се сопствени вредности. Сопствените вектори ги добиваме со решавање на системот $(B - \lambda E) \cdot x = 0$, т.е. $Bx = \lambda x$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ од каде што } \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

За $\lambda_1 = 4$ имаме:

$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$. Решение на последниот систем е $x_1 = 2t$, $x_2 = 3t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите $t(2, 3)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се сопствени вектори на B , придружени на сопствената вредност $\lambda_1 = 4$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивен претставник, на пример за $t=1$ сопствен вектор е $(2, 3)$.

За $\lambda_2 = -1$ имаме:

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$. Решение на последниот систем е $x_1 = t$, $x_2 = -t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите $(t, -t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се сопствени вектори на матрицата B , придружени на сопствената вредност $\lambda_2 = -1$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивни претставник, на пример за $t=1$ сопствен вектор е $(1, -1)$.

2. Да се најдат карактеристичниот полином, сопствените вредности и сопствените вектори на дадените матрици:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) За карактеристичниот полином на се добива

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 \\ &= 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5. \end{aligned}$$

Сопствените вредности ги наоѓаме со изедначување на карактеристичниот полином со нула т.е. $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$, па $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, се сопствени вредности. Сопствените вектори ги добиваме со решавање на системот $(A - \lambda E) \cdot x = 0$, т.е. $Ax = \lambda x$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ од каде } \begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{За } \lambda_1 = 5 \text{ се добива } \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение на последниот систем е $x_1 = t$, $x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, па сопствени вектори придружени на сопствената вредност $\lambda_1 = 5$. се векторите $t(1,1)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивни претставник, на пример за $t=1$ сопствен вектор е $(1,1)$.

$$\text{За } \lambda_2 = -1 \text{ имаме: } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение на последниот систем е $x_1 = 2t$, $x_2 = -t$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите $(2t, -t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се сопствени вектори на A , придружени на сопствената вредност $\lambda_2 = -1$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивни претставник, на пример за $t=1$ сопствен вектор е $(2, -1)$.

б) Карактеристичниот полином на матрицата B е:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 \\ &= 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4. \end{aligned}$$

Сопствените вредности ги наоѓаме со изедначување на карактеристичниот полином со нула т.е. $\det(B - \lambda E) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$, па $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Сопствените вектори ги добиваме со решавање на системот $(B - \lambda E) \cdot x = 0$, т.е. $Bx = \lambda x$.

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ од каде } \begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

За $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ имаме: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

Решение на последниот систем е $x_1 = t, x_2 = t, t \in \mathbb{R}$, т.е. векторите $t(1,1), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сите овие вектори што се добиваат кога t се менува во $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ се сопствени вектори на B , придружени на сопствената вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Но, бидејќи тие се колинеарни се зема еден нивни претставник, на пример за $t=1$ сопствен вектор е $(1,1)$. Па сопствен вектор кој одговара на сопствената вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ е $(1,1)$.

3. Да се најдат карактеристичниот полином, сопствените вредности и сопствените вектори на дадените матрици од трет ред:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) За карактеристичниот полином на $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 36 - 9\lambda = (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (4-\lambda)[(1-\lambda)(-5-\lambda) + 9] = (4-\lambda)[-5-\lambda+5\lambda+\lambda^2+9] \\ &= (4-\lambda)[\lambda^2+4\lambda+4] = (4-\lambda)(\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

Оттука сопствените вредности се $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, двократен корен, и $\lambda_3 = 4$.

Сопствените вектори ги наоѓаме со помош на системот

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

па за $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ имаме

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ги фиксираме $x_2 = u$ и $x_3 = v$, па

добиваме $x_1 = u - v$, од каде $(u - v, u, v) = u(1, 1, 0) + v(-1, 0, 1)$.

Па два линеарно независни сопствени вектори што одговараат на сопствената вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ се $(1, 1, 0)$ и $(-1, 0, 1)$.

$$\text{За } \lambda_3 = 4 \text{ имаме } \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{од каде го добиваме системот } \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 \\ x_1 = 3x_2 - x_3 \\ x_1 = x_2 \end{cases}. \text{ Системот}$$

има решение $x_2 = x_1, x_3 = 2x_1$, па сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda_3 = 4$ е $(1, 1, 2)$.

$$\text{б) За карактеристичниот полином на } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ имаме}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 2(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) + 2] = (2-\lambda)[4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2] \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2-5\lambda+6] = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, од каде добиваме дека сопствени вредности се $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$.

За да ги најдеме сопствените вектори го решаваме системот

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ па за } \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ имаме}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Решение е $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0, t \in \mathbb{R}$, па сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ е $(1, 0, 0)$.

$$\text{За } \lambda_3 = 3 \text{ имаме } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{од каде го добиваме системот } \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \text{ со решение } \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{matrix}, \text{ па сопствен}$$

вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda_3 = 3$ е $(1, 1, -2)$.

$$\text{в) За карактеристичниот полином на } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ имаме}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(-1-\lambda) - 9(2-\lambda) - 9(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)[-2-\lambda+\lambda^2-18] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-20). \end{aligned}$$

Па сопствените вредности се $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$ и $\lambda_3 = -4$.

Ги наоѓаме сопствените вектори.

За $\lambda_1 = 2$ имаме $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ од каде го добиваме системот

$$\begin{cases} -3x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0, \text{ од каде сопствен вектор што одговара на сопствената вредност} \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$ е $(1,1,0)$.

За $\lambda_2 = 5$ го добиваме системот $\begin{cases} -3x_1 - 3x_3 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$, од каде сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda_2 = 5$ е $(-1,1,1)$.

За $\lambda_3 = -4$ го добиваме системот $\begin{cases} 6x_1 - 3x_3 = 0 \\ 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$, од каде сопствен вектор што одговара на сопствената вредност $\lambda_3 = -4$ е $(1, -1, 2)$.

г) За карактеристичниот полином на $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ имаме

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(-2-\lambda) - 9(2-\lambda) - 3(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(-4+\lambda^2-12) = (2-\lambda)(\lambda^2-16) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4). \end{aligned}$$

Оттука сопствените вредности се $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_3 = -4$.

За сопствената вредност $\lambda_1 = 2$ соодветниот сопствен вектор е $(1,3,0)$.

За сопствената вредност $\lambda_2 = 4$ соодветниот сопствен вектор е $(-3,3,2)$.

За сопствената вредност $\lambda_3 = -4$ соодветниот сопствен вектор е $(1, -1, 2)$.

4. Да се најдат сопствените вредности на квадратната матрица A од n -ти ред

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Го наоѓаме најпрво карактеристичниот полином на квадратната матрица A од n -ти

$$\text{ред } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Првата редица се одзема од сите останати и се добива

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Потоа на првата колона и се додаваат сите други колони со што се добива горно триаголна матрица т.е. добиваме

$$\det \begin{pmatrix} n-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Од каде сопствените вредности на матрицата се $\lambda_1 = n, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Глава 6

Векторско сметање. Вектори во координатна форма

1. Дадени се векторите $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ и $\vec{c} = -\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$. Најди вектор $\vec{d}$ така што векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ да формираат четириаголник.

Решение.

Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ формираат четириаголник ако нивниот збир е нултиот вектор т.е.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}. \text{ Од таму}$$

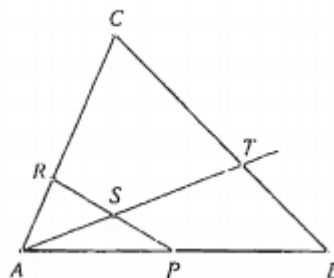
$$\begin{aligned} \vec{d} &= -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \\ &= 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r} - \vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r} + \vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}. \end{aligned}$$

2. Нека во триаголникот ABC точката P е средина на $\overline{AB}$, точката R е таква што $3\overline{AR} = \overline{AC}$, а точката S е средина на отсечката $\overline{PR}$. Во кој однос правецот AS ја дели страната BC?

Решение. Да ја означиме со T пресечната точка на правецот AS и страната BC. Нека $\overline{BT} = \alpha \overline{BC}$ и $\overline{AS} = \beta \overline{AT}$. Од тука имаме, $\overline{AS} = \beta (\overline{AB} + \overline{BT}) = \beta (\overline{AB} + \alpha \overline{BC}) = \beta \overline{AB} + \alpha\beta \overline{BC}$.

Исто така, важи

$$\begin{aligned} \overline{AS} &= \frac{1}{2}(\overline{AP} + \overline{AR}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AC}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC} = \frac{1}{4}\overline{AB} + \frac{1}{6}(\overline{AB} + \overline{BC}) \\ &= \frac{5}{12}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{BC}. \end{aligned}$$



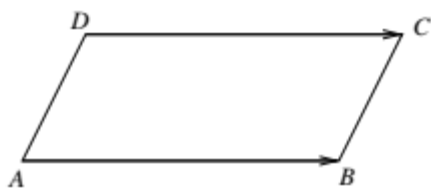
Слика 1.Триаголник ABC (Elezovic & Aglic, 1995)

Од каде добиваме $\beta = \frac{5}{12}$ и $\alpha\beta = \frac{1}{6}$, односно $\alpha = \frac{2}{5}$. Што значи точката T ја дели страната BC во однос 2:3.

3. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот ABCD: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ и $C(5, 0, 2)$. Одреди ги координатите на четвртото теме.

Решение.

Нека $D(x, y, z)$ е бараното теме.



(Мисајлески, 2019)

Од својствата на паралелограмот важи

$$\vec{AB} = \vec{DC}.$$

па, следи

$$(3 - (-3), -3 - (-2), 1 - 0) = (5 - x, 0 - y, 2 - z).$$

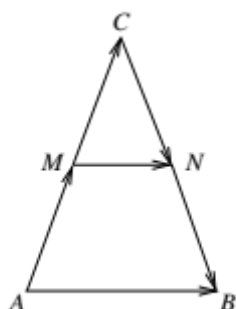
Со изедначување на соодветните координати се добива системот равенки

$$5 - x = 6, \quad -y = -1, \quad 2 - z = 1,$$

чие решение е $x = -1, \quad y = 1, \quad z = 1$. Па бараното теме е $D(x, y, z)$.

