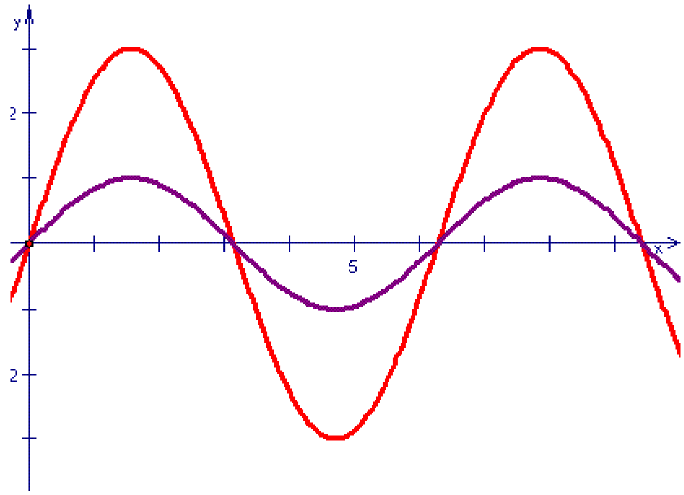
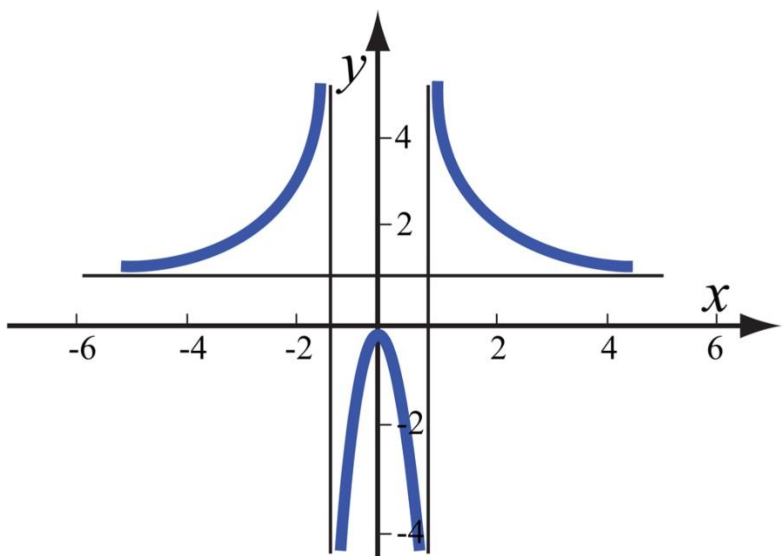
Александра Ристеска-Камчески



ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД МАТЕМАТИКА 1



Штип, 2023 г.

Доц. д-р Александра Ристеска-Камчески
ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД МАТЕМАТИКА 1

Автор:
д-р Александра Ристеска-Камчески, доцент

ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД МАТЕМАТИКА 1

Рецензенти:
д-р Владо Гичев, редовен професор
д-р Билјана Златановска, вонреден професор

Лектор:
Даница Гавриловска-Атанасовска

Уредник:
Проф. д-р Лилјана Колева Гудева

Техничко уредување:
Александра Ристеска-Камчески

Издавач:
Универзитет „Гоце Делчев” - Штип

Објавено во е-библиотека:
https://e-lib.ugd.edu.mk

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.8)

РИСТЕСКА-Камчески, Александра
Одбрани делови од Математика 1 / Александра Ристеска-Камчески. - Штип : Универзитет – Гоце Делчев, 2023

Начин на пристапување (URL): http://e-lib.ugd.edu.mk/1147
Текст во PDF формат, содржи 96 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот.
- Опис на изворот на ден 16.08.2023. - Библиографија: стр. 94-95

ISBN 978-608-244-991-3

а) Математика -- Скрипти

COBISS.MK-ID 61274629

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ” – ШТИП

ТЕХНОЛОШКО-ТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Д-р Александра Ристеска-Камчески

ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД МАТЕМАТИКА 1

Штип, 2023 г.

ПРЕДГОВОР

Оваа скрипта е напишана врз основа на содржини од предметот Математика 1, за кои се одржуваат вежби и предавања на Технолошко-технички факултет при Универзитет „Гоце Делчев“ во Штип. Содржината на оваа скрипта опфаќа стандардна материја која се изучува на техничките факултети по Математика 1. Наменета е, пред сè, за студентите на Технолошко-технички факултет. Скриптата е поделена во пет глави и секоја за себе содржи повеќе параграфи. Притоа во секоја глава има бројни решени примери кои помагаат за полесно совладување на материјалот. Нивното успешно решавање ќе претставува знак за висок степен на совладаност на изложената материја.

Скриптата, пред сè, е наменета за студентите на Технолошко-технички факултет, а може да ја користат и студентите на другите технички факултети.

Материјалот кој е застапен во скриптата е поделен на пет глави и тоа:

- Елементи од линеарна алгебра,
- Векторска алгебра,
- Бројни низи,
- Реални функции од реален аргумент и
- Диференцијално сметање на функциите од реален аргумент.

Во првата глава се разработени основите на теоријата на матрици и детерминанти, при што посебно внимание е посветено на методите за пресметување на детерминанти, кои се илустрирани преку бројни примери. Исто така, разгледани се матрици, нивните својства и Крамеровото правило за решавање систем линеарни равенки чија матрица е несингуларна. Втората глава е посветена на векторската алгебра, при што покрај претставувањето на векторите и стандардните операции со векторите во тридимензионалниот простор се воведени и операциите скаларен, векторски и мешан производ на вектори, проследени со примери и цртежи. Притоа, посебно внимание е посветено на координатните форми на споменатите операции. Во третата глава се разработени бројните низи, дадени се дефиниции и теореми за основните карактеристики, кои се илустрирани преку примери. Во четвртата глава се разработени реалните функции од реален аргумент со дефиниции и соодветни примери. Во петтата глава е разработено диференцијалното сметање на функциите од реален аргумент, дадени се основните таблични изводи, правилата за диференцирање, изводи од имплицитно и параметарски зададени функции, како и бројни решени примери и објаснувања.

На крајот од скриптата е дадена користената литература, со што ќе се олесни нејзиното користење, но и на читателот ќе му овозможи да консултира дополнителна сродна литература, која пред сè е пишувана со ист или сличен методски пристап.

Авторот

СОДРЖИНА

1. ЕЛЕМЕНТИ ОД ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

1.1. Поим за матрица

Ако $a_{11,}a_{12,\ldots}a_{1n,}a_{21,}a_{22,\ldots,,}a_{2n}\ldots\ldots a_{m1,}a_{m2,,\ldots,,}a_{mn}$ се дадени реални броеви, правоаголната шема од облик

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \ldots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix},$$

или кратко $\mathrm{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$

се нарекува **матрица од облик** $m \times n$ или $m \times n$ –**матрица.**

Броевите $a_{11}, a_{12,\ldots,,,,}a_{1n,}a_{21,}a_{22},, \ldots.\, a_{2n} \ldots,., a_{m1,,,,.}\, a_{m2,,,..,}a_{m2},.,,, a_{mn}$ се нарекуваат **елементи** на матрицата, при што елементите

$$\boldsymbol{a_{i1}, a_{i2}, .\, . a_{in}}$$

ја образуваат i–**тата редица**, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, додека елементите

$$\boldsymbol{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}}$$

ја образуваат j–**тата колона** $j \in \{1,2,\ldots,.n\}$ на матрицата.

Пример 1.1.1. Матрицата

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0,2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \sqrt{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \frac{1}{7} & \mathbf{-9} & 0{,}1 \\ \mathbf{-2} & \sqrt{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{11} \end{bmatrix}$$

има **4** редици и **5** колони, т.е. таа е **4**$\times$ **5** –матрица.

Елементите, на пример, на третата редица се

$$a_{31} = \sqrt{3},\ a_{32} = 0, a_{33} = \frac{1}{7}\ , a_{34} = -9 \text{ и } a_{35} = 0{,}1$$

додека елементите на третата колона се

$$\boldsymbol{a_{13} = 5, a_{23} = 0, a_{33} = -9} \text{ и } \boldsymbol{a_{43} = \frac{1}{3},}$$

Во продолжение ќе дефинираме неколку специјални типови на матрици.

Матрица-редица е матрица со само една редица, односно матрица од облик

$$\boldsymbol{A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] = [a_{1j}]_{1\times n}}$$

Матрица-колона е матрица со само една колона, односно матрица од облик

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = [a_{i1}]_{m\times 1}}$$

Нулта матрица од облик $\boldsymbol{m \times n}$, која се означува со $\boldsymbol{0_{m\times n}}$, е матрица чии елементи се сите еднакви на 0.

Пример 1.1.2. Нулта матрица од облик 3×4 е матрицата

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица од облик $\boldsymbol{n \times n}$, т.е. матрица што има ист број на редици и колони, се нарекува **квадратна матрица** од $\boldsymbol{n}$–ти ред.

Ако $\boldsymbol{A = [a_{ij}]_{n\times n}}$ е квадратна матрица од n–ти ред, елементите

$$\boldsymbol{a_{11,} a_{22}, \ldots, a_{nn}}$$

ја образуваат т.н. главна дијагонала на матрицата $\boldsymbol{A}$.

Пример 1.1.3. Главната дијагонала на матрицата

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0,5 & -5 \\ \frac{1}{6} & -2 & -\sqrt{3} & 7 \\ 0 & -2,7 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

е формирана од елементите

$$a_{11} = -1,\ a_{22} = -2,\ a_{33} = 0 \text{ и } a_{44} = 9.$$

а споредната дијагонала е формирана од елементите

$$a_{14} = -5,\ a_{23} = -\sqrt{3},\ a_{32} = -2,7 \text{ и } a_{41} = -1.$$

Квадратна матрица од n–ти ред кај која сите елементи „под“ дијагоналата се еднакви на 0, т.е. матрица од облик

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

се нарекува **горнотриаголна** матрица, а онаа кај која сите елементи „над“ дијагоналата се еднакви на нула, т.е. матрица од облик

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

се нарекува долнотриаголна матрица.

Пример 1.1.4. Матрицата **А**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & -\sqrt{7} & 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & -10 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0,6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

е горнотриаголна, додека матрицата **B**

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

е долнотриаголна.

Дијагонална матрица е квадратната матрица од **n**–ти ред кај која

$$\boldsymbol{a_{ij} = 0}, \text{секогаш кога } \boldsymbol{i \neq J},$$

т.е. матрица од облик

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Специјален случај на дијагонална матрица од n–ти ред е т.н. **единична матрица** која се означува со n I_n кај која сите елементи на дијагоналата се еднакви на 0:

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Пример 1.1.5. Единичните матрици од втор и трет ред се

$$\boldsymbol{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \boldsymbol{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1.2. Операции со матрици

1.2.1. Еднаквост на матрици

Две матрици $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$ и $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b_{kl}}]_{\boldsymbol{p\times q}}$ се еднакви ако тие имаат ист број редици (т.е.$m=p$), ист број колони (т.е. $=q$) и соодветните елементи им се еднакви, т.е.

$\boldsymbol{a_{ij}}=\boldsymbol{b_{ij}}$, за секои $\boldsymbol{i}\in\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},,..\boldsymbol{m}\}$ и $\boldsymbol{j}\in\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},,,.,\boldsymbol{n}\}$**.**

1.2.2. Множење на матрица со број

Ако α е реален број и

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$$

е дадена матрица, тогаш производ на матрицата A со бројот α е нова матрица од облик $m\times n$ која се означува со $B=\alpha A$ се дефинира со

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha a_{11}} & \boldsymbol{\alpha a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha a_{1n}}\\ \boldsymbol{\alpha a_{21}} & \boldsymbol{\alpha a_{22}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha a_{2n}}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha a_{m1}} & \boldsymbol{\alpha a_{m2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha a_{mn}}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$$

Во случај кога $\alpha=-1$ кратко означуваме.

$$(-1)A=-A$$

Пример 1.2.1. Ако

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix},$$

Тогаш $5\mathrm{A}=\begin{bmatrix}5\cdot(-4) & 5\cdot 0 & 5\cdot 1\\ 5\cdot 0 & 5\cdot(-2) & 5\cdot 3\\ 5\cdot 5 & 5\cdot(-1) & 5\cdot(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20 & 0 & 5\\ 0 & -10 & 15\\ 25 & -5 & -15\end{bmatrix},$

$$-\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$-\frac{2}{3}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\cdot(-4) & -\frac{2}{3}\cdot 0 & -\frac{2}{3}\cdot 1 \\ -\frac{2}{3}\cdot 0 & -\frac{2}{3}\cdot(-2) & -\frac{2}{3}\cdot 3 \\ -\frac{2}{3}\cdot 5 & -\frac{2}{3}\cdot(-1) & -\frac{2}{3}\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -2 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix},$$

Имајќи предвид дека за операцијата множење на реални броеви важат асоцијативниот и комутативниот закон, за операцијата множење на матрица со број точно е следното

Својство 1.2.1. За кои било два реални броја α и β и која било матрица A важи:

$1^{\circ} (\alpha\beta)\mathrm{A} = a(\beta A)$

$2^{\circ}\ (a\beta)A = (\beta a)A$

$3^{\circ}\ 1 \cdot A = A$

1.2.3. Збир и разлика на матрици

За дадени две матрици A и B збир $A + B$, односно разлика $A - B = A + (-B)$ може да се дефинираат само во случај кога матриците се од ист облик, односно имаат ист број редици и ист број колони. Притоа, ако

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ и } B = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [b_{ij}]_{m\times n}$$

Тогаш

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

и

$$\mathrm{A} - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

Пример 1.2.2. Ако

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 4 & 8 \\ & & \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & 2+(-7) \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & 2+(-7) \\ 0-(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Но збировите A+C и B+C и разликите A-C, B-C, C-A и C-B не се дефинирани бидејќи матрицата C не е од истиот облик како матриците A и B.

Бидејќи за операцијата собирање на реални броеви важат асоцијативниот и комутативниот закон, и дополнително важи дистрибутивниот закон за множењето во однос на собирањето, за погоре дефинираните операции собирање на матрици и множење на матрица со број точно е следното.

Својство 1.2.2. Ако A, B и C се матрици од облик $m \times n$, $O_{m\times n}$ е матрица од облик $m \times n$, а α и β се реални броеви, тогаш:

1° $A + B = B + A$ (комутативен закон за операцијата збир на матрици);

2° $(A + B) + C = A + (B + C)$(асоцијативен закон за операцијата збир на матрицата);

3° $\alpha(A + B) = aA + aB$ (дистрибутивен закон за множење на матрицата со број во однос на собирање на матрицата);

4° $(a + \beta)A = aA + \beta A$ (дистрибутивен закон за множење на матрицата со број во однос на собирање на реални броеви);

5° $\mathrm{A} + 0_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$ (нултата матрица е неутрален елемент за операцијата збир на матрици);

6° $A + (-A) = O_{m\times n} = (-A) + A$ (спротивен елемент во однос на операцијата збир на матрици).

Пример 1.2.3. Ќе го пресметаме изразот $2X + Y - \frac{1}{7}Z$ за матриците

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \quad Z = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -35 \\ 14 & -14 \end{bmatrix}.$$

$$2X + Y - \frac{1}{7}Z = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -35 \\ 14 & -14 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 6 & 2*(-5) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{7}\cdot(-7) & \frac{1}{7}\cdot 0 \\ \frac{1}{7}\cdot 0 & \frac{1}{7}\cdot(-35) \\ \frac{1}{7}\cdot 14 & \frac{1}{7}\cdot(-14) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 12 & -10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8+2-(-1) & 4+(-1)-0 \\ 12+0-0 & -10+3-(-5) \\ 0+6-2 & 2+1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 12 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Забелешка 1.2.1.

При пресметување на изрази во кои се појавува и множење на матрица со број и собирање (односно одземање) на матрици, слично како кај операциите множење и собирање на реални броеви, прво се пресметуваат деловите од изразите кои се однесуваат на множење на матрица со број, а потоа операциите собирање (односно одземање) на матрици. Се разбира, доколку во дадениот израз има загради, прво се пресметуваат деловите од изразот во заградите.

Пример 1.2.4 Ќе го пресметаме изразот $2X + Y - \frac{1}{7}Z$ за матриците

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Z = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -35 \\ 14 & -14 \end{bmatrix}$$

Имаме

$$2X + Y - \frac{1}{7}Z == 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -35 \\ 14 & -14 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 6 & 2\cdot(-5) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{7}\cdot(-7) & \frac{1}{7}\cdot 0 \\ \frac{1}{7}\cdot 0 & \frac{1}{7}\cdot(-35) \\ \frac{1}{7}\cdot 14 & \frac{1}{7}\cdot(-14) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 12 & -10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8+2-(-1) & 4+(-1)-0 \\ 12+0+0 & -10+3-(-5) \\ 0+6-2 & 2+1-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 12 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1.2.4. Производ на матрици

За две матрици

$$\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\,\mathrm{x}\,n} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{B} = \left[a_{kl}\right]_{p\,\mathrm{x}\,q}$$

производ AB е дефиниран само во случај кога бројот на колоните на матрицата $\boldsymbol{A}$ е еднаков на бројот на редиците на матрицата $\boldsymbol{B}$ (т.е. $n = p$) и притоа производот е нова матрица

$$C = AB = \left[c_{ij}\right]_{m\,\mathrm{x}\,\boldsymbol{q}}$$

од облик $m\,\mathrm{x}\,q$ (т.е. матрица која има ист број на редици со првата матрица во производот и ист број на колони со втората матрица), чии елементи се пресметуваат со изразите

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

$i = 1,2, \dots, m$ и $j = 1,2, \dots, q$.

Пример 1.2.5. За матриците

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

дефиниран е само производот AB и притоа

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 12 & 10 \\ 10 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Производот $\boldsymbol{BA}$ не е дефиниран бидејќи во овој производ бројот на колони на првата матрица е 3, додека бројот на редици на втората матрица е 2.

Пример 1.2.6. За матриците

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}_{2x3}$$

се дефинирани и двата производи AB и BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-5) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & -4+3 & 8-5 \\ 3+0 & -6+3 & 12+0 \\ 1-2 & -2+3 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 12 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-6+4 & 1+0+4 \\ -4+9-5 & -2+0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Пример 1.2.7. За матриците

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3x3} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Исто така, се дефинирани и двата производи AB и BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+4\cdot(-1) & 1\cdot 4+(-2)\cdot(-2)+4\cdot(-2) & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+4\cdot 1 \\ 3\cdot 2+1\cdot(-1)+5\cdot(-1) & 3\cdot 4+1\cdot(-2)+5\cdot(-2) & 3\cdot(-2)+1\cdot 1+5\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot(-1)+0\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot(-2)+0\cdot(-2) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1+0\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+2-4 & 4+4-8 & -2-2+4 \\ 6-1-5 & 12-2-10 & -6+1+5 \\ 2-2+0 & 4-4+0 & -2+2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1+4\cdot 3+(-2)\cdot 1 & 2\cdot(-2)+4\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 2\cdot 4+4\cdot 5+(-2)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1+(-2)\cdot 3+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+1\cdot 2 & (-1)\cdot 4+(-2)\cdot 5+1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1+(-2)\cdot 3+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot 1+1\cdot 2 & (-1)\cdot 4+(-2)\cdot 5+1\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+12-2 & -4+4-4 & 8+20+0 \\ -1-6+1 & 2-2+2 & -4-10+0 \\ -1-6+1 & 2-2+2 & -4-10+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 28 \\ -6 & 2 & -14 \\ -6 & 2 & -14 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Забелешка 1.2.2. Производите од пример 1.2.6 и пример 1.2.7 покажуваат дека комутативниот закон за операцијата производ на матрици во случај кога и двата производи AB и BA се дефинирани во општ случај не важи, т.е. $AB \neq BA$.

