Благој Делипетрев; Наташа Стојковиќ; Зоран Утковски

МОДЕЛИРАЊЕ И СИМУЛАЦИИ - ПРАКТИКУМ

Штип, 2015

Благој Делипетрев; Наташа Стојковиќ; Зоран Утковски
МОДЕЛИРАЊЕ И СИМУЛАЦИИ - ПРАКТИКУМ

Автори: Доц. Д-р. Благој Делипетрев, М-р. Наташа Стојковиќ, Доц. Д-р. Зоран Утковски

МОДЕЛИРАЊЕ И СИМУЛАЦИИ - ПРАКТИКУМ

Рецензенти: Проф. Д-р. Владо Гичев, Вон. Проф. Д-р. Татјана Атанасова-Пачемска

Лектор: Слаѓан Спасовски

Уредник:

Техничко уредување:

Издавач: Факултет за Информатика
Универзитет „Гоце Делчев" - Штип

Објавено во е-библиотека:
https://e-lib.ugd.edu.mk

DOI:

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека

"Св. Климент Охридски", Скопје

519.85/.87:004.94(075.8)(076)

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ" – ШТИП

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

Доц. Д-р. Благој Делипетрев, М-р. Наташа Стојковиќ, Доц. Д-р. Зоран Утковски

МОДЕЛИРАЊЕ И СИМУЛАЦИИ

Практикум

Штип, 2015

ПРЕДГОВОР

Практикумот „Моделирање и симулации“ е наменет за студентите од прв циклус студии на Факултетот за информатика за предметот Моделирање и симулации кој се слуша во петтиот семестар, со фонд на часови 2+1+1, на студиските програми Компјутерски науки и Компјутерско инженерство и технологии.

Во *првото* поглавје се дадени примери за генерирање на случајни броеви со средно-квадратниот метод, методот на линеарна конгруентност, адитивниот конгруентен метод и комбинираниот линеарно конјугиран метод.

Во *второто* поглавје се дадени примери за генерирање на случајни променливи од апсолутно непрекинат тип со метод на инверзна трансформација и метод на конволуција.

Во *третото* поглавје се дадени примери за генерирање на случајни променливи од дискретен тип, како и примери за генерирање на случајни променливи со техниката за прифаќање и одбивање.

Во *четвртото* поглавје се дадени решени задачи од случајни процеси, нивни бројни карактеристики и задачи од Маркови процеси.

Во *петтото* поглавје се дадени решени задачи од процеси на раѓање и умирање, како и задачи од вериги на Марков.

Во *шестото* поглавје се дадени решени задачи од задачи од вериги на Марков.

Во *седмото* поглавје се дадени решени задачи од системи за масовно опслужување.

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР 6
1. ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ БРОЕВИ 8
1.1 Средно- квадратен метод 8
1.2 Метод на линаерна конгруентност 8
2. ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД АПСОЛУТНО НЕПРЕКИНАТ ТИП 9
2.1 Техника со инверзна трансформација 9
2.2 Техника на конвулуција 11
3.ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД ДИСКРЕТЕН ТИП 11
3.1 Техника со прифаќање и отфлање 12
4. СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ 13
4.1 Пуасонов процес 19
4.3 Стационарни процеси 21
4.4 Маркови процеси 23
5. Процес на раѓање и умирање 27
6. ВЕРИГИ НА МАРКОВ 32
7. СИСТЕМИ ЗА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ 45

1. ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ БРОЕВИ

1.1 Средно- квадратен метод

Со овој метод се тргнува од четирицифрениот бројX_0. Овој број се квадрира и доколку се добие осумцифрен број, постапката е во ред. Доколку тоа не е случај, се додаваат нули од лево за да се добие осумцифрен број. Средните четири цифри го сочинуваат бројот X_1. Истата постапка потоа се повторува за добиениот бројо X_1. За да се добијат случајни броеви во интервалот (0,1), броевите X_0, X_1,… се делат со 1000.

Задача 1.1. X_0=1234 ; X_0^2 = 1522756. Бидејќи се добива број со седум цифри, се додава 0 од лево и се добива бројот 01522756. Средните четири цифри го сочинуваат бројот 5527. Истата постапка се повторува и за овој број. На крајот, броевите се делат со 1000. Подолу се дадени неколку случајни броеви генерирани на овој начин:

0.1234, 0.5227, 0.3215, 0.3362, 0.3030, 0.1809, 0. 2724, 0.4201, 0.6484, 0.0422, 0.1780, 0.1684, 0.8361, 0.8561, 0.2907,...

Ако се започне со X_0 =2345 се добива следнава низа:

0.2345, 0.4990, 0.9001, 0.180, 0.324, 0.1049, 0.1004, 0.0080, 0.0040,...
нулите зад децималната запирка не се отстрануваат.

Ако се започне со X_0=2100 се добива низата

0.2100, 04100, 08100, 0.6100, 04100 која се повторува.

1.2 Метод на линеарна конгруентност

Со овој метод се генерира низата од цели броеви X_1, X_2,…. помеѓу 0 и m-1 кои ја задоволуваат следната рекурзивна релација:

$$X_{i+1}=(aX_i + c) \bmod m \text{ за } i = 1, 2, \ldots$$

каде што X_0 е почетна вредност или семе, a е константен множител, c е прираснување, и m е модул.

Можни се следните два случаи:

1. Ако $c \neq 0$, тогаш имаме **мешан линеарен, конгруентен метод.**
2. Ако c = 0, тогаш имаме **мултипликативен конгруентен метод**.

Случајните броеви помеѓу 0 и 1 ќе се добијат со равенството:

$$R_i = \frac{X_i}{m}$$

Задача 1.2. (За лабораториски вежби.) Да се напише програма за **линеарен, конгруентен генератор**, каде што параметрите a, c и m се влезни променливи. Да се определи периодот на генерираните низи и да се утврди што се случува со зголемување на m.

Влезни променливи се:

- n - големина на низата која ќе се генерира (целобројна вредност);
- X_0 - почетна вредност (целобројна вредност);
- a - константа (целобројна вредност);
- c - прираснување (целобројна вредност);
- m - модул (целобројна вредност);

Како резултат од програмата треба да се добие:

- X_i - низа од цели броеви (целобројни вредности) , $1 \leq i \leq n$;
- R_i - низа од случајни броеви (реални вредности) , $1 \leq i \leq n$;
- P - вредност на периодата во низата $\frac{X_i}{R_i}$, (целобројна вредност);
- Да се испечатат вредностите на низата R_i
- Да се испечати вредноста на периодата P.

2. ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД АПСОЛУТНО НЕПРЕКИНАТ ТИП

2.1 Техника со инверзна трансформација

Чекор 1. Се пресметува функцијата на распределба $F(x)$ на случајната променлива X која што треба да се генерира.

Чекор 2. Се става $F(X) = R$, каде што $R \sim U(0,1)$ распределба.

Чекор 3. Се решава равенката $F(X) = R$ по X. Се добива:

$$X = F^{-1}(R),$$

Чекор 4. Се генерираат реализации $R_1, R_2, \ldots$ на случајна променлива со рамномерна распределба и се пресметува

$$X_i = F^{-1}(R_i), \qquad i=1,2,\ldots$$

Задача 2.1 (За лабораториски вежби.) Со техника на инверзна трансформација да се симулираат случајни променливи со експоненцијална распределба на даден интервал.

Експоненцијалната распределба ја има следната густина на веројатност:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Со примена на техниката со инверзна трансформација, за генерирање на случајна променлива со експоненцијална распределба се користи следнава формула:

$$X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-R).$$

Влезни променливи се:

- n - големина на низата која ќе се генерира (целобројна вредност);
- *lambda* - параметар за пресметка (реална вредност);
- R_i - низа од случајни броеви добиени со генератор на случајни броеви (реални вредности) , $0 \leq i \leq n - 1$;
- Како генератор на случајни броеви може да се користи помошната променлива *random* (реална вредност) - види подолу;
- Како генератор на случајни броеви може да се користи и линеарно конгруентен генератор (задача 1.2).

Како резултат од програмата треба да се добие:

- X_i - низа од случајни броеви добиени со експоненцијална распределба (реални вредности) , $0 \leq i \leq n - 1$;
- Да се испечатат вредностите на низата X_i.

Задача 2.2 (За лабораториски вежби.) Со техника на инверзна трансформација да се симулираат случајни променливи со **рамномерна** распределба на даден интервал.

Рамномерната распределба на интервал (a, *b*) распределба ја има следната густина на распределба:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{инаку} \end{cases},$$

Со примена на техниката со инверзна трансформација, за генерирање на случајна променлива со рамномерна распределба се користи следнава формула:

$$X_i = a+(b - a)R_i.$$

Влезни променливи се:

- n - големина на низата што ќе се генерира (целобројна вредност);
- a - параметар за пресметка – долна граница (реална вредност);
- b - параметар за пресметка – горна граница (реална вредност);
- Ri - низа од случајни броеви добиени со генератор на случајни броеви (реални вредности) , $0 \leq i \leq n - 1$;
- Како генератор на случајни броеви може да се користи помошната променлива *random* (реална вредност) - види подолу;
- Како генератор на случајни броеви може да се користи и линеарно конгруентен генератор (задача 1.2).

Како резултат од програмата треба да се добие:

- X_i - низа од случајни броеви добиени со рамномерна распределба (реални вредности) , $0 \leq i \leq n– 1$;
- Да се испечатат вредностите на низата X_i.

2.2 Техника на конволуција

Распределбата на веројатностите на сума од две или повеќе независни случајни променливи е наречена конволуција на распределбите на оригиналните распределби. Со овој метод со помош на две или повеќе случајни променливи се добива нова случајна променлива со сакананата распределба. Оваа техника се користи за добивање на Ерлангова и биномна распределба.

Задача 2.3 (За лабораториски вежби.) Да се симулира **Ерлангова распределба** со техниката на конволуција, користејќи го генераторот на случајни броеви.

Случајната променлива X со Ерлангова распределба со параметри (K, θ), може да се добие од K независни експоненцијално распределени случајни променливи, X_i (i = 1,…, K), кои имаат математичко очекување $\frac{1}{K\theta}$

$$X = \sum_{i=1}^{K} X_i ,$$

Значи секој X_i може да биде генериран со равенката $X_i = -1/K\theta \ln(1- R_i)$, i=1,3,..   , и се добива:

$$X = \sum_{i=1}^{K} -\frac{1}{K\theta}\ln R_i = -\frac{1}{K\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{K} R_i\right).$$

Влезни променливи се:

- K - параметар за пресметка (реална вредност);
- *teta* - параметар за пресметка (реална вредност);
- Како генератор на случајни броеви може да се користи помошната променлива *random* (реална вредност) (задача 2.1);
- Како генератор на случајни броеви може да се користи и линеарно конгруентен генератор (задача 1.2).

Како резултат од програмата треба да се добие:

- R_i - низа од случајни броеви (реални вредности) , $1 \le i \le K$;
- Да се испечати вредноста на променливата X.

3. ГЕНЕРИРАЊЕ НА СЛУЧАЈНИ ПРОМЕНЛИВИ ОД ДИСКРЕТЕН ТИП

Сите дискретни распределби може да се генерираат со користење на техниката на инверзна трансформација, со пребарување во табела, и др.
Во општ случај, нека случајната променлива X е од облик:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le x_1\\ r_1, & x_1<x\le x_2\\ r_2, & x_2<x\le x_3\\ \ldots & \ldots\\ r_{n-1}, & x_{n-1}<x\le x_n\\ r_n, & x>x_n\end{cases}, \qquad \text{каде} \quad r_k=p_1+p_2+\ldots+p_k.$$

Постапката за генерирање е следната:

- Се генерира случаен број R_1,
- Се бара i таков што, ако $R_1 = R$,
- $F(x_{i-1}) = r_{i-1} < R \le r_i = F(x_i)$.
- Се става $X_1 = x_i$.

Задача 3.1 (За лабораториски вежби.) Да се креира **дискретна случајна променлива** заедно со веројатностите и нивните соодветни вредности. Со помош на генераторот на случајни броеви, **да се симулира** дискретната случајна променлива.

Влезни променливи се:

- n - големина на случајната променлива (целобројна вредност);
- X_i - низа од реални вредности x на случајната променлива , $1 \le i \le n;$
- P_i - низа од соодветни веројатности p за вредностите x на случајната променлива (сумата на сите p мора да е 1) , $1 \le i \le n;$
- k - големина на низата од случајни променливи која треба да се генерира;
- Како генератор на случајни броеви може да се користи помошната променлива *random* (реална вредност) (задача 2.1);
- Како генератор на случајни броеви може да се користи и линеарно конгруентен генератор (задача 1.2).