4. Нека ABC е триаголник таков што M е средина на $\overline{AC}$, а N средина на $\overline{BC}$. Докажи дека $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Решение.



Бидејќи

$$\vec{AM} = \vec{MC} = \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ и } \vec{CN} = \vec{NB} = \frac{1}{2}\vec{CB},$$

имаме

$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}.$$

Слика 2. Триаголник ABC (Мисајлески, 2019).

5. Дадени се векторите $\vec{a} = (0, 2p, p)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -2, -1)$ и $\vec{d} = (-3p, -2p, -p)$. Докажи дека векторите $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ се колинеарни

Решение.

Како е $\vec{a} - \vec{d} = (3p, 4p, 2p)$ и $\vec{b} - \vec{c} = (3, 4, 2)$ очигледно е дека $\vec{a} - \vec{d} = p(\vec{b} - \vec{c})$, што значи дека векторите се колинеарни.

6. Дадени се векторите $\vec{a} = (0, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, $\vec{c} = (3, 0, 1)$. Запиши го координатното претставување на векторите

а) $4\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$ б) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$

Решение.

а) $4\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c} = 4(0, 2, 0) - 3(1, 3, 0) - (3, 0, 1) = (-6, -1, -1)$

б) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = (0, 2, 0) + (1, 3, 0) - 2(3, 0, 1) = (-5, 5, -2)$

Глава 7

Линеарна зависност, независност и линеарна обвивка

1. Да се провери линеарната зависност на векторите $\vec{a} = (1,1,2)$, $\vec{b} = (2,0,1)$ и $\vec{c} = (1,2,0)$, а потоа векторот $\vec{d} = (3, -3, 4)$ да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение.

$$\text{Бидејќи } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 2 = 7 \neq 0$$

Следува векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни.

Нека векторот $\vec{d}$ е линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Имаме

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \text{ т.е.}$$

$$(3, -3, 4) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(2, 0, 1) + \gamma(1, 2, 0),$$

$$(3, -3, 4) = (\alpha, \alpha, 2\alpha) + (2\beta, 0, \beta) + (\gamma, 2\gamma, 0) = (\alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\gamma, 2\alpha + \beta)$$

па

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 3$$

$$\alpha + 2\gamma = -3$$

$$2\alpha + \beta = 4$$

Со решавање на последниот систем добиваме $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -2$, па

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}.$$

2. За која вредност на k векторот $\vec{u} = (1, -2, k)$ може да се запише како линеарна комбинација на векторите $\vec{v} = (3, 0, -2)$ и $\vec{w} = (2, -1, -5)$.

Решение.

Нека

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}. \text{ Имаме}$$

$$(1, -2, k) = \alpha(3, 0, -2) + \beta(2, -1, -5)$$

$$(1, -2, k) = (3\alpha, 0, -2\alpha) + (2\beta, -\beta, -5\beta) = (3\alpha + 2\beta, -\beta, -2\alpha - 5\beta).$$

Од каде го добиваме системот

$$3\alpha + 2\beta = 1$$

$$-\beta = -2$$

$$-2\alpha - 5\beta = k$$

од каде $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $k = -8$.

3. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите $2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + 3\vec{a}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Решение.

За да докажеме дека векторите $2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + 3\vec{a}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ се линеарно независни треба да покажеме дека ако

$$\alpha(2\vec{b} + \vec{c}) + \beta(\vec{c} + 3\vec{a}) + \gamma(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$$

Нека $\alpha(2\vec{b} + \vec{c}) + \beta(\vec{c} + 3\vec{a}) + \gamma(2\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0}$
од тука

$$(3\beta + 2\gamma)\vec{a} + (2\alpha - \gamma)\vec{b} + (\alpha + \beta)\vec{c} = (0,0,0).$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни, имаме

$$\begin{cases} 3\beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}.$$

Детерминантата на овој хомоген систем е

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

па добиваме дека системот има единствено решение $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.
Според тоа следува векторите $2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + 3\vec{a}$ и $2\vec{a} - \vec{b}$ се линеарно независни.

4. Покажи дека ако

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогаш $\text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$ е множество од сите симетрични матрици од ред 2×2 , за вообичаените операции собирање на матрици и множење со скалар.

Решение.

Нека $S \subset M_{2 \times 2}(F)$ е множество од сите симетрични матрици од ред 2×2 над полето F . Нека $A \in S$. Тогаш за A важи $A^T = A$ и е од облик

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Матрицата A може да се запише како линеарна комбинација од матриците A_1, A_2, A_3 на следниот начин

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3.$$

Ова значи дека $A \in \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$. Од A произволна, добиваме

$$S \subset \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}.$$

Нека $B \in \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$. Тогаш постојат скалари $\alpha, \beta, \gamma \in F$ такви што

$$B = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}.$$

Бидејќи резултатот е симетрична матрица и B е произволна матрица, имаме

$$\text{span}\{A_1, A_2, A_3\} \subset S.$$

Следува $S = \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

5. Нека $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, 1)$ и $\vec{c} = (4, -7, 3)$. Провери дали $\vec{c}$ припаѓа во $\text{span}(\vec{a}, \vec{b})$.

Решение.

Треба да провериме дали постојат $\alpha, \beta \in R$ такви што $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Оваа равенка е еквивалента со системот

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = -7 \\ 0\alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Па $\vec{c} = -5\vec{a} + 3\vec{b} \in \text{span}(a, \vec{b})$.

Глава 8

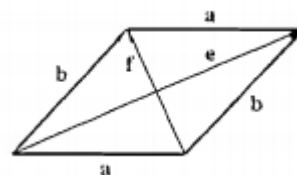
Скаларен, векторски и мешан производ

- Докажете дека дијагоналите на ромбот се меѓусебно нормални.

Решение.

Да ги означиме страните и дијагоналите на ромбот со векори како на сликата подолу (слика). Важи $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$. Затоа

$$\begin{aligned}\vec{e} \cdot \vec{f} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} \\ &= -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 0\end{aligned}$$

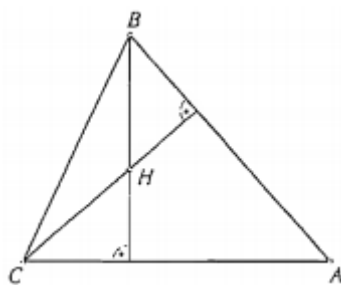


(Elezovic & Aglic, 1995, p. 75)

Со тоа е покажано дека $\vec{e} \perp \vec{f}$.

- Докажете дека висините на триаголникот се сечат во една точка.

Решение.



Слика 3. Триаголник ABC (Elezovic & Aglic, 1995, p. 75)

Да ја означиме со H пресечната точка на двете висини, спуштени од врвовите B и C . Тогаш $\vec{CH} \perp \vec{AB}$ и $\vec{BH} \perp \vec{AC}$, односно $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ и $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$.

Треба да покажеме дека важи $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ односно $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.
 \end{aligned}$$

3. Најдете го интензитетот на векторот $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ако $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

Интензитетот на векторот $\vec{a}$ ќе го пресметаме со користење на својствата на скаларен производ

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{q}) = \\
 &= \vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{q} - 2\vec{q} \cdot \vec{p} + 4\vec{q} \cdot \vec{q}.
 \end{aligned}$$

Користејќи ги познатите својства на скаларен производ $\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p}$, $|\vec{p}|^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ како и $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos \angle(\vec{p}, \vec{q})$ имаме

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}|^2 &= |\vec{p}|^2 - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 - 4|\vec{p}||\vec{q}| \cos \angle(\vec{p}, \vec{q}) + 4|\vec{q}|^2 \\
 &= 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 4(\sqrt{3})^2 = 4.
 \end{aligned}$$

од каде следува $|\vec{a}| = 2$.

4. Нека $\vec{p} = \alpha \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ се ортогонални вектори, каде $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единични вектори.

а) Ако $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се ортогонални вектори одреди го α .

б) За $\alpha = 1$ најди го аголот помеѓу векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

Решение,

Бидејќи $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се ортогонални вектори нивниот скаларен производ е 0. Користејќи ги својствата на скаларен производ, добиваме дека важи

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (\alpha \vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) = 5\alpha |\vec{m}|^2 + (10 - 4\alpha) \vec{m} \cdot \vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0$$

Од $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, важи

$$5\alpha + (10 - 4\alpha) \vec{m} \cdot \vec{n} - 8 = 0.$$

а) Од условот во задачата $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се ортогонални вектори па $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$. Со замена во претходното равенство се добива $\alpha = \frac{8}{5}$.

б) За $\alpha = 1$ се добива

$$\begin{aligned}
 5|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}| \cos \angle(\vec{m}, \vec{n}) - 8|\vec{n}|^2 &= 0, \\
 5 + 6 \cos \angle(\vec{m}, \vec{n}) - 8 &= 0,
 \end{aligned}$$

од каде следува $\cos \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{1}{2}$, па бараниот агол е $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

5. Најдете го аголот помеѓу векторите $\vec{a} = (2, -2, -1)$ и $\vec{b} = (-3, 0, 4)$.

Решение.

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{-6 + 0 - 4}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{3}.$$

Од каде добиваме $\phi = 131,8^\circ$.

6. Најдете го аголот помеѓу векторите $\vec{a} = (8, 2, 2)$ и $\vec{b} = (4, -4, 0)$.

Решение.

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{24}{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Од каде добиваме $\phi = 131,8^\circ$.