Забелешка 1.2.3. Ако a и b се реални броеви, тогаш од равенството

$$ab = 0$$

следи дека a=0 или b=0. Но ова не важи за операцијата производ на матрици: за матриците од пример 1.2.7 добивме дека

$$AB = 0_{3x3}$$

Но $A \neq 0_{3x3}$ и $B \neq 0_{3x3}$

Својство 1.2.3. Ако за матриците A, B и C е дефиниран производот $(AB)C$, тогаш е дефиниран и производот $A(BC)$ и важи

$$(AB)C = A(BC)$$

т.е. за множење на матрици важи асоцијативниот закон.

Заради претходното својство обично во записот на производот се испуштаат заградите и означуваме само ABC.

Ако A е квадратна матрица, тогаш за кој било природен број n се дефинирани производи во облик

$$\underbrace{AA\ldots A}_{n-\text{пати}}$$

Ова дозволува да се дефинира т.н. n-степен на матрицата A со

$$A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n-\text{пати}}$$

Својство 1.2.4. Ако за матриците A и B е дефиниран производот AB и α е произволен реален број, тогаш важи

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Својство 1.2.5. Ако A е матрица од облик $m\ x\ n$, тогаш

1° за единичните матрици I_n и I_m важи $I_mA = AI_n = A$;
2° $O_{pxm} \cdot A = O_{pxn}$ и
3° $\mathrm{A} \cdot \mathrm{O}_{nxq} = O_{mxq}$.

1.2.5. Транспонирање на матрица

Ако

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\ x\ \boldsymbol{n}}$$

е дадена матрица, тогаш транспонирана матрица на матрицата A е нова матрица од облик $n\ \mathrm{x}\ m$ која се означува со $B = A^T$ и чии елементи се дефинирани со

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Пример 1.2.8. За матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 8 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

соодветната транспонирана матрица е

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -9 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 8 \\ -4 & 6 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ 7 & 0 & -3 & -1 & 6 \\ -9 & 3 & -5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Својство 1.2.6. Ако A и B се матрици и α е произволен реален број, тогаш

1° $(A^T)^T = A$;

2° $(\alpha \mathrm{A})^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;

3° ако збирот $A + B$ (односно разликата $A - B$) е дефиниран, тогаш $(A + B)^T = A^T + B^T$(односно $(A - B)^T = A^T - B^T$);

4° ако производот AB е дефиниран, тогаш е дефиниран и производот $B^T A^T$ и важи $(AB)^T = B^T A^T$.

Забелешка 1.2.4. Во изрази со матрици што вклучуваат некои од претходно дефинираните операции во случај на отсуство на загради, операциите се со следниот приоритет:

1. транспонирање на матрици,
2. множење на матрици,
3. множење на матрица со скалар,
4. збир (односно разлика) на матрици.

Пример 1.2.9. За матриците

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

и изразите $\frac{1}{2}A + BC$, $B^T - 2\,C$ и AC^T имаме:

$$\frac{1}{2}A + BC = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot(-6) & \frac{1}{2}\cdot 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 2 & \frac{1}{2}\cdot(-4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-2)\cdot(-2) & 0\cdot(-3) + 5\cdot 3 + (-2)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 0\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3) + (-3)\cdot 3 + 00 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+0+4 & 0+15+0 \\ -1+0+0 & 3-9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3+4 & 0+15 \\ 1+(-1) & -2+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B^T - 2\,C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0-2 & -1-(-6) \\ 5-0 & -3-6 \\ -2-(-4) & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AC^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-6)\cdot 1 + 0\cdot(-3) & (-6)\cdot 0 + 0\cdot 3 & (-6)\cdot(-2) + 0\cdot 0 \\ 2\cdot 1 + (-4)\cdot(-3) & 2\cdot 0 + (-4)\cdot 3 & 2\cdot(-2) + (-4)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 12 \\ 14 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

1.3. Детерминанти од втор ред

Детерминанта е вредност поврзана со квадратните матрици. Истата може да биде пресметана од елементите на матрицата со помош на аритметички израз, иако постојат и други начини за нејзино пресметување.

Дефиниција 1.3.1. Нека a, b, c и d се реални броеви. Квадратната шема од броеви:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

се вика детерминанта од втор ред и претставува број чија вредност изнесува

$$ad - bc.$$

Формулата за пресметување на детерминанта од втор ред е:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \qquad (1)$$

Притоа за a, b, c, d велиме дека се елементи на детерминантата a и b се елементи од првата редица, c и d се елементи од втората редица, a и c се елементи од првата колона, а додека b и d се елементи од втората колона.

Елементите a и d ја сочинуваат главната дијагонала, а елементите b и c ја сочинуваат споредната дијагонала.

Детерминантите од втор ред ги имаат следниве карактеристики:

1.3.1. Вредностите на детерминантата не се менува ако редиците и колоните си ги заменат местата.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Пример 1.3.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3.2. Ако две редици (колони) си ги заменат местата, детерминантата го менува знакот.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Пример 1.3.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).3 = -\big((-1).3 - 2.1\big) = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.3.3. Ако детерминантата има две исти редици (колони) нејзината вредност е нула.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - bc = 0.$$

Пример 1.3.3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 2.3 = 0.$$

1.3.4. Ако елементите на една редица (колона) се помножат со некој број тогаш и детерминантата е помножена со тој број.

Пример 1.3.4.

$$\begin{vmatrix} 2.3 & -1 \\ 3.3 & 1 \end{vmatrix} = 2.3.1 - (-1).3.3 = 3.[2.1 - (-1).3] \ .$$

1.3.5. Ако елементите од една редица (колона) се пропорционални со елемент на друга редица (колона), тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ma & mb \end{vmatrix} = amb - bma = 0.$$

Пример 1.3.5.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3.2 & 3.4 \end{vmatrix} = 2.3.4 - 4.3.2 = 0 \ .$$

1.3.6. Ако елементите на една редица (колона) се помножат со некој број и се додадат на елементите на друга редица (колона), тогаш вредноста на детерминантата не се менува.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} a + \ md & b + md \\ c & d \end{vmatrix} = (a + mc)d - (b + md)c = ad + mcd - bc - mcd =$$

$$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Пример 1.3.6.

$$\begin{vmatrix} 2 + 2.3 & 3 + 2.3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (2 + 2.3).3 - (3 + 2.3)3) = 2.3 + 2.3.3 - 3.3 - 2.3.3 =$$

$$= 2.3 - 3.3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \ .$$

Пример 1.3.7. Да се пресмета детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 + \sqrt{2} & 4 + \sqrt{3} \\ 4 - \sqrt{3} & 2 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$, Показно решение за детерминантата а) би било:

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2}(1-\sqrt{2}) - (2+\sqrt{3)}(2-\sqrt{3}) = 1-2-(1-3) = -1+2 = 1$$

б) се остава на студентите да ја решат.

Пример 1.3.8. Да се прикаже точноста на равенствата:

а) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 9 \\ \log_8 2 & \log_9 3 \end{vmatrix} = 0,$ б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$$=\sin(\,\mathrm{a}-\beta).$

а) се остава на студентите да ја решат,

б) се остава на студентите да ја решат.

1.4. Примена на детерминанти од втор ред

Ако A и B се алгебарски изрази и ако барем едниот од нив содржи променлива, тогаш формулата (равенството) $A = B$ се вика алгебарска равенка.

За променливите се вели дека се непознати во равенката. Една алгебарска равенка може:

– да има решение, т.е. е решлива равенка, ако нејзиното множество решенија не е празно множество;

– да нема решение, т.е. е нерешлива равенка ако нема ниту едно решение.

Ако во алгебарската равенка $A = B$ по нејзиното средување непознатата x се јавува само со прв степен, тогаш за таа равенка се вели дека е линеарна равенка. Секоја линеарна равенка може да се доведе во обликот $ax + b = 0$, каде што a и b се некои реални броеви. Равенката $ax + b = 0$, во случај кога:

1°. $a \neq 0$, таа е решлива и има само едно решение: $-b/a$.

2°. $a = 0 \wedge b = 0$, Таа е исто така решлива, т.е. секој реален број е нејзино решение, т.е има бесконечно многу решенија.

3°. $a = 0 \wedge b \neq 0$, равенката е нерешлива, бидејќи равенката $0 \cdot x + b = 0$, $b \neq 0$, не станува точно бројно равенство за ниеден реален број x.

Детерминантите од втор ред се користат за решавање на системи од две линеарни равенки со две непознати.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1\,y = c_1 \end{cases}, \qquad (3)$$

каде што x и y се променливи, а a, a_1, b, b_1, c, c_1, се кои било реални броеви.

Броевите a, a_1, b, b_1 се коефициенти пред променливите, а c, c_1 – слободни членови на системот.

Под услов $ab_1 - a_1b \neq 0$ системот има единствено решение:

$$x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$

Ако првата од равенките се помножи со b_1, а втората со $-b$, добиваме равенки кои ако ги собереме, ја добиваме равенката:

$$(\ ab_1 - a_1b)x = cb_1 - c_1b,$$

$$ab_1 - a_1b)y = ca_1 - a_1c\ .$$

Затоа, детерминантите за равенките во овој систем се:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = cb_1 - c_1b, \qquad (4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - a_1c\ .$$

Следователно, решенијата на системот се:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$$

за $D \neq 0$.

Односно, се добива:

$$D \cdot x = D_x$$

$$D \cdot y = D_y, \qquad (5)$$

Притоа, важи следното при решавањето на системот:

1. За $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ системот има единствено решение кое се добива со формулите:

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad (6)$$

2. За $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$ системот или нема или има бесконечно многу решенија:

- За $\boldsymbol{D_x \neq 0}$ или $\mathbf{D_y \neq 0}$ системот нема решение.
- За $\boldsymbol{D_x = D_y = 0}$ системот има бесконечно многу решенија.

Формулите (6) се викаат Крамерови правила.

Пример 1.4.1. Да се реши следниот систем: $\begin{cases} 7x - 6y = 11 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$

За детерминантата D добиваме:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 44.$$

За D_x и D_y добиваме:

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & -6 \\ 33 & 2 \end{vmatrix} = 220,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 33 \end{vmatrix} = 176.$$

Со замена во формулите (6) добиваме:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{220}{44} = 5\,, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{176}{44} = 4.$$

Решение на системот е подредениот пар (5, 4).

Забелешка 1.4.1.

Имајќи предвид дека линеарната равенка со две непознати е аналитичко прикажување на правата во рамнина, добиваме дека геометриската интерпретација на решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати е следната:

1. Ако системот има едноставно решение, тогаш правите имаат една заедничка точка, односно се сечат.

2. Ако системот има бесконечен број решенија, правите се поклопуваат.

3. Ако системот нема решение, правите се паралелни.

1.5. Детерминанти од трети ред

Нека a_{ij}, каде што $i = 1,2,3, j = 1,2,3$, се дадени реални броеви.

Дефиниција 1.5.1. Бројот D е еднаков на:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{32}a_{21}+a_{31}a_{31}a_{23}-a_{31}a_{13}-\ a_{11}a_{32}a_{23}-a_{33}a_{21}\mathrm{a}_{12,}$$

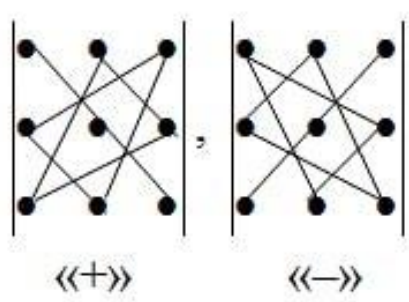
запишан во квадратна шема од девет броеви е:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Броевите $a_{11,}a_{12,}a_{21,}a_{22,}a_{23,}a_{31,}a_{32}$ се елементи на детерминатата наредени во три редици и три колони, и тоа прва редица $a_{11,}a_{12,}a_{13,}$, втора редица $a_{21,}a_{22,}a_{23,}$ трета редица $a_{31,}a_{32,}a_{33,}$ прва колона $a_{11,}a_{21,}a_{31,}$ втора колона $a_{12,}a_{22,}a_{32}$ и трета колона $a_{13,}a_{23,}a_{33,}$**.** Главната дијагонала ја сочинуваат елементите $a_{11,}a_{22,}a_{33}$**,** додека споредната дијагонала ја сочинуваат елементите $a_{13,}a_{22,}a_{31}$.

За пресметување на детерминанти од трет ред се користат следниве правила:

- Со позитивниот знак земени се прво производот на елементите од главната дијагонала, а потоа производите од елементите што се наоѓаат на темињата на триаголниците со едно теме во крајните елементи на споредната дијагонала, останатите темиња во другите две редици. Со негативен знак се земени производот на елементите од споредната дијагонала и производите на елементите што се наоѓаат на темињата на триаголниците со едно теме во крајните елементи на главната дијагонала и останатите две темиња во другите две редици. Овој начин на пресметување на вредноста на детерминантата од трет ред е познат како правило на триаголници за пресметување на детерминантите од трет ред.



Слика 1.

Пример 1.5.1. Да се пресмета детерминантата од трет ред со правилото на триаголници.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1.0.(-2) + 2.(-3).(-1) + 3.1.3 - 3.0.(-1) - 1.1.(-3) - 2.3.(-2) = 30$$

- Постои уште еден начин за пресметување на детерминантите од трет ред, познат како Сарусово правило. Тој се состои во следната постапка. На детерминантата од десната страна ѝ се допишуваат првите две колони, потоа се собираат производите на елементите кои лежат на линиите паралелни со главната дијагонала, со позитивен знак, а производите на елементите кои лежат на линиите паралелни со споредната дијагонала со негативен знак. На шемата подолу е дадена илустрација на реализација на ова правило.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{32}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Пример 1.5.2. Да се пресмета детерминантата од трет ред со помош на Сарусово правило.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1.0.(-2) + 3.1.3 + (-1).2.(-3) - 3.0.(-1) - (-3).1.1 - (-2).2.3 = 30$$

Дефиниција 1.5.2. Детерминантата од втор ред што се добива од детерминантата од трети ред со елиминирање на елементите од $\mathbf{i}$ – тата редица и $\mathbf{j}$ – тата колона се вика минор за елементот a_{ij} .

Следната детерминанта е развиена по првата редица, а добиените детерминанти од втор ред се нарекуваат минори. Можеме да ја развиеме по која било редица или колона.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2.\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3.\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Дефиниција 1.5.3 Бројот $a *_{ij}$ што се добива со множење на минорот за елементот a_{ij}, со $(-1)^{i+j}$, се вика алгебарски комплемент (или кофактор) за елементот a_{ij}:

$$a^*{}_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Пример 1.5.3.

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}, a_{12}^{*}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Да забележиме дека шесте карактеристики кои се веќе докажани за детерминантите од втор ред важат и за детерминантите од трет ред.

1.6. Примена на детерминанти од трет ред

Исто како и детерминантите од втор ред и детерминантите од трет ред се применуваат при решавање на линеарни системи од три равенки со три непознати. За таа цел да го разгледаме системот:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases},$$

со непознати x, y и z, коефициенти a_{ij} (каде што $i=1,2,3;\ j=1,2,3$) и слободни членови b_1, b_2 и b_3.

Тројката реални броеви x_0, y_0 и z_0 ја нарекуваме решение на системот, ако овие броеви ги задоволуваат равенките на системот, т.е. при замена на непознатите x, y и z со броевите x_0, y_0 и z_0 соодветно, секоја од равенките на системот преминува во вистинит исказ.

Со D да ја означиме детерминантата од трет ред составена од коефициентите пред непознатите променливи

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Нека A_{11}, A_{21}, A_{31} се алгебарски комплементи на елементите $a_{11}, a_{21}, a_{31},$ соодветно.

Ако првата равенка ја помножиме со A_{11}, втората со A_{21}, а третата со A_{31} и притоа ги собереме новодобиените равенки се добива

$$(a_{11}A_{11}+aA_{21+}\,a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}\ +a)y+(a_{13}A_{11}a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=$$
$$=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31.}$$

Последната равенка може да се запише како:

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

односно

$$Dx = D_x .$$

Аналогно,

$$D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; Dy = D_y,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, Dz = D_z.$$

Ако $D \neq 0$, тогаш системот има единствено решение кое се добива со формулите:

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D},$$

познати како Крамерови правила.

- За $D = 0$ системот или нема или има бесконечно многу решенија;
  - За $D_x \neq 0$ или $D_y \neq 0$ или $D_z \neq 0$ системот нема решение;
  - За $D_x = D_y = D_z = 0$ системот има бесконечно многу решенија.

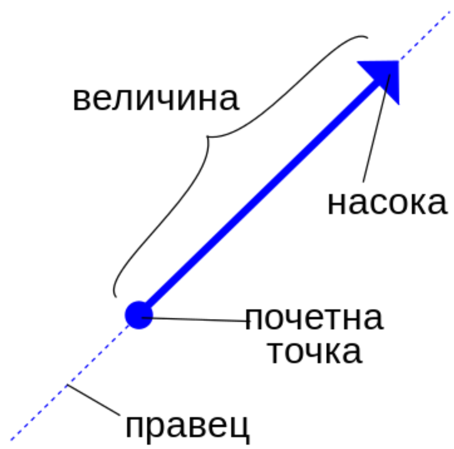
2. ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

Математичката дисциплина која ги дефинира и изучува векторите, алгебарските операции со нив, како и други операции, произлезени од потребите на физиката и техниката, се вика векторска алгебра. Во физиката и техниката се среќаваат величини за чие определување доволно е да се знае еден број кој го покажува односот на таа величина кон прифатената единична мерка за неа. Таквите величини се викаат скаларни величини. Како примери за скаларни величини можеме да ги земеме должината на отсечка, плоштината на рамнинска геометриска фигура, волумен на геометриско тело, температурата на тело во даден момент, поминат пат што за одредено време го изминува пешак во движење итн.

2.1. Поим за вектор

Дефиниција 2.1.1. Величините кои не можат да се определат со еден број, а за чие наполно определување е потребно познавање на нивниот правец и насока, се викаат векторски величини, односно вектори (сл.2).

Такви се, на пример, силата која дејствува на тело, брзината со која се движи тело, забрзување итн.



Слика 2

Најдобрата претстава за векторите се добива преку нивната геометриска интерпретација како ориентирана отсечка $\overrightarrow{AB}$, ако се знае почетната и крајната точка или со $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ итн.

Големината на векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ е растојанието од точката A до точката B и се означува со $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{\boldsymbol{a}}$и се вика интензитет или должина на векторот $\overrightarrow{AB}$ и се означува со $|\overrightarrow{AB}|$.

1) Правецот на векторот е зададен со правата (p) која минува низ точките A и B и се вика носач на векторот.
2) Насоката на векторот е определена со стрелка што е поставена во завршната (крајната) точка на векторот $\overrightarrow{AB}$.

Вектор чиј интензитет е 1 се вика единечен вектор или орт, а векторот чиј интензитет е 0 се вика нулти вектор и неговиот правец е произволен, односно тој е паралелен со секој вектор.