Како резултат од програмата треба да се добие:

- R_i - низа од случајни броеви добиени со генератор , $0 \le i \le k - 1;$
- Y_i - низа добиена како резултат од симулацијата на дискретната случајна променлива (ги прима вредностите од низата X_i) , $0 \le i \le k – 1;$
- Да се испечатат вредностите на низата Y_i.

2. 3.1 Техника со прифаќање и отфрлање

Да ја разгледаме уште и техниката за прифаќање и отфрлање
Оваа техника се состои во следното:

- Случајни броеви (R), распределени со некоја распределба, се генерираат сè додека не се задоволи некој услов.
- Кога условот ќе биде задоволен, се пресметува случајната променлива $X = f(R)$.

Задача 3.3 Да се генерира случајна променлива X која е рамномерно распределена на интервал [1/4, 1].

Чекор 1. Се генерира случаен број R;

Чекор 2а. Ако $R \ge 1/4$, се дозволува $X = R$, и се оди на чекор 3;

Чекор 2б**.** Ако R< 1/4, се отфрла R, и се оди на чекор 1;

Чекор 3. Ако е потребна друга вредност рамномерно распределена на [1/4,1], се повторува целата постапка тргнувајќи од чекор 1, ако не овде се завршува постапката.

Задача 3.4 (За лабораториски вежби.) Со техника на прифаќање и одбивање да се симулира Пуасонова распределба.

Пуасоновата распределба е дадена со распределбата на веројатностите:

$$p(n) = P(N = n)= e^{-\alpha}\alpha^{n}/n!, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Процедурата за генерирање на Паусонова распределба ги содржи следниве чекори:

Чекор 1. Се поставува $n = 0$, $P = 1$;

Чекор 2. Се генерира случаен број R_{n+1} и се заменува P со $P\cdot R_{n+1}$;

Чекор 3. Ако $P<e^{-\alpha}$ тогаш се зема $N= n$, во спротивно се отфрла моменталното n, се зголемува за 1, и се оди на чекор 2.

Влезни променливи се:

- *alfa* - параметар за пресметки (реална вредност);
- Како генератор на случајни броеви може да се користи помошната променлива *random* (реална вредност) (задача 2.1);
- Како генератор на случајни броеви може да се користи и линеарно конгруентен генератор (задача 1.2).

Како резултат од програмата треба да се добие:

- R_i - низа од случајни броеви добиени со генератор , $0 \le i \le k - 1$, каде што k зависи од тоа колку пати е извршен циклусот;
- Да се испечати вредноста на n по извршувањето на *while* циклусот.

4. СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Дефиниција 4.1 Нека (Ω, F, P) е даден простор на веројатност и нека T е непразно множество. Ако X_t е случајна променлива дефинирана на просторот (Ω, F, P) за секој $t\in T$, $\{X_t , t\in T\}$ е случаен процес.

T се нарекува параметарско множество и најчесто t е временски параметар. За фиксно $t \in T$, X_t е случајна променлива која се нарекува *пресек* на процесот во време t.

Ако во случајниот процес се фиксира $E \in \Omega$ тогаш

$$T \times \{E\} \to \{X(t, E) = x_t\ ,\ t \in T\ \}$$

е неслучајна функција од t. $x_t = x\ (t)$, $t \in T$ се нарекува *реализација* или *траекторија* на процесот.

Функцијата на распределба од n – ред ($n \in N$) за случајниот процес $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ е функција дефинира со:

$$F_n(t_1,\ldots t_n; x_1,\ldots x_n) = P\{X_{t_1} < x_1,\ldots X_{t_n} < x_n\},\quad (t_1,\ldots t_n) \in T^n,\quad (x_1,\cdots x_n) \in R^n$$

Математичкото очекување на случајниот процес $\{X_t\ ,\ t \in T\}$ е очекува вредност на случајната променлива X_t:

$$m_X\ (t) = EX(t),\quad t \in T$$

Почетен момент од ред (1,1) $R_X(t_1,\ t_2)$ е заедничкиот момент на случајните променливи X_{t_1} и X_{t_2} :

$$R_X(t_1,t_2) = E(X_{t_1}, X_{t_2})$$

Во специјален случај, кога $t_1 = t_2 = t$, $R_X\ (t,\ t) = E(X^2(t))$ е вториот почетен момент на случајната променлива X_t, и

$$C_X(t\ ,\ t) = E(X_t - m_X(t))^2 = s_X^2$$

е *дисперзија на случајниот процес* $\{X_t\ ,\ t \in T\}$.

Автокорелациона функција $C_X\ (t_1,\ t_2)$ е коваријанса помеѓу случајните променливи X_{t_1} и X_{t_2} т.е.

$$C_X(t_1,t_2) = \operatorname{cov}(t_1,t_2) = E((X_{t_1} - m_X(t_1))((X_{t_2} - m_X(t_2)))$$

со елементарни трансформации се добива:

$$\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= E(X_{t_1}, X_{t_2}) - m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) \end{aligned}$$

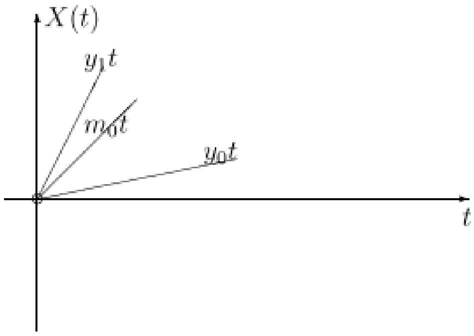
Задача 4.1. Нека Y е случајна променлива со математичко очекување $EY = m_0$ и дисперзија $DY = \sigma_0^2$ и нека $\{X_t = Y \cdot t \mid t \in (0, \infty)\}$ е даден случаен процес:

a) На што се сведува процесот, ако се фиксира E , односно t.
b) Да се определи функцијата на распределба од n – ти ред на случајниот процес X_t , n =1,2,…

c) Да се определат карактеристиките на случајниот процес X_t.

Решение:

a) Y е случајна променлива па за фиксно $E_0 \in \Omega$, $Y(E_0) = y_0 \in$ R. Тогаш $X(t, E_0) = X(t) = y_0 t$, $t \in (0, \infty)$ е функција од t, т.е. траекторија на процесот X_t. Геометриски $X(t)$ е полуправа која започнува во координатниот почеток (0,0) (без таа точка) (слика 1). За друга вредност $E = E_1$ се добива друга траекторија на процесот, т.е. друга полуправа која почнува во (0,0)



Фигура 4.1. Траекторија на процесот X_t

Ако $t = t_0$е фиксно, тогаш $X(t_0,\omega) = X(\omega) = t_0 \cdot Y$ е случајна променлива.

b) Функцијата на распределба од прв ред на случајниот процес $\{X_t | t \in (0, \infty)\}$ е од облик:

$$F_1(t, x) = P\{X_t < x\} = P\{Y \cdot t < x\} = P\{Y < x/t\} = F_Y(x/t),$$

функцијата на распределба од втор ред е:

$$\begin{aligned}
&F_2(t_1,t_2;x_1,x_2) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2\} = \\
&P\{Y \cdot t_1 < x_1, Y \cdot t_2 < x_2\} = P\{Y < x_1/t_1, Y < x_2/t_2\} \\
&= P\{Y < \min\{x_1/t_1, x_2/t_2\}\} = F_Y(x)
\end{aligned}$$

каде што $x = \min\{x_1/t_1, x_2/t_2\}$

Во општ случај, за функцијата од n – ти ред се добива:

$$\begin{aligned}
&F_2(t_1,t_2,\ldots t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2,\ldots,X_{t_n} < x_n\} = P\{Y \cdot t_1 < x_1, Y \cdot t_2 < x_2,\ldots,Y \cdot t_n < x_n\} \\
&= P\{Y < x_1/t_1, Y < x_2/t_2,\ldots Y < x_n/t_n\} = P\{Y < \min\{x_1/t_1, x_2/t_2,\ldots x_n/t_n\}\} = F_Y(x)
\end{aligned}$$

каде што $x = \min\{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots x_n/t_n\}\}$

c) Математичкото очекување на случајниот процес X_t се определува на следниот начин:

$$m_X(t) = EX_t = E(tY) = tE(Y) = tm_0$$

и тоа е всушност, очекуваната траекторија на процесот. За почетниот момент од ред (1.1) добиваме:

$$R_X(t_1,t_2) = E(X_{t_1}X_{t_2}) = E(t_1Y\, t_2Y) = t_1t_2EY^2 = t_1t_2(m_0^2 + \sigma_0^2)$$

па корелационата функција ќе има облик:

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = t_1t_2(m_0^2 + \sigma_0^2) - t_1t_2m_0^2 = t_1t_2\sigma_0^2$$

И за дисперзијата на случајниот процес $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ се добива:

$$s_X^2(t) = DX_t = C_X(t\ ,\ t) = \sigma_0^2 t^2$$

Задача 4.2. Нека X и Y се независни случајни променливи со нормална распределба $N(0,1)$ и нека $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ е случаен процес дефиниран со $X_t = e^tX + t^2Y$. Да се најдат следите карактеристики на случајниот процес X_t :

a) Математичкото очекување;
b) Автокорелационата функција;
c) Дисперзијата.

Решение:

Бидејќи случајните променливи X и Y имаат $N(0,1)$ распределба, следува дека:

$EX = EY = 0$ и $DX = DY = 1$,а од $DX = E(X^2) - (E(X))^2$ и се добива $E(X^2) = DX + (E(X))^2 = 1 + 0 = 1$ и аналогно $E(Y^2) = 1$.

a) $m_X(t) = E(e^tX + t^2Y) = e^tEX + t^2EY = e^t\cdot 0 + t^2\cdot 0 = 0$,

b)
$$C_X(t_1,t_2) = E((X_{t_1} - m_x(t_1))((X_{t_2} - m_x(t_2))) = E(X_{t_1}X_{t_2}) = E((e^{t_1}X + t_1^2Y)(e^{t_2}X + t_2^2Y))$$
$$= E(e^{t_1+t_2}X^2 + (e^{t_1}t_2^2 + e^{t_2}t_1^2)XY + t_1^2t_2^2Y^2) = e^{t_1+t_2}EX^2 + (e^{t_1}t_2^2 + e^{t_2}t_1^2)EXEY + t_1^2t_2^2EY^2$$
$$= e^{t_1+t_2}\cdot 1 + 0 + t_1^2t_2^2\cdot 1 = e^{t_1+t_2} + t_1^2t_2^2$$

c) $DX_t = C_X(t\ ,\ t) = e^{t+t} + (tt)^2 = e^{2t} + t^4$.

Задача 4.3. Да се најде математичкото очекување, автокорелационата функција и дисперзијата на случајниот процес $X_t = \cos(\lambda t + X)$, $t \in R$ каде што λ е константа, а X е случајна променлива со рамномерна распределба $U(0, 2\pi)$

Решение: Густината на распределба на случајната променлива X е:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in (0, 2\pi) \\ 0, & x \notin (0, 2\pi) \end{cases}$$

За математичкото очекување добиваме:

$$m_X(t) == E(\cos(\lambda t + X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + x) p_X(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t + x) \frac{1}{2\pi} dx$$

$$\underbrace{=}_{z=\lambda t + x} \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} \cos z dz = \frac{1}{2\pi} \sin z \Big|_{\lambda t}^{\lambda t + 2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t + 2\pi) - \sin(\lambda t)) = \frac{1}{2\pi}(\sin(\lambda t) - \sin(\lambda t)) = 0.$$

За автокорелационата функција се добива:

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) = E(X_{t_1} X_{t_2}) = E(\cos(\lambda t_1 + X)\cos(\lambda t_2 + X))$$

со примена на смената $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ се добива:

$$\begin{aligned} &= E(\frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 + \lambda t_2 + 2X) + \frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 - \lambda t_2)) = \\ &= \frac{1}{2} E(\cos(\lambda t_1 + \lambda t_2 + 2X)) + \frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 - \lambda t_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t_1 + \lambda t_2 + 2x) p_X(x) dx + \frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 - \lambda t_2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t_1 + \lambda t_2 + 2x) \frac{1}{2\pi} dx + \frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 - \lambda t_2) = \\ &= 0 + \frac{1}{2}\cos(\lambda t_1 - \lambda t_2) = \frac{1}{2}\cos(\lambda(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

За дисперзијата се добива:

$$DX_t = C_X(t, t) = R_X(t, t) - (m_X(t))^2 = \frac{1}{2}\cos 0 - 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Задача 4.4. Експериментот се состои во фрлање на монета. Дефинираме процес $\{X_t, t \in T\}$ на следниот начин:

$$X_t = \begin{cases} \sin(\pi t), & \text{ако падне грб} \\ 2t, & \text{ако падне глава} \end{cases}$$

Да се определи функцијата на распределба $F(t\,; x)$, за $t = 1/4$, $t = 1/2$, $t = 1$.