7. Проверете дали векторите

- а) $\vec{a} = (3, 2, -1)$ и $\vec{b} = (-1, 1, -1)$ б) $\vec{a} = (2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (1, -1, 0)$
се ортогонални.

Решение.

- а) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -3 + 2 + 1 = 0$$

што значи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални

- б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0$

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се ортогонални.

8. Дадени се векторите $\vec{a} = (4, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, -2, -3)$, $\vec{c} = (1, 3, -1)$ и $\vec{d} = (-2, -4, 3)$.
Одреди го скаларниот производ на векторите

- а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$

- б) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$

- в) $2\vec{c} + \vec{d}$ и $\vec{c} - 3\vec{d}$

Решение.

- а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 23$

- б) $\vec{a} + \vec{b} = (4 + 5, -3 + (-2), 1 + (-3)) = (9, -5, -2)$

$$\vec{a} - \vec{b} = (4 - 5, -3 - (-2), 1 - (-3)) = (-1, -1, 4)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -9 + 5 - 8 = -12.$$

- в) $(2\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{c} - 3\vec{d}) = (0, 2, 1) \cdot (7, 15, -10) = 0 + 30 - 10 = 20.$

9. Дадени се векторите $\vec{a} = (4, -3, 1)$ и $\vec{b} = (5, -2, -3)$. Одреди го интензитетот на векторите

- а) $\vec{a}$

- б) $\vec{a} + \vec{b}$

Решение.

- а) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

- б) $\vec{a} + \vec{b} = (9, -5, -2)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{110}.$

10. Одредете вектор $\vec{v}$ таков што $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{v} \cdot \vec{b} = 2$ и $\vec{v} \cdot \vec{c} = 3$, каде $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$.

Решение.

Нека $\vec{v} = (x, y, z)$.

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 1 \Leftrightarrow 2x - 4y + 3z = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = 2 \Leftrightarrow 3x - y + 5z = 2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{c} = 3 \Leftrightarrow x - 2y + 4z = 3.$$

Со решавање на системот добиваме $x = -1$, $y = 0$ и $z = 1$, па бараниот вектор е $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

11. Одредете вектор $\vec{b}$ кој е колинеарен со векторот $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и го задоволува условот $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$.

Решение. Векторот $\vec{b}$ ќе го претставиме во облик $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Со замена се добива

$$-18 = \lambda\vec{a} \cdot \vec{a} = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda,$$

па следува $\lambda = -2$. Добиваме $\vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

12. Дадени се векторите $\vec{a} = (3, 2, -1)$ и $\vec{b} = (-1, 1, -1)$. Најди $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$. Каков заклучок може да изведеме?

Решение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} + 2\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} = (-1, 4, 5)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} - 3\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k} = (1, -4, -5)$$

Заклучуваме дека $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

13. Дадени се неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$. Одреди го параметарот α така што да се векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ колинеарни.

Решение.

За векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ да се колинеарни, нивниот векторски производ треба да е 0, т.е.

$$(\alpha\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) = 0.$$

Користејќи ги својствата на векторскиот производ имаме

$$3\alpha\vec{a} \times \vec{a} - \alpha\vec{a} \times \vec{b} + 15\vec{b} \times \vec{a} - 5\vec{b} \times \vec{b} = 0,$$

па од $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$ и $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ следува

$$(15 + \alpha)(\vec{b} \times \vec{a}) = 0.$$

По претпоставка $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се неколинеарни вектори, па тоа значи дека $\vec{b} \times \vec{a} \neq 0$, па следува дека $15 + \alpha = 0$ т.е. $\alpha = -15$.

14. Проверете дали векторите $\vec{a} = (1, -3, 1)$ и $\vec{b} = (2, -6, 2)$ се колинеарни.

Решение.

Го пресметуваме векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k} + 6\vec{k} + 6\vec{i} - 2\vec{j} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (0,0,0)$$

векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нултиот вектор, па следува дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.

Забележуваме дека $\vec{b} = 2\vec{a}$.

15. Покажете дека ако $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$ тогаш векторите $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ се линеарно зависни.

Решение.

Нека $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$. Векторите $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$ се линеарно зависни ако се колинеарни, т.е. ако нивниот векторски производ е 0. Затоа, го пресметуваме векторскиот производ, па имаме:

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{d}) \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{d} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c} \\ &= \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} - \vec{c} \times \vec{d} \\ &= (\vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{d}) = 0. \end{aligned}$$

16. Докажете ги идентитетите

а) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ **Идентитет на Лагранж**

б) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}$, каде $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ е ознака за мешаниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$;

в) $\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d})$;

Решение.

- а) Ставаме $(\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{p}$ и ја користиме формулата за троен векторски производ

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \text{ па имаме}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{p} &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{p}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) \\ &= \vec{a} \cdot ((\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned}$$

Специјален случај е $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

б) Ставаме $(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{p}$ и користиме дека $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, па имаме

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{p} \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{p} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{p} \cdot \vec{c})\vec{d} \\&= ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d})\vec{c} - ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})\vec{d} \\&= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}.\end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) &= \vec{a} \times \{ \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{d}) - \vec{d}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \} \\&= (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}).\end{aligned}$$

17. Да се пресмета мешаниот производ на векторите $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$ и $\vec{c} = (1, 2, 1)$.

Решение.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 4 - 1 + 6 + 6 = 25$$

18. Проверете дали се компланарни векторите

а) $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (3, 2, -4)$ и $\vec{c} = (-1, -4, 4)$

б) $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (3, 3, 2)$ и $\vec{c} = (2, -3, -2)$

Решение.

Условот за компланарност на векторите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ е

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{а) } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$$

значи векторите се компланарни.

$$\text{б) } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 4 - 9 - 6 + 6 - 6 = -25 \neq 0$$

што значи векторите не се компланарни.

19. Проверете дали точките $A(3, 2, -3)$, $B(4, 3, 1)$, $C(7, 0, 1)$ и $D(6, -1, -3)$ лежат во иста рамнина.

Решение.

Точките A, B, C и D лежат во иста рамнина ако векторите

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 4), \overrightarrow{AC} = (4, -2, 4), \overrightarrow{AD} = (3, -3, 0)$ се компланарни т.е. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

$$\text{Од } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

следува точките лежат во иста рамнина.

Глава 9

Примени на векторското сметање

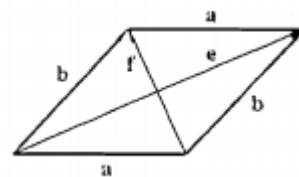
1. Нека $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единични вектори кои градат агол од 45° . Одреди ја површината на паралелограм со дијагонали $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}, \vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

Решение.

Да ги означиме векторите на страните и дијагоналите на паралелограмот како на слика

Површината на паралелограмот е

$$P = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



(Elezovic & Aglic, 1995, p. 75)

Ако $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{f} = -\vec{a} + \vec{b}$, од таму имаме

$$\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{e} - \vec{f}), \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{e} + \vec{f}).$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \frac{1}{4}(\vec{e} - \vec{f}) \times (\vec{e} + \vec{f}) = \frac{1}{4}(\vec{e} \times \vec{e} - \vec{f} \times \vec{e} + \vec{e} \times \vec{f} - \vec{f} \times \vec{f}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{e} \times \vec{f} = \frac{1}{2}(2\vec{m} - \vec{n}) \times (4\vec{m} - 5\vec{n}) \\ &= \frac{1}{2}(8\vec{m} \times \vec{m} - 10\vec{m} \times \vec{n} - 4\vec{n} \times \vec{m} + 5\vec{n} \times \vec{n}) \\ &= \frac{1}{2}(10\vec{n} \times \vec{m} - 4\vec{n} \times \vec{m}) = 3\vec{n} \times \vec{m}. \end{aligned}$$

Од тука заменуваме $P = 3|\vec{n} \times \vec{m}| = 3 \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. Да се пресмета плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = (2,1,2)$ и $\vec{b} = (3,2,2)$.

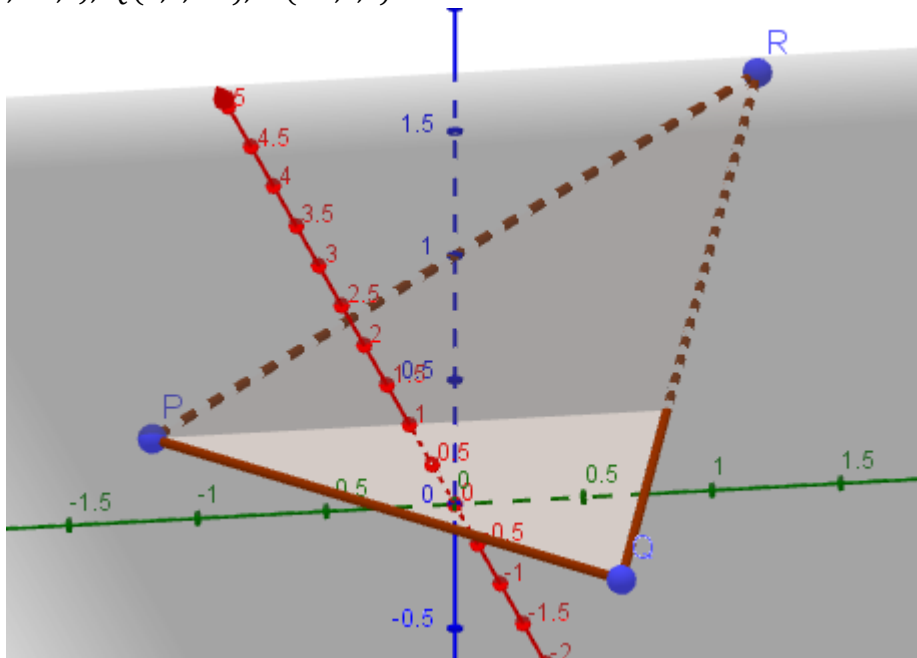
Решение.