Дефиниција 2.1.2. За два вектори се вели дека се еднакви ако имаат еднакви интензитети, правци и насоки. Ако имаат само спротивни насоки тогаш велиме дека векторите се спротивни и пишуваме $\vec{a} = -\vec{b}$.

Дефиниција 2.1.3. Слободен вектор е оној вектор кој може да се поместува, при што не се менуваат неговата должина, правец и насока.

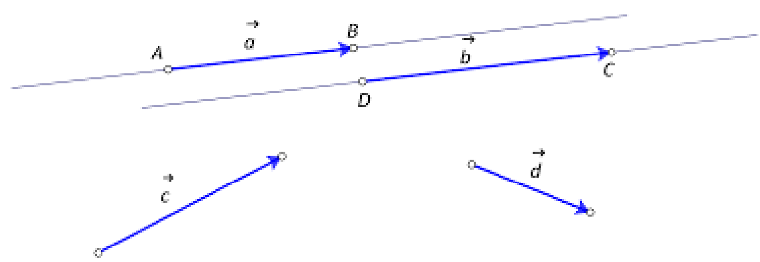
Ваквото поместување се нарекува транслација или транслаторно поместување.

Дефиниција 2.1.4. Ако векторот може транслаторно да се поместува само по должината на правата на којашто лежи, тогаш тој се нарекува вектор врзан за права.

Понатаму, ќе сметаме дека векторите кои ги разгледуваме се слободни.

Дефиниција 2.1.5. За ненултите вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се колинеарни ако правите AB и CD се паралелни (секоја права е паралелна со себе), (сл.3).

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека нултиот вектор е колинеарен со секој вектор.



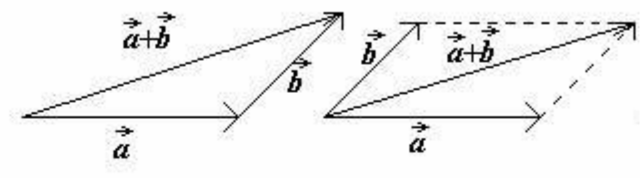
Слика 3

2.2. Собирање на вектори

Нека A, B и C се три произволни точки во просторот. Ако крајот на векторот $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ се поклопува со почетокот на векторот $\vec{\boldsymbol{b}}$, тогаш велиме дека векторот $\vec{\boldsymbol{c}} = \overrightarrow{AC}$, со почеток во точката A на векторот $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{AB}$ и крајот во точката C на векторот $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{BC}}$ претставува збир на векторите $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{b}}$ (сл.4 а)) и пишуваме

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}.$$

Овој начин за собирање на вектори е познат како правило на триаголник.



а)   б)

Слика 4

Нека се дадени два вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ со заеднички почеток. Векторот $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, каде што C е теме на паралелограмот ABCD се вика збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишуваме $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Оваа дефиниција за собирање вектори се вика правило на паралелограм (сл.4 б).

Нека a и b се произволни вектори. Важат следниве карактеристики за операцијата собирање вектори:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, собирањето вектори е комутативно,

2) $(\vec{a} + \overrightarrow{b)} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, собирањето вектори е асоцијативно,

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\vec{0}$ е неутрален елемент за собирањето вектори,

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Ќе ги покажеме горните карактеристики.

1) Карактеристиката комутативност следува од правилото на паралелограм за собирање вектори. Од паралелограмот ABCD следува:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \text{ и } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

2) Нека $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x}$ и $\vec{b} + \vec{c} = \vec{y}$.

Заклучуваме дека $\vec{x} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{y}$, т.е $(\vec{a} + \overrightarrow{b)} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3) Нека $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Тогаш

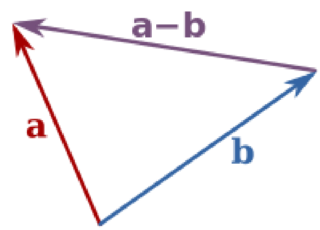
$$\vec{a} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{ и } \vec{0} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}.$$

4) Нека $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Тогаш $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, па

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ и } (-\vec{a}) + \vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

2.3. Одземање на вектори

Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е збирот на векторот $\vec{a}$ со спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$, т.е $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, (сл.5).



Слика 5

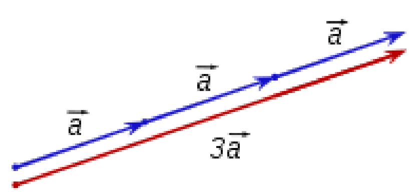
2.4. Множење на вектор со скалар

Дефиниција 2.4.1. Производ на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ со скалар $\lambda \in \mathrm{R}$ претставува вектор $\vec{b}$ определен на следниов начин:

1) Интензитет $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$,
2) Ист правец со векторот $\vec{a}$,
3) Иста насока со векторот $\vec{a}$ ако $\lambda>0$, а спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}$ ако $\lambda<0$.

Означуваме $\vec{b}=\lambda.\vec{a}=\lambda\vec{a}$ или $\vec{b}=\vec{a}.\lambda=\vec{a}\lambda$.

Пример 2.4.1. На слика 6 е покажано множењето $\vec{a}$ на векторот со скаларот 3.



Слика 6

За множење на вектор со скалар важат следниве својства:

1) Множење на вектор со два скалари:

$$\boldsymbol{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{\mu}\mathbf{a}})=(\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\mu})\vec{\mathbf{a}}$$

2) Множење на вектор со збир на два скалари:

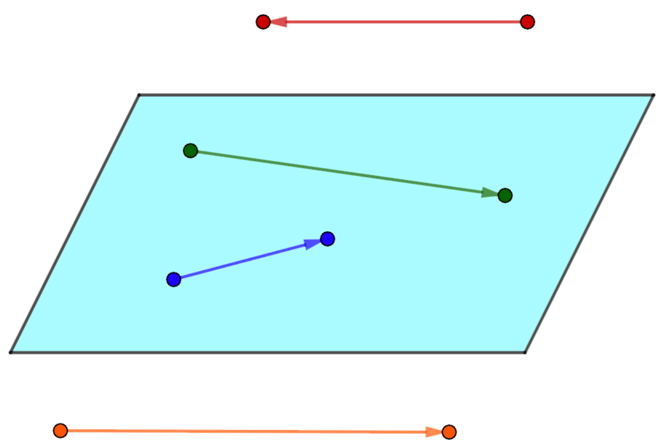
$$(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\lambda}\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$$

3) Множење на збир на два вектори со скалар:

$$\boldsymbol{\lambda}(\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}}) = \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\lambda}\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$$

Точноста на равенствата е очигледна.

Дефиниција 2.4.2. Компланарни вектори се вектори кои лежат во иста рамнина или се паралелни на иста рамнина (сл.7).



Слика 7

2.5. Проекција на вектор

Од ортогонални причини, во смисла на определување на компоненти на сила, како за рамнинските, така и за просторните вектори, потребно е прецизно дефинирање на поимот проекција на вектор како врз рамнина така и врз права.

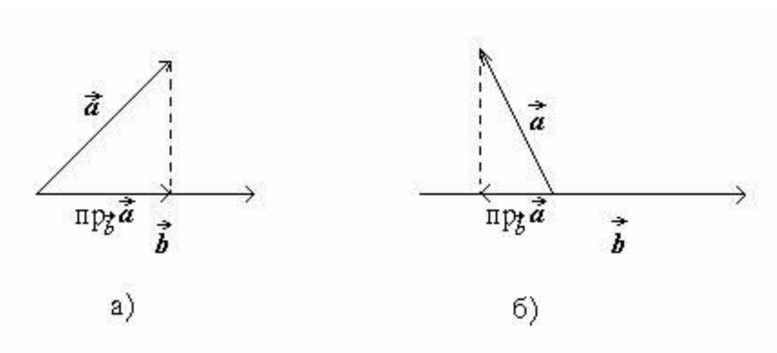
Дефиниција 2.5.1. Проекција на векторот $\overrightarrow{AB}$ паралелно со правецот на векторот $\vec{\mathbf{a}}$, врз рамнината $\boldsymbol{\pi}$ (правата n) претставува векторот $\overrightarrow{A_1B_1}$, чиј почеток е проекцијата на почетната точка A од векторот $\overrightarrow{AB}$**,** а крај е проекцијата од крајната точка B од векторот $\overrightarrow{AB}$:

$$\overline{\boldsymbol{A_1B_1}} = \text{пр}_{\,\boldsymbol{\pi}}\,\overline{\boldsymbol{AB}} \parallel \overrightarrow{\boldsymbol{a}},\ \overline{\boldsymbol{A_1B_1}} = \text{пр}_{\,\boldsymbol{\rho}}\,\overline{\boldsymbol{AB}} \parallel \vec{\boldsymbol{a}}$$

Ортогонална проекција е проекцијата при која правецот на проектирањето е нормален на рамнината $\boldsymbol{\pi}$ (правата n).

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{\mathrm{b}}$ се доведат до заеднички почеток секој од нив може ортогонално (нормално) да се проектира на другиот вектор со спуштање на нормала од крајот на едниот вектор кон правецот да другиот. Ортогоналната проекција на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{\mathrm{b}}$ е вектор кој е во правец на векторот $\vec{\mathrm{b}}$ и се означува со $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$. Преку тригонометриски релации (сл.8) од скаларните вредности се добива:

$$\frac{\left|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \cos \sphericalangle (\vec{a},\vec{b}), \text{ од каде што } \left|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}\right| = |\vec{a}| \cos \sphericalangle (\vec{a},\vec{b}).$$

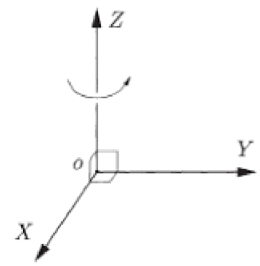


Слика 8

2.6. Декартов правоаголен координатен систем во простор. Правоаголни координати на вектор

Правата за која можеме да утврдиме која од две нејзини точки е претходна, а која наредна се вика ориентирана права или оска.

Декартовиот правоаголен координатен систем во простор се состои од три заемно нормални оски со заеднички почеток O. Заедничкиот почеток O на трите оски се нарекува координатен почеток. Оските се означуваат со *x*-оска (апсцисна оска), *y*-оска (ординатна оска) и *z*-оска (апликатна оска) и се наречени координатни оски. Насоките на *x*-оската, *y*-оската и *z*-оската се $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$, соодветно. Во зависност од редоследот на координатните оски, дадениот координатен систем може да биде десен или лев. Кај десниот координатен систем при ротација околу z-оската позитивниот дел од x-оската најбргу ќе се совпадне со позитивниот дел од y-оската ако ротацијата е во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот. Десниот координатен систем може да се претстави со трите прсти од десната рака, при што палецот ја претставува x-оската, показалецот y-оската, а средниот прст z-оската. Кај левиот координатен систем при ротација околу z-оската позитивниот дел од x-оската најбргу ќе се совпадне со позитивниот дел од y-оската, ако ротацијата е во насока на движење на стрелките на часовникот. Аналогно како кај десниот координатен систем, левиот координатен систем може да се претстави со трите прсти од левата рака. Понатаму, ќе го користиме десниот координатен систем (сл.9).



Слика 9

Две по две координатни оски ги определуваат трите координатни рамнини: xOy, xOz и yOz рамнина. xOy рамнината го дели просторот на горен и долен полупростор, yOz рамнината на преден и заден полупростор, а xOz на лев и десен полупростор. Трите координатни рамнини го делат просторот на осум делови наречени октанти.

Нека $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ е произволен вектор во просторот во кој е зададен Декартов правоаголен координатен систем. Јасно е дека векторите $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ не се компланарни. Четирите вектори се $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, $\vec{k}$ и $\vec{a}$ се линеарно зависни, па постојат скалари $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 од кои барем еден е различен од нула, така што важи:

$$\alpha_1\vec{\imath} + \alpha_2\vec{\jmath} + \alpha_3\vec{k} + \alpha_4\vec{a} = \vec{0}.$$

Јасно е дека $\alpha_4 \neq 0$, бидејќи во спротивен случај ќе важи равенството $\alpha_1\vec{\imath} + \alpha_2\vec{\jmath} + \alpha_3\vec{k} = \vec{0}$, каде што барем еден од скаларите е различен од нула, што противречи на линеарната независност на векторите $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$. Заклучуваме дека векторот $\vec{a}$ може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + a_3\vec{k}.$$

Скаларите a_1, a_2 и a_3 се нарекуваат правоаголни координати на векторот $\vec{a}$. Тие се единствени и наполно го определуваат векторот $\vec{a}$, т.е. го определуваат неговиот интензитет, правец и насока. Векторот $\vec{a}$ го означуваме на следниов начин:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Јасно е дека координатите на ортовите $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и $\vec{k}$ се:

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0), \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Должината (интензитетот) на векторот $\vec{a}$ се пресметува со формулата:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .$$

2.7. Скаларен производ

Во физиката има случаи кога при определена операција на две векторски величини се добива скаларна или векторска величина. Првата се нарекува скаларен производ, односно ако новодобиената величина е скаларна или векторски производ ако новодобиената величина е векторска.

Дефиниција 2.7.1 Скаларен производ меѓу два ненулти вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ претставува скаларот $|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\,cos\,\varphi$, т.е.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|\,cos\,\varphi,$$

каде што φ е аголот помеѓу векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Пример 2.7.1 Да се пресмета скаларниот производ на векторот $|\vec{a}| = 1$ и векторот $|\vec{b}| = 2$ ако аголот помеѓу нив е $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

$$\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -1\ .$$

Некои својства на скаларниот производ се:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
2) $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$,
3) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$,
4) $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}$,
5) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$, т.е $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$.

Координатната форма (аналитичко претставување) на скаларниот производ е:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3.$$

Бидејќи $|\overrightarrow{b}|\,cos\,\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b}$ и $|\overrightarrow{a}|\,cos\,\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}$ за скаларниот производ важи:

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|, \text{ затоа што } -1 \leq cos\varphi \leq 1.$$

Скаларното множење на вектори е дистрибутивна операција во однос на собирањето, односно

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\,) = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}\ .$$

Нека тргнеме од левата страна на равенството:

$$\overrightarrow{a\,(\,b + \,c\,)} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = |\vec{a}|(\text{пр}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{c}\,) = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{b} + |\vec{a}|\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\vec{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}.$$

Од дефиницијата за скаларниот производ за определување на аголот меѓу два вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ добиваме:

$$cos\,\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$cos\,\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Ако α, β и ϒ се аглите што векторот $\vec{a}$ ги зафаќа со координатните оски, тогаш точна е формулата:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Пример 2.7.2. Аналитички да се претстави скаларниот производ на векторот $\vec{a} = (4,3,1)$ и векторот $\vec{b} = (1,2,3)$.

$$\vec{a}.\vec{b} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4 + 6 + 3 = 13\ .$$

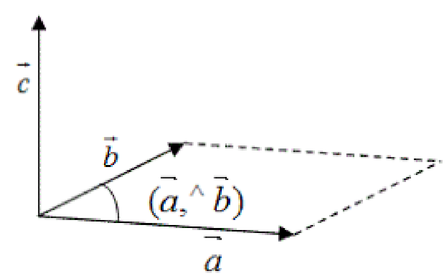
2.8. Векторски производ

Дефиниција 2.8.1. Векторски производ на два неколинеарни вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ претставува векторот $\vec{c}$ определен со:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c},$$

- правецот на векторот $\vec{c}$ е нормален на рамнината во која лежат $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$,
- $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\vec{c}$ образуваат десна тројка на вектори,
- векторот $\vec{c}$ има интензитет $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,sin\,\varphi$, каде што аголот φ е аголот помеѓу векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (сл.10).

Ако векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се колинеарни, тогаш нивниот векторски производ е нула.



Слика 10

Пример 2.8.2. Да се пресмета векторскиот производ на векторот $|\vec{a}| = 2$ и векторот $|\vec{b}| = 3$ ако аголот помеѓу нив е $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$|\overline{a \times b}| = 2 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ .$$

Векторскиот производ ги има следните својства:

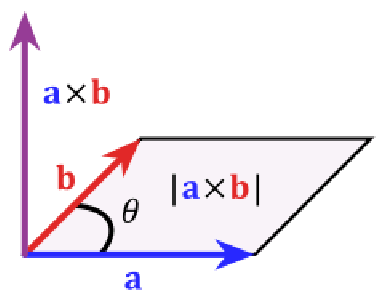
1) интензитетот на векторскиот производ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ е еднаков на плоштината на паралелограмот образуван од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ (Лагранжов идентитет),
3) $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|$,
4) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
5) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$,
6) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
7) Ако $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогаш нивниот векторски производ е еднаков на:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Векторскиот производ има примена при пресметување на плоштина на паралелограм, формиран над двата вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Плоштината на паралелограмот е еднаква на интензитетот на векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл.11).

Односно,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \overrightarrow{|a|}\overrightarrow{|b|} \sin\theta = \overrightarrow{|a|}\, h_a = P.$$



Слика 11

Вредноста на векторскиот производ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ не се менува ако наместо векторот $\vec{b}$ се земе друг вектор $\overrightarrow{b_1}$ чиј крај се наоѓа на правата која е паралелна со векторот $\vec{a}$ и минува низ крајот на векторот $\vec{b}$, т.е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \overrightarrow{b_1} = \vec{a} \times \overrightarrow{h_a}$$

За векторскиот производ важи асоцијативниот закон за множење со скалар:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

Ќе докажеме дека векторите $\overrightarrow{c_1} = \lambda(\vec{a} + \overrightarrow{b)}$, $\overrightarrow{c_2} = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$, $\overrightarrow{c_3} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ имаат еднакви правци, интензитети и насоки.

Векторите $\vec{a}, \overrightarrow{b}, \lambda\vec{a}, \lambda\vec{b}$ се компланарни, па според тоа векторите $\overrightarrow{c_1}$, $\overrightarrow{c_2}$ и $\overrightarrow{c_3}$ како векторски производ од нив се паралелни, односно имаат еднакви правци.

$$\text{За } \lambda > 0, \quad |\overrightarrow{c_1}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi,$$

$$|\overrightarrow{c_2}| = |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi, \qquad |\overrightarrow{c_3}| = |\vec{a} \times (\lambda\vec{b})| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi.$$

$$\text{За } \lambda < 0, \ |\overrightarrow{c_1}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi,$$

$$|\overrightarrow{c_2}| = |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - \varphi) = |\lambda|\,|\vec{a}|\,\left||\vec{b}|\right| \sin\varphi,$$

$$|\overrightarrow{c_3}| = |\vec{a} \times (\lambda\vec{b})| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \sin(\pi - \varphi) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi.$$

За векторските производи на векторите $\vec{\imath}, \mathrm{j}, \overrightarrow{k}$, што го карактеризираат десниот координатен систем 0_{xyz} согласно со дефиницијата и својствата за вектори, имаме:

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \qquad \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = k, \ \vec{k} \times \vec{\imath} = \jmath$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \ \ \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}, \qquad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}, \ \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$$

2.9. Мешан производ

Дефиниција 2.9.1. (Геометриска форма на мешан производ)

Мешан производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е скаларот $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$, се означува со $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Дефиниција 2.9.2. (Координатна форма на мешан производ)

Ако
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, тогаш

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се зададени со своите координати

$$\vec{a} = a_1\vec{\jmath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\overrightarrow{k}, \ \vec{b} = b_1\vec{\jmath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\overrightarrow{k}, \qquad \vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k},$$

тогаш за мешаниот производ добиваме:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = [(a_1\vec{\jmath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{\jmath} + b_2\overrightarrow{\jmath} + b_3\vec{k})]\,(c_1\overrightarrow{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}) =$$

$$= \left\|\begin{matrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{matrix}\right\| \vec{\jmath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \vec{k} \;\left(c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k} \right) =$$

$$= \left\|\begin{matrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{matrix}\right\| c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Пример 2.9.1. Да се пресмета мешаниот производ на векторите $\vec{a} = (2,-1,3), \vec{b} = (1,-2,0)$ и $\vec{c} = (0,0,2)$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6.$$

Пример 2.9.2. Да се провери за која вредност на m векторите $\vec{a} = (m, 3,2)$, $\vec{b} = (2, -33,4m)$, $\vec{c} = (-3,12,6)$ се компланарни. За едно m од така најдените, векторот $\vec{c}$ да се разложи по правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ да бидат компланарни треба $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, односно

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4m \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -3 & 4m \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4m \\ -3 & 12 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -48m^2 - 54m - 6,$$

Односно

$$8m^2 + 9m + 1 = 0,$$

па $m_1 = -1$ и $m_2 = -\frac{1}{8}$.