Решение: Со A го означува случајниот настан „падна грб“. Тогаш $P(A)=\frac{1}{2}$. За фиксно t, X_t е случајна променлива, па $F(t\ ,\, x)$ е нејзина функција на распределба. Нека $t = \frac{1}{4}$, тогаш се добива случајната променлива

$$X_{1/4} = \begin{cases} \sqrt{2}/2, & \text{ако падне грб} \\ 1/2, & \text{ако падне глава} \end{cases}$$

Притоа , $P\{X_{1/4}=1/2\}=P(\overline{A})=1/2$ и $P\{X_{1/4}=\sqrt{2}/2\}=P(A)=1/2$ па законот на распределба на $X_{1/4}$ ќе биде:

$$X_{1/4} : \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

па соодветната функција на распределба ќе биде:

$$F(1/4, x) = \begin{cases} 0, & x \le 1/2 \\ 1/2, & 1/2 < x \le \sqrt{2}/2 \\ 1, & x > \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

За $t = \frac{1}{2}$, случајната променлива $X_{1/2}$ се сведува на константата, т.е. $P\{X_{1/2}=1\}=1$, од каде што се добива дека:

$$F(1/2, x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

За $t=1$ се добива случајната променлива:

$$X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

па за нејзината функција на распределба се добива:

$$F(1, x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1/2, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

4.1 Пуасонов процес

Нека настаните се појавуваат во случајно избрани точки t_i, i =1,2, … Секој настан се случува независно од другите и бројот на настани што се појавиле во интервалот со должина t (за фиксно t) е случајна променлива со Пуасонова распределба $P(\lambda t)$.

Дефинираме процес $\{X_t , t\in T\}$ на следниот начин:

$$X_0 = 0,$$

и $X_{t_1} - X_{t_2}$ е број на настани во интервалот (t_1, t_2). За дадено t, X_t е број на појавени настани во интервалот (0, t). Така што:

$$P\{X_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Задача 4.5. Да се определат математичкото очекување и дисперзијата на Пуасоновиот процес.

Решение: За дадени t_a и t_b ($t_a > t_b$), случајната променлива $X_{t_a} - X_{t_b}$ која означува број на еднородни настани кои се појавуваат во интервалот (t_b,t_a) има Пуасонова распределба со параметар $\lambda(t_a - t_b)$ т.е.

$$P\{X_{t_a} - X_{t_b} = k\} = \frac{(\lambda(t_a - t_b))^k}{k!} e^{-\lambda(t_a - t_b)}$$

За Пуасонова распределба е познато дека:

$$E(X_{t_a} - X_{t_b}) = \lambda(t_a - t_b) \qquad (4.1)$$

додека за:

$$E(X_{t_a} - X_{t_b})^2 = \lambda^2 (t_a - t_b)^2 + \lambda(t_a - t_b)$$

Сега нека t_a, t_b, t_c и t_d се дадени реални позитивни броеви такви што $t_a > t_b > t_c > t_d$. Тогаш случајните променливи $X_{t_a} - X_{t_b}$ и $X_{t_c} - X_{t_d}$ означуваат број на настани кои се појавиле во интервалите (t_b,t_a)и (t_d,t_c), соодветно. Бидејќи настаните се појавуваат независно еден од друг, бројот на настани кои се појавиле во два дисјунктни временски интервали е независен, т.е. $X_{t_a} - X_{t_b}$ и $X_{t_c} - X_{t_d}$ се независни случајни променливи. Од независноста следува дека:

$$E((X_{t_a} - X_{t_b})(X_{t_c} - X_{t_d})) = \lambda^2 (t_a - t_b)(t_c - t_d)$$

Ако пак $t_a > t_c > t_b > t_d$, тогаш интервалите (t_b,t_a)и (t_d,t_c) не се дисјунктни, па случајните променливи $X_{t_a} - X_{t_b}$ и $X_{t_c} - X_{t_d}$ не се независни. Затоа, тие случајни променливи ќе ги претставиме како сума на две независни случајни променливи. Имено,

$$X_{t_a} - X_{t_b} = [X_{t_a} - X_{t_c}] + [X_{t_c} - X_{t_b}]$$

$$X_{t_c} - X_{t_d} = [X_{t_c} - X_{t_b}] + [X_{t_b} - X_{t_d}]$$

Со замена на последните две равенства се добива:

$$\begin{aligned} E((X_{t_a} - X_{t_b})(X_{t_c} - X_{t_d})) &= E([X_{t_a} - X_{t_c}][X_{t_c} - X_{t_b}]) + E([X_{t_a} - X_{t_c}][X_{t_b} - X_{t_d}]) \\ &+ E([X_{t_c} - X_{t_b}]^2) + E([X_{t_c} - X_{t_b}][X_{t_b} - X_{t_d}]) \\ &= \lambda^2(t_a - t_c)(t_c - t_b) + \lambda^2(t_a - t_c)(t_b - t_d) + \\ &\lambda^2(t_c - t_b)^2 + \lambda^2(t_c - t_b)(t_b - t_d) \end{aligned}$$

Со средување се добива дека:

$$E((X_{t_a} - X_{t_b})(X_{t_c} - X_{t_d})) = \lambda^2(t_a - t_b)(t_c - t_d) + \lambda(t_c - t_b) \quad (4.2)$$

Ако во (4.1) замениме $t_a = t$ и $t_b = 0$, добиваме :

$$m(t) = \lambda t$$

Ако пак, во (4.2) замениме $t_a = t_1$и $t_c = t_2$, а $t_b = t_d = 0$, добиваме дека:

$$R(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2, \text{ за } t_1 > t_2.$$

Аналогно, за $t_1 \leq t_2$, се добива дека:

$$R(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1$$

Значи:

$$R(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_2, & t_1 > t_2 \\ \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1, & t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

Користејќи дека $C_X(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$ добиваме дека:

$$C(t_1,t_2)=\begin{cases}\lambda t_2, & t_1>t_2\\ \lambda t_1, & t_1\le t_2\end{cases}$$

4.3 Стационарни процеси

Случајниот процес $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ е *строго стационарен* (или *стационарен во потесна смисла*) ако неговото математичко очекување е константа, а корелационата функција за произволен $n\in N$, произволни $t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$ и произволно $h > 0$ така што $t_1 + h, t_2 + h, \ldots, t_n + h\in T$, случајните вектори $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ и $X(t_1+h), X(t_2+h), \ldots, X(t_n+h)$ имаат иста распределба т.е.:

$$F_n(t_1 + h,\ldots, t_n + h; x_1, \ldots, x_n)= F_n(t_1,\ldots, t_n; x_1, \ldots, x_n).$$

Случајниот процес $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ е *слабо стационарен* (или *стационарен во поширока смисла*) ако неговото математичко очекување е константа, а корелационата функција $C_X(t_1, t_2)$ зависи само од $t_2 - t_1$.

Задача 4.6.Непрекинатите и независни случајни променливи X и Y се дадени со нивните густини на распределба:

$$p_X(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 2-x, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}u-3, & x\in[3,4)\\ 5-u, & x\in[4,5]\\ 0, & x\notin[3,5]\end{cases}$$

и дефиниран е случаен процес $U_t = atX + btY$, $t\in\mathrm{R}$, каде што a и b се реални параметри.

a) Да се определи математичкото очекување, почетниот момент од ред (1,1) $R_X(t, s)$и дисперзијата на случајниот процес U_t,
b) За која вредност на параметрите a и b процесот е слабо стационарен.

Решение:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=1$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p_X(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2(2x^2-x^3)dx=\frac{7}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy = \int_3^4 (y^2 - 3y) dy + \int_4^5 (5y - y^2) dy = 4$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y) dy = \int_3^4 (y^3 - 3y^2) dy + \int_4^5 (5y^2 - y^3) dy = \frac{97}{6}$$

$$D(Y) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{97}{6} - 4^2 = \frac{1}{6}$$

a) За математичкото очекување на процесот се добива:

$$m_U(t) = E(atX + btY) = atEX + btEY = at + 4bt = (a+4b)t.$$

За почетниот момент од ред (1,1) се добива:

$R_U(t, s) = E(U_t U_s) = E((atX + btY)(asX + bsY)) = E(a^2 ts X^2 + b^2 ts Y^2 + 2abtsXY)$

$= a^2 tsE(X^2) + b^2 ts\, E(Y^2) + 2abtsE(X)E(Y) = \frac{7}{6} a^2 ts + \frac{97}{6} b^2 ts + 8abts$

$= \frac{1}{6}(7as + 48ab + 97b^2)ts$

За дисперзијата на случајниот процес се добива:

$$D_U(t) = D(atX + btY) = C_U(t,t) = R_U(t,t) - m_U^2(t) = atEX + btEY = \frac{1}{6}(a^2 + b^2)t^2.$$

b) За да процесот биде слабо стационарен мора $m_U(t) \equiv \text{const}$ и $C_U(t, s)$ т.е. $R_U(t, s)$ мора да биде функција што ќе зависи само од $t - s$.

$m_U(t)$ е константна само ако $(a+4b)t$ е константа т/е/ само кога $a = -4b$ и во овој случај

$U_t = bt(-4X+Y)$. Од друга страна за $a = -4b$, функцијата $R_U(t, s) = \frac{17}{6} b^2 ts$ е функција која зависи само од $t - s$ само кога $b = 0$. Од овде следува дека процесот ќе биде слабо стационарен само кога параметрите $a = b = 0$.

Задача 4.7. Нека случајниот процес $\{X_t, t \in T\}$ е стационарен во потесна смисла, $x \in R$ е даден број, а случајниот процес $\{Y_t, t \in T\}$ е дефиниран со:

$$Y_t = \begin{cases} 1, & X_t < x \\ 0, & X_t \geq x \end{cases}$$

Да се определи математичкото очекување и почетниот момент од ред (1,1) на случајниот процес $\{Y_t, t \in T\}$

Решение: За распределбата од прв ред на случајниот процес $\{Y_t\ ,\ t\in T\}$ се добива:

$$P\{Y_t = 1\} = P\ \{X_t<x\} = ц$$

$$P\{Y_t = 0\} = P\ \{X_t \geq x\} = 1 - F_X\ (t;\ x)$$

Сега математичкото очекување на $\{Y_t\ ,\ t\in T\}$ е од облик:

$$m_Y(t) = 1\cdot P\{Y_t = 1\} + 0\cdot P\{Y_t = 0\} = F_X\ (t;\ x)$$

За почетниот момент од ред (1,1) се добива:

$$R_Y(t_1,t_2) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} ijP\{Y_{t_1} = i, Y_{t_2} = j\} = P\{Y_{t_1} = 1, Y_{t_2} = 1\}$$
$$= P\{X_{t_1} = x, X_{t_2} < x\} = F_X(t_1,t_1;x,x).$$

Заради стационарноста во потесна смисла на случајниот процес $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ се добива дека $F_X\ (t;\ x) = F_X\ (x)$ не зависи од t, а $F_X\ (t_1,\ t_2;\ x,\ x) = F_X\ (t_1- t_2;\ x,\ x)$ зависи само од разликата $t_1- t_2$. Оттука математичкото очекување $m_Y(t) = F_X\ (x) = const$, т.е. не зависи од t, а почетниот момент од ред (1, 1) $R_Y\ (t_1,\ t_2) = F_X\ (t_1- t_2;\ x,\ x)$ зависи само од разликата $t_1- t_2$. Значи случајниот процес $\{Y_t\ ,\ t\in T\}$ е стационарен во поширока смисла.

4.4 Маркови процеси

Случајниот процес $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ се нарекува **Марков процес** ако за секој $n\in N$, $t_1<t_2 \ldots<t_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$и за секои $x_1, x_2, \ldots, x_n$важи:

$$P\{X_{t_n} < x_n \mid X_{t_{n-1}} < x_{n-1},\ldots,X_{t_1} < x_1\} = P\{X_{t_n} < x_n \mid X_{t_{n-1}} < x_{n-1}\}$$

Нека $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ е дискретен Марков процес и веројатностите

$$P\{X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} = p_{x_{n-1}x_n}(t_n - t_{n-1},)$$

на зависи од вредностите t_{n-1} и t_n, туку само од нивната разлика t_n - t_{n-1}. Тогаш процесот $\{X_t\ ,\ t\in T\}$ се нарекува **хомоген Марков процес**.