Плоштината на дадениот паралелограм е еднаква на интензитетот на векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 1).$$

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

3. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$, $R(-1, 1, 2)$.



Слика 4. Триаголник PQR (автор Гелова)

Решение.

Плоштината на триаголникот со темиња P , Q и R е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{PQ}$ и $\vec{PR}$. Од

$$\vec{PQ} = (2, 1, -1) - (1, -1, 0) = (1, 2, -1)$$

и

$$\vec{PR} = (-1, 1, 2) - (1, -1, 0) = (-2, 2, 2)$$

и

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} + 6\vec{k}$$

плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{PQ}$ и $\vec{PR}$ е

$$|\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}.$$

Па плоштината на триаголникот е $P = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = 3\sqrt{2}$ квадратни единици.

4. Да се пресмета плоштината на триаголникот со темиња $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, -2, 1)$.

Решение.

Бидејќи плоштината на триаголникот ABC еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, добиваме

$$P = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Од $\vec{AB} = (-1, 5, -5)$, $\vec{AC} = (1, 1, -3)$ и

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-10, 8, -6),$$

имаме

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{100 + 64 + 36} = 5\sqrt{2}.$$

5. Најдете го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$ и $\vec{c} = (0, 7, -4)$:

Решение.

Волуменот на паралелопипедот се пресметува со формулата $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$, каде $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Па

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = |-23| = 23 \text{ кубни единици.}$$

6. Најдете го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0)$.

Решение.

Волуменот на паралелопипедот конструиран над три вектори е еднаков на апсолутна вредност од мешаниот производ на трите вектори т.е. се пресметува со формулата $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$, каде $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Па

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \text{ кубни единици.}$$

Значи $V = 2$.

7. Најдете ја висината на призмата чии рабови се определени со векторите $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ и $\vec{c} = (1, 1, 0)$, ако нејзината основа е паралелограм конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

Волуменот на призмата се пресметува со формулата $V = B \cdot H$, каде B е плоштината на основата, а H висината на призмата.

Бидејќи $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 9$, $B = |\vec{a} \times \vec{b}| = 3$, имаме

$$H = \frac{9}{3} = 3.$$

8. Најдете го x така што над векторите $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, x, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1, 0)$ може да се формира паралелопипед чијшто волумен е 1.

Решение.

Најпрво го наоѓаме мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

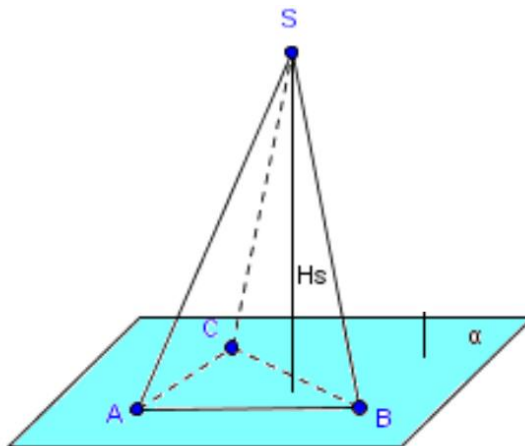
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & x & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3x - 9.$$

Од $|3x - 9| = 1$ имаме $3x - 9 = 1$ или $3x - 9 = -1$ од каде

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{или} \quad x = \frac{8}{3}.$$

9. Да се пресмета волуменот на тетраедарот $SABC$ зададен со точки $A(3,5,3)$, $B(-2,11,-5)$, $C(1,-1,4)$ и со врв во точката $S(0,6,4)$.

Решение.



Слика 5. Тетраедар $SABC$ (автор Гелова)

Волуменот на тетраедарот $SABC$ ќе го најдеме наоѓајќи го мешаниот производ на векторите $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AS}$ над кои е конструиран тетраедарот $SABC$.

За векторите $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AS}$ имаме $\vec{AB} = (-5, 6, -8)$, $\vec{AC} = (-2, -6, 1)$ и $\vec{AS} = (-3, 1, 1)$. Мешаниот производ е

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS}) = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 189.$$

Па волуменот е

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS})| = \frac{189}{6} = \frac{63}{2}.$$

Глава 10

Равенка на рамнина во простор

1. Најдете ја равенката на рамнина која минува низ точката $M(2, -1, 1)$ и нормална е на рамнините $3x + 2y - z + 4 = 0$ и $x + y + z - 3 = 0$.

Решение.

За да ја најдеме равенката на бараната рамнина потребна ни е една точка низ која бараната рамнина минува и нормален вектор на бараната рамнина. Точка имаме, тоа е дадената точка M , останува уште да се одреди нормалниот вектор. Со оглед на тоа дека бараната рамнина мора да биде нормална на дадените рамнини, тоа значи дека и нормалниот вектор на бараната рамнина е нормален на нормалните вектори на дадените рамнини т.е. бараниот вектор $\vec{n}$ е нормален на $\vec{n}_1$ и $\vec{n}$ е нормален на $\vec{n}_2$, па $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Од равенките на дадените рамнини ги одредуваме нормалните вектори $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. $\vec{n}_1 = (3, 2, -1)$ и $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$, па имаме

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} = (3, -4, 1).$$

Од каде за равенката на рамнината заменувајќи ги координатите на добиениот вектор $\vec{n}$ и точката $M(2, -1, 1)$ во равенката

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

добиваме

$$3(x - 2) - 4(y + 1) + 1(z - 1) = 0$$

од каде со средување ја добиваме равенката на бараната рамнина

$$3x - 4y + z - 11 = 0.$$

2. Најдете ја равенката на рамнина која минува низ точките $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 1)$ и $C(5, 4, -1)$.

Решение.

Користејќи дека равенка на рамнина низ три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ е

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

имаме

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 0 \\ 2 - 1 & 3 - 0 & 1 - 0 \\ 5 - 1 & 4 - 0 & -1 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

од каде добиваме

$$(x - 1) \cdot 3 \cdot (-1) + y \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot z - z \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot (x - 1) - 1 \cdot y \cdot (-1) =$$

$$= -3(x-1) + 4y + 4z - 12z - 4(x-1) + y = -7x + 7 + 5y - 8z = 0.$$

Што значи равенката на рамнината е

$$-7x + 5y - 8z + 7 = 0.$$

3. Напишете ја равенката на рамнина која минува низ точката $M(2, -2, -4)$ и отсекува отсечки на x -оската $a = -3$, а на z -оската $c = 2$.

Решение.

Поради $a = -3$ и $c = 2$ сегментниот облик на равенката на рамнина во овој случај е

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1.$$

Бидејќи точката $M(2, -2, -4)$ припаѓа на рамнината, добиваме

$$\frac{2}{-3} + \frac{-2}{b} + \frac{-4}{2} = 1 \Rightarrow b = -\frac{6}{11}.$$

Па сегментниот облик на равенката на рамнината е:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-\frac{6}{11}} + \frac{z}{2} = 1,$$

односно

$$2x + 11y - 3z + 6 = 0.$$

4. Најдете ја равенката на рамнина која на x -оската и y -оската отсекува отсечки 6 и 3 соодветно и нормална е на рамнината $4x + y - 2z + 5 = 0$.

Решение.

Од сегментниот облик на равенка на рамнина

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{c} = 1$$

го добиваме општиот облик

$$cx + 2cy + 6z - 6c = 0.$$

Со користење на условот за нормалност на две рамнини

$$\Sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \Sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

имаме $4c + 2c - 12 = 0 \Rightarrow c = 2$.

Според тоа бараната равенка на рамнина е $2x + 4y + 6z - 12 = 0$,

Односно $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

5. а) Одредете ја равенката на рамнината Σ_1 која ја содржи точката $M(1,1,1)$ и паралелна е со рамнината $3x - y + 7z = 12$.
 б) Најдете ја равенката на рамнината Σ_2 која ги содржи точките $A(4,1,-2)$ и $B(-2,3,-5)$ и нормална е на рамнината $3x + y - 2z + 5 = 0$.
 в) Најдете го аголот помеѓу рамнините Σ_1 и Σ_2 .

Решение.

а) Како е рамнината Σ_1 паралелна со рамнината $3x - y + 7z = 12$, нивните нормални вектори се колинеарни, а интензитетот и насоката на нормалниот вектор не е важен, можеме да земеме дека $\vec{n}_1 = (3, -1, 7)$.

Па Σ_1 : $3(x-1) - (y-1) + 7(z-1) = 0$,

Односно $3x - y + 7z = 9$.

б) Равенката на бараната рамнина Σ_2 нормална е на рамнината $3x + y - 2z + 5 = 0$, па и нивните нормални вектори се нормални т.е. $\vec{n}_2 \perp \vec{n}_{22}$, каде $\vec{n}_{22}$ е нормалниот вектор на $3x + y - 2z + 5 = 0$. Рамнината Σ_2 ги содржи точките $A(4,1,-2)$ и $B(-2,3,-5)$ па за нејзиниот нормален вектор $\vec{n}_2$ важи $\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{AB} = (-6,2,-3)$, па од тука

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_{22} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 21\vec{j} - 12\vec{k} = (-1, -21, -12)$$

па можеме да земеме $\vec{n}_2 = (1, 21, 12)$.

За равенката на рамнината Σ_2 добиваме

$$(x+2) + 21(y-3) + 12(z+5) = 0 \text{ т.е. } x + 21y + 12z = 1.$$

в) Ако аголот меѓу рамнините го означиме со ϕ , имаме

$$\cos \phi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3-21+84}{\sqrt{9+1+49} \sqrt{1+441+144}} = \frac{66}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{586}} \text{ т.е.}$$

$$\phi = \arccos \frac{66}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{586}}$$

6. Дадени се рамнините $\Sigma_1: 4x - y + 3z - 1 = 0$ и $\Sigma_2: x - 5y - z - 2 = 0$. Најди ја равенката на рамнина Σ која го содржи координатниот почеток и пресекот на рамнините Σ_1 и Σ_2 .