За $m = 1$, векторите преминуваат во $\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (2,-3,4), \vec{c} = (-3,12,6)$ и од $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ добиваме

$$(-3,12,6) = \lambda(-1,3,2) + \mu(2,3,-4)$$

Односно $-\lambda + 2\mu = -3$,$3\lambda + 3\mu = 12$, $2\lambda - 4\mu = 6$.

Со решавање на првите две равенки од овој линеарен систем добиваме

$$\lambda = \frac{11}{3} \text{ и } \mu = \frac{1}{3}.$$

Лесно се проверува дека ова е решение и на третата равенка, односно решение на системот. Значи $\vec{c} = \frac{11}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Мешаниот производ (за секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и скалар λ) ги има следните својства:

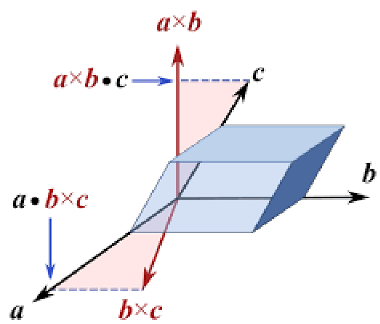
1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$;

2) $\lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\overline{\lambda\vec{b}},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c})$;
3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$.

Својствата директно следуваат од својствата на детерминанти.

- **Примена на мешан производ**

Апсолутната вредност на мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. На тој начин, со помош на мешан производ, ќе можеме да го пресметаме волуменот на паралелопипедот, тристраната призма и тетраедарот, како и нивните висини, а во делот на аналитичка геометрија и растојание меѓу прави (сл.12).



Слика 12

- **Формула за волумен на паралелопипед преку мешан производ.**

Волуменот на паралелопипедот (тристраната призма, тетраедарот) конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$, ($V = \frac{1}{2}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|, V = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$).

- **Формула за висина во паралелопипед преку мешан производ.**

Висината на паралелопипедот (тристраната призма, тетраедарот) конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, нормална на страната конструирана над $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е

$$H = \frac{|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Пример 2.9.3 Да се пресмета волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a} = (2,1,3), \vec{b} = (1,0,1)$ и $\vec{c} = (3,2,1)$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 4 - 1 = 4,$$

$$V = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = |4| = 4.$$

3. Бројни низи

Ако ги подредиме природните броеви по големина $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, ја добиваме низата од природни броеви. Со замена на секој од овие природни броеви со некој реален број, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, добиваме т.н. низа од реални броеви. Ова значи дека на секој природен број сме му придружиле реален број. Ова е концепт на реална низа.

3.1. Дефиниција за низа и основни карактеристики

Дефиниција 3.1.1. Секое пресликување $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ каде што $a(n) = a_n$ се нарекува низа од реални броеви.

Вообичаено, наместо $a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \ldots$ пишуваме $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Овие броеви се нарекуваат членови на реалната низа. За a_n велиме дека е општ член на низата, а за n дека е индекс, кој го означува неговиот ранг. Многу често a_n се нарекува и n-ти член на низата. Низата кратко ја означуваме со (a_n).

Ако низата има конечен број на членови, тогаш зборуваме за конечна низа. Конечна низа е пресликување $a: \{1,2,3, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, каде што $a(n) = a_n$.

Низите можат да бидат зададени на некој од следните начини:

Пример 3.1.1.

а) Низата од непарни броеви $2,4,6,8 \ldots$ е дефинирана експлицитно со формулата $a_n = 2n$.

б) Фибоначиевата низа $1,1,2,3,5,8,13 \ldots$ е определена рекурзивно со $a = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n = 1,2,3 \ldots$

в) Низата од броеви $2,3,5,7,11,13 \ldots$ може да се опише со својството дека нејзини членови се простите броеви во растечки редослед.

Паралелно со низата (a_n), може да се разгледува и множеството од нејзини вредности $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Постои јасна дистинкција помеѓу овие два поима, што може да се види од следниот пример.

Пример 3.1.2. Дадена е низата $-1, 1, -1, 1, -1 \ldots$ со општ член $a_n = (-1)^n$. Нејзиното множество од вредности е множеството $M = \{-1, 1\}$.

Во математиката познати се низите, аритметичка и геометриска прогресија како специјални низи од реални броеви. Тие играат важна улога во применета математика. Затоа ќе дадеме еден краток осврт на истите.

Дефиниција 3.1.2. Низата од реални броеви (a_n) се вика аритметичка прогресија, ако разликата на секој нејзин член (освен првиот) и неговиот претходник е секогаш еден ист број d т.е.:

$$a_n - a_{n-1} = d, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тој број се вика разлика на аритметичката прогресија.

Пример 3.1.3. Низата $1, 3, 5$ ... е аритметичка прогресија со разлика $d = 2$.

Теорема 3.1.1. Општиот член на аритметичка прогресија е даден со формулата:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Јасно е дека аритметичката прогресија ќе биде определена, ако е познат првиот член a_1 и разликата d.

Пример 3.1.4. Низата од претходниот пример е со општ член $a_n = 2n - 1$.

За аритметичката прогресија важат следниве својства:

1) Во конечна аритметичка прогресија збирот од нејзините крајни членови (првиот и последниот) е еднаков на збирот од секои два нејзини членови кои се еднакво оддалечени од крајните членови т.е.:

$$a_1 + a_n = a_{k+1} + a_{n-k}, \quad k < n, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

2) Секој член на една аритметичка прогресија (освен првиот) е аритметичка средина од двата негови соседни члена т.е.:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1.$$

Теорема 3.1.2. Збирот на првите n членови во аритметичката прогресија е

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Дефиниција 3.1.3. Низата од реални броеви (a_n) е геометриска прогресија, ако количникот на секој нејзин член (освен првиот) и неговиот претходник е секогаш еден ист број q т.е.:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тој број се вика количник на геометриската прогресија.

Пример 3.1.5. Низата $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ е геометриска прогресија со количник $q = 3$.

Теорема 3.1.3. Општиот член на геометриска прогресија е даден со формулата

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Одовде е јасно дека геометриска прогресија ќе биде определена ако е познат првиот член a_1 и количникот q.

Пример 3.1.6. Низата од претходниот пример е со општ член $a_n = 3^{n-1}$.

За геометриската прогресија точни се следните својства:

1) Во конечна геометриска прогресија производот од нејзините крајни членови е еднаков на производот од секои два нејзини членови кои се еднакво оддалечени од крајните членови т.е.

$$a_1 \cdot a_n = a_k \cdot a_{n-k}, \;\; k < n, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

2) Секој член на една геометриска прогресија (освен првиот) е геометриска средина од двата негови соседни членови т.е.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1\,.$$

Теорема 3.1.4. Збирот на првите n членови на геометриска прогресија е:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1.$$

Да дефинираме конвергенција и гранична вредност на низа.

Дефиниција 3.1.4. За бројот $a \in \mathbb{R}$ велиме дека е граница (гранична вредност, лимес) на низата (a_n), ако за секој реален број $\varepsilon > 0$, постои природен број n_0 (кој зависи од ε), таков што $|a_n - a| < \varepsilon$, за секој природен број $n \geq n_0$ т.е.:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq n_0, \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Во таков случај пишуваме $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (или) и велиме дека низата (a_n) се стреми (конвергира, тежи) кон a.

Низите кои имаат лимес се нарекуваат конвергентни низи, а за низите кои не се конвергентни велиме дека се дивергентни.

Во суштина, постоењето на лимес a на низата (a_n) значи дека во секоја ε - околина на точката a се наоѓаат скоро сите членови (бесконечно многу членови) на дадената низа (сите, освен конечно многу, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_0-1}$) т.е. $\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq n_0, \; |a_n - a| < \varepsilon, a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Пример 3.1.7. Да докажеме дека низата (a_n) со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ има граница $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Од аксиомата на Архимед имаме дека постои природен број n_0, таков што $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш за $n \geq n_0$ добиваме дека $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, што значи дека $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Теорема 3.1.5. Ако низата (a_n) конвергира, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.

Пример 3.1.8. За низата со општ член $a_n = \frac{n+5}{2n}$ гранична вредност е $a = \frac{1}{2}$.

Пример 3.1.9. За низата со општ член $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+5}$ се знае дека има гранична вредност $a = 1$.

3.2. Ограничени и монотони низи

Ќе разгледаме две својства на реалните низи: ограниченост и монотоност. Да дадеме неколку дефиниции поврзани со поимот ограниченост на низи.

Дефиниција 3.2.1. За низата (a_n) велиме дека е ограничена од горе (десно) или мајорирана, ако $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M$. За M велиме дека е мајорант (горна граница) на (a_n).

Дефиниција 3.2.2. За низата (a_n) велиме дека е ограничена од долу (лево) или минорирана, ако $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq a_n$. За m велиме дека е минорант (долна граница) на (a_n).

Дефиниција 3.2.3. Низа која е и минорирана и мајорирана се нарекува ограничена низа т.е. низата (a_n) е ограничена ако $\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq K$.

Дефиниција 3.2.4. Најмалиот мајорант на мајорирана низа го нарекуваме супремум, означуваме $\sup a_n$, а најголемиот минорант на минорирана низа го именуваме со инфимум, означуваме $\inf a_n$.

Пример 3.2.1.

а) Низата $1, 3, 5, 7\ \ldots, 2n-1, \ldots$ е минорирана низа, но не и мајорирана низа и $\inf a_n = 1$.

б) Низата $2, 2,2, \ldots, 2\ \ldots$ е константна низа и $\inf a_n = 2 = \sup a_n$.

в) Низата $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}\ \ldots$ е ограничена низа и $\inf a_n = -1$, $\sup a_n = 1$.

г) Низата $-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n n\ \ldots$ не е ниту минорирана низа, ниту мајорирана низа.

Теорема 3.2.1. Секоја конвергентна низа е ограничена.

Пример 3.2.2. Низата со општ член $a_n = (-1)^n$ не е конвергентна, но е ограничена.

Обратното тврдење на теоремата не е точно, т.е. ако една низа е ограничена не мора да биде конвергентна. Меѓутоа, постојат низи за коишто ограниченоста е и доволен услов за конвергентност. Тоа се т.н. монотони низи.

Дефиниција 3.2.5. За низата (a_n) велиме дека е

1) Строго монотоно растечка, ако $a_n < a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$;
2) Строго монотоно нерастечка, ако $a_n > a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$;
3) Монотоно нерастечка, ако $a_n \geq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$;
4) Монотоно неопаѓачка, ако $a_n \leq a_{n+1}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Пример 3.2.3.

а) Фибоначиевата $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$ ... низа е неопаѓачка;

б) Низата со општ член $a_n = \frac{1}{n+1}$ е монотоно опаѓачка низа;

в) Низата со општ член $a_n = 2n - 1$ е монотоно растечка низа;

г) Низата со општ член $a_n = (-1)^{n+1}$ не е монотона низа;

д) Низата $b, b, b, \dots, b$ ... е истовремено е и нерастечка и неопаѓачка низа.

Теорема 3.2.2. Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.

Пример 3.2.4.

Низата со општ член $a_n = \frac{n}{n+2}$ е монотоно растечка, бидејќи

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+3)}{(n+1)(n+3)} = \frac{1-n}{(n+1)(n+3)} > 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}.$$

б) Низата со општ член $a_n = \frac{n}{n+2}$ е ограничена, бидејќи $|a_n| = \frac{n}{n+2} < 1$.

Од теоремата следува дека низата со општ член $a_n = \frac{n}{n+2}$ е конвергентна низа.

3.3. Операции со низи

Со помош на низите (a_n) и (b_n) и аритметичките операции дефинирани на множеството реални броеви, може да ги формираме следниве низи: збир $(a_n + b_n)$, разлика $(a_n - b_n)$, производ $(a_n \cdot b_n)$ и количник $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ на низите (a_n) и (b_n), при што за количникот го бараме предусловот $b_n \neq 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.3.1. Нека (a_n) и (b_n) се конвергентни низи. Тогаш конвергентни се и низите: $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $(c \cdot b_n)$ за с константа и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ при што $b_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, и притоа важи:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot b_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ за $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;
5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ за $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

3.4. Нула-низи и низи што неограничено растат по апсолутна вредност

Во математиката се среќаваат изразите „бескрајно мала величина“ и „бескрајно голема величина“. Првиот израз „бескрајно мала величина“ се однесува на променливи кои се стремат да добијат вредност нула, а со вториот израз „бескрајно голема величина“ се означуваат случаи во кои променливите величини неограничено растат.

Дефиниција 3.4.1.

а) За низата (a_n) за која важи дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ велиме дека е бесконечно мала низа или нула-низа.

б) За низата (a_n) велиме дека се стреми кон $+\infty$ (неограничено расте) ако $\forall K > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n > K$, пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

в) За низата (a_n) велиме дека се стреми кон $-\infty$ (неограничено опаѓа) доколку $\forall L < 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n < L$, пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

г) Низата (a_n) неограничено расте по апсолутна вредност, пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, ако: $\forall K > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| > K$.

Во однос на конвергенцијата на низа од реални броеви ги среќаваме следниве три групи:

- Конвергира кон некој реален број a (конвергентна низа);

• Конвергира кон $\pm\infty$ (определено дивергентна низа);

• Нема ниту конечна ниту бесконечна граница (неопределено дивергентна низа).

Ќе ја дадеме и следната теорема:

Теорема 3.4.1.

а) Нека (a_n) е низа таква што за секој $n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0$.

- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.
- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

б) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ тогаш

- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} (\,a_n + b_n) = +\infty$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
- Ако $\lim\limits_{n\to\infty} (\,a_n \cdot b_n) = \mathrm{sgn}a \cdot \infty (a \neq 0)$, каде што $\mathrm{sgn}a = \begin{cases} 1,\ a > 0 \\ 0,\ a = 0 \\ -1, a < 0 \end{cases}$.

Скратено и симболички пишуваме $a + \infty = +\infty, a \cdot (+\infty) = \mathrm{sgn}a \cdot \infty(a \neq 0), \frac{a}{\infty} = 0$.

Во некои случаи комбинирајќи две низи како во претходната теорема не може да се пресмета граничната вредност на добиената низа. Тогаш велиме дека граничната вредност е од неопределен (неодреден) тип, што не значи дека таа не постои, туку дека треба да се примени некое однапред определено правило.

Пример 3.4.1. За низата со општ член $a_n = \frac{4n^2+2n+1}{3n^2-n+3}$ гранична вредност претставува неопределен израз од тип $\frac{\infty}{\infty}$ и претходните теореми не дозволуваат да се пресмета (во овој случај, таа постои). Сепак со делење на броителот и именителот со n^2 имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n+1}{3n^2-n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{4}{3}.$$

Постојат следниве типови на неопределени изрази: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0$.

Пресметувањето на гранична вредност на низа (лимес на низа) од неопределен тип е битно, бидејќи ваквите гранични вредности бараат некои посебни постапки. Некои типови лесно се решаваат со примена на претходно дадените правила. За некои неопределени типови, на помош е следнава теорема на Штолц.

Теорема 3.4.2. (Штолц)

Нека (b_n) е монотоно растечка низа, при што $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и за произволна низа (a_n) постои (конечна или бесконечна) гранична вредност $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Тогаш постои и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

Оваа теорема се користи во случаите на неопределеност од тип $\frac{\infty}{\infty}$.

3.5. Бројот е. Некои специјални низи.

Дефиниција 3.5.1. Границата на низата $a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ќе ја означуваме со e - Неперов број, односно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Знаеме дека $2 < e < 3$. Бројот e е основа на природните логаритми. Тој е ирационален и трансцедентен (не е корен на ниеден полином со цели коефициенти). Неговата приближна вредност е 2,71828...

Пример 3.5.1. Низата со општ член $a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n$ има гранична вредност

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2} = e\cdot 1^{-2} = e$$

Проблемот дали е конвергентна или дивергентна една низа многу често не е едноставен. Во продолжение ќе дадеме два примери кои се корисни во решавање на некои математички задачи поврзани со конвергенција или дивергенција на некоја низа.

Пример 3.5.2. Нека $a_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ е збир на првите n члена на геометриската прогресија со прв член 1 и количник q.

- За $q = 1$, ја имаме дека $a_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
- За $q = -1$, ја имаме низата $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, која е дивергентна;
- За $|q| > 1$, имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
- За $|q| < 1$, општиот член може да се претстави со $a_n = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^n}{q-1} + \frac{1}{q-1}$ и бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$.

Пример 3.5.3. За кои вредности на реален број q геометриската низа (q_n) е конвергентна?

- Ако $q = 1$, тогаш низата е константна, сите нејзини членови се еднакви на 1, па $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$;
- Ако $q = -1$, ја имаме низата $(-1)^n$ за која видовме дека нема гранична вредност;
- За $|q| < 1$, низата тежи кон нула, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$;

• За $q > 1$, низата расте неограничено, па $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$;

• За $q < -1$, членовите со парни индекси се позитивни, а со непарни индекси се негативни и сите членови по апсолутна вредност неограничено растат. Во класична смисла оваа низа нема граница.

Дефиниција 3.5.2. За точката a велиме дека е точка на натрупување на низата (a_n) ако во која било ε - околина на a има бесконечно многу членови на низата.

Очигледно е дека лимесот на низата (доколку постои) воедно е и нејзина точка на натрупување. За таа цел ќе ја дадеме следната теорема без доказ. Доказот ќе биде оставен на читателот.

Теорема 3.5.1. Секоја конвергентна низа има само една точка на натрупување која е еднаква со нејзината граница.

Но, обратното не мора да важи. Може низата да има точка/точки на натрупување, но таа да не биде конвергентна низа.

Пример 3.5.4. Низата со општ член $a_n = 1 + (-1)^n$ има две точки на натрупување, но не е конвергентна.

Пример 3.5.5. Низата со општ член $a_n = \frac{n^2+2n}{n+1}$ нема точки на натрупување.

Да забележиме дека постои разлика меѓу поимите точка на натрупување за низа и точка на натрупување за множеството од нејзини вредности $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Дефиниција 3.5.3. Низата (a_n) е Кошиева ако $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 3.5.2. (Коши) Низата (a_n) е конвергентна ако и само ако е Кошиева.