Ги користиме следниве ознаки:

- $p_{ij}\ (\tau)$ – веројатност на премин од состојба x_i во состојба x_j за време τ.
- $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}\,(t)]$ - матрица на преодни веројатности за време t.
- Равенство на Чепман – Колмогоров
$$p_{ij}(t+\tau) = \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\tau) \quad i,j = 1,2,\ldots \quad t\geq 0, \quad \tau\geq 0$$
- Во матрична форма:
$$\mathbf{P}(t + \tau) = \mathbf{P}(t)\ \mathbf{P}(\tau)\ , \quad t \geq 0, \quad \tau\geq 0$$

За мали вредности на τ, веројатностите $p_{ij}(\tau)$ може да се претставаат како

$$p_{ij}(\tau) \approx \begin{cases} 1+\lambda_{ii}\tau, & i = j \\ \lambda_{ij}\tau, & i \neq j \end{cases}$$

Матрицата $\Lambda = [\lambda_{ij}]$ се нарекува матрица на брзина на промена на Марков процес.

Задача 4.8. (Салон за чистење чевли) Се разгледува салон за чистење чевли кој се состои од два стола – стол 1 и стол 2. Кога ќе пристигне клиент прво оди на стол 1, каде што неговите чевли се чистат и се нанесува боја за чистење. После тоа оди на стол 2 каде што бојата се мачка. Времињата на опслужување на двата стола се независни случајни променливи, експоненцијално распределени со параметри μ_1 и μ_2. Се претпоставува дека клиенти пристигнуваат согласно со Пуасонов процес со параметар λ и потенцијалните клиенти ќе влезат во системот само ако и двата стола се празни.

Решение: Претходниот модел може да биде анализиран како процес Марков, но прво мора да се одреди простор од состојби. Значи потенцијалниот клиент ќе влезе во системот ако и само ако нема друг клиент во салонот, од каде што следува дека во салонот има 0 или 1 клиенти. Меѓутоа ако има клиент во системот, тогаш исто така треба да се знае на која столица седи тој во моментот. Значи мора да ги имаме следниве три состојби.

0- Системот е празен
1- Клиентот е на стол 1
2- Клиентот е на стол 2

Ако системот е празен, тогаш времето што системот ќе го потроши во состојба 0 ќе биде експоненцијално распределено со параметар $v_0=\lambda$. (бидејќи клиентите пристигнуваат согласно со Поасонов закон со параметар λ, при што времето помеѓу пристигнување на клиентите ќе биде експоненцијално распределено со истиот параметар). Јасно дека времето на задржување во состојби 1 и 2 ќе бидат експоненцијални со параметри μ_1 и μ_2 бидејќи времињата на опслужување на клиентите на стол 1 и стол 2 се експоненцијално распределени со параметри μ_1 и μ_2.

$p_{00}(t)=0$,

$p_{01}(t)=1$,- јасно ако е празен ќе отиде во состојба 1 (оди прво на стол 1)

$p_{02}(t)=0$

$p_{10}(t)=0$ (Мора да оди клиентот на стол 2)

$p_{11}(t)=0$

$p_{12}(t)=1$

$p_{20}(t)=1$ (од стол 2 го напушта системот, па системот ќе биде празен)

$p_{21}(t)=0$

$p_{22}(t) = 0$

Задача 4.9 Еден технички уред може да се најде во две различни состојби: 0 (уредот е неисправен) и 1 (уредот е исправен). Во врска со овој уред се разгледува случаен процес $\{X_t\ ,\ t\in[0,\ \infty)\}$ со множество вредности {0, 1}. Нека $\{X_t\ ,\ t\in[0,\ \infty)\}$ е Марков процес со матрица:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix},$$

a) Да се определат преодните веројатности $p_{ij}(\tau)$ за мало τ.
b) Да се реши Колмогоровиот систем диференцијални равенки.
c) Да се определат стационарните веројатности (ако постојат).

Решение:

a)

$$p_{ij}(\tau) \approx \begin{cases} 1+\lambda_{ij}\tau, & i=j \\ \lambda_{ij}\tau, & i\neq j \end{cases}$$

Значи со замена на вредностите од матрицата Λ, се добива дека

$$\begin{aligned} &p_{00}(\tau) \approx 1-\lambda\tau, \\ &p_{01}(\tau) \approx \lambda\tau \\ &p_{10}(\tau) \approx \mu\tau,, \\ &p_{11}(\tau) \approx 1-\mu\tau. \end{aligned}$$

Оттука, $\lambda \approx \frac{p_{01}(\tau)}{\tau}$ и може да се толкува како брзина на премин од состојба 0 во состојба 1, додека $\mu \approx \frac{p_{10}(\tau)}{\tau}$ може да се толкува како брзина на премин од состојба 1 во состојба 0.

b) Колмогоровиот систем на диференцијални равенки гласи:

$$\begin{cases} p_{i0}'(t) = -\lambda p_{i0}(t) + \mu p_{i1}(t) \\ p_{i1}'(t) = \lambda p_{i0}(t) - \mu p_{i1}(t) \end{cases}, \qquad i = 0,1$$

Притоа $p_{i0}(t) + p_{i1}(t) = 1, \quad i = 0,1$. Оттука $p_{i1}(t) = 1 - p_{i0}(t)$, па со замена во првата равенка на Колмогоровиот систем диференцијални равенки, се добива:

$$p_{i0}^{'}(t) = -\lambda p_{i0}(t) + \mu(1 - p_{i0}(t)),$$

т.е.

$$p_{i0}^{'}(t) + \lambda p_{i0}(t) = \mu(1 - p_{i0}(t)).$$

Ова е линеарна диференцијална равенка од прв ред, а нејзиното решение е:

$$\begin{aligned} p_{i0}(t) &= e^{-\int(\lambda+\mu)dt}[C_i + \mu e^{\int(\lambda+\mu)dt}] \\ &= e^{-(\lambda+\mu)t}[C_i + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t}] \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C_i e^{-(\lambda+\mu)t}, \qquad i = 0,1 \end{aligned}$$

Почетните услови на системот се: $p_{00}(0) = 1$ и $p_{10}(0) = 0$. Сега со замена на решенијата на системот се добива:

$$p_{00}(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C_0 = 1 \Rightarrow C_0 = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

$$p_{10}(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

На крај со замена на решенијата во системот се добива:

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}, \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu - \mu e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}, \\ p_{01}(t) &= 1 - p_{00}(t) = \frac{\lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}, \\ p_{11}(t) &= 1 - p_{10}(t) = \frac{\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

c) Нека допуштиме $t \to \propto$, тогаш се добива:

$$p_{00}(t) \to p_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$p_{10}(t) \to p_0^* = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$p_{01}(t) \to p_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 1 - p_0^*,$$

$$p_{11}(t) \to p_1^* = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 1 - p_0^*.$$

5. ПРОЦЕС НА РАЃАЊЕ И УМИРАЊЕ

Хомоген Марков процес $\{X_t\ ,\ t\in[0,\ \infty)\}$ се нарекува **процес на раѓање и умирање** ако $R_{X_t} = \{0, 1, 2, ...\}$и соодветната матрица Λ има облик:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Задача 5.1. За процесор на умирање за кој што $\mu_j = j\mu$, $j = 1, 2, ..., n$, $\mu > 0$, да се најде веројатноста $p_j(t) = P\{X_t = j\}$, $t \geq 0$, при претпоставка дека:

$$p_i(0) = P\{X_0 = i\} = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}.$$

Решение. Зададениот процес е чист процес на умирање за кој матрицата Λ е од облик:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n\mu & -n\mu \end{bmatrix}$$

Согласно формулата за тотална веројатност и почетните услови добиваме дека:

$$p_j(t) = \sum_{i=-n}^{n} p_i(0) p_{ij}(t) = p_{nj}(t),$$

па сега ќе ги бараме решенијата $p_{ij}(t)$ на колмогоровиот систем диференцијални равенки, само за $i = n$. Равенките од колмогоровиот систем кои ги содржат веројатностите $p_{nj}(t)$ се следниве:

$$\begin{cases} p_{n0}'(t) = \mu p_{n1}(t) \\ p_{nj}'(t) = -j\mu p_{nj}(t) + (j+1)\mu p_{nj+1}(t), \quad j = 1, \dots n-1 \\ p_{nn}'(t) = -n\mu p_{nn}(t) \end{cases}$$

Решавањето на овој систем диференцијални равенки ќе го започнеме од последната равенка $p_{nn}'(t) = -n\mu p_{nn}(t)$, која е диференцијална равенка со раздвојливи променливи. Таа може да се запише во облик:

$$\frac{dp_{nn}(t)}{p_{nn}(t)} = -n\mu p_{nn}(t).$$

Со интегрирање на равенката од двете страни, се добива:

$$\ln p_{nn}(t) = -n\mu t + \ln C_n,$$

т.е.

$$p_{nn}(t) = C_n e^{-n\mu t},$$

каде што константата C_n ќе ја определиме од почетните услови. Имено, $p_{nn}(0) = 1$, па оттука $C_n = 1$, т.е.

$$p_{nn}(t) = e^{-n\mu t}.$$

За $j = n - 1$, се добива равенката $p'_{n,n-1}(t) = -(n-1)\mu p_{n,n-1}(t) + n\mu p_{n,n}(t)$, која е диференцијална равенка од прв ред. За нејзиното решение имаме:

$$p_{n,n-1}(t) = e^{-\int (n-1)\mu dt}\left[C_{n-1} + \int n\mu e^{-n\mu t} e^{\int (n-1)\mu dt} dt\right]$$
$$= e^{-(n-1)\mu t}\left[C_{n-1} - n\mu e^{-\mu t}\right]$$

Според почетните услови $p_{n,n-1}(0) = 0$, па со замена во последното равенство, наоѓаме дека $C_{n-1} = n$, т.е.

$$p_{n,n-1}(t) = ne^{-(n-1)\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right)$$

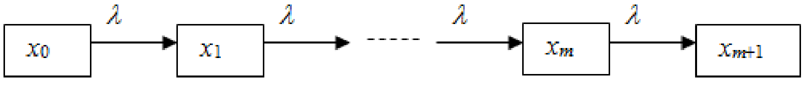
Со математичка индукција и со решавање на линеарна диференцијална равенка од прв ред, слична на претходната се добива дека:

$$p_{n,k}(t) = \binom{n}{k} e^{-k\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots n.$$

Задача 5.2 Системот се состои од еден основен елемент кој работи и m резервни. Веројатноста дека во интервалот Δt ќе се расипе елементот кој работи е еднаква на $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, односно интензитетот на расипување е λ. Во даден момент работи само еден елемент, ако се расипе се заменува со резервен. Кога ќе се потрошат сите резервни елементи системот откажува. Да се најдат веројатностите $p_j(t)$, $j = 0,1,\ldots m+1$ и да се определи математичкото очекување навреметраењетонаживееењенасистемот.

Решение: Да ги означиме со x_k следниве можни состојби:

x_0 - не е расипан ниту еден елемент, т.е. во функција е основниот;
x_1 - откажал основниот, заменет е со прв резервен;
...
x_{m+1} - откажал системот.



Фигура 5.1 Неработена резерва без обновување

Ова е процес на чисто раѓање бидејќи не се можни премини во претходните состојби, т.е. процесот е неповратен (всушност, ако за индекс на состојбите се земе бројот на употребливи елементи во системот, тогаш ова би бил чист процес на умирање, но во основа однесувањето на системот е исто).

$\lambda_k=\lambda$, k= 0,1, ..., m; μ_k= 0 за секое k.

Диференцијални равенки кои го опишуваат системот се:

$p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$
за $k<m+1$: $p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t)$
$p_{m+1}'(t) = \lambda p_m(t)$

$$\sum_{k=0}^{m+1} p_k(t) = 1$$

Треба да забележиме дека иако не е транзитивен, системов е ергодичен (после доволно долг временски интервал системот ќе откаже со веројатност 1), но овде се потребни веројатности да се најде во одредена состојба пред целосно да откаже, значи во нестационарен режим на работа.
Системот диференцијални равенки може да се реши на следниов начин: се воведува замена $p_k(t)=u_k(t)e^{-\lambda t}$и се добива:

$p_0(t) = e^{-\lambda t}$
$p_1(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$
$p_k(t) = ((\lambda t)^k/k!)\, e^{-\lambda t}$

...

$$p_{m+1}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Да го определиме сега и математичко очекување на времетраењето на живеење на системот. Нека ξ е случајна променлива која го означува времетраењето на живеење на еден елемент:

$P(\xi>t) = p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(\xi) = \int_0^\infty t d(1 - P(\xi > t)) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$$

(со парцијална интеграција.)