Прво решение.

Најпрво ќе најдеме две точки кои лежат во Σ_1 и Σ_2 . Точките ги добиваме решавајќи го системот

$$\begin{aligned} 4x - y + 3z - 1 &= 0 \\ x - 5y - z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Да земеме на пример $y = 0$, заменуваме во системот и добиваме $x = 1, z = -1$ т.е. една заедничка точка е $A(1, 0, -1)$.

Ако земиме $y = 7$ добиваме друга точка $B(17, 7, -20)$.

Сега треба да ја одредиме равенката на рамнина која ги содржи точките A и B и координатниот почеток O . Нормалниот вектор на рамнината Σ колинеарен е со векторскиот производ на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{OA} = (1, 0, -1)$ и $\overrightarrow{OB} = (17, 7, -20)$ па

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 17 & 7 & -20 \end{vmatrix} = (7, 3, 7).$$

Според тоа нормалниот вектор на рамнината Σ е $\vec{n} = (7, 3, 7)$, а бараната равенка на рамнина која го содржи координатниот почеток и пресекот на рамнините Σ_1 и Σ_2 е

$$7(x-0) + 3(y-0) + 7(z-0) = 0 \text{ т.е.} \\ 7x + 3y + 7z = 0.$$

Второ решение.

Да ја најдеме пресечната права на двете рамнини. Ставаме $y = r$. Тогаш параметарската равенка на правата е

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 16/7 \\ 1 \\ -19/7 \end{pmatrix}.$$

За $r = 0$ и $r = 7$ ги добиваме двете точки од правата (и рамнината) $A(1,0,-1)$ и $B(17,7,-20)$ соодветно. Равенка на рамнина низ $(0,0,0)$ има облик

$$ax + by + cz = 0.$$

Со замена на $A(1,0,-1)$ се добива дека $a = c$, а со замена на $B(17,7,-20)$ добиваме дека $-3a + 7b = 0$. Ставаме $b = 3$ во последната равенка и добиваме дека $a = c = 7$. Значи, равенката на рамнината е

$$7x + 3y + 7z = 0.$$

7. Напишете равенка на рамнината Σ која ги содржи точките $M_1(1, -2, 2), M_2(2, 3, -1)$ и е нормална на рамнината $\Sigma_1: 3x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение.

Потребно е да се одреди нормалниот вектор на бараната рамнина $\vec{n}$. Нека $\vec{n} = (A, B, C)$. Бидејќи на рамнината лежат точките M_1 и M_2 , векторот $\vec{n}$ е нормален на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$ и на нормалниот вектор на дадената рамнина Σ_1 т.е на векторот $\vec{n}_1 = (3, -2, 1)$, па векторот $\vec{n}$ може да се добие како векторски производ на тие два вектори.

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}$$

Па координатите на векторот се $\vec{n} = (-1, -10, -17)$. Земаме една точка на пример $M_1(1, -2, 2)$, заменуваме во равенката на рамнина $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ и добиваме дека бараната равенка на рамнината е $\Sigma: x + 10y + 17z - 15 = 0$.

Глава 11

Равенка на права во простор

1. Најдете ја равенката на правата која ја содржи точката $A(2, -1, 4)$ и има вектор на правец $\vec{p} = (1, 4, -5)$.

Решение.

Каноничниот облик на равенката на права која ја содржи дадената точка $A(2, -1, 4)$ и има вектор на правец $\vec{p} = (1, 4, -5)$ е

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-5}.$$

2. Параметарската равенка на правата p :

$$a) p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 1t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

$$б) p \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

запиши ја во каноничен облик.

Решение.

Треба да го пресметаме, а потоа отстраниме параметарот t од равенките.

$$a) t = \frac{x-1}{2}, \quad t = y+2, \quad t = \frac{z-3}{-2}.$$

Според тоа, каноничната равенка гласи:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

$$б) t = \frac{x}{2}, \quad y = 1, \quad t = z - 1.$$

Следува

$$\frac{x}{2} = \frac{z-1}{1}, \quad y = 1.$$

Параметарската равенка е:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

3. Правата p е дадена со равенката $p \equiv \begin{cases} x + y - 4z - 5 = 0 \\ 2x - y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$

Напиши ја нејзината равенка во каноничен и параметарски облик.

Решение.

За да ја одредиме равенката на правата ни треба една точка T од правата p и векторот на правец на правата. Координатите на точката T ќе ги добиеме со решавање на систем, со задавање на било која вредност на една од координатите. На пример за $z = -1$ системот се сведува на:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\2x - y &= -1\end{aligned}$$

Од тука $x = 0, y = 1$. Значи, $T(0, 1, -1) \in p$. Векторот на правец на правата $\vec{p}$ е еднаков на векторскиот производ на векторите $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ т.е:

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Па, каноничната равенка на правата p гласи:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Од тука

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} = t$$

т.е.

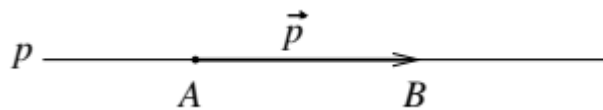
$$p = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

се параметарските равенки на правата.

4. Најдете ја равенката на правата p која ги содржи точките $A(1, 2, -1)$ и $B(0, 1, 1)$.

Решение.

Векторот на правец $\vec{p}$ е колинеарен со $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2)$. Точката $A(1, 2, -1)$ припаѓа на бараната права, па добиваме дека бараната равенка на правата p е



(Мисајлески, 2019)

$$p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

5. Напишете ги равенките на координатните оски.

Решение.

Векторот на правец на x –оската е $\vec{i} = (1,0,0)$. Координатниот почеток припаѓа на x –оската па бараната равенка на права е

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Аналогно, векторот на правец на y –оската е $\vec{j} = (0,1,0)$, а векторот на правец на z –оската е $\vec{k} = (0,0,1)$. Како, координатниот почеток припаѓа на y –оската и на z –оската равенките на y –оската и на z –оската соодветно се:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{и} \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

6. а) Најдете ја равенката на правата која ја содржи точката A и паралелна е на векторот $\vec{BC}$, каде $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ и $C(5,0,2)$.

б) Одредете го реалниот параметар a , така да точката $D(-3, a+2, 2)$ припаѓа на правата p определена под а).

Решение.

Векторот на правец $\vec{p}$ е колинеарен со векторот $\vec{BC} = (4, -2, -1)$. Значи за вектор на правец $\vec{p}$ можеме да го земеме векторот $\vec{p} = (4, -2, -1)$.

Равенката на права која ја содржи точката $A(1,1,1)$ и има вектор на правец $\vec{p} = (4, -2, -1)$ е

$$p: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}.$$

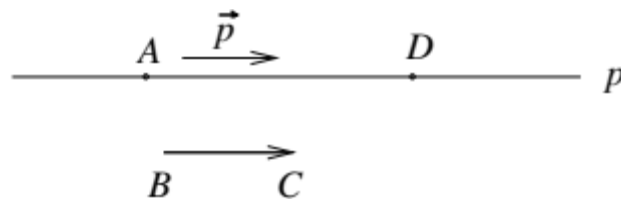
б) Параметарскиот облик на равенката на правата p е

$$p: x = 4t + 1, y = -2t + 1, z = -t + 1.$$

Како точката D треба да припаѓа на правата p , нејзините координати мора да ја задоволуваат равенката на правата p , т.е. треба да важи

$$-3 = 4t + 1, a + 2 = -2t + 1, 2 = -t + 1.$$

Со решавање на системот добиваме дека $t = -1$, $a = 1$, па бараната точка е $D(-3, 3, 2)$.



(Мисајлески, 2019)

7. Испитајте ја заемната положба на правите. Ако се сечат, најди ја пресечната точка.

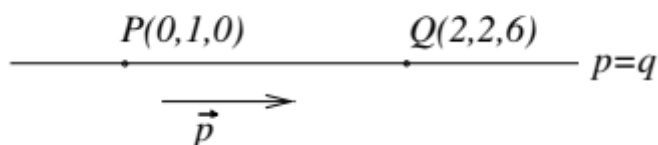
а) $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}, q: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{12}.$

б) $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}, q: \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{-12}.$

в) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}, q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$

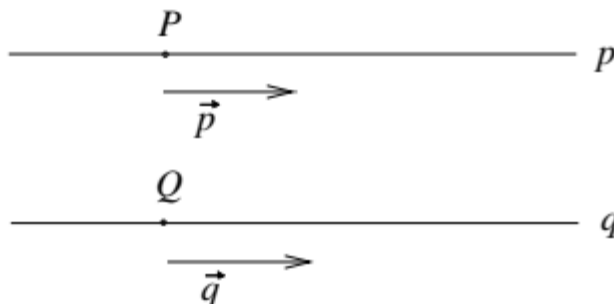
Решение.

а) Векторот на правец на првата p е $\vec{p} = (2,1,6)$, а векторот на правец на правата q е $\vec{q} = (4,2,12)$. Очигледно дека $\vec{q} = 2\vec{p}$, така да правите p и q или се паралелни или се поклопуваат. Ги заменувамне координатите на точката $P(0,1,0)$ од правата p во равенката на правата q добиваме дека точката P припаѓа и на правата q , па правите p и q се поклопуваат.