Пример 3.5.4. Ќе покажеме дека хармониската низа е дивергентна користејќи ја последната теорема, т.е. со докажување дека оваа низа не е Кошиева. Нека $n \in \mathbb{N}$ е произволен и $m > n$. Тогаш:

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m}$$

Специјално за $m = 2n$ имаме:

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Значи, колку и да е големо n, растојанието меѓу членовите a_{2n} и a_n е секако поголемо од $\frac{1}{2}$, т.е. не е произволно мало. На пример, избирајќи $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$, ќе добиеме дека $|a_m - a_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$, за кое било $n > n_0$ (n_0 произволен) и $m = 2n$ т.е. низата не е Кошиева, па согласно со теоремата на Коши не е конвергентна.

4. Реални функции од еден реален аргумент

4.1. Основни поими

Насекаде околу нас се случуваат разни промени и тие се сврзани со основниот поим величина. Под поимот величина се подразбира секој објект кој може да се измери и изрази преку број. При мерење на една иста величина во различно време и на различно место може да се добијат различни вредности. Може да се мери промената на температурата и притисокот на воздухот во зависност од времето, јачината на ветерот кој дува, брзината со која се движи некое возило или пешак и сл. Во математиката, на пример, се мери должината и радиусот на кружницата, плоштината на кружницата, должината на страната во квадратот итн. Постојат и величини кои постојано имаат иста вредност како броевите π, e и други. Се забележува дека некои величини ја менуваат својата вредност и тие се нарекуваат променливи, додека оние кои секогаш имаат иста вредност се нарекуваат константи. Математиката ги изучува променливите величини. Постојат два вида променливи величини, едните се менуваат произволно, независно од други и се нарекуваат независни променливи, а вторите зависат од менувањето на некоја величина и се нарекуваат зависни променливи.

Пример 4.1.1.

Формулата за пресметување на плоштина на квадратот е $P = a^2$. Очигледно, плоштината на квадратот зависи од должината на страната на квадратот. За страната a се вели дека е независна променлива, додека плоштината P е зависна променлива, односно P е функција од a и се запишува $P = f(a)$ или $P = P(a)$.

- **Дефиниција на реална функција од една променлива**

Терминот функција се користи за означување на пресликување на множествата од броеви. Со оглед на тоа што од интерес ќе бидат пресликувања на множеството реални броеви, потребна ни е следнава дефиниција.

Дефиниција 4.1.1. Реална функција од една променлива ќе го викаме секое пресликување $f: D \to \mathbb{R}$, каде што $D \subseteq \mathbb{R}$ и $\forall x \in D, \exists!\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.

Значи, зависноста на елементот y од елементот x симболички се запишува со $y = f(x)$. Елементот $x \in D$ ја прима секоја вредност од множеството $D \subseteq \mathbb{R}$ и тој се нарекува независна променлива или аргумент. Вредноста на елементот y кој е придружен на аргументот x и зависи од неговата вредност се вика зависна променлива.

Ако $f: D \to \mathbb{R}$ е функција, за $D \subseteq \mathbb{R}$ велиме дека е домен (дефиниционо множество) на f и најчесто го означуваме со D_f.

Функцијата $y = f(x)$ може да биде зададена аналитички, табеларно или графички. Во пракса, често пати функциите се задаваат со некој аналитички израз (со формула), без да биде назначен доменот. Во таков случај ќе сметаме дека доменот се состои од сите реални броеви за кои изразот има смисла.

Пример 4.1.2. Функцијата зададена со формулата $f(x) = \frac{1}{x}$ има домен $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Множеството $E_f = f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in D_f,\ y = f(x)\}$ се нарекува множество вредности (опсег) на f.

Пример 4.1.3. Опсегот на функцијата $g(x) = ctgx$ е множеството $E_g = \mathbb{R}$.

Пример 4.1.4. Да се определи дефиниционата област на функциите:

а) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, б) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$,

в) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, г) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, д) $f(x) = log_2(x^2 + 2x - 3)$

Решение.

а) $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$;

б) $D_f = (-\infty, +\infty)$;

в) $D_f = (-1,1)$;

г) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

д) $D_f = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

- **Еднаквост на функции**

Кодомените на две реални функции од една реална променлива секако се еднакви, бидејќи тоа е множеството реални броеви $\mathbb{R}$. Затоа дефиницијата ја има следната форма.

Дефиниција 4.1.2. Функциите $f(x)$ и $g(x)$ се еднакви, ако тие имаат ист домен $D = D_f = D_g$ и ако $f(x) = g(x)$ за секое $x \in D$.

За еднакви функции означуваме $f = g$. Ова во суштина значи дека f и g се различни ознаки за една иста функција. Ако функциите не задоволуваат еден оддадените услови во дефиницијата, тогаш функциите не се еднакви и означуваме со $f \neq g$.

- **График на функција**

Функциите освен со формула може да бидат зададени и графички, што е битно за применетите науки. Затоа е важен поимот график на функцијата.

Дефиниција 4.1.3. За дадена функција $f(x)$ со домен D_f, график на f е множеството од подредени парови $G_f = \{(x, y) | x \in D,\ y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Да забележиме дека ако доменот D_f е конечно множество или бесконечно, тогаш такво е и множеството G_f. Би можело да се каже дека G_f има исто толку елементи колку и D_f. Во случај кога D_f, т.е. G_f има мал број елементи, G_f може да се претстави табеларно.

Пример 4.1.5. Ако функцијата $y = f(x)$ е зададена со следната таблица:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	-2	4	6

Тогаш графикот на функцијата $y = f(x)$ е множеството $G_f = \{(-1,3), (0,-2), (1,4), (2,6)\}$.

Елементите на G_f се подредени парови од реални броеви. Ова геометриски се точки од координатната рамнина (обично работиме со избран правоаголен координатен систем).

Дефиниција 4.1.4. Геометриското место на точки каде што $(x, f(x)) \in G_f$ се нарекува крива определена со функцијата $y = f(x)$.

Понатаму, кога ќе зборуваме за графикот на дадената функција $y = f(x)$, ќе мислиме на геометрискиот претставник – кривата определена со функцијата $y = f(x)$, т.е. на соодветното множество од точки од координатната рамнина.

Дефиниција 4.1.5. Нека се $E, X, Y \subset \mathbb{R}$ и нека се дадени функциите $\varphi: E \to X$, $\omega: E \to Y$ такви што за секој $t \in E$, $\varphi(t) = x, x \in X$ и $\omega(t) = y, y \in Y$. Тогаш велиме дека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки

$$x = \varphi(t) , y = \omega(t), t \in E.$$

- **Нула на функција**

Дефиниција 4.1.6. Нула на функцијата $y = f(x)$ е онаа вредност на аргументот x за која вредноста на функцијата е еднаква на нула. Нулите на функцнјата се добиваат со решавање на равенката $f(x) = 0$.

- **Монотони функции**

- Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ строго монотоно расте ако за кои било вредности $x_1, x_2 \in D_f$ важи: $x_1, < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ строго монотоно опаѓа ако за кои било вредности $x_1, x_2 \in D_f$ важи: $x_1, < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ монотоно расте (опаѓа) ако за кои било вредности $x_1, x_2 \in D_f$ важи: $x_1, \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), (x_1, \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

- **Ограничени функции**

Дефиниција 4.1.7. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ е ограничена озгора ако постои број $M \in \mathbb{R}$, таков што: $f(x) \leq M$ за секој $x \in D_f$.

Дефиниција 4.1.8. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ е ограничена оздола ако постои број m, таков што: $f(x) \geq m$ за секој $x \in D_f$.

Дефиниција 4.1.9. Функцијата $y = f(x)$ се вика ограничена ако постои број L, таков што за секој $x \in D_f$ важи: $|f(x)| \leq L$.

Пример 4.1.6. Функцијата $y = cosx$ е ограничена бидејќи $|cosx| \leq 1$, за секој $x \in D_f$.

Графикот на ограничената функција се наоѓа меѓу две паралелни прави $y - L = 0$ и $y + L = 0$.

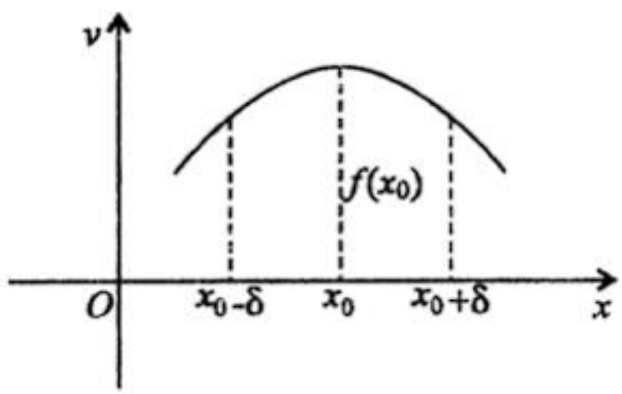
Пример 4.1.7. Да се провери дали е ограничена функцијата $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Со оглед на неравенството $x < 1 + x^2$, добиваме дека $-1 \leq \frac{x}{-1+x^2} \leq 1$, односно функцијата е ограничена.

➢ Екстремни вредности на функција

Дефиниција 4.1.0.1. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D = (a, b)$ во точката $x_0 \in D$ има локален максимум ако постои еден отворен интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D, \delta > 0$, таков што за секој $x \neq x_0$ од овој интервал е исполнето неравенството $f(x) < f(x_0)$.

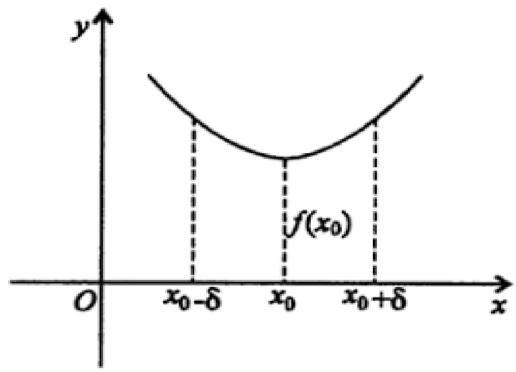
Вредноста на максимумот е $f(x_0)$. Тоа значи дека интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ лево од x_0 (сл.13), функцијата монотоно расте, а десно од x_0 монотоно опаѓа.



Слика 13

Дефиниција 4.1.0.2. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D = (a, b)$ во точката $x_0 \in D$ има локален минимум ако постои еден отворен интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D, \delta > 0$, таков што за секој $x \neq x_0$ од овој интервал е исполнето неравенството $f(x) > f(x_0)$.

Вредноста на минимумот е $f(x_0)$. Тоа значи дека во интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, лево од x_0 (сл.14), функцијата монотоно опаѓа, а десно од x_0, монотоно расте.



Слика 14

Максимумот и минимумот на една функција се викаат екстремни вредности на функцијата.

- **Парност и непарност на функција**

Дефиниција 4.1.0.3. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ се нарекува парна функција ако е исполнето:

1) D_f е симетрично множество;
2) $f(-x) = f(x)$, за секој $x \in D_f$.

Графикот на парната функција е симетричен во однос на y-оската.

Дефиниција 4.1.0.4. Функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ се нарекува непарна функција ако е исполнето:

1) D_f е симетрично множество;
2) $f(-x) = -f(x)$, за секој $x \in D_f$.

Графикот на непарната функција е симетричен во однос на координатниот почеток.

- **Периодичност на функција**

Дефиниција 4.1.0.5. За функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ најмалиот позитивен број ω (ако постои) се нарекува период на функцијата, ако за кое и да било x е исполнето $f(x + \omega) = f(x)$.

За функцијата $y = f(x)$, $x \in D_f$ велиме дека е периодична.

4.2. Аритметички операции со функциите од еден реален аргумент

Дефиниција 4.2.1. Нека реалните функции f и g се дефинирани на множеството $X \subset \mathbb{R}$, тогаш збирот $f + g$, разликата $f - g$, производот $f \cdot g$ и количникот $\frac{f}{g}$ се исто така функции дефинирани со:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ , за секој } X \in \mathbb{R};$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ , за секој } \mathrm{X} \in \mathbb{R};$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ , за секој } \mathrm{X} \in \mathbb{R};$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ , за секој } \mathrm{X} \in \mathbb{R} \text{ и } g(x) \neq 0.$$

Треба да забележиме дека во практика најчесто за дефиниционата област на функциите f и g нема да имаме информации, па според тоа ќе ги определиме прво нив како D_f и D_g, а дефиниционата област на новодефинираните четири функции се добива како $D_f \cap D_g$, дополнително за количникот $g(x) \neq 0$.

Јасно е дека операциите собирање и множење на функции се асоцијативни, односно:

$$f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h, f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h = f \cdot g \cdot h$$

Согласно нивните дефиниции

$$(f + g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x), (f \cdot g \cdot h)(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

Дефиниција 4.2.2. Ако $\mathrm{c} \in \mathbb{R}$ и ако $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = c$, за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш функцијата f се вика константна.

Сега, за производот на функциите $f = c$ и g , за секој $x \in D_g$ имаме

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

4.3. Имплицитна и сложена функција

Нека е $D_f \subset \mathbb{R} \mathrm{X} \mathbb{R}$ и нека $f: D_f \to \mathbb{R}$, така што на секоја подредена двојка $(x, y) \in D_f$ и го придружуваме бројот $F\big((x, y)\big) = F(x, y)$.

Нека постои непразно множество $X \subset \mathbb{R}$ со следното својство:

- За секој $x \in X$ постои непразното множество $A_x \subset \mathbb{R}$, такви што $F(x, y) = 0$.

Дефиниција 4.3.1. Велиме дека функцијата $y = f(x)$ определена погоре е зададена имплицитно со равенката $F(x, y) = 0$.

Се забележува дека секој $x \in X$ множеството A_x може да се состои само од еден елемент, да има повеќе елементи или да биде празно. Ако има само еден елемент, тогаш со равенката $F(x, y) = 0$ е зададена имплицитно само една функција. Ако има два или повеќе елементи, тогаш со равенката се зададени имплицитно повеќе функции, а ако нема ниеден елемент, тогаш со равенката не е зададена реална функција.

Дефиниционата област ја определуваме како множество вредности за променливата x за кои е во сила равенството $F\big(x, f(x)\big) = 0$.

Дефиниција 4.3.2. Нека X , Y и Z се три непразни множества и нека f и g се функции такви што $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ и нека функцијата $h\colon X \to Z$ е дефинирана преку равенството $h(x) = g\big(f(x)\big)$, за секој $x \in X$. Тогаш функцијата h се вика сложена функција или суперпозиција на функциите f и g и се означува со $g\, o\, f$. Значи, по дефиниција $(g\ o\ f)(x) = g(f(x))$, за секој $x \in X$.

Од начинот на конструкцијата на функцијата h следува дека таа има дефинициона област еднаква на множеството:

$$D_h = \{x | x \in Df \wedge f(x) \in Dg\}.$$

Значи ако множеството $\mathrm{D_h}$ не е празно тогаш постои сложена функција h дефинирана со равенството $h(x) = g\big(f(x)\big)$. Да забележиме дека ако X , Y и Z се три непразни множества, подмножества од $\mathbb{R}$, тогаш f, g и h се реални функции од еден реален аргумент.

Теорема 4.3.1. Суперпозицијата на функции е асоцијативна операција, односно ако $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to T$, се три реални функции соодветно дефинирани на X ,Y и Z, тогаш важи $\big(ho(gof)\big)(x) = ((hog)of)(x)$, за секој $x \in X$.

Доказ. Нека $h_1(x) = (ho(gof))(x)$ и $h_2(x) = \big((hog)of\big)(x)$. $\mathrm{h_1}$ е суперпозиција на $h\colon Z \to T$ и $gof\colon X \to Z$. Значи $h_1\colon X \to Y$ и $h_2\colon X \to T$. Останува да докажеме дека исти елементи пресликуваат во исти елементи. Имено:

$$\big(ho(gof)\big)(x) = h\big((gof)(x)\big) = h(g\big(f(x)\big)) \text{ , за секој } \in X \text{ ;}$$

$$\big((hog)of\big)(x) = (hog)\big(f(x)\big) = h(g\big(f(x)\big)) \text{ , за секој } x \in X,$$

со што доказот е завршен.

Пример 4.3.1.

Нека се дадени функциите $f(x) = 9 - 8x - x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

Суперпозицијата $h_1(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(9 - 8x - x^2) = \sqrt{9 - 8x - x^2}$.

Функцијата е дефинирана таму каде што $9 - 8x - x^2 \geq 0$, односно на сегментот $[-9, 1]$.

Суперпозицијата $h_2(x) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x}\big) = 9 - 8\sqrt{x} - \big(\sqrt{x}\big)^2 = 9 - 8\sqrt{x} - \sqrt{x}$. Функцијата е дефинирана за секој x од $[0, +\infty)$.

- **Поим за инверзна функција**

Дефиниција 4.3.3. Нека f го пресликува заемно еднозначно множеството X во множеството Y, тогаш функцијата $f^{-1}: Y \to X$ таква што за секој $y \in Y$, важи $f^{-1}(y) = x$, каде што x е единствениот елемент од X со својството $\mathrm{f(x) = y}$, се вика инверзна функција на функцијата $f: X \to Y$. Очигледно е дека $f^{-1}: Y \to X$ заемно еднозначно го пресликува Y на X, па инверзната функција на f^{-1} ќе биде f. Значи важи:

$$(f^{-1})^{-1} = f, f^{-1}(y) = x\,, (f^{-1})^{-1}(y) = x, f(x) = y$$

Сега за двете различни суперпозиции на f и f^{-1} добиваме:

$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x$;

$(f o f^{-1})(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f^{-1}(x) = y$.

Ова нешто покажува дека графиците на овие функции Γ_f и Γ_{f-1} се симетрични во однос на правата $y = x$. Исто така, од дефиницијата јасно е дека множеството на вредности на функцијата f е дефинициона област за функцијата f^{-1}, а дефиниционата област на функцијата f е множество на вредности на фукнцијата f^{-1}.

Пример 4.3.2. Дадена е функција $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$. Да се определи инверзната функција ако постои.

Решение. Имаме $D_y = \mathbb{R}$ и множество вредности $D_y^u = \mathbb{R}$. Да провериме дали пресликувањето е обратно еднозначно. Нека $x_1 \neq x_2$ и нека важи $(x_1) = y(x_2)$, односно

$$\frac{2^{x1} - 2^{-x1}}{2} = \frac{2^{x2} - 2^{-x2}}{2}\,, 2^{x1} - 2^{-x1} = 2^{x2} - 2^{-x2}, 2^{x1} - 2^{x2} = 2^{-x1} - 2^{-x2},$$

следува

$$(2^{x1-x2} - 1) = 0\,, x_1 = x_2,$$

што значи даденото пресликување е обратно еднозначно, односно постои инверзна функција. За нејзино ефективно определување, со оглед на симетријата со почетната функција, во аналитичкиот израз на почетната функција ги менуваме местата на x и y и новодобиената равенка ја решаваме по y.

$$x = \frac{2^y - 2^{-y}}{2}, \ (2^{2y} - 2x2^y - 1) = 0 \ ,$$

Во последната равенка воведуваме смена $2^y = t$ и ја добиваме равенката $t^2 - 2xt - 1 = 0$. Нејзини решенија се $t_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$. Со оглед на $x \leq \sqrt{x^2+1}$ и фактот дека $t > 0$ единствено можно решение е $t = x + \sqrt{x^2+1}$, односно $2^y = x + \sqrt{x^2+1}, y = \log_2(x + \sqrt{x^2+1})$.