Бидејќи секој елемент живее независно од останатите, средно време на живеење за цел систем е еднакво на $(m+1)/\lambda$.

Задача 5.3 Во овој систем постои еден основен елемент и m резервни, но сега сите резервни работат додека не откажат, т.е. во суштина системот се состои од m+ елементи кои работат додека не откажат. Секој од нив се расипува со интензитетλ, односно еден елемент во мал интервал Δt се расипува со веројатност$\lambda\Delta t+\sigma(\Delta t)$. Да се најдат веројатностите $p_j(t)$, j = 0,1,…m+1 и да се определи математичкото очекување на времетраењето на живеење на системот.

Решение:

Можни состојби во системот се:

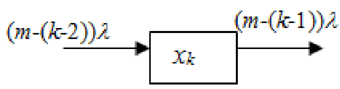
x_0 - ниту еден елемент не откажал;
x_1 - откажал еден елемент;

...

x_{m+1} - откажал цел систем.

Фигура 5.2 Вработена резерва без обновување

Општото теме во графот (x_k) изгледа вака:



Фигура 5.3Теме во графот

Одовде$\lambda_k = (m\text{-}k+1)\lambda$, $0 \le k \le m$, μ_k=0 за секое k.

Системот диференцијални равенки за овој процес гласи:

$p_0'(t) = -(m+1)\lambda p_0(t)$

за$k<m+1$: $p_k'(t) = \lambda(m\text{-}k+2)\, p_{k\text{-}1}(t) - \lambda(m\text{-}k+1) p_k(t)$

$p_{m+1}'(t) = \lambda p_m(t)$

$$\sum_{k=0}^{m+1} p_k(t) = 1$$

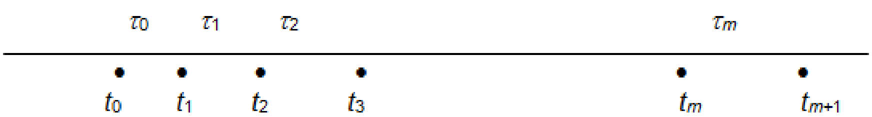
Решение на системот:

$p_0(t) = e^{-(m+1)\lambda t}$
$p_1(t) = (m+1)e^{-\lambda mt}(1\text{-}\ e^{-\lambda t})$

...

$p_{m+1}(t) = (1\ \text{-}\ e^{-\lambda t})^{m+1}$

Повторно како прашање се појавува средното време на живеење на системот, кое се наоѓа на следниов начин:



Фигура 5.4 Графички приказ на системот

t_1, t_2, ... се инстанции на последователни откажувања на одредени елементи;
τ_0= t_1-t_0, τ_1= t_2-t_1, ... се случајни променливи кои означуваат времетраење на соодветната состојба. Во првиот интервал m+1 елементи се активни, па веројатноста дека којбило од нив ќе откаже за време t е еднаквана 1-$p_0(t)$=1-$e^{-(m+1)\lambda t}$.

$$E(\tau_0) = \int_0^\infty td(1-P(\tau > t)) = \int_0^\infty t(m+1)\lambda e^{-(m+1)\lambda t} dt = \frac{1}{(m+1)\lambda}.$$

Во вториот интервал m елементи се активни, па веројатноста дека којбило од нив ќе откаже за време t е еднаквана 1-$e^{-m\lambda t}$. На сличен начин ќе се добие дека$E(\tau_1)=1/(m\lambda)$, итн., $E(\tau_m)=1/\lambda$. Одовде, среден век на живеење на системот е:

$$\sum_{i=0}^{m} E(\tau_i) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m} + \ldots + 1\right).$$

И овде можевме системот да го сметаме за процес на чисто умирање, од практични причини што на почеток имаме m+1 единки и секоја умира со интензитетλ.

6. ВЕРИГИ НА МАРКОВ

Дефиниција 6.1. Дискретен случаен процес X_1, X_2, …се нарекува *верига на Марков*, ако за секој $n \in N$, и за секои $x_1, x_2,..., x_{n+1} \in R_X$, точно е равенството:

$$P\{X_{n+1}= x_{n+1} | X_n= x_n, X_{n-1}= x_{n-1},\ldots, X_1= x_1\}= P\{X_{n+1}= x_{n+1} | X_n= x_n\}.$$

- Означуваме $P\{X_n= j| X_{n-1}= i\} = p_{ij}^{(n)}$.
- Ако $\{X_i\}$ е верига на Марков, тогаш X_n се нарекува состојба на системот во момент n.
- Веројатностите $p_{ij}^{(n)}$ се нарекуваат преодни веројатности од состојба iво состојба j во n-тиот момент на промена. Овие веројатности формираат матрица $P^{(n)}= [p_{ij}^{(n)}]$.
- Нека $\boldsymbol{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)},\ldots, p_s^{(0)})$ е вектор на веројатности на почетната состојба на системот. Со последователна примена на $\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(n-1)} \boldsymbol{P}^{(n)}$,за n = 1,2,…, се добива:
$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(n-1)} \boldsymbol{P}^{(n)}= \boldsymbol{p}^{(n-2)} \boldsymbol{P}^{(n-1)} \boldsymbol{P}^{(n)}= \ldots = \boldsymbol{p}^{(0)} \boldsymbol{P}^{(1)} \boldsymbol{P}^{(2)}\ldots\boldsymbol{P}^{(n-1)} \boldsymbol{P}^{(n)}.$$

Дефиниција 6.2. Веригата на Марков се нарекува *хомогена* (или *временски инваријантна*), ако условните веројатности $p_{ij}^{(n)}$не зависат од n, т.е. за n = 1,2,…

$$P\{X_{n+1}= j| X_n= i\} = P\{X_2= j| X_1= i\} = p_{ij}, \text{ за сите } i, j \in R_X.$$

- Во хомогена верига на Марков, означуваме:
- $p_{ij}(n)=P\{X_n= j| X_0= i\}$.
- Тоа е веројатноста дека системот ќе помине од состојба i во состојба j за n чекори.

Теорема 6.1. Конечна хомогена верига на Марков е строго стационарен процес, ако

$$p^{(n)} = p^{(0)},$$

за секој n = 1, 2, …

Значи, верига на Марков е стационарен процес, ако почетната состојба е распределена согласно стационарната распределба.
Бидејќи $\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(n-1)}\boldsymbol{P}$, означувајќи $\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^*$, за секој n = 1,2,…, равенството добива облик:

$$\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}^* \boldsymbol{P}.$$

Според Теорема 1, конечна хомогена верига на Марков е стационарна, ако векторот $\boldsymbol{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)},\ldots, p_s^{(0)})$ на веројатности на почетната состојба е решение на претходната равенка.
Таа равенка е, всушност, хомоген систем од s линеарни равенки:

$$p_j^* = \sum_{k=1}^{s} p_k^* p_{kj}, \qquad j = 1,\ldots s.$$

За да решението на системот биде распределба на веројатност, мора да биде задоволен условот:

$$\sum_{j=1}^{s} p_j^* = 1$$

Равенствата на Чепмен-Колмогоров овозможуваат метод за пресметување на преодните веројатности за n-чекори.

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{n} p_{kj}^{m}, \quad n,m \geq 0, \quad \forall i,j$$

$\mathbf{P}^{(n)}$ – матрица од преодни веројатност за n-чекори
$\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}$
$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$ – матрицата од преодни веројатност од n-чекори може да се добие како n-степен од матрицата од преодни веројатни за 1 чекор.

Задача 6.1.Претпоставуваме дека шансите да врне утредента зависи од тоа дали врнело денес и не од тоа дали врнело претходните денови. Се претпоставува исто така дека ако врне денес со веројатност α ќе врне утре, и ако не врне денес со веројатност βќе врне утре. Да се најде матрицата на преодни веројатности.

Решение: Можеме да земеме дека процесот може да биде во две состојби, да ги означиме со 0 и 1. И нека

0- Врне дожд

1- Не врне дожд

Бидејќи дали ќе врне утре зависи од тоа дали врнело или не денес, а не и од претходните денови имаме Маркова верига со две состојби. Матрицата од преодни веројатности е следната

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Задача 6.2. Нека низата случајни променливи $X_0, X_1,\ldots, X_N$ образува верига на Марков. Да се покаже дека и низата $Y_k = X_{N-k}$, $k = 0,1,\ldots N$е исто така верига на Марков.

Решение: За да го покажеме тврдењето ќе ја користиме дифиницијата на верига на Марков. Имаме:

$$P\{Y_n = j \mid Y_{n-1} = r_{n-1},\dots,Y_1 = r_1\} = P\{X_{N-n} = j \mid X_{N-n+1} = r_{n-1},\dots,X_{N-1} = r_1\} =$$
$$= \frac{P\{X_{N-n} = j, X_{N-n+1} = r_{n-1},\dots,X_{N-1} = r_1\}}{P\{X_{N-n+1} = r_{n-1},\dots,X_{N-1} = r_1\}}$$

Ако се искористи дека низата случајни променливи X_0, $X_1,\dots$, X_Nобразува верига на Марков се добива:

$$\frac{P\{X_{N-n} = j, X_{N-n+1} = r_{n-1},\dots,X_{N-1} = r_1\}}{P\{X_{N-n+1} = r_{n-1},\dots,X_{N-1} = r_1\}} =$$
$$= \frac{P\{X_{N-n} = j\}P\{X_{N-n+1} = r_{n-1} \mid X_{N-n} = j\},\dots,P\{X_{N-1} = r_1 \mid X_{N-2} = r_2\}}{P\{X_{N-n+1} = r_{n-1}\}P\{X_{N-n+2} = r_{n-2} \mid X_{N-n+1} = r_{n-1}\},\dots,P\{X_{N-1} = r_1 \mid X_{N-2} = r_2\}}$$
$$= \frac{P\{X_{N-n} = j\}P\{X_{N-n+1} = r_{n-1} \mid X_{N-n} = j\}}{P\{X_{N-n+1} = r_{n-1}\}}$$
$$= P\{X_{N-n} = j \mid X_{N-n+1} = r_{n-1}\}$$
$$=| P\{Y_n = j \mid Y_{n-1} = r_{n-1}\}$$

што и требаше да се докаже.

Задача 6.3. Петар на работа оди со воз, автобус или со кола. Ако на работа еден ден оди со кола, тогаш следниот ден е еднакво веројатно да оди со воз, автобус или со кола. Со воз не оди два дена последователно, но ако оди со воз, тогаш другиот ден со 2 пати поголема веројатност ќе оди со кола отколку со автобус. Ако оди со автобус тогаш другиот ден со еднаква веројатност ќе оди со воз или со кола (но не и со автобус). Да се најде:

a) Матрицата на преодни веројатности за еден ден.

b) Ако Петар отишол со кола на работа да се најде веројатноста дека и после 2 дена ќе оди со кола.

c) Да се најдат стационарните веројатности.

Решение:

a) Ги имаме следните состојби:

   Состојба 0 – „ оди со воз“
   Состојба 1 – „оди со автобус“
   Состојба 2 – „оди со кола“

Матрицата на преодни веројатности за еден ден е:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

Матрицата на преодни веројатности за два дена е:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Ако Петар оди на работа првиот ден со кола, векторот на веројатностите на почетната состојба е:

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

,

Векторот на веројатности, на состојбите после два дена е:

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

па бараната веројатност е $\frac{1}{2}$.

b) Стационарните веројатности ќе ги најдеме со решавање на системот равенки:

$$p_j^* = \sum_{k=0}^{2} p_k^* p_{kj} \quad j = 0,1,2$$

и

$$\sum_{j=0}^{2} p_j^* = 1$$

и добиваме:

$$p_0^* = \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^*,$$
$$p_1^* = \frac{1}{3}p_0^* + \frac{1}{3}p_2^*,$$
$$p_2^* = \frac{2}{3}p_0^* + \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^*,$$
$$p_0^* + p_1^* + p_2^* = 1.$$

со решавање на системот равенки се добива:

$$p_0^* = \frac{9}{32}, p_1^* = \frac{1}{4}, p_2^* = \frac{15}{32}.$$

добиените стационарни веројатности можеме да ги протолкуваме на следниот начин: ако разгледуваме доволно долг временски период, можеме да кажеме дека Петар најчесто оди на работа со кола со веројатност 15/32 со воз оди со веројатност 9/32 а со автобус со веројатност 1/4.