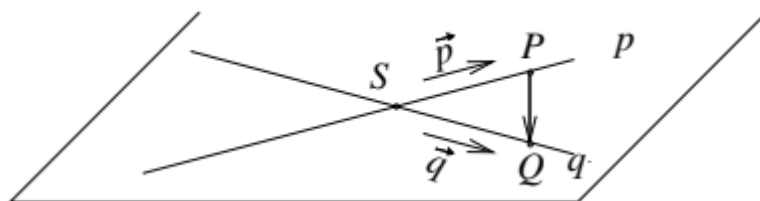
(Мисајлески, 2019)

б) Векторите на правци на правите p и q се $\vec{p} = (2,1,6)$ и $\vec{q} = (-4,-2,-12)$. Како е $\vec{q} = -2\vec{p}$, правите p и q или се паралелни или се поклопуваат. Ги заменувамне координатите на точката $P(0,1,0)$ од правата p во равенката на правата q па добиваме $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} = -\frac{5}{12}$ што очигледно не е точно, па правите p и q не се поклопуваат што значи се паралелни.



(Мисајлески, 2019)

в) Како $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни правите p и q не се паралелни ниту се поклопуваат. Го разгледуваме векторот $\overrightarrow{PQ} = (0,1,1)$, одреден со точката $P(2,2,3)$ од правата p и точката $Q(2,3,4)$ од правата q . Мешаниот производ на векторите $\vec{p}, \vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ е еднаков на нула, што значи правите p и q се сечат. Ја бараме сега заедничката точка $S(x, y, z)$ на правите p и q . Точката S ги задоволува равенките на правите p и q , т.е. важи $x = 2 + t = 2 + k, y = 2 + 3t = 3 + 4k, z = 3 + t = 4 + 2k$. Решението на овој систем е $k = t = -1, x = 1, y = -1$ и $z = 2$, т.е. бараната пресечна точка е: $S(1, -1, 2)$.



Слика 6. Точката S пресек на правите p и q

8. Одредете го λ во равенката на правата $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{\lambda}$, така да таа се сече со правата $q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$, па одреди ги координатите на пресечната точка.

Решение.

За двете прави да се сечат, потребно е да лежат во иста рамнина т.е. векторите $\overrightarrow{PQ} = (0,1,1)$, $\vec{p} = (1, -1, \lambda)$ и $\vec{q} = (1, 2, 3)$ каде $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 3)$ е добиен од точките $P(1, 2, 1)$ и $Q(2, 3, 4)$, да бидат компланарни т.е. нивниот мешан производ да биде еднаков на 0.

$$(\overrightarrow{PQ}, \vec{p}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$$

Следно ќе ја одредиме пресечната точка на дадените прави.

Равенките на прави ги запишуваме во параметарски вид

$$\begin{aligned} x &= 1 + t & x &= 2 + k \\ p: y &= 2 - t & q: y &= 3 + 2k \\ z &= 1 + 3t & z &= 4 + 3k \end{aligned}$$

Со оглед на тоа дека пресечната точка припаѓа на двете прави мора да важи

$$\begin{aligned} 1 + t &= 2 + k & t - k &= 1 \\ 2 - t &= 3 + 2k & \Rightarrow -t - 2k &= 1 \\ 1 + 3t &= 4 + 3k & 3t - 3k &= 3 \end{aligned}$$

Со решавање на последниот систем добиваме

$$t = \frac{1}{3}, k = -\frac{2}{3}.$$

Со замена на параметарот t во параметарската равенка на правата p (или параметарот k во параметарската равенка на правата q) ги добиваме координатите на пресечната точка $P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$.

9. Дадени се правите $p: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}$, и $q: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}$.

а) Покажете дека правите p и q се сечат и најди ја нивната заедничка точка.

б) Напишете ја равенката на рамнината одредена со правите p и q .

Решение.

Правата p ја содржи точката $P(0,2,-1)$ и има вектор на правец $\vec{p} = (1, -1, 0)$.

Правата q ја содржи точката $Q(-2,2,0)$ и има вектор на правец $\vec{q} = (3, -1, -1)$.

Го разгледуваме векторот $\vec{PQ} = (-2, 0, 1)$. Како мешаниот производ на векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{PQ}$ е еднаков на нула, правите p и q лежат во иста рамнина. Векторите на правци $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни, па правите p и q се сечат.

Параметарскиот облик на равенката на правата p е

$$p: x = t, y = 2 - t, z = -1.$$

Параметарскиот облик на равенката на правата q е

$$q: x = -2 + 3s, y = 2 - s, z = -s.$$

Нека $S(x, y, z)$ е пресечна точка на правите p и q . Координатите на точката $S(x, y, z)$ мора да ги задоволуваат равенките на правите p и q , па е

$$t = -2 + 3s, 2 - t = 2 - s, -1 = -s.$$

Го решаваме наведениот систем и добиваме $s = 1$ и $t = 1$, т.е. бараната точка е $S(1, 1, -1)$.

б) Нормалниот вектор на рамнината која ги содржи правите p и q колинеарен е на векторскиот производ на нивните вектори на правец

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2).$$

Значи $\vec{n} = (1, 1, 2)$.

Како правата p треба да припаѓа на бараната рамнина, сите точки од правата се наоѓаат во бараната рамнина. Една точка од правата p е на пример $P(0, 2, -1)$. Равенката на рамнината што има нормален вектор $\vec{n}$ и ја содржи точката $P(0, 2, -1)$ е:

$$(x - 0) + (y - 2) + 2(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$$

(Напомена: Наместо точката P можеме да ја земеме заедничката точка S на правите p и q или точката $Q(-2, 2, 0)$ од правата q или било која точка од правата p или правата q .)

10. Дадени се правите $p: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0}$, и $q: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{0}$. Напишете ја равенката на рамнината која ја одредуваат правите p и q .

Решение.

Векторите на правци на правите p и q се $\vec{p} = (1, -1, 0)$ и $\vec{q} = (2, -2, 0)$ соодветно. Како е $\vec{q} = 2\vec{p}$ и точката $P(0, 2, -1)$ од правата p не припаѓа на правата q , правите p и q се паралелни. За да го најдеме нормалниот вектор на бараната рамнина, треба да најдеме уште еден вектор кој се наоѓа во таа рамнина, а кој не е паралелен со векторот $\vec{p}$. Бараниот вектор е $\vec{PQ} = (-2, 0, 1)$

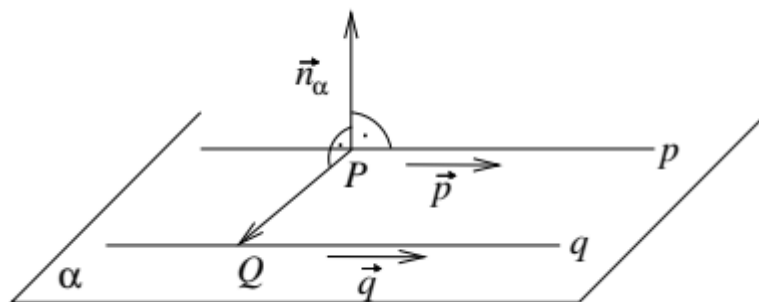
каде $P(0,2,-1) \in p$ и $Q(-2,2,0) \in q$. Нормалниот вектор на бараната рамнина колинеарен е со векторскиот производ на векторите $\vec{p}$ и $\vec{PQ}$

$$\vec{p} \times \vec{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2).$$

Значи нормалниот вектор на рамнината е

$$\vec{n}(-1, -1, -2).$$

Како правата p припаѓа на бараната рамнина и како $P(0,2,-1) \in p$, точката P лежи во бараната рамнина. Значи бараната рамнина ја содржи точката P и има нормален вектор $\vec{n}$, па нејзината равенка е $x + y + 2z = 0$.



Слика 7. рамнината која ја одредуваат правите p и q

11. Одредете ја равенката на рамнина во која припаѓаат паралелните прави

$$p: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad q: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Решение.

Со две паралелни прави е потполно определена една рамнина. Равенката на рамнина ја определуваме со три неколинеарни точки кои припаѓаат на дадените прави. Од каноничните равенки на дадените прави ги одредуваме координатите на три точки кои припаѓаат на нив. Точката $P(3,0,1) \in p$, точката $Q(-1,1,0) \in q$ и $P_1(5,1,3) \in p$. Користејќи формула за равенка на рамнина низ три точки добиваме

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Од каде добиваме дека равенката на рамнината е

$$x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

12. Напишете ја равенката на рамнината π која:

а) поминува низ правата $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и е паралелна со оската Oy ;

б) поминува низ паралелните прави

$$p_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}, p_2 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}.$$

Решение.

а) Точка $T(1, -1, -1)$ лежи на правата p , а со тоа и на бараната рамнина π .
Потребно е да се одреди уште еден нормален вектор.

Бидејќи рамнината е паралелна со оската Oy , нејзиниот нормален вектор е еднаков на векторскиот производ $\vec{j} \times \vec{p}$:

$$\vec{n} = \vec{j} \times \vec{p} = \vec{j} \times (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = -\vec{i} - 2\vec{k}$$

Затоа $\pi \equiv x + 2z + 1 = 0$.

б) Точките $M(1, 0, -2), N(0, -1, 1)$ лежат на правите, па затоа и на рамнината. Рамнината π е дефинирана со една точка (на пример M) и нормалниот вектор кој е нормален на векторот на правец $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ на дадените прави, како и на векторот $\overrightarrow{MN}$, затоа што $\overrightarrow{MN}$ лежи во рамнината, па

$$\vec{n} = \vec{p}_1 \times \overrightarrow{MN} = (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \times (-\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = -9\vec{j} - 3\vec{k},$$

па значи $\pi \equiv 3y + z + 2 = 0$.

13. Одредете го пресекот на правите и рамнините:

а) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}, \pi \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0,$

б) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}, \pi \equiv 2x - 3y + 8z + 1 = 0,$

в) $p \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}, \pi \equiv 2x - 3y + 8z + 4 = 0.$

Решение.

Пресекот на правите и рамнините најлесно се одредува така што правата ќе ја напишеме во параметарски облик и потоа добиените равенки ќе ги вметнеме во равенката на рамнината:

$$\text{а) } p \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \pi \equiv 2x - 3y + z + 4 = 0$$

Добиваме $2(2 + t) - 3(-2t) + (-1 - t) + 4 = 0$ и од тука $t = -1$.