4.4. Гранична вредност на функција

Дефиниција 4.4.1. Нека функцијата $y = f(x)$ е определена во некоја околина на точката $x_0 \in D$ (при што таа може да биде определена или не во x_0).

За функцијата $y = f(x)$ велиме дека има гранична вредност λ во точката x_0 ако за секој произволен мал број $\varepsilon > 0$ постои реален број $\delta > 0$,таков што:

$$(\forall x \in D)(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Тоа се означува со: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

Граничните вредности на функциите ги имаат следните својства:

1) Нека $y = f(x)$, и $y_1 = g(x)$ се две функции за кои важи $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lambda_2$.

Тогаш важат следниве релации:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\lambda_2 \neq 0$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2) Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$, тогаш:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \pm \infty$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0.$

Не постои строг критериум според кој се пресметува лимесот, но постапката треба да е таква што на крајот почетниот лимес треба да се доведе до лимес чија вредност е позната или очигледна. Сите чекори се сведуваат на математичка манипулација на изразот, наведените својства, некои правила и многу често, употреба на трикови. Кон пресметување на лимесот според дефиниција се пристапува многу ретко. Најчесто од интерес е да се испитува граничната вредност во точките во кои функцијата не е непрекината, бидејќи лимесот на функција во точка во која таа е непрекината е еднаков на вредноста на функцијата во таа точка.

Следниве неколку лимеси се сметаат за „познати“ при пресметувањето. Нивната вредност е дадена без доказ.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1;$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
- $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e;$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna, a > 0, a \neq 1.$

Специјално, ако $a = e$, тогаш:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k, k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$

Задача 4.4.1. Да ја определиме граничната вредност на функцијата

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x < 1 \\ 5, x > 1 \end{cases}$$

Решение:

Имаме $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3$ и $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5) = 5.$

Значи постојат $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, но $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, па функцијата нема гранична вредност во $x_0 = 1$.

Задача 4.4.2 . Да ја определиме граничната вредност на функцијата

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, x \leq 0 \\ x+2, x > 0 \end{cases},$$

(ако постои) во точката $x_0 = 0$.

Решение:

За $x < 0$, $f(x) = -x + 2$, па $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x + 2) = 2$.

За $x > 0$, $f(x) = x + 2$, па $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2) = 2$.

Бидејќи $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$, следува $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$.

Задача 4.4.3. Пресметајте ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x-5}$ б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x}{x^2+x}$ в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2-3x+5}{x^2-2x+3}$ г) $\lim\limits_{x - \infty} \frac{2x^3-x+3}{x^2-2x+5}$

Решение:

При пресметување гранична вредност на функција кога $x \to x_0$ и $x_0 \neq 0$, најпрво проверуваме колку е $f(x_0)$. Ако за $f(x_0)$ добиеме конкретна определена вредност, таа вредност е бараната гранична вредност. Ако за $f(x_0)$ добиеме некој израз од облик $\frac{0}{0}$, $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, овие изрази се неопределени, треба да направиме некоја трансформација во функцијата.

а) $f(x_0) = f(x) = \frac{9-9}{3-5} = \frac{0}{-2} = 0$

Добивме определен израз, што значи $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x-5} = 0$.

б) $f(x_0) = f(0) = \frac{0}{0}$

Ова претставува неопределен израз. Во ваков случај броителот и именителот ги разложуваме на прости множители и заедничките множители ќе ги скратиме:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2+2x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{(3x+2)}{(x+1)}.$$

По кратењето пак проверуваме што ќе добиеме за $f(x_0)$

$$f(x_0) = f(0) = \frac{0+2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2.$$

в) Кога $x \to \infty$ гранична вредност на функција пресметуваме на ист начин како гранична вредност на низа:

$$\lim_{x-\infty} \frac{3x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x-\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{3 + \frac{5}{x^2}}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

г) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x+3}{x^2-2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{0} = \infty$

Задача 4.4.4. Определи ја граничната вредност на функцијата:

а) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{3x^2-4} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1}{3}$

б) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+5)}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+5}{3} = \frac{5}{3}$

в) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+2x} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x} = \frac{-2-2}{-2} = 2$

г) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$

Задача 4.4.5. Пресметајте $\lim_{x\to 0} f(x)$ ако $f(x) = \frac{(2+x)^2-4}{x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(2+x)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4+4x+x^2-4}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(4+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(4+x) = 4$$

Задача 4.4.6. Пресметајте ги граничните вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$

Решение:

Во првиот пример добиваме $f(-3)=\frac{0}{0}$, а во вториот добиваме $f(2)=\frac{0}{0}$. Според тоа, треба да ги разложиме броителот и именителот на прости множители и заедничкиот множител да го скратиме. Во броителот на двете функции имаме квадратен трином. Квадратен трином разложуваме на прости множители на следниот начин:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

каде што x_1 и x_2 се корените на соодветната квадратна равенка.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x+3}=\frac{5}{6}$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+4)}{x}=\frac{6}{2}=3$

❖ Во следните примери ќе ја применуваме следната гранична вредност:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

Задача 4.4.7. Пресметајте:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,2x}{sin\,5x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3sin\,3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,3x}{3x}=3\cdot 1=3$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{sin\,x}{x}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}=\frac{1}{2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ 2x}{sin\ 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x\ sin\ 2x}{2x}}{\frac{5x\ sin\ 5x}{5x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

Задача 4.4.8. Пресметајте:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 5x}$

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{sin^2x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}\frac{sin^2x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{sin\ 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{\frac{5xsin5x}{5x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x}{5x}=\frac{8}{5}$

❖ Во следните задачи како познати ќе ги користиме следните гранични вредности:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Задача 4.4.9. Пресметајте ги следните гранични вредности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^x$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{x+5}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{5x+4}$.

Решение:

а) Ако $x\to\infty$, тогаш и $7x\to\infty$, а $\frac{5}{7x}\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{\frac{7x5}{5\,7}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{\frac{7x}{5}}\right]^{\frac{5}{7}} = e^{\frac{5}{7}}$$

б) На исти начин:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x+5}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{\frac{x+5}{5}\cdot\frac{5}{x+5}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{5}{x+5}x} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5x}{x+5}} = e^{5}$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x}\right)^{\frac{3x}{4}\frac{4}{3x}(2x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(2x+1)}{3x}} = e^{\frac{8}{3}}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^{5x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5-2}{x+5}\right)^{5x+4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-2}\frac{-2}{x+5}(5x+4)} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-10-8}{x+5}} == e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-10x-8}{x+5}} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$

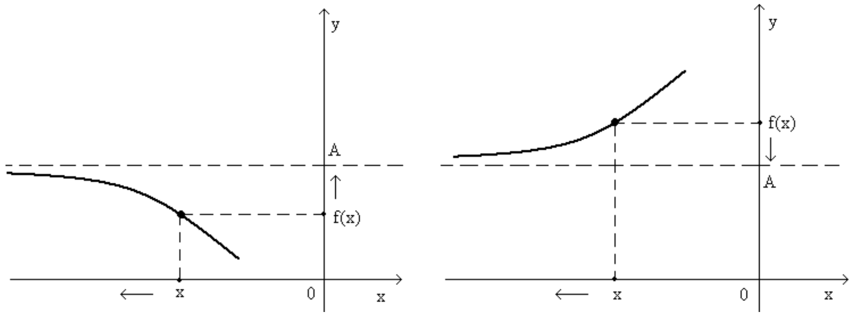
- **Асимптоти**

За испитувањето на текот на функција, особено за цртањето на нејзиниот график, корисно е да се најдат асимптотите. Асимптоти на графикот на функцијата се прави во рамнината, кон кои што дел од графикот на функцијата, односно некое подмножество на точки $(x, f(x))$, се стреми кон некоја права p, кога точката $(x, f(x))$ бескрајно се оддалечува од координатниот почеток. Овде под терминот „се стреми“ се подразбира дека граничната вредност на растојанието од точките со координати $(x, f(x))$ до дадената права p е еднакво на нула.

Дефиниција 4.4.2. Права $\boldsymbol{y = A}$ (којашто сече $\boldsymbol{y}$–оска во $\boldsymbol{A}$ и е паралелна на $\boldsymbol{x}$-оска) кон којашто графикот на функцијата $\boldsymbol{y = f(x)}$ сè повеќе и повеќе се приближува се нарекува хоризонтална асимптота (сл.15).

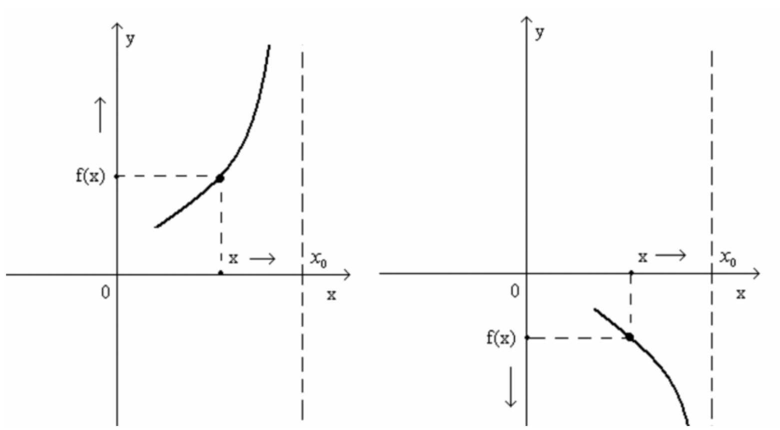
Правило за нејзино наоѓање:

Дадена е функцијата $y = f(x)$, бараме $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A \Rightarrow y = A$ е хоризонтална асимптота.



Слика 15

Дефиниција 4.4.3. Права $x = x_0$ (којашто сече x–оска во x_0 и е паралелна на y-оска) кон којашто графикот на функцијата $y = f(x)$ сѐ повеќе и повеќе се приближува се нарекува вертикална асимптота (сл.16).

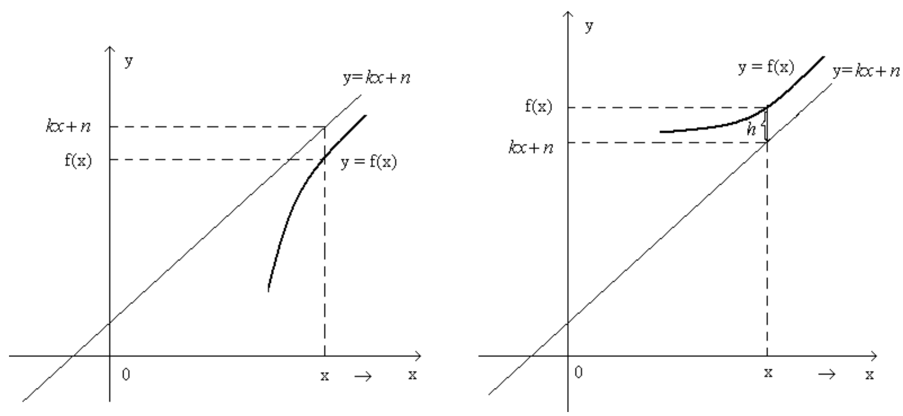


Слика 16

Треба да забележиме дека, покрај хоризонтална и вертикална асимптота, една функција $y = f(x)$ може да има и коса асимптота (сл.17).

$$y = kx + n, \text{ при што } k, n \in \mathbb{R} \text{ и } k \neq \pm\infty, k \neq 0,$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$



Слика 17

5. Диференцијално сметање на функции од еден реален аргумент

Основен поим во диференцијалното сметање е поимот извод (или деривација) на функција.

Изводот се дефинира како однос меѓу нараснувањето на вредноста на функцијата и нараснувањето на аргументот, кога нараснувањето на аргументот тежи кон нула. Од дефиницијата на изводот следи дека диференцијалното сметање се сведува на пресметки со гранични вредности (лимеси).

Нека $f(x)$ е некоја функција и нека со Δx **го** означиме нараснувањето на аргументот на функцијата, а со Δy нараснувањето на вредноста на функцијата, тогаш со лимесот $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ е зададен извод на функцијата $f(x)$**.**

Најчеста ознака на изводот на функцијата $f(x)$ е $f'(x)$**.**

5.1. Диференцијабилни функции

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на интервалот (a, b) и нека точката $x_0 \in (a, b)$. Велиме дека функцијата $\mathrm{f(x)}$ е диференцијабилна во точката $\mathrm{x_0} \in (\mathrm{a, b})$, ако постои реален број A таков што:

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{h} = 0$$

Да забележиме дека ако функцијата е диференцијабилна во точката $f(x)$ и ако означиме:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + r(h),$$

тогаш:

$$\lim_{h\to o}\frac{r(h)}{h}=0,$$

односно добивме дека $r(h)$ е бесконечно мала величина од повисок ред од h, кога $h \to 0$.

Теорема 5.1.1. Функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0, ако и само ако постои $f\,'(x_0)$ и притоа $f\,'(x_0)=A$.

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, односно нека е точно равенството $f\,'(x_0)=A$. Тогаш имаме:

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0=\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A$$

Од ова следува дека постои изводот и дека $f'(x_0)=A$.

Обратно. Нека постои изводот, односно нека

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0),$$

Од последното следува и равенството

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f\prime(x_0)}{h}=0,$$

а кое нешто значи и точност на равенството, при што $A=f'(x_0)$.

Со што доказот е завршен.

Дефиниција 5.1.1. Производот $f'(x_0)h$ се вика диференцијал на функцијата $y=f(x)$ и се означува со $dy=f'(x_o)h$.

Геометриски диференцијалот е еднаков со нараснувањето по тангентата во точката со апсциса x_0+h.

Ако имаме предвид дека диференцијалот на аргументот x како функција е $dx=1\cdot h$, тогаш ја имаме следната ознака за диференцијалот

$$dy=f'(x_o)dx.$$

Теорема 5.1.2. Ако функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, тогаш таа е и непрекината во точката x_o.

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна во точката x_o, а тоа значи дека постои реален број A таков што

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Ah}{h}=0,$$

односно важи равенството

$$\lim_{h \to o} (f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah) = 0,$$

од што следува

$$\lim_{h \to o} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0,$$

а тоа всушност е условот за непрекинатост на функцијата $f(x)$.

Да забележиме дека секоја непрекината функција не мора да биде диференцијабилна. Тоа се потврдува со функцијата $y = |x|$, која е непрекината во точката $x = 0$, а за истата точка имаме $f'(0-0) = -1$, $f'(0-0) = 1$, што значи дека функцијата нема извод во точката $x = 0$, односно не е диференцијабилна.

Дефиниција 5.1.2. Реалната функција $f(x)$ дефинирана на интервалот (a, b), велиме дека е диференцијабилна на (a, b), ако таа е диференцијабилна за секоја точка x, што припаѓа на интервалот (a, b). Ако на секој $\in (a, b)$ му го придружиме реалниот број $f'(x)$, ја добиваме реалната функција:

$$f' : (a, b) \to \mathbb{R},$$

која се нарекува изводна функција или просто извод на $f(x)$.

Од последната дефиниција следува дека ознаката за изводот може да се запише како:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

позната како Лајбницова ознака на првиот извод.

5.2. Поим за прв извод на функција од еден реален аргумент

Ако функцијата $f(x)$ е дефинирана во некоја околина $V(x_0\,, \varepsilon)$ на точката x_0 и ако постои границата $\lim_{h \to o} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, тогаш таа се вика извод на функцијата $f(x)$ во x_0 точката и се означува со $f\,'(x_0)$, односно:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Имаме два изводи на функцијата $f(x)$ со точка x_0 :	
Граница $f'(x_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$	**Граница** $f'(x_0) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Лев извод	**Десен извод**

Согласно со теоремата за граница добиваме дека функцијата $f(x)$ во точката x_0 има извод ако има лев и десен извод и ако тие се еднакви односно:

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$$

Да определиме изводи од неколку функции, при што наместо x_0 ќе пишуваме x**.**

- Нека е $f(x)=c$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to o}\frac{c-c}{h}=0$.

- Ако е $f(x)=x$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to o}\frac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to o}\frac{h}{h}=1$.

- За $f(x)=x^2$ добиваме:

$$f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to o}\frac{2xh+h^2}{h}=2x.$$

- За функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ го добиваме следното:

$$f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to o}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h+\sqrt{x}}\right)}=\lim_{h\to o}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+\sqrt{x}}\right)}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{1}{h\left(\sqrt{x+h+\sqrt{x}}\right)}=\lim_{h\to o}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Забелешка 5.2.1.

- Извод од збир, односно разлика на функции е збир (разлика) на изводите од функциите $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$;

- Константа што множи функција при определувањето на изводот се препишува односно го множи изводот на функцијата $\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot f'(x)$.

5.3. Кинематичко толкување на изводот

Нека една материјална точка врши праволиниско движење по законот на патот $\mathrm{s}=\mathrm{s}(\mathrm{t})$, каде што t е поминатото време. Нека во моментот на времето $\mathrm{t}=\mathrm{t}_1$ материјалната точка се наоѓа во положбата $\mathrm{s}(\mathrm{t}_1)$, а во моментот на времето $\mathrm{t}=\mathrm{t}_2$ таа се наоѓа во положбата $\mathrm{s}(\mathrm{t}_2)$. Количникот:

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = v_{sr}$$

претставува средна брзина на материјалната точка на временскиот интервал $[t_1 t_2]$. Јасно е дека $s = s(t)$ во математичка смисла е функција определена на сегментот $[t_1 t_2]$ и непрекината во t_1. Па ако ставиме $t_2 = t_1 + h$, и притоа допуштиме $h \to 0$, тогаш добиваме:

$$\lim_{h \to o} \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h} = s'(t_1) = v(t_1).$$

А тоа е моменталната брзина на материјалната точка во моментот на времето $t = t_1$, добиваме дека изводот на патот (како функција од времето) претставува брзина на материјалната точка. Ако $s = s(t)$, тогаш $s'(t_1) = v(t)$.

Воопшто, ако $\alpha = \alpha(t)$ е произволна физичка величина која зависи од времето t, тогаш имаме:

$$\lim_{h \to o} \frac{a(t+h) - a(t)}{h} = a'(t).$$

Аналогно, $a'(t)$ се вика брзина на промена на физичката величина $\alpha = \alpha(t)$.

Така на пример, ако $A = A(t)$ е извршената работа тогаш $A'(t)$ е $P(t)$, ефектот на работата, односно брзината на извршување на работата.

Пример 5.3.1. Материјална точка се движи праволиниски по законот на патот

$$s(t) = \frac{1}{3} t^3 + 3t^2 + 12.$$

Да се определи средната брзина на материјалната точка на временскиот интервал $[0{,}3]$ и моментот на времето во кој таа се достигнува.

Заменувајќи во формулата за средната брзина добиваме

$$v_{sr} \frac{s(3) - s(0)}{3} = \frac{48 - 12}{3} = 1,\ s'(t) = t^2 = 6t,$$

па од $s'(t_0) = v_{rs}$ следува равенката

$$t^2 + 6t - 12 = 0.$$

Нејзино позитивно решение е $t_0 = -3 + \sqrt{21}$ ≈1,58.

5.4. Изводи од елементарните функции

Изводите од елементарните функции ќе ги опеределиме користејќи ги докажаните **правила за изводите**.