Задача 6.4. Три бели и три црни топчиња се распоредени во две кутии, така што во секоја кутија има по три топчиња. Системот ќе биде во состојба $i, i=0,1,2,3$ ако во првата кутија има i- бели топчиња. Секој чекор се влече едно топче од првата кутија во втората и обратно од втората во првата кутија. Нека X_n ја означува состојбата на системот после n-от чекор. Објасни зошто $\{X_n, n=0,1,2,3\}$ е верига на Марков. Најди ја матрицата на преодни веројатности.

Решение: Бројот на бели топчиња во првата кутија после n-тото влечење зависи само од тоа колку топчиња имало во првата кутија пред влечењето, т.е. од бројот на топчиња после n-1 влечење , па поради тоа $\{ X_n, n=0,1,2,3\}$ е верига на Марков.. Означуваме:

Состојба 0 - нема бели топчиња во првата кутија;
Состојба 1- 1 бело топче во првата кутија;
Состојба 2 – 2 бели топчиња во првата кутија;
Состојба 3- 3 бели топчиња во првата кутија;

Матрицата на преодни веројатности е следнава:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача6.5.Се претпоставува дека дали ќе врне некој ден зависи од временските услови во последните три дена. Покажи дека системот може да се анализира со верига на Марков. Колку состојби се потребни. Се претпоставува дека ако врнело претходните три дена, денес ќе врне со веројатност 0.8, а ако не врнело претходните три дена денес ќе врне со веројатност 0.2. И во сите други случаи времето денес ќе биде како што било вчера со веројатност 0.6. Да се најде матрицата на преодни веројатности.

Решение: Процесот може да се трансформира во верига на Марков, при што состојбата во кое било време е одредена со временските услови во претходните три дена. Значи имаме 8 состојби и тоа:

Состојба 0 – ВВВ	Состојба 4 – НВВ
Состојба 1 – ВВН	Состојба 5 – НВН
Состојба 2 – ВНВ	Состојба 6 – ННВ
Состојба 3 – ВНН	Состојба 7 – ННН

Матрицата на преодни веројатности е следната:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Задача 6.6. Пензионерот прима пензија од 2 (илјади долари) на почетокот на секој месец. Сумата на пари што ја троши месечно е независна од сумата на пари што ја има и е еднаква на *i* со веројатности p_i i=1,2,3,4. Ако пензионерот има повеќе од 3, тогаш сумата што е повеќе од 3 ќе ја даде на својот син. Ако после примањето на пензија на почеток на месецот има 5, колкава е веројатноста дека ќе има 1 или помалку кога било во наредните 4 месеци.

Решение: За да се најде посакуваната веројатност мора да ја разгледаме веригата на Марков со состојби еднакви на сумата што пензионерот ја има на крајот на месецот. Бидејќи не нé интересира дали сумата е помала од 1, состојбата 1 значи дека пензионерот има 1 или помалку од 1. Бидејќи на крајот на месецот, ако има повеќе од 3 ги дава на синот, ние ќе ја разгледаме верига на Марков со 3 состојби.

Матрицата на преодни веројатности е следнава:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_3+p_4 & p_2 & p_1 \\ p_4 & p_3 & p_1+p_2 \end{bmatrix},$$

(Објаснување P_{21} имал 2+2=4, за да има 1 или помалку од 1 треба да потроши 3 или 4, затоа p_3+p_4, P_{32}, 3+2=5, за да има 2 троши 3 затоа p_3, p_{33}, 3+2=5 и да има пак 3 или повеќе треба да потроши 1 или значи, значи веројатноста е еднаква на p_1+p_2. Земаме p_i=1/4, i=1,2,3,4.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Треба да ја најдеме матрицата од преодни веројатности за 4 чекори.

$$\mathbf{P}^{(4)}=\mathbf{P}^4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 222/256 & 13/256 & 21/256 \\ 201/256 & 21/256 & 34/256 \end{bmatrix},$$

Бидејќи иницијално на крајот на месецот пензионерот имал 3, тогаш очекуваната веројатност е $p^{(4)}_{31}$=21/256.

Задача 6.7. Се претпоставува дека ако се фрла пара1 со веројатност 0.7 ќе падне глава, а за парата 2 со веројатност 0.6 ќе падне глава. Ако при фрлање на некоја од парите падне глава наредниот ден ќе се фрла парата1, а ако падне пара парата2. На почетокот е еднакво веројатно да се фрли парата1 или парата2. Колкава е веројатноста третиот ден од иницијалното фрлање да се фрла парата1.

Решение: Имаме верига на Марков бидејќи која пара ќе ја фрламе зависи што паднало претходниот ден. Матрицата од преодни веројатности е:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

При што, состојба 0 е се фрла пара1, а состојба 1 се фрла пара2.

$$p_0^{(0)} = P\{X_0 = 0\} = 0.5,$$

$$p_1^{(0)} = P\{X_0 = 1\} = 0.5.$$

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{PP} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{PP} = \begin{bmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.666 & 0.334 \end{bmatrix},$$

$$P\{X_3 = 0\} = \sum_{i=0}^{1} p_i^{(0)} p_{ij}^{(3)} = (0.5)(0.667) + (0.5)(0.666) = 0.665$$

Задача 6.8. Три студенти од Штип и три студенти од Скопје одат за Рим. На случаен начин се распоредуваат во две соби така што во секоја соба има по тројца студенти. Бројот на студентите од Штип во првата соба ја дефинира состојбата на системот. Бидејќи на почетокот не можеле да се договорат кој ќе биде во која соба, секој ден на случаен начин се избира по еден студент од секоја соба и тие ги менуваат местата.

a) Да се најде матрицата на преодни веројатности за еден ден.

b) Ако се знае дека на почетокот сите студенти од Штип се во една соба, да се најде веројатноста дека после два дена сите студенти од Штип да не се во иста соба.

c) Да се најдат стационарните веројатности.

Решение:

a) Матрицата на преодни веројатности е следнава:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Матрицата на преодни веројатности за два дена е:

$$\mathbf{P}^2=\begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 4/81 & 41/81 & 32/81 & 4/81 \\ 4/81 & 32/81 & 41/81 & 4/81 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Векторот на веројатностите на почетната состојба е:

$$\mathbf{p}^{(0)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

Векторот на веројатности на состојбите после два дена е:

$$\mathbf{p}^{(2)}=\mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^2=\begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}.$$

После два дена веројатноста дека сите студенти од Штип нема да бидат во иста соба

е $\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$.

c) Стационарните веројатности ќе ги најдеме со решавање на системот равенки:

$$p_j^*=\sum_{k=0}^{3} p_k^* p_{kj} \qquad j=0,1,2,3$$

и

$$\sum_{j=0}^{3} p_j^*=1$$

и добиваме:

$$p_0^* = \frac{1}{9} p_1^*,$$

$$p_1^* = p_0^* + \frac{4}{9} p_1^* + \frac{4}{9} p_2^*,$$

$$p_2^* = \frac{4}{9} p_1^* + \frac{4}{9} p_2^* + p_3^*,$$

$$p_3^* = \frac{1}{9} p_2^*,$$

$$p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.$$

со решавање на системот равенки се добива:

$$p_0^* = \frac{1}{20}, p_1^* = \frac{9}{20}, p_2^* = \frac{9}{20}, p_3^* = \frac{1}{20}$$

Задача 6.9. (Еренфестов модел на дифузија) Во затворен сад, поделен со мембрана на два дела (A и B), се наоѓаат вкупно 2 *a* молекули. Секоја секунда, случајно, една молекула поминува од едниот во другиот дел од садот. Нека X_n го означува бројот на молекули во делот A од садот. Да се утврди дека $\{X_n,\ n \in |\mathrm{N}\}$ е хомогена верига на Марков, да се определи множеството вредности и матрицата на преодни веројатности за еден чекор.

Решение: Да воочиме дека делот на молекули во делот A од садот зависи само од тоа колку молекули имало во претходната секунда, а не и од начинот на кој молекулите дошле во тој дел од садот до тој момент. Оттука, е јасно дека состојбата на системот во секоја секунда зависи само од тоа во која состојба се наоѓал тој во претходната секунда, т.е. разгледуваниот систем е верига на Марков. Множеството вредности на веригата, т.е. бројот на молекули кои може да се најдат во делот A е $R_{X_n} = \{0,1,\ldots 2a\}$.

Ќе ги означиме следниве настани:

C_i = {една молекула од делот A (во кој има *i* молекули) поминува во B},

D_i = {една молекула од делот B (во кој има 2*a* - *i* молекули) поминува во A},

За преодните веројатности за еден чекор имаме:

$$p_{i,i-1} = P(C_i) = \frac{i}{2a}, \qquad i = 1,2,\ldots 2a$$

$$p_{i,i+1} = P(D_i) = \frac{2a-i}{2a}, \qquad i = 0,1,\ldots 2a-1$$

$$p_{i,i} = 0$$

$$p_{i,j} = 0, \qquad |i-j| > 1$$

Матрицата на преоди веројатности е од облик:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & \frac{2a-1}{2a} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2a}{2a} & 0 & \frac{2a-2}{2a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2a-1}{2a} & 0 & \frac{1}{2a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Може да се забележи дека преодните веројатности, па и матрицата Pне зависат од nод каде следува дека веригата на Марков е хомогена. Исто така, може да се забележи дека состојбата 0 и состојбата n се рефлектирачки состојби на систмот. Секогаш кога системот ќе дојде во една од нив, веднш во следниот момент, со веројтност 1, поминува во соседната состојба.

Задача 6.10 (Генетски модел) Се разгледува популација од $2m$живи индивидуи и нејзиниот генетски развој. Нека $k\in\{0, 1, \dots, 2m\}$ го означува бројот на индивидуи кои имаат одредена особина А, додека $2m - k$ја немаат таа особина. Идната генерација се формира по моделот „извлекување со враќање“ $2m$ пати од претходната генерација. Нека X_nе број на индивидуи со особина А во n – поколение. Да се утврди дека X_nе верига на Марков, да се определи множеството вредности и матрицата на преодни веројатности.

Решение: Бидејќи секоја следна генерација се формира од претходната, јасно е дека разгледуваната низа случајни променливи $\{X_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ е верига на Марков. Исто така, бројот на индивидуи со особина А во секоја генерација не зависи од редниот број на генерацијата, туку само од бројот на такви индивидуи во претходната генерација. Значи, станува збор за хомогена верига на Марков. Множеството вредности на X_n за n = 1, 2, … е
$R_{X_n}=\{0,1,\dots 2m\}$. За преодните веројатности за еден чекор добиваме :

$$p_{ij}=P\{X_n=j\mid X_{n-1}=i\}=\binom{2m}{j}p_i^j q_i^{2m-j}, \qquad i,j=0,1,\dots 2m$$

каде p_i е веројатноста на настанот дека ќе се извлече индивидуа со особина А, кога во популацијата има i такви индивидуи. Оттука:

$$p_i=\frac{i}{2m}, \qquad i=0,1,\dots 2m.$$

Задача 6.11 Дадена е хомогена верига на Марков со множество вредности $S = \{0, 1, 2\}$ и матрица на преодни веројатности:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

За векторот на преодни веројатности $\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, да се пресмета:

a) $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2\}$,

b) $P\{X_2 = 1, X_3 = 2 \mid X_0 = 0, X_1 = 0\}$,

c) $P\{X_3 = 2 \mid X_0 = 0\}$,

d) $\mathbf{p}^{(3)}$.

Решение:

a) $P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2\}$
$= P\{X_0 = 0\}\, P\{X_1 = 0 \mid X_0 = 0\}\, P\{X_2 = 1 \mid X_1 = 0\} P\{X_3 = 2 \mid X_2 = 1\}$
$= p_0^{(0)} p_{00} p_{01} p_{12}$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$

b) Ако се користи формулата за условна веројатност и веќе добиениот резултат под а) се добива:

$$P\{X_2 = 1, X_3 = 2 \mid X_0 = 0, X_1 = 0\} = \frac{P\{X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2\}}{P\{X_0 = 0, X_1 = 0\}}$$
$$= \frac{1/24}{P\{X_0 = 0\} P\{X_1 = 0 \mid X_0 = 0\}}$$
$$= \frac{1/24}{p_0^{(0)} p_{00}} = \frac{1}{6}.$$

c) Бидејќи веригата на Марков е хомогена $P\{ X_3 = 2 \mid X_0 = 0\} = p_{02}(3)$ е елемент од матрицата $\mathbf{P}^3$. Притоа,

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 25/72 & 31/72 & 16/72 \\ 31/108 & 46/108 & 31/108 \\ 16/72 & 31/72 & 25/72 \end{bmatrix}.$$

Значи $p_{02}(3) = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$.

d) $\mathbf{p}^{(3)}=\mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25/72 & 31/72 & 16/72 \\ 31/108 & 46/108 & 31/108 \\ 16/72 & 31/72 & 25/72 \end{bmatrix}$,

т.е.

$$\mathbf{p}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{397}{1296} & \frac{463}{1296} & \frac{436}{1296} \end{bmatrix}.$$

Задача 6.12 N црни и N бели топчиња се распределени на случаен начин во две кутии, така што во секоја од нив има по N топчиња. Бројот на бели топчиња во првата кутија ја дефинира состојбата на системот. Секоја секунда се зема на случаен начин по едно топче истовремено од двете кутии и тие си ги менуваат местата.

a) Да се определи множеството состојби на системот и матрицата на преодни веројатности.
b) Да се определат финалните веројатности ако постојат.