Затоа $x = 1, y = 2, z = 0$ се координатите на пресечната точка.

б) $2(2 + t) - 3(-2t) + 8(-1 - t) + 1 = 0$ дава $-3 = 0$, што значи дека правата не ја сече рамнината.

в) Во овој случај $2(2 + t) - 3(-2t) + 8(-1 - t) + 4 \equiv 0$, што значи дека правата лежи во рамнината.

Глава 12

Растојанија меѓу точки, прави и рамнини

- Одредете ја равенката на рамнината ρ која ги содржи сите точки кои се еднакво оддалечени од

а) двете рамнини $\pi_1 \equiv x - 3y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z + 3 = 0$.

б) две точки $T_1(2, -1, 3)$, $T_2(1, 2, -1)$.

Решение.

- а) Треба $d(T, \pi_1) = d(T, \pi_2)$ за секоја точка $T(x, y, z)$ од бараната рамнина ρ :

$$\frac{|x - 3y - 2z + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2x - y + 3z + 3|}{\sqrt{14}}$$

Од тука $x - 3y - 2z + 1 = \pm(2x - y + 3z + 3)$. Постојат две решенија (две симетричн рамнини):

$$\rho_1 = 3x - 4y + z + 4 = 0, \rho_2 = x + 2y + 5z + 2 = 0.$$

- б) Нека $T(x, y, z)$ е која било точка од бараната рамнина ρ . $d(T, T_1) = d(T, T_2)$
дава

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$$

Од каде, после средување, добиваме $\rho \equiv x - y + 2z - 4 = 0$.

- Најдете ја равенката на рамнина која минува низ точките $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$ и $C(1, 1, 4)$. Потоа одреди ја одалеченоста на точката $P(2, 3, 5)$ од таа рамнина.

Решение.

Ја користиме формулата за равенка на рамнина низ три точки, па заменувајќи ги координатите на дадените точки добиваме

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

од каде:

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (z-2) - 1 \cdot (y+1) \cdot 2 &= \\ = 4x - 4 + 2z - 4 - 2y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Што значи равенката на рамнината е

$$4x - 2y + 2z - 10 = 0.$$

Растојание од точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до рамнината $Ax + By + Cz + D = 0$ се пресметува со формулата

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

па добиваме

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

3. Најдете го растојанието помеѓу паралелните прави

$$p: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}, \quad q: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

Решение.

Од равенките на дадените прави имаме две точки $P(0,1,0)$ и $Q(1,0,1)$. Растојанието помеѓу овие две прави ќе го изračуваме така што ќе го најдеме растојанието помеѓу точка од едната права до другата права. На пример ќе го најдеме растојанието од точката $P(0,1,0)$ до правта q . $\overrightarrow{QP} = (1, -1, 1)$, а векторот на правец на правата q е $\vec{q} = (1, 1, 2)$.

Па

$$\vec{q} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\vec{q} \times \overrightarrow{QP} = (3, 1, 2).$$

$$|\vec{q} \times \overrightarrow{QP}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}, \quad |\vec{q}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6},$$

па растојанието е

$$d = \frac{|\vec{q} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

4. Најдете го растојанието помеѓу правите

$$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}, \quad q: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Решение.

Ги пишуваме координатите на точките и векторите на правец на правите p и q соодветно: $P(-1, 0, 1)$, $Q(0, -1, 2)$, $\vec{p} = (1, 1, 2)$ и $\vec{q} = (1, 3, 4)$. Од тука векторот $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1)$. Најпрво проверуваме дали правите се сечат.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Горната детерминанта е различна од нула, па заклучуваме дека правите не се сечат, а очигледно не се ни паралелни. Значи се разминувачки. Растојанието меѓу разминувачки прави е висината на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{p}, \vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ т.е.

$$d = \frac{|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

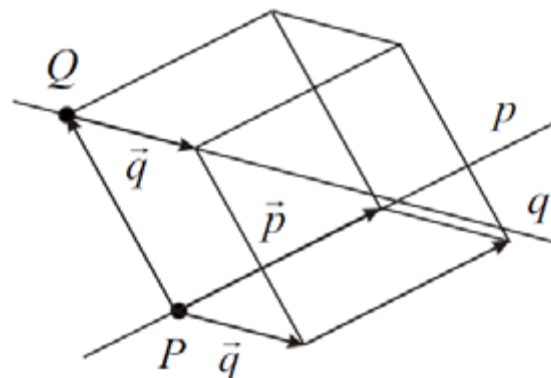
Пресметуваме $\vec{p} \times \vec{q}$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$|\vec{p} \times \vec{q}| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$, па за растојанието добиваме

$$d = \frac{|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

$$d = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



(Мисајлески, 2019, стр. 244)

5. Најдете го растојанието помеѓу разминувачките прави

$$p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}, q: \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Решение.

Ги пишуваме координатите на точките и векторите на правец на правите p и q соодветно: $P(2,1,0)$, $Q(5,4,3)$, $\vec{p} = (-1,2,2)$ и $\vec{q} = (2,2,1)$. Од тука векторот $\vec{PQ} = (3,3,3)$.

Растојанието меѓу разминувачи прави е висината на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{PQ}$ спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ т.е.

$$d = \frac{|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

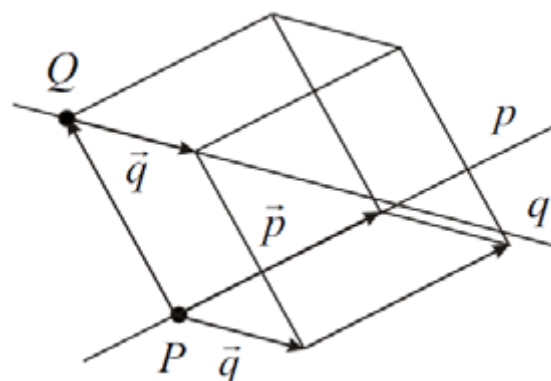
Пресметуваме

$$(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -9,$$

$$|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ})| = 9.$$

и $\vec{p} \times \vec{q}$:

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 6\vec{k},$$



(Мисајлески, 2019, стр. 244)

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = \sqrt{4 + 25 + 36} = \sqrt{65}, \text{ па за растојанието добиваме}$$

$$d = \frac{|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}. d = \frac{9}{\sqrt{65}} = \frac{9\sqrt{65}}{65}.$$

6. Дадени се точката $M(3,5,4)$, рамнината $\Sigma_1: 2x + y - 2z + 3 = 0$ и правата

$$p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}. \text{ Да се најде:}$$

а) Растојанието од точката $M(3,5,4)$ до рамнината $\Sigma_1: 2x + y - 2z + 3 = 0$.

б) Растојанието меѓу рамнините $\Sigma_1: 2x + y - 2z + 3 = 0$ и $\Sigma_2: 2x + y - 2z - 12 = 0$

в) Растојанието од точката $M(3,5,4)$ до правата $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.

г) Растојанието меѓу правите $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ и $q: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Решение.

а) Растојание од точка $M(x_0, y_0, z_0)$ до рамнина $Ax + By + Cz + D = 0$ се пресметува со формулата

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Па имаме

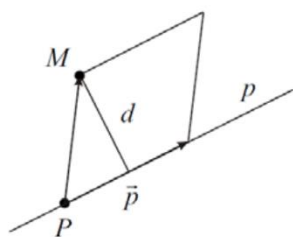
$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{6}{3} = 2.$$

б) Рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни. Растојание меѓу паралелни рамнини се пресметува како растојание од произволна точка од едната рамнина до другата рамнина. Па, избираме точка од рамнината Σ_2 . За $x = 0$ и $z = 0$ се добива $y = 12$. Од каде точката $M(0,12,0)$ лежи на рамнината, па имаме

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 12 - 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{3} = 5.$$

в)



Правата $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ ја содржи точката $P(2,1,0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = (-1,2,2)$.

(Мисајлески, 2019, стр. 243)

Векторот $\vec{PM} = (1,4,4)$, а растојанието $d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}$ бидејќи векторите

$\vec{p} = (-1,2,2)$ и $\vec{PM} = (1,4,4)$ формираат паралелограм чија висина d е бараното растојание. Плоштината на паралелограмот е еднаква од една страна на $|\vec{p} \times \vec{PM}|$, а од друга страна со $d|\vec{p}|$ ако го изразиме d добиваме $d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}$. Па бидејќи

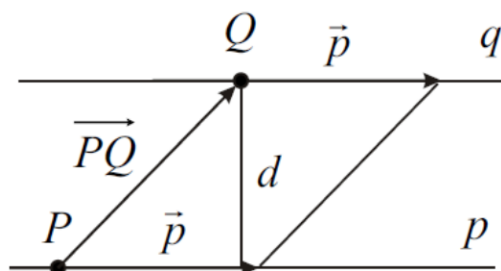
$$\vec{p} \times \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{k} - 8\vec{i} + 4\vec{j} = 0\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{p} \times \overrightarrow{PM} = (0, 6, -6),$$

имаме

$$d = \frac{\sqrt{72}}{3} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}.$$

г) Правите се паралелни па растојанието меѓу нив го наоѓаме како растојание од произволна точка од едната права до другата права.



(Мисајлески, 2019, стр. 245)

Правата p ја содржи точката $P(2,1,0)$ и има вектор на правец $\vec{p} = (-1, 2, 2)$, а правата q ја содржи точката $Q(1,1,1)$ и има вектор на правец $\vec{q} = (-1, 2, 2)$. Векторот $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 1)$.