1. За константната функција веќе добивме:

$y(x) = c, \quad y' = 0\,, \quad (c') = 0$

2. За логаритамската функција $y = ln\,x$, со оглед на границата $\lim\limits_{h \to o} \frac{ln(1+h)}{h}$ =1, добиваме:

$$y' = (ln\,x)' = \lim_{h \to o} \frac{ln(x+h) - ln(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to o} \frac{x}{h} ln\,\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

3. За логаритамската функција по основа a, односно $y = log_a$, со оглед на границата $\lim\limits_{h \to o} \frac{log_a(1+h)}{h} = \frac{1}{In_a}$ добиваме:

$$y' = (log_a x) = \lim_{h \to o} \frac{log_a(x+h) - log_a(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{1}{h} log_a(1 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{x} \lim_{h \to o} \frac{h}{x} log_a(1 + \frac{h}{x})$$
$$= \frac{1}{x\,In\,a}$$

4. За изводот на степенската функција $y = x^a$, каде што $a \in \mathbb{R}$ со оглед на претставувањето $x^a = e^{a\,In\,x}$, и правилото за извод од сложена функција добиваме**:**

$$y' = (x^a) = (e^{a\,In\,x}) = e^{a\,In\,x}(a\,In\,x)' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

5. Со оглед на големата примена посебно ќе го издвоиме случајот за $a = \frac{1}{2}$, односно за изводот на функцијата $y = \sqrt{x}$, добиваме:

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6. За функцијата имаме $a = 1$, па согласно 4) за изводот добиваме:

$$y' = (x)' = 1 \cdot x^0 = 1$$

7. За изводот на експоненцијалната функција $y = a^x$ за $a > 0$, со оглед на границата $\lim\limits_{h \to o} \frac{\mathrm{a}^h}{h} = In\,a$ добиваме:

$$y' = (a^x)' = \lim_{h \to o} \frac{\mathrm{a}^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to o} \frac{\mathrm{a}^h - 1}{h} = a^x In\,a$$

8. Специјално ако $a = e$ основата на природните логаритми тогаш за изводот на функцијата $y = e^x$, од правилото (7), добиваме:

$$y' = (e^x)' = e^x.$$

9. За изводот на функцијата $y = sin\,x$, со оглед на познатата границата $\lim\limits_{h \to o} \frac{sin\,(x+h)}{h} = 1$, добиваме**:**

$$y' = (sin\,x)' = \lim_{h \to o} \frac{sin(x+h) - sin\,x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to o} \frac{sin\,\frac{x+h-x}{2} cos \frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h \to o} \frac{sin\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \to o} cos\,\frac{2x+h}{2} = cos\,x$$

10. За функцијата $y = cos\,x$ од истите причини добиваме**:**

$$y' = (\cos x)' = \lim_{h\to o} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{-2\sin\frac{x+h-x}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h} = \lim_{h\to o} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to o} \sin\frac{2x+h}{2} = -\sin x$$

11. За изводот на функцијата $y = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, со оглед на правилото за извод од количник на две функции добиваме**:**

$$y' = (tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)' * \cos x - \sin x * (\cos)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

12. За изводот на функцијата $y = ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$, од истите причини добиваме:

$$y' = (ctg\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{(\cos x)' * \sin x - \cos x * (\sin)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

За циклометриските (аркус) функции ќе го примениме правилото за извод од инверзна функција запишано како $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$**.**

13. За функцијата $y = arcsin\, x$, со оглед на $x = \sin y$ и равенството (*) имаме:

$$y' = (arcsin\, x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

14. За функцијата $y = arccos\, x$, со оглед на $x = \cos y$ и равенството (*) имаме:

$$y' = (arccos\, x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

15. За функцијата $y = arctg\, x$, со оглед на $x = tg\, y$ и равенството (*) имаме:

$$y' = (arctg\, x)' = \frac{1}{(tg\, y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

16. За функцијата $y = arcctg\, x$, со оглед на $x = ctg\, y$ и равенството (*) имаме:

$$y' = (arcctg\, x)' = \frac{1}{(ctg\, y)'} = \sin^2 y = \frac{1}{1 + ctg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Користејќи ги правилата за извод од сложена функција следува испишаната таблица на изводи од воопштени елементарни функции, кои често се среќаваме:

Функција		Извод
1	$\boldsymbol{y = (f(x))^a}$	$\boldsymbol{y' = af'(x)(f(x))^{a-1}}$
2	$\boldsymbol{y = \sqrt{f(x)}}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)}$
3	$\boldsymbol{y = ln(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)}$
4	$\boldsymbol{y = log_a(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = \frac{1}{f(x)\, In * a} f'(x)}$
5	$\boldsymbol{y = e^{f(x)}}$	$\boldsymbol{y' = e^{f(x)} * f'(x)}$
6	$\boldsymbol{y = a^{f(x)}}$	$\boldsymbol{y' = a^{f(x)} * f'(x)\, ln\, a}$
7	$\boldsymbol{y = sin(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = f'(x) * cos f(x)}$
8	$\boldsymbol{y = cos(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = -f'^{(x)} * sin(f(x))}$
9	$\boldsymbol{y = tg(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = f'(x) \frac{1}{cos^2 f(x)}}$
10	$\boldsymbol{y = ctg(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = -f'(x) \frac{1}{sin^2 f(x)}}$
11	$\boldsymbol{y = arcsin\, (f(x))}$	$\boldsymbol{y' = f'(x) \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}}}$
12	$\boldsymbol{y = arccos\, (f(x))}$	$\boldsymbol{y' = -f'(x) \frac{1}{\sqrt{1 - f^2(x)}}}$
13	$\boldsymbol{y = arctg(f(x))}$	$\boldsymbol{y' = f'(x) \frac{1}{1 + f^2(x)}}$
14	$\boldsymbol{y = arcctg\, (f(x))}$	$\boldsymbol{y' = -f'(x) \frac{1}{1 + f^2(x)}}$

Пример 5.4.1. На $f(x) = y = arctg\sqrt{x}$ изводот ќе биде:

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}\,.$$

За функцијата $y = In\,(x^2 + 2x)$ изводната функција е:

$$y' = \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x}$$

Да забележиме ако во сложената функција има повеќе степени на сложеност (повеќе суперпозиции), на пример три, $y(x) = f\big(g\big(h(x)\big)\big)$, тогаш изводната функција се добива согласно со формулата:

$$y'(x) = f'(g) \cdot g'(h) \cdot h'(x).$$

- **Непрекинатост на функција**

Дефиниција 5.4.1. Функцијата $y = f(x)$ е непрекината во точката $x = a$ ако се исполнети следните три услови:

1) $f(x)$ е дефинирана во точката $x = a$;
2) Постои $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = A$.

Од дефиницијата за непрекинатост на функција следува дека функцијата $f(x)$ е непрекината во точката $x = a$, ако е дефинирана во таа точка и ако таа граница е еднаква со вредноста на функцијата во истата точка. Обратното не важи, бидејќи функцијата може да има граница во точката $x = a$, а да не е дефинирана во истата точка.

Затоа функцијата $f(x)$ ќе биде прекината во точката ако еден или повеќе услови од дефиницијата за непрекинатост не се исполнети.

5.5. Диференцијално сметање

Со помош на формулата

$$(x^p)' = p \cdot x^{p-1}$$

може да се одреди извод од која било степенска функција.

Пример 5.5.1.

1) Ако $f(x) = x^5$, тогаш $f'(x) = 5x^4$

2) Ако $f(x) = \frac{1}{x^5}$, тогаш $f'(x) = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

3) Ако $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$, тогаш $f'(x) = \left(x^{\frac{3}{7}}\right)' = \frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}} = \frac{3}{7 * \sqrt[7]{x^4}}$

Користејќи ги правилата за диференцирање на производ на константа и функција и збир на функции може да се диференцираат функции кои се линеарни комбинации од функции чии изводи се претходно познати. На пример, полиномната функција е линеарна комбинација од степенски функции, па нејзиното диференцирање е едноставно и се сведува на неколкукратно применување на првите две правила за диференцирање.

Пример 5.5.2.

1) Ако $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 3$, тогаш $f'(x) = 6x^2 + 10x - 7$.

2) Ако $f(x) = 2sin\ x + 3e^x - 2\sqrt{x}$, тогаш $f'(x) = 2cos\ x + 3e^x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

➢ Примената на правилото за диференцирање на производ

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Пример 5.5.3.

1) Ако $f(x) = x^2 \cdot arcsin\ x$, тогаш $f'(x) = 2x\ arcsin\ x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

2) Ако $f(x) = 3 \cdot 2^x \cdot tg\ x$, тогаш $f'(x) = 3 \cdot ln2 \cdot 2^x \cdot tg\ x + \frac{3 \cdot 2^x}{cos^2 x}$

Ако функцијата е производ на три функции $f = u \cdot v \cdot w$, тогаш

$$f' = ((u \cdot v) \cdot w)' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' = (u' \cdot v + u \cdot v') \cdot w + (u \cdot v) \cdot w'$$
$$= u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

Пример 5.5.4.

Ако $f(x) = x^2 \cdot ln\ x \cdot arctg\ x$, тогаш $f'(x) = 2x \cdot ln\ x \cdot arctg\ x + x \cdot arctg\ x + \frac{x^2 ln\ x}{1+x^2}$

➢ Примената на правилото за диференцирање на количник

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Пример 5.5.5.

1) Ако $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$, тогаш $f'(x) = \frac{2x(2x-1)-(x^2+1)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$

2) Ако $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$, тогаш $f'(x) = \frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$

3) Ако $f(x)=\frac{ln\,x\cdot\cos x}{x^2}$, тогаш $f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\cos x-\ln x\cdot\sin x\right)\ln x\cos x\cdot 2x}{x^4}=$

$\frac{x\cos x-x^2 ln\,x\cdot\sin x-2x\cdot\ln x\cos x}{x^4}=\frac{\cos x-x\cdot\ln x\cdot\sin x-2\cdot ln\,x\cos x}{x^3}$

- Извод од сложена функција $y'=y'(x)=y'(U)\cdot U'(x)$

Пример 5.5.6.

1) Ако $f(x)=sin^2x$, тогаш $f'(x)=((\sin x)^2)'=2\cdot\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\,cosx=\sin 2x$

2) Ако $f(x)=e^{x^2-5x}$, тогаш $f'(x)=e^{x^2-5x}\cdot(x^2-5x)'=\ 2x\cdot e^{x^2-5x}\cdot 5e^{x^2-5x}$

3) Ако $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+6}$, тогаш $f'(x)=\left((x^2+5x+6)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot(x^2+5x+6)^{-\frac{2}{3}}\cdot$

$(x^2+5x+6)'=\frac{2x+5}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+5x+6)^2}}$

4) Ако $f(x)=\sin x\,ln\sqrt{x}$, тогаш $f'(x)=\cos ln\sqrt{x}\cdot(ln\sqrt{x})'=\cos\ln\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

$(\sqrt{x})=cos\,ln\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos ln\sqrt{x}}{2x}$

5.6. Геометриско толкување на изводите

Нека во рамнината е фиксиран Декартов правоаголен координатен систем xOy и нека е нацртан графикот на функцијата $y=f(x)$, која минува низ точката $M_0(x_0,f(x_0))$.

Ако $M_1(x_1,f(x_1))$ е некоја точка од кривата $y=f(x)$, тогаш количникот:

$\frac{f(x_1)f(x_0)}{x_1-x_0}=tg\,\alpha,$

каде што α е аголот што отсечката M_0M_1 го гради со x -оската.

Ако ставиме $x_1=x_0+h$ и притоа допуштиме $h\to 0$, тогаш добиваме дека отсечката M_0M_1 се стреми кон тангентата на кривата во точката M_0, а за границата од количникот имаме:

$$\lim_{h\to o}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=tg\varphi,$$

каде што φ е аголот што тангентата на кривата $y=f(x)$ го гради со x -оската.

Дефиниција 5.6.1. Правата која минува низ точката $M_0(x_0, f(x_0))$ и има равенка:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

се вика тангента, а правата:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

се вика нормала за кривата $y = f(x)$ повлечена во точка $M_0(x_0, f(x_0))$.

Пример 5.6.1. Да се определат равенките на тангентите и нормалите повлечени кон кривата $y = x^2 + 2x = 3$, во точките M_0, за кои ординатата е еднаква на 3.

Од $y_0 = 3$ следува $3 = x^2 + 2x + 3$, $x^2 + 2x = 0$, $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$.

Јасно е дека $y'(x) = 2x + 2$, $y'(-2) = 2(-2) + 2 = -2$ и $y'(0) = 2(0) + 2 = 2$.

Сега со замена во равенките добиваме:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ *и* $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,

$t_1: y - 3 = -2(x + 2)$, $y = -2x - 1$, $t_2: y - 3 = 3(x - 0)$, $y = 2x + 3$;

$n_1: y - 3 = \frac{1}{2}(x + 2)$, $2y = x + 8$ $n_2: y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0)$, $2y = 6 - x$

Пример 5.6.2. Да се определат равенките на тангентите на кривата $y = x^{2+1}$ што минуваат низ точката $A(1,0)$.

Бидејќи точката $A(1,0)$ не е точка од кривата следува дека $M(x_0, y_0)$, каде што $y_0 = x^2 + 1$, треба да ја определиме од условот тангентата да минува низ точката $A(1,0)$. Односно равенката на тангентата да е задоволена од координатите на точката $A(1,0)$.

Сега со оглед на $y'(x_0) = 2x_0$ за равенката на тангентата добиваме:

$$y - x_0^2 - 1 = 2x_0(x - x_0).$$

Со заменување на координатите на точката $A(1,0)$ во последната равенка се добива квадратната равенка:

$$x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0.$$

Нејзини решенија се $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

За соодветните y_1 и y_2 добиваме $y_1 = 4 - 2\sqrt{2}$ и $y_2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

Равенките на соодветните тангенти се: $t_1: y = 2\big(1 - \sqrt{2}\big)x - 2)(1 - \sqrt{2})$,

$$t_2 : y = 2\left(1+\sqrt{2}\right)x - 2)(1+\sqrt{2}).$$

5.7. Изводи од имплицитни и параметарски зададени функции

Нека со равенката $F(x,y)=0$, имплицитно е зададена функцијата $y=y(x)$ на некој интервал (a,b), односно нека важи: $F\left(x,y(x)\right)=0$, за секој $x\in(a,b)$.

Ако во оваа равенка го примениме правилото за определување на извод од сложена функција може да се пресмета изводот на функцијата $y=y(x)$ во секоја точка $x\in(a,b)$, за која функцијата $y=y(x)$ е диференцијабилна.

Постапката за определување на изводот би била следната. Прво, согласно со правилата за определување на изводи, од сите зададени елементарни функции во однос на x определуваме прв извод означен со F_x' , а потоа истото го правиме и со елементарните функции што зависат од y и го означуваме F_y' , а потоа го множиме со y'.

Ја добиваме равенката:

$$F_x'(x,y)+F_{xy}'(x,y)*y'=0, \text{ од каде } y'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_x'(x,y)}.$$

Така на пример, нека $y=y(x)$ е зададена имплицитно со равенката $x+y(x)+e^{xy(x)}$**.** Барајќи извод по x постепено добиваме $1+y'(x)+e^{xy(x)}\left(y(x)+xy'(x)\right)=0$**,** од што со решавање по $y'(x)$ добиваме:

$$y'(x)=\frac{1+y(x)e^{xy(x)}}{1+e^{xy(x)}}\textbf{.}$$

Забелешка.

- $F_x'(x,y)=1+y(x)e^{xy(x)}$ - кога определуваме извод од x (константата е y),
- $F_y'(x,y)=1+xe^{xy(x)}$ - кога определуваме извод од y (константата е x).

Пример 5.7.1. Да се определи изводот на функцијата $y(x)=(f(x))^{g(x)},(f(x)>0)$, ако се знае дека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции.

Функцијата $y(x)>0$ има дефинициона област $D_y=\left\{D_f\cap D_g\wedge f(x)>0\right\}$, во којашто таа е диференцијабилна. Со логаритмирање добиваме $ln(y(x))=g(x)\cdot ln(f(x))$.

Согласно со правилото за извод од имплицитно зададена функција добиваме:

$$\frac{y\prime(x)}{y(x)}=g'(x)\cdot ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

односно $y'(x)=(f(x))^{g(x)}\left[g'(x)\cdot ln\left(f(x)\right)+g(x)\frac{f\prime(x)}{f(x)}\right].$

Пример 5.7.2. Да се пресмета изводот на имплицитно зададената функција:

$$ln(x^2 + y^2) = 2arctg\frac{y}{x}$$

Согласно со формулите за извод од логаритам и аркус тангенс добиваме:

$$\frac{2x+2yy\prime}{x^2+y^2} = 2\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{y'x-y}{x^2}, \qquad \frac{2(x+yy\prime)}{x^2+y^2} = 2\frac{y'x-y}{x^2+y^2}, \qquad x + yy' = y'x - y.$$

Нека функцијата $y = f(x)$ е зададена со параметарските равенки $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ за $t \in (a, b) = E$. Ако функцијата $x = \varphi(t)$ е непрекината и монотона на интервалот (a, b), тогаш постои инверзна функција $t = \varphi^{-1}(x)$ и притоа за функцијата $y = f(x)$ важи:

$$f(x) = \Psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Значи функцијата $f(x)$е суперпозиција на функциите Ψ и φ^{-1}. За изводот на функцијата $y = f(x) = \Psi(\varphi^{-1}(x))$ имаме:

$$y'(x) = f'^{(x)} = [\Psi(\varphi^{-1}(x))]' = \psi'(t) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \frac{\psi\prime(t)}{\varphi\prime(t)},$$

значи добиваме:

$$y'(x) = \frac{\psi\prime(t)}{\varphi\prime(t)},$$

којашто е формула за пресметување на изводи од параметарски зададени функции, ако постојат изводите $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ и ако $\varphi'(t) \neq 0$.

Пример 5.7.3. Да се определи изводната функција за функцијата $f(x)$, зададена со параметарските равенки: $x = a(t - sin\, t)$, $y = a(t - cos\, t)$.

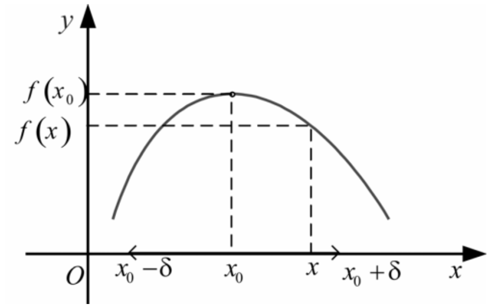
Дадено е дека $x = a(t - cos\, t) = 2a\, sin^2\frac{t}{2}$, $y = a\, sin\, t = 2\, a\, sin\frac{t}{2}cos\frac{t}{2}$.