Решение:

a) Бројот на бели топчиња во првата кутија може да биде 0, 1, ..., N,па оттука множеството состојби на системот е {0, 1, ..., N}. За преодните веројатности за еден чекор добиваме

$$p_{i,i} = 2\frac{i}{N}\frac{N-i}{N}, \qquad i = 0,1,\dots N$$

$$p_{i,i-1} = \left(\frac{i}{N}\right)^2, \qquad i = 1,\dots N$$

$$p_{i,i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2, \qquad i = 0,1,\dots N-1,$$

$$p_{i,j} = 0, \qquad |i-j| > 1,$$

т.е. матрицата на преодни веројатности има облик:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{N^2} & 2\frac{1}{N}\frac{N-1}{N} & \frac{(N-1)^2}{N^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^2}{N^2} & 2\frac{2}{N}\frac{N-2}{N} & \frac{(N-2)^2}{N^2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(N-1)^2}{N^2} & 2\frac{1}{N}\frac{N-1}{N} & \frac{1}{N^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Векторот на финални веројатности **p*** = $(p_0^* \dots p_N^*)$ се добива како решение на матричната равенка **p***=**p*P**. За матрицата **P** добиена претходно, системот добива облик:

$$\begin{cases} p_0^* = \dfrac{1}{N^2} p_1^* \\ p_k^* = \dfrac{(N-k+1)^2}{N^2} p_{k-1}^* + 2\dfrac{k}{N}\dfrac{N-k}{N} p_k^* + \dfrac{(k+1)^2}{N^2} p_{k+1}^*, \quad k = 1, 2, \dots N-1 \\ p_N^* = \dfrac{1}{N^2} p_{N-1}^* \end{cases}$$

Од првата равенка се добива дека:

$$p_1^* = N^2 p_0^* = \binom{N}{1}^2 p_0^*$$

За k = 1, се добива равенката:

$$p_1^* = p_0^* + 2\frac{N-1}{N^2} p_1^* + \frac{4}{N^2} p_2^*,$$

за чие решение се добива:

$$p_2^* = \frac{N^2}{4}\left[\left(1 - \frac{2N-2}{N^2}\right)N^2 - 1\right] p_0^*$$

$$p_2^* = \frac{N^2}{4}\left[N^2 - 2N + 1\right] p_0^*$$

$$p_2^* = \binom{N}{2}^2 p_0^*$$

Нека индуктивната претпоставка е:

$$p_j^* = \binom{N}{j}^2 p_0^*, \qquad j \le k.$$

Сега, за $j = k$, се добива равенката:

$$p_k^* = \frac{(N-k+1)^2}{N^2} p_{k-1}^* + 2\frac{k}{N}\frac{N-k}{N} p_k^* + \frac{(k+1)^2}{N^2} p_{k+1}^*,$$

а за нејзино решение добиваме

$$p_{k+1}^{*}=\frac{N^{2}}{(k+1)^{2}}\left[\left(1-\frac{2k(N-k)}{N^{2}}\right)\frac{N!^{2}}{k!^{2}(N-k)!^{2}}-\frac{(N-k+1)^{2}}{N^{2}}\cdot\frac{N!^{2}}{(k-1)!^{2}(N-k+1)!^{2}}\right]p_{0}^{*}$$

$$p_{k+1}^{*}=\frac{N!^{2}}{(k+1)!^{2}(N-k)!^{2}}(N-k)^{2}p_{0}^{*}$$

$$p_{k+1}^{*}=\frac{N!^{2}}{(k+1)!^{2}(N-k-1)!^{2}}p_{0}^{*}$$

$$p_{k+1}^{*}=\binom{N}{k+1}^{2}p_{0}^{*},$$

со што индуктивната претпоставка е докажана. На крај p_0^* го определуваме од

условот $\sum_{k=0}^{N}p_k=1.$

Добиваме:

$$\left[1+\binom{N}{1}^{2}+\binom{N}{2}^{2}+\ldots+\binom{N}{N}^{2}\right]p_{0}^{*}=1,$$

т.е.

$$p_{0}^{*}=\frac{1}{\binom{2N}{N}}.$$

7. СИСТЕМИ ЗА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ

Кендалова класификација на СМО

A/B/s/q/c/p

- *A* - распределба на интервали меѓу пристигнувањата;
- *B* - распределба на времето на опслужување;
- *s* – број на сервери;
- *q* – дисциплина на редење (LIFO, FIFO,..);
- *c* – капацитет на системот;
- *p* – големина на популацијата.

Ознаки:

L -просечен број на клиенти во системот;

L_Q - просечен број на клиенти во редицата;

W – просечно време на престој на клиенти во системот;

W_Q – просечно време на чекање;

λ_a – просечна рата на клиенти во системот.

Формула на Little

$$L = \lambda_a W$$

$$L_Q = \lambda_a W_Q$$

M/M/1

λ -рата (брзина, интензитет) на пристигнување;

μ - рата (брзина, интензитет) на опслужување;

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - коефициент на зафатеност на системот;

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_Q = W - ES = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$p_0 = 1 - \rho$

$p_n = \rho^n(1 - \rho)$

M/M/1/N

(капацитетот на системот е ограничен на N)

M/M/m/∞

$$p_0 = [\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m - \rho)}]^{-1}$$

$$p_n = \frac{\rho^m}{m!} p_0$$

$\frac{\rho}{m}$ - коефициент на зафатеност на системот

Задача 7.1. Нека клиентите пристигнуваат со Поасонов поток со ратаλ=3. Постои само еден сервер на опслужување и распределбата на времето на опслужување е експоненцијална распределба со средна вредност $\frac{1}{4}$.Редицата може да прима бесконечно многу клиенти. Да се најде просечен број на клиенти во системот L, просечен број на клиенти во системот во редицата L_Q, просечно време на престој на клиенти во системот W и просечното време на чекање W_Q.

Решение:

Ратата на пристигнување λ=3

$ES = \frac{1}{4}$ од каде за ратата на опслужување се добива

$ES = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4} \Rightarrow \mu=4$

Просечно време на престој на клиентите во системот $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 1$

Просечниот број на автомобили во системот $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3$

($L = \lambda \cdot W = 3$)

Просечно време на чекање:

$W_Q = W - ES = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4}$,

Просечниот број на автомобили во редицата кои чекаат на опслужување

$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{9}{4}$

Задача 7.2. Во сервис за автомобили постои еден сервер за опслужување. Воспоставено е дека просечено 40 автомобили за време од 8 часа го користат опслужување, додека опслужувањето трае просечно 10 минути. Да се определат карактеристиките на СМО.

Решение:

Ратата на пристигнување $\lambda = \frac{40}{8} = 5$ автомобили на час.

Ратата на опслужување $\mu = \frac{60}{10} = 6$ автомобили на час.

Коефициент на зафатеност на системот $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$

Просечниот број на автомобили во системот $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{6-5} = 5$

Просечниот број на автомобили во редицата кои чекаат на опслужување

$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{25}{6}$

Просечно време на престој на автомобили во системот $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 1$час = 60 минути

($L = \lambda_a W \Rightarrow W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{1}{5} 5 = 1$)

Просечно време на чекање:

$W_Q = W - ES = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{5}{6}$ = 0.834 часа = 50 минути

Просечениот број на автомобили што се опслужуваат – бројот на автомобили што се опслужуваат може да биде 0 или 1. Веројатност дека се опслужува автомобил е:

$S = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0)$.

$1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$

при што:

$S = 0 \cdot (1 - \rho) + 1 \cdot \rho = \rho = \frac{5}{6}$.

Задача 7.3. Поради одредување на содржина на олово во ѓубрето што се излива и фрла како нус производ на висока печка, во тек на 24 часа се земаат во просек 192 примероци, каде по пат на хемиска анализа во лабораторија се врши испитување на содржината на олово. Утврдено е дека за анализа на еден примерок во просек се потребни 5 минути и дека капацитетот на лабораторијата дозволува анализа на само еден примерок. Цената на анализата за еден примерок од 5 минути чини 500 денари, и секоја минута ако анализата трае помалку од 5 минути ја чини лабораторијата 150 денари. Да се одредат:

a) Параметрите кои го карактеризираат системот на работа во лабораторијата.
b) Трошоците кои произлегуваат ако просечниот број на примероци кои чекаат за испитување е ½.

Решение:

a) Ратата на пристигнување $\lambda = \frac{192}{24} = 8$ примероци на час.

Ратата на опслужување $\mu = \frac{60}{5} = 12$ примероци на час.

Коефициент на зафатеност на системот $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Просечниот број на примероци во лабораторијата $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{8}{12-8} = 2$

Просечниот број на примероци кои чекаат за анализа $L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}$

Просечно време на престој на примероци во лабораторијата $W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{4}$ час = 15 минути

Просечно време на чекање:

$W_Q = W - ES = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{6}$ = 10 минути

Просечениот број на примероци кои се опслужуваат – бројот на автомобили кои се опслужуваат може да биде 0 или 1. Веројатност дека се опслужува автомобил е:

$1-p_0 = 1 - (1-\rho) = \rho$

од каде

$S = 0 \cdot (1-\rho) + 1 \cdot \rho = \rho = \frac{2}{3}$.

Просечното време кога нема примерок во лабораторијата

$p_0 = 1-\rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ =33,3%

b) Од условот на задачата имаме дека просечниот број на примероци кои чекаат за испитување е ½.

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1-\lambda)} = \frac{64}{\mu_1(\mu_1-8)} = \frac{1}{2}$$

се добиваат две решенија на квадратна равенка, јасно како рата на опслужување го земаме позитивно, па

μ_1=16 примероци на час

Од каде средната брзина за анализа на примерок е:

$\frac{60}{\mu_1} = \frac{60}{16} = 3{,}75$ минути.

Тоа значи дека времетраењето на анализата се намалува за

5-3,75=1,25 минути

Па вкупните трошоци за еден примерок се:

500 + 1,25·150 = 687,5 .

Задача 7.4. Нека клиентите пристигнуваат со Поасонов поток со параметар λ=3. Постои само еден сервер на опслужување и распределбата на времето на опслужување е експоненцијална распределба со средна вредност $\frac{1}{4}$.Должината на редицата е 6. Да се најде просечниот број на клиенти во системот L и просечното време на престој на клиентот во системот W.

Ратата на пристигнување λ=3

$ES = \frac{1}{4}$ од каде за ратата на опслужување се добива

$ES = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4} \Rightarrow \mu=4$

Капацитетот на системот N=6

$$L = \sum_{n=0}^{N} np_n = \frac{1-(\lambda/\mu)}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$L = \frac{\lambda(1+N(\lambda/\mu)^{N+1}-(N+1)(\lambda/\mu)^N)}{(\mu-\lambda)(1-(\lambda/\mu)^{N+1})} \approx 2$$

Да го најдеме просечниот рата на пристигнати клиенти во системотλ_a:

(каде p_N е всушност веројатноста на отказ)

$\lambda_a = \lambda \cdot (1- p_N)$

$p_N = \frac{(\lambda/\mu)^N(1-(\lambda/\mu))}{1-(\lambda/\mu)^{N+1}} = \frac{1}{3}$, $\lambda_a = \lambda \cdot (1- p_N) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

За просечното време на престој се добива

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{2}{2} = 1$$

Задача 7.5. Покрај патот се наоѓа бензинска пумпа. Пред пумпата постои простор за паркирање на возилата. Просечното на возила на пумпата е 1,6 возила во минута, а средното време за полнење гориво изнесува 1,25 минути. Ако се паркирани 5 возила тогаш 6-тото не може да се паркира. Да се најде: - Веројатноста дека некое возило нема да биде услужено, просечниот број на возила кои чекаат за услуга, просечниот број на возила во бензинската пумпа.

Решение:

Ратата на пристигнување λ=1,6 пристигнувања во минута.