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{p}|}$$

$$\vec{p} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{j} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{p} \times \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 2),$$

имаме

$$d = \frac{3}{3} = 1.$$

Глава 13

Површини

1. Најдете ја равенката на сферата со центар во $C(3,8,1)$ која минува низ точката $(4,3,-1)$.

Решение.

Знаејќи дека центарот на сферата е во $C(3,8,1)$ имаме дека

$$(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = r^2$$

Знаејќи дека сферата минува низ точката $(4,3,-1)$ имаме

$$(4-3)^2 + (3-8)^2 + (-1-1)^2 = r^2$$

$$1^2 + (-5)^2 + (-2)^2 = r^2$$

$$30 = r^2.$$

Според тоа добиваме дека равенката на сферата е

$$(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 30.$$

2. Најдете го центарот и радиусот на сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z = 15.$$

Решение.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 15 + 1 + 4 + 16$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 36.$$

Од каде гледаме дека центарот е во точката $(1,2,-4)$ а радиусот е 6.

3. Најдете ја равенката на сферата со центар во $C(2,-1,0)$ која ја допира рамнината $2x - 3y - 7z + 2 = 0$.

Решение.

За да ја најдеме равенката на сферата ни треба уште нејзиниот радиус. Радиусот ќе го најдеме така што ќе го пресметаме растојанието од центарот на сферата до рамнината $2x - 3y - 7z + 2 = 0$. Растојанието е:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 + 3 + 2|}{\sqrt{4 + 9 + 49}} = \frac{9}{\sqrt{62}}.$$

Па равенката на сферата е

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{81}{62}.$$

4. Определете кои површини се дадени со следниве равенки:

$$a) 16x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$$

б) $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

в) $9x^2 + 16y^2 - 36z^2 = 144$.

г) $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 36$.

Решение.

а) Ако ја поделиме $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 = 144$ со 144 добиваме

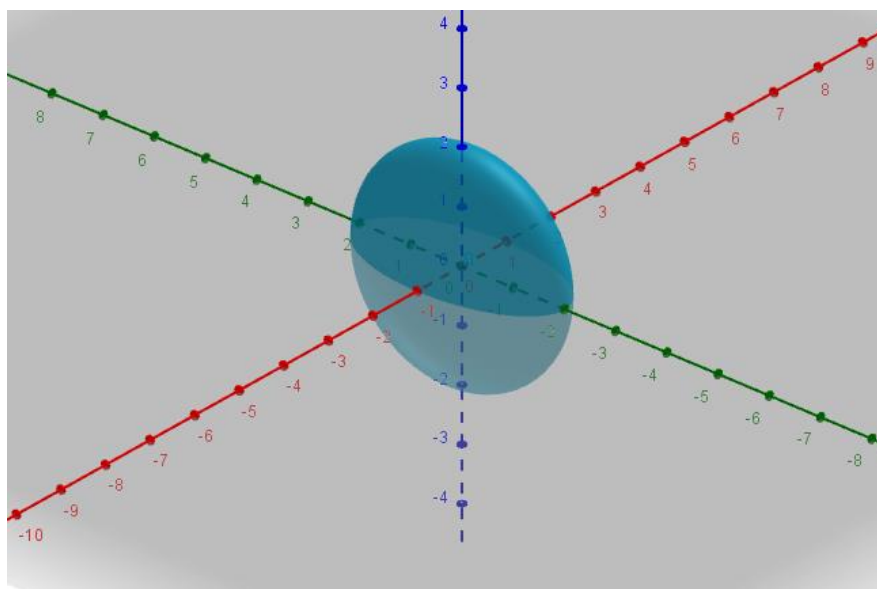
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Па ова е елипсоид со центар во координатниот почеток.

б) Ако ја поделиме $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ со 4 добиваме

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

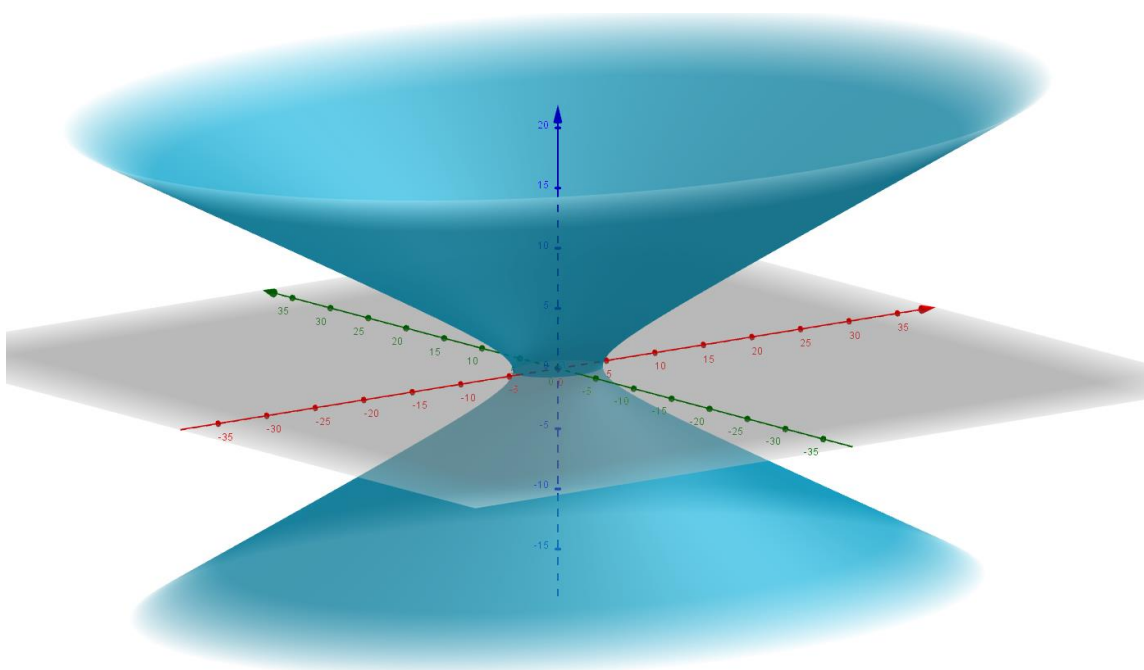
Па ова е елипсоид со центар во координатниот почеток.



Слика 8. Елипсоидот $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$. (автор Гелова)

в) Ако $9x^2 + 16y^2 - 36z^2 = 144$ го поделиме со 144 имаме

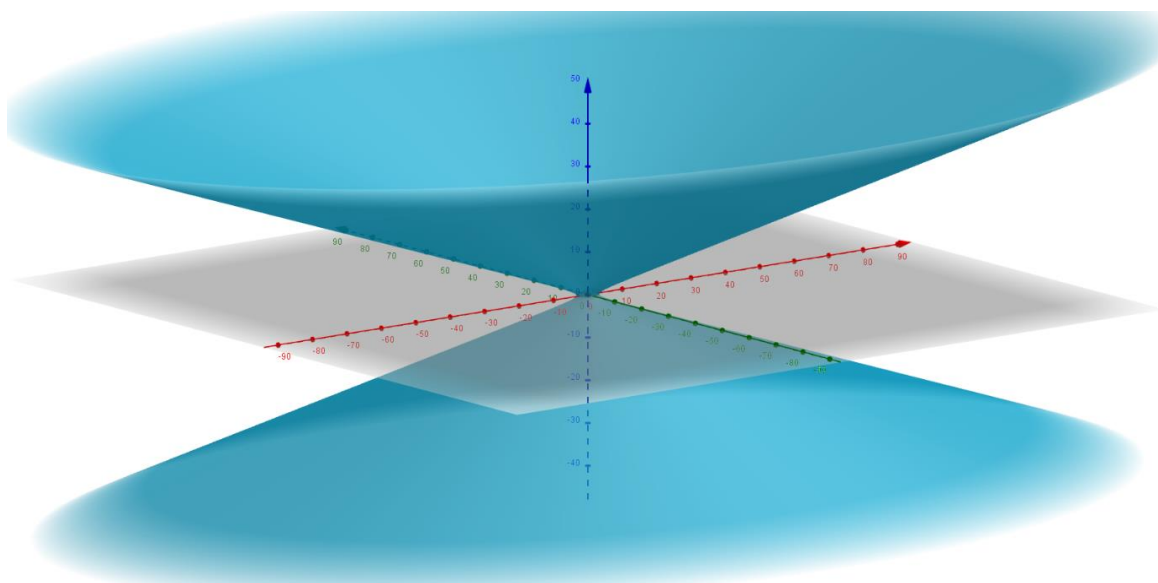
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$$



Слика 9. Хиперболоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$. (автор Гелова)

г) $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 36$ делиме со 36

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1. \text{ Ова е хиперболоид.}$$



Слика 10. Хиперболоид $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$. (автор Гелова)

ЛИТЕРАТУРА

- Лукаревски, М. (2014). *Линеарна алгебра*, Универзитет „Гоце Делчев“-Штип
- Лукаревски, М., и Гелова, Е. (2015). *Збирка задачи по линеарна алгебра*, Универзитет „Гоце Делчев“-Штип
- Лукаревски, М. (2019). *Математика за информатичари 1*, Универзитет „Гоце Делчев“-Штип
- Трпеновски, Б., Целакоски, Н., и Чупона, Ѓ. (1994). *Виша математика*, Книга 3, Просветно дело, Скопје
- Elezovic, N., & Aglic A. (1995). *Linearna algebra Zbirka Zadatka*, Zagreb
- Мисајлески, З. (2019). *Решени задачи по векторска и линеарна алгебра*, „Универзитет Св. Кирил и Методиј“- Скопје

д-р Мартин Лукаревски редовен професор на Факултетот за информатика, Катедра за математика и статистика при Универзитетот „Гоце Делчев“ во Штип.

д-р Елена Карамазова Гелова вонреден професор на Факултетот за информатика, Катедра за математика и статистика при Универзитетот „Гоце Делчев“ во Штип.