Сега за изводот на функцијата $f(x)$ имаме:

$$f'(x) = \frac{y}{x} = \frac{2a\, sin\frac{t}{2}cos\frac{t}{2}}{2a\, sin^2\frac{t}{2}} = \frac{cos\frac{t}{2}}{sin\frac{t}{2}} = ctg\,\frac{t}{2}.$$

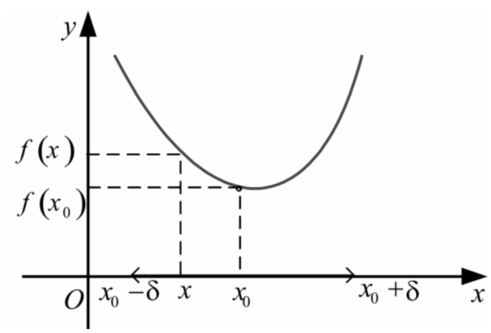
5.8. Локални екстреми. Теорема на Ферма

Дефиниција 5.8.1. За функцијата $y = f(x)$ велиме дека има локален максимум во точката $x_0 \in D_f$ ако постои околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathbb{R}$ така што $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, важи $f(x) \leq f(x_0)$ (сл.18).



Слика 18

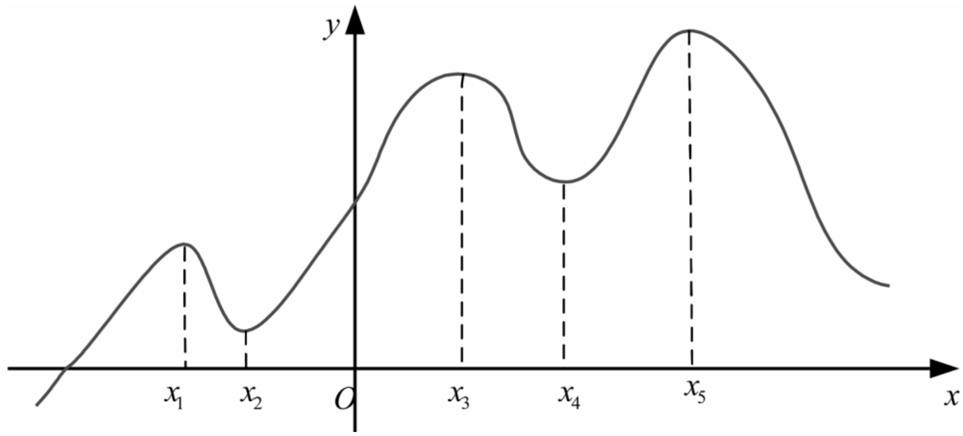
Дефиниција 5.8.2 .За функцијата $y = f(x)$ велиме дека има локален минимум во точката $x_0 \in D_f$ ако постои околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathbb{R}$ така што $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, важи $f(x) \geq f(x_0)$ (сл.19).



Слика 19

Дефиниција 5.8.3. Локален максимум и локален минимум се познати под заедничко име локални екстреми. Треба да забележиме дека една функција може да има (еден или повеќе локални екстреми), а може и да нема локални екстреми.

На пример, функцијата $y = f(x)$ зададена графички на следниот начин има 5 локални екстреми и тоа: два локални минимума и три локални максимума (сл.20).



Слика 20

Теорема 5.8.1. (на Ферма) Ако функцијата $y = f(x)$ има локален екстрем во точката $x_0 \in D_f$ и ако во таа точка функцијата е диференцијабилна, тогаш првиот извод на функцијата во таа точка е еднаков на нула т.е. $f'(x_0) = 0$.

Дефиниција 5.8.4. Точка $x_0 \in D_f$ во којашто првиот извод на функцијата $y = f(x)$ е еднаков на нула се нарекува стационарна точка за функцијата $y = f(x)$.

Една функција $y = f(x)$ во стационарна точка x_0 може да има локален екстрем, но и не мора да има локален екстрем.

Дефиниција 5.8.5. Точка $P(x_0, f(x_0))$, при што x_0 е стационарна точка во којашто функцијата $y = f(x)$ нема локален екстрем, односно кривата на функцијата во таа точка ја менува насоката на својата испакнатост (закривеност), се нарекува превојна точка за функцијата $y = f(x)$.

Да забележиме дека превојна точка е точка во којашто функцијата од испупчена надолу (конвексна) поминува во испупчена нагоре (конкавна) и обратно.

Природата на стационарната точка $x_0 \in D_f$ на функцијата $y = f(x)$ може да се испита со помош на:

1. интервали на монотоност и

2. изводи од повисок ред.

Во првиот случај се користат следниве две теореми:

Теорема 5.8.2. Ако $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a, b) и притоа $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ е монотоно растечка во споменатиот интервал.

Теорема 5.8.3. Ако $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во интервалот (a, b) и притоа $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ е монотоно опаѓачка функција во споменатиот интервал.

Во случај на испитување на стационарната точка x_0 за функцијата $y = f(x)$ со помош на изводи од повисок ред го користиме следново:

Правило: Бараме извод од втори ред $y'' = f''(x)$.

- Ако $f''(x) < 0$, тогаш функцијата има локален maximum;
- Ако $f''(x) > 0$, тогаш функцијата има локален minimum;
- Ако $f''(x) = 0$, тогаш бараме извод од трети ред $y''' = f'''(x)$.
- За $f'''(x) \neq 0$ функцијата има превојна точка $P(\,x_0, f(\,x_0))$.
- За $f'''(x) = 0$ бараме извод од четврти ред $y^{IV} = f^{IV}(x)$.
- Ако $f^{IV}(x) < 0$ тогаш функцијата има локален maximum.
- Ако $f^{IV}(x) > 0$ тогаш функцијата има локален minimum.
- Ако $f^{IV}(x) = 0$ тогаш бараме извод од петти ред $y^{V} = f^{V}(x)$.
- Ако $f^{IV}(x) \neq 0$ функцијата има превојна точка $P(\,x_0, f(\,x_0))$.
- За $f^{V}(x) = 0$ бараме извод од шести ред итн.

Процесот на испитувањето на природата на стационарната точка x_0 завршува во моментот кога ќе добиеме некој извод од повисок ред во точката x_0 да е различен од нула. Во тој момент гледаме каков е редот на споменатиот извод. Ако тој е парен имаме локален екстрем во стационарната точка x_0, а ако редот на споменатиот извод е непарен имаме превојна точка $P(\,x_0, f(\,x_0))$.

5.9. Некои основни теореми на диференцијално сметање

Теорема 5.9.1. (на Рол) Ако функцијата $y = f(x)$ е:

1) непрекината на сегментот $[a, b]$,

2) диференцијабилна во интервалот (a, b) и

3) $f(a) = f(b)$,

тогаш постои точка c помеѓу a и b во којашто првиот извод на функцијата е еднаков на нула т.е. $f'(c) = 0, (a < c < b)$.

Теорема 5.9.2 (на Лагранж). Ако функцијата $y = f(x)$ е:

1) непрекината на сегментот $[a, b]$ и

2) диференцијабилна во интервалот (a, b),

тогаш постои точка c помеѓу a и b т.е. $a < c < b$, така што $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Теорема 5.9.3. (на Коши) Ако $y = f(x)$ и $y = g(x)$ се две дадени функции:

1) непрекинати на сегментот $[a, b]$ и

2) диференцијабилни во интервалот (a, b), и притоа $g'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$

тогаш постои точка c помеѓу a и b т.е. $a < c < b$, така што $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

- **Монотоност на функции со помош на изводи**

Теорема 5.9.4 .Ако во секоја точка од интервалот (a, b) првиот извод на функцијата $y = f(x)$ е позитивен т.е. $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ е монотоно растечка функција во тој интервал.

Теорема 5.9.5. Ако во секоја точка од интервалот (a, b), $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ е монотоно опаѓачка функција во тој интервал.

При испитувањето на текот и на конструкцијата на графикот на функцијата $y = f(x)$ одредуваме:

1) дефиниционата област;

2) пресечните точки на функцијата со кооординатните оски;
3) симетричните својства на функцијата (парност, непарност и периодичност);
4) асимптотите на функцијата (ако постојат);
5) екстремните вредности, нивната природа и интервалите на монотоност;
6) интервалите на конвексност и конкавност, превојни точки;
7) скицирање на графикот.

Задача 5.9.1. Да се конструира графикот на функцијата $y = x^3 - 3x + 2$

1) $D_f = R$

2) $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^{-3} + 3x + 2 = -(x^3 - 3x - 2) \neq f(x)$

Функцијата не е ниту парна ниту непарна.

3) Нули на функцијата

$x^3 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ е корен на оваа равенка.

$x^3 - x - 2 + 2 = 0,$ $x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0,$ $x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) = 0$

$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$

$(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0$

4) Функцијата нема асимтоти бидејќи е полиномна.

5) Монотоност:

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 > 0$

$3x^2 > 3$

$x^2 > 1$

$x \epsilon (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

→ Функцијата расте на интервалите $(-\infty, -1)$ и $(\infty, 1)$

$y' < 0$

$3x^2 - 3 < 0$

$3x^2 < 3$

$x^2 < 1$

$x \epsilon (-1,1)$

→ Функцијата опаѓа на интервалите $(-1,1)$

6) Екстреми:

$y' < 0$

$3x^2 - 3 = 0$
$3x^2 = 3$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = -2 + 2 = 0$

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$

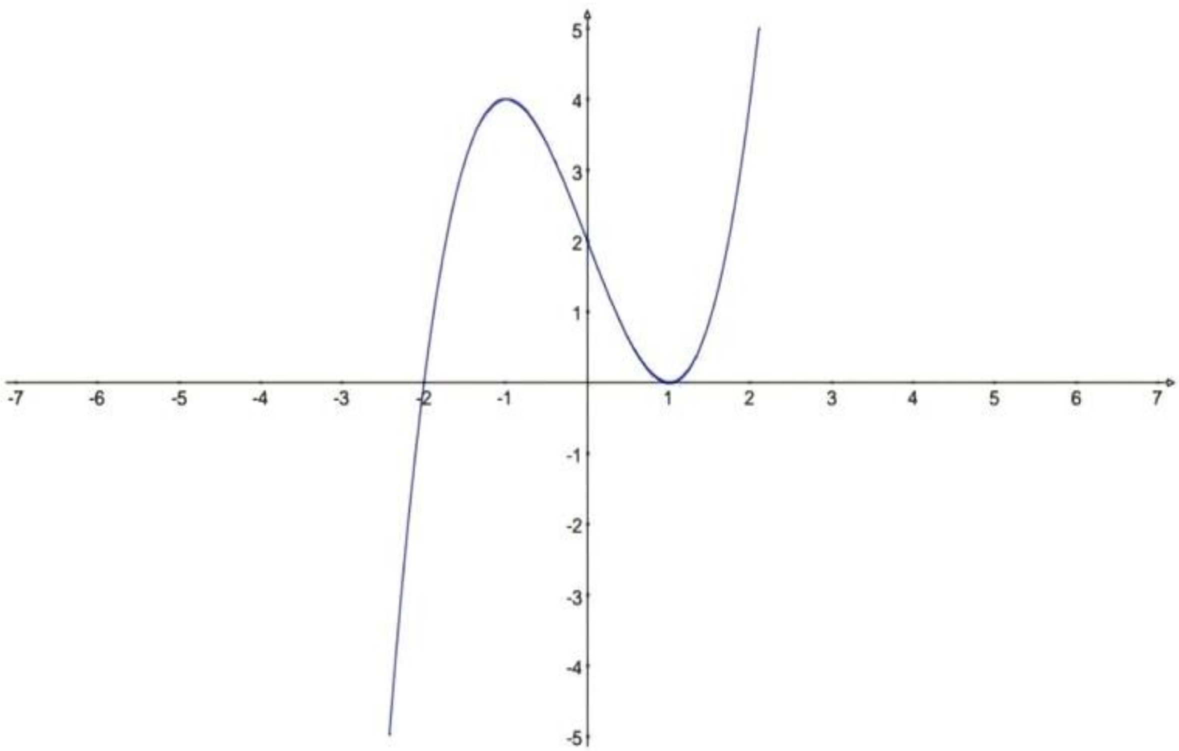
$\left.\begin{array}{l} A(1,0) \\ B(-1,4) \end{array}\right\rangle$ можни екстреми

$y'' = 6x$

$y''(1) = 6 > 0 \Rightarrow A(1,0)$

$y''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow B(-1,4)$

Значи добиваме дека $\mathrm{A}(1,0)$ е минимум, а $\mathrm{B}(-1,4)$ е максимум.



Задача 5.9.2. Да се конструира графикот на функцијата $y = \frac{x^2}{x-1}$

Решение:

1) Дефинициона област :$D_f = R \ / \ \{1\}$ т.е. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

2) Парност на функцијата

$y(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-(x+1)} \neq -y(x)$ ⇒функцијата не е ниту парна ниту непарна.

3) Нули на функцијата:

$\frac{x^2}{x-1} = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 0$

$x = 0$

Значи $\mathrm{A}(0,0)$ – нула на функцијата од втор ред.

4) Асимптоми на функцијата:

- Вертикална асимтота $x = 1$

  Ако ставиме смена $x = t - 1$, $t > 0$, $t \longrightarrow 0$ за левата граница.

  Ако ставиме смена $x = t + 1$, $t > 0$, $t \longrightarrow 0$

  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{(1-t)^2}{1-t-1} \to -\infty$$

  $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \mathit{lim}_{t\to 0} \frac{(1+t)^2}{1+t-1} \to +\infty$$

- Хоризонтална асимптота

  $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$ па функцијата нема хоризонтална асимтота.

- Коса асимптота

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \mathit{lim}_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = (f(x) - ax) = \mathit{lim}_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x(x-1)} - 1 * x \right)$$

$$= \mathit{lim}_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \mathit{lim}_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 1$$

Косата асимптота на функцијата е правата $y = x + 1$

5) Монотоност:

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$y' > 0$ $\qquad x^2 - 2x > 0$

$$x(x-2) > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

На последните интервали функцијата расте.

Функцијата опаѓа на интервалот $(0{,}2)$.

6) Екстреми

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$y' > 0$ $\qquad x^2 - 2x = 0$

$$x(x-2) = 0$$

$x_1 = 0$ $\qquad y'(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$

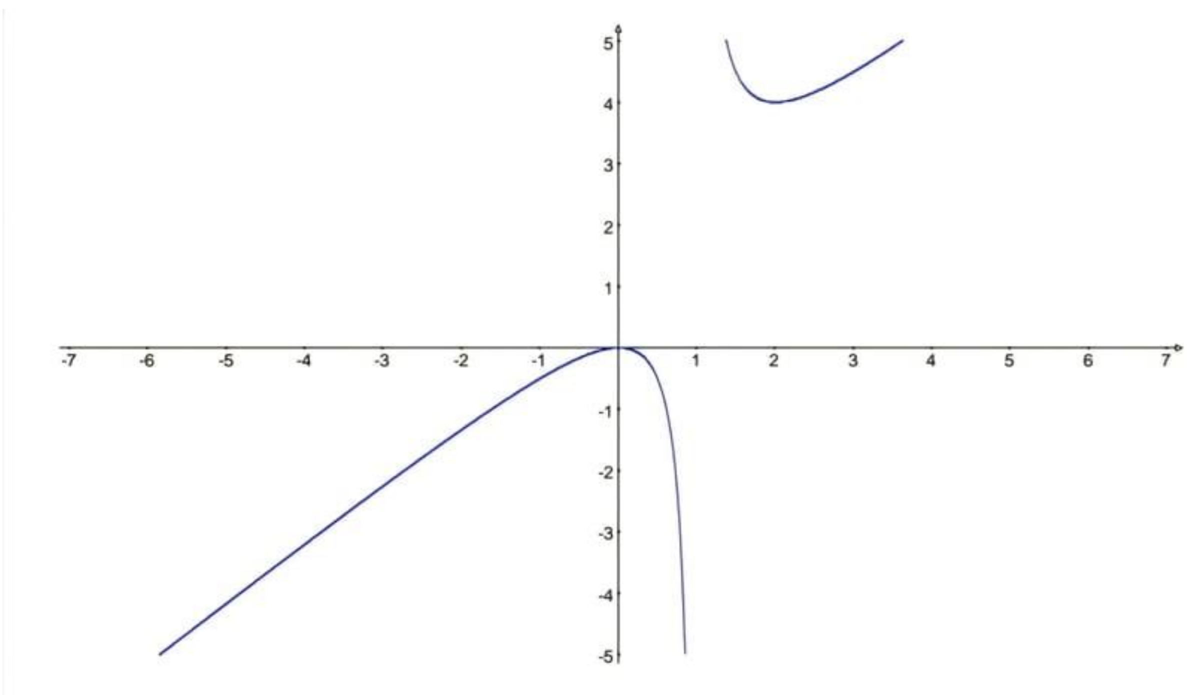
$x_2 = 2$ $\qquad\qquad\qquad$ $y' = \frac{2^2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$

А$(0,0)$ и В$(2,4)$ се можни екстреми.

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\big((2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)\big)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y''(0) = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \ \Rightarrow \mathrm{A}(0,0)$ е максимум.

$y''(0) = \frac{2}{1} > 0 \Longrightarrow \mathrm{B}(2,4)$ е минимум.



- **Задачи за самостојна работа**

Одреди го изводот $f'(x)$ на функцијата $f(x)$ ако:

Задача 1. а) $f(x) = x^7$ б)$f(x) = 2x^{10}$ в) $f(x) = \frac{x^8}{4}$ г) $f(x) = \frac{3}{x^3}$

д) $f(x) = 8 \cdot \sqrt[4]{x^5}$

Задача 2. а)$f(x) = -x^5 + 2x^3 + 6x - 1$ б) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

в) $f(x) = (2x + 1)^3$

Задача 3. а) $f(x) = x \cdot \ln x$ б) $f(x) = 5x^3\ arctg\ x$ в) $f(x) = x^2 \sin x \cdot 10^x$

Задача 4. а)$f(x) = \frac{1-x}{1+2x}$ б) $f(x) = \frac{1}{tg\ x}$ в) $f(x) = \frac{xe^x}{x^2+1}$

Задача 5. а) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}$ б) $f(x) = (x^2 + 1)^{12}$ в) $f(x) = cos^2 x$

г) $f(x) = \ln \frac{x}{x^2+2}$

Задача 6. Да се испита текот на функцијата и да се конструира нејзиниот график:

а) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

б) $y = \frac{x+1}{2x-3}$;

в) $y = \frac{4}{2+x^2}$.

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

Борко Илиевски (2011) Математика 1, Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје

Боро Пиперевски (2001) Математичка анализа I, Електротехнички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје

Даниел Велинов, Ѓорѓи Маркоски, Силвана Петрушева (2017), Математика, Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје

Дончо Димовски, Костадин Тренчевски, Ристо Малчевски, Борис Јосифовски (1993) Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје

Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски, Н. Целакоски, Виша математика, книга 1, 2, 3, 4, Просветно дело, Скопје, 1994.

Зоран Мисајлески, Предавања по векторска и линеарна алгебра, Скопје (2018)

Лазо Димов (2006) Математика 1, Машински факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, Мартин Лукаревски (2018)

Lidija Stefanovic, Matematika 1, Gradevinski fakultet, Sveuciliste u Zagrebu, Zagreb (2010)

Марија Оровчанец, Билјана Крстеска, Векторска и линеарна алгебра, Градежен факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј”, Скопје, 2018, (2017)

Ристо Малчевски (2007), Математичка анализа I, Армаганка, Скопје

Р. Малчески, Математичка анализа I, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 2002.

T. Doslic, Nikola Sandric (2008), Matematika I, Prehrambeno Tehnoloski fakultet, Elektrotehnicki fakultet, Osijek

Т. Пејович (1969), Teorija nizova za student tehnickih fakulteta, SKC Nis

(ISBN 978-608-244-991-3)