$ES = 1{,}25$ од каде за ратата на опслужување се добива

$ES = \frac{1}{\mu} = 1{,}25 \Rightarrow$ μ= 0.8 возила во минута

Капацитетот на системот N=6,

Прво да ги најдеме веројатности p_0, p_1,…, p_6

Бидејќи имаме дека $\rho = (\lambda/\mu) > 1$

$$p_n = (\lambda/\mu)^n p_0, \quad n = 0,1,..,6$$

$$p_0 = \frac{(\lambda/\mu) - 1}{(\lambda/\mu)^{N+1} - 1} = \frac{2-1}{2^7 - 1} = \frac{1}{127} = 0{,}008$$

p_1 = 2 p_0 = 0,016

p_2 = 2 p_1 = 0,032

p_3 = 2 p_2 = 0,064

p_4 = 2 p_3 = 0,128

p_5 = 2 p_4 = 0,256

p_6 = 2 p_5 = 0,512

Па веројатноста дека некое возило нема да биде опслужено е

$p_{otz} = p_6$ = 0,512.

Да го најдеме сега просечниот број на возила во пумпата:

$$L = \sum_{n=0}^{N} n p_n = \frac{(\lambda/\mu) - 1}{(\lambda/\mu)^{N+1} - 1} \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$L = \frac{\lambda(1+N(\lambda/\mu)^{N+1} - (N+1)(\lambda/\mu)^{N})}{(\lambda-\mu)(1-(\lambda/\mu)^{N+1})} = 5.055 \text{ возила}$$

За да го најдеме просечниот број на возила кои чекаат, прво ќе го најдеме просечниот број на возила што се опслужуваат.

$L_Q = L - S$

$S = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0) = 0{,}992$

па $L_Q = L - S = 5{,}055 - 0{,}992 = 4{,}063$

Задача 7.6. Во кампот постои бензинска станица со два пункта за полнење на садови со гас. Просечно доаѓаат 24 потрошувачи на час, а просечното време на полнење на една боца е 2 минути. Да се испита дали оваа станица може да ги задоволи потрошувачите?

Решение:

Ратата на пристигнување $\lambda = \frac{24}{60} = 0{,}4$ потрошувачи на минута.

Ратата на опслужување $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$ потрошувачи на минута.

Број на канали, $m = 2$

Коефициент на зафатеност на системот $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$

Да ја најдеме прво веројатноста дека нема потрошувачи во станицата:

$$p_0 = [1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2!(2-\rho)}]^{-1} = [1 + 0{,}8 + \frac{0{,}8^2}{2} + \frac{0{,}8^3}{2 \cdot 1{,}2}]^{-1} = 0{,}429$$

$p_1 = \rho p_0 = 0{,}343$

$p_2 = (\rho/2)p_1 = 0{,}137$

$p_3 = (\rho/2)p_2 = 0{,}055$

$p_4 = (\rho/2)p_3 = 0{,}022$

$p_5 = (\rho/2)p_4 = 0{,}009$

$p_6 = (\rho/2)p_5 = 0{,}004$

$p_7 = (\rho/2)p_6 = 0{,}002$

$p_8 = (\rho/2)p_7 = 0{,}0008$

$p_9 = (\rho/2)p_8 = 0{,}00032 \approx 0$

Приближно средниот број на клиенти што чекаат во редицата може да го пресметаме на следниот начин

$L_Q = 1\cdot p_3 + 2\cdot p_4 + 3\cdot p_5 + 4\cdot p_6 + 5\cdot p_7 + 6\cdot p_8 + \ldots \approx 0{,}157$

Според формулата од предавање за L_Q се добива:

$$L_Q = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!\,(m-\rho)^2}\,p_0 = \frac{0{,}8^3}{1!\,(2-0{,}8)^2}\,0{,}429 = \frac{0{,}512}{1{,}44}\,0{,}429 = 0{,}152$$

Сега ќе го најдеме средниот број на потрошувачи што се опслужуваат S.

Еден канал ќе биде зафатен кога има само еден клиент во системот. Додека двата канали ќе бидат зафатени кога ќе има 2 или повеќе клиенти во системот, а оваа веројатност е:

$1 - p_0 - p_1$

$S = 1\cdot p_1 + 2\cdot(1 - p_0 - p_1) = 0{,}799$

Просечниот број на потрошувачи $L = L_Q + S = 0{,}152 + 0{,}799 = 0{,}953$

Просечно време на чекање:

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{0{,}152}{0{,}4} = 0{,}381 \text{ минути}$$

Сега да го најдеме и просечното време на задржување на клиентите во системот

$$W = W_Q + \frac{1}{\mu} = 0{,}381 + \frac{1}{0{,}5} = 2{,}381 \text{ минути}$$

Бидејќи процентот на неискористеност на пумпата е еднаков на веројатноста дека нема клиенти во системот $p_0 =$ 0,429, значи 42,9 % станицата е слободна. Додека просечното време на чекање во редица е 0,381. Можеме да заклучиме дека станицата ги задоволува потребите на потрошувачите, но таа не е рентабилна.

Задача 7.7. Во самопослуга има 5 каси за опслужување на купувачите кои пристигнуваат со просечна брзина λ = 120 купувачи на час. Просечната брзина на опслужување по каса μ е 30 купувачи на час. Трошоците за едно касиерско место се C_1 = 25 денари на час. Поради можност за губење на купувачи, оценети се трошоци од C_2 = 5 денари по час што купувачи го поминуваат додека чекаат пред касите. Да се одредат карактеристиките на системот, и да се испита оправданоста од воведување на уште една каса.

Решение:

Ратата на пристигнување $\lambda = 120$ потрошувачи на час.

Ратата на опслужувње $\mu = 30$ потрошувачи на час.

Број на канали, m =5

Коефициент на зафатеност на системот $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{120}{30} = 4$

Да ја најдеме прво веројатноста дека нема потрочувачи во станицата:

$$p_0 = [1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{5!}\frac{\rho^6}{5!(5-\rho)}]^{-1} = [1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\frac{4^5}{5!}\frac{4^6}{5!(5-\rho)}]^{-1} = 0{,}0137$$

$p_1 = \rho p_0$ = 0,0548

$p_2 = (\rho/2)p_1$ = 0,1096

$p_3 = (\rho/3)p_2$ = 0,1461

$p_4 = (\rho/4)p_3$ = 0,1461

$p_5 = (\rho/5)p_4$ = 0,1169

Просечниот број на клиенти што чекаат во редицата 3

$$L_Q = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2}p_0 = \frac{4^6}{4!(5-4)^2}0{,}0137 = 2{,}3381$$

Сега ќе го најдеме средниот број на потрошувачи што се опслужуваат S.

Еден канал ќе биде зафатен кога има само еден клиент во системот. Додека двата канали ќе бидат зафатени кога ќе има 2 клиенти, 3 кога има 3 клиенти 4 кога им 4 клиенти, и 5 ако има 5или повеќе клиенти во системот, а оваа веројатност е $1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4$

$S = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot (1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4) = 3{,}9452 \approx 4$

Просечниот број на потрошувачи $L = L_Q + S$ =2,3381 + 4 = 6,3381

Просечно време на чекање:

$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{2{,}3381}{120}$ = 0,0195 часа =1,169 минути

Сега да го најдеме и просечното време на задржување на клиентите во системот

$W = W_Q + \frac{1}{\mu} = 1{,}169 + \frac{1}{0{,}5} = 3{,}169$ минути

Просечниот трошок што настанува поради чекање на клиентите е

$C = L_Q W_Q C_2$ = 2,3381 · 0,0195 · 5 = 0, 228 денари на час.

Според ова може да заклучиме дека нема потреба од воведување на уште една каса , бидејќи трошоците од чекање се 0,228 денари на час што е многу помалку од трошокот од воведување на каса што е 25 денари на час.

Задача 7.8. Нека клиентите доаѓаат согласно со Поасонова распределба со параметар λ. Системот се состои од три сервери, а капацитетот е 5 (системот може е да прима пет клиенти). Да се најде граничната веројатност.

$\lambda p_0 = \mu p_1$

$(\lambda+\mu)\, p_1 = \lambda p_0 + 2\,\mu p_2$

$(\lambda+2\mu)\, p_2 = \lambda p_1 + 3\,\mu p_3$

$(\lambda+3\mu)\, p_3 = \lambda p_2 + 3\,\mu p_4$

$(\lambda+3\mu)\, p_4 = \lambda p_3 + 3\,\mu p_5$

$3\mu\, p_5 = \lambda p_4$

$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

$\lambda\, p_1 = \lambda\, p_0 - \mu\, p_1 + 2\mu p_2 \Rightarrow \lambda\, p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\,\mu} p_1 \;\; \Rightarrow p_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2*1} p_0$

$\lambda\, p_2 = \lambda\, p_1 - 2\mu\, p_2 + 3\mu p_3 \Rightarrow \lambda\, p_2 = 3\,\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\,\mu} p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{(\lambda/\mu)^3}{3*2*1} p_0$

$\lambda\, p_3 = \lambda\, p_2 - 3\mu\, p_3 + 3\,\mu p_4 \Rightarrow \lambda\, p_3 = 3\,\mu p_4 \Rightarrow p_4 = \frac{\lambda}{3\,\mu} p_3 \Rightarrow p_4 = \frac{(\lambda/\mu)^4}{3*3!} p_0$

$3\mu\, p_5 = \lambda p_4 \Rightarrow p_5 = \frac{\lambda}{3\mu} \Rightarrow p_5 = \frac{(\lambda/\mu)^5}{3*3*3!} p_0$

Задача 7.9. Нека клиентите доаѓаат согласно со Пуасонова распределба со параметар λ. Системот се состои од пет сервери. Кога клиентот ќе пристигне, ако некој од серверите е слободен ќе започне со опслужување, ако не ќе чека. Да се најде граничната веројатност.

$\lambda p_0 = \mu p_1$

$(\lambda+\mu)\, p_1 = \lambda p_0 + 2\,\mu p_2$

$(\lambda+2\mu)\, p_2 = \lambda p_1 + 3\,\mu p_3$

$(\lambda+3\mu)\, p_3 = \lambda p_2 + 4\mu p_4$

$(\lambda+4\mu)\, p_4 = \lambda p_3 + 5\mu p_5$

$(\lambda+i\mu)\, p_i = \lambda p_{i-1} + (i+1)\mu p_{i+1}; \;\forall \;\; 0<i<5$

$p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0$

$\lambda\, p_1=\lambda\, p_0-\mu\, p_1+2\mu p_2 \Rightarrow \lambda\, p_1=2\mu p_2 \Rightarrow p_2=\frac{\lambda}{2\,\mu}p_1 \Rightarrow p_2=\frac{(\lambda/\mu)^2}{2*1}p_0$

$\lambda\, p_2=\lambda\, p_1-2\mu\, p_2+3\mu p_3 \Rightarrow \lambda\, p_2=3\,\mu p_3 \Rightarrow p_3=\frac{\lambda}{3\,\mu}p_2 \Rightarrow p_3=\frac{(\lambda/\mu)^3}{3*2*1}p_0$

$\lambda\, p_3=\lambda\, p_2-3\mu\, p_3+4\mu p_4 \Rightarrow \lambda\, p_3=4\,\mu p_4 \Rightarrow p_4=\frac{\lambda}{4\,\mu}p_3 \Rightarrow p_4=\frac{(\lambda/\mu)^4}{4*3*2*1}p_0$

$\lambda\, p_4=\lambda\, p_3-4\mu p_3+5\mu p_5 \Rightarrow \lambda\, p_4=5\,\mu p_5 \Rightarrow p_4=\frac{\lambda}{5\,\mu}p_3 \Rightarrow p_4=\frac{(\lambda/\mu)^5}{5*4*3*2*1}p_0$

$p_i=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{i!}p_0,\ \forall\ 0<i<5$

$(\lambda+5\mu)\, p_6=\lambda p_5+5\,\mu p_7$

$(\lambda+5\mu)\, p_7=\lambda p_6+5\,\mu p_8$

$(\lambda+5\mu)\, p_8=\lambda p_7+5\,\mu p_9$

Од каде следува:

$p_6=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6}{5\cdot 5!}p_0$

$p_7=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7}{5\cdot 5\cdot 5!}p_0$

$p_i=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{5^{i-5}\cdot 5!}p_0,\ \forall i>5$

Задача 7.10 Се разгледува салон за чевли, кој се состои од два стола. Се претпоставува дека кога ќе дојде корисникот прво оди на стол 1. Кога неговата работа на стол 1 е завршена, или оди на стол 2 ако столот е празен, или чека на стол 1 додека не се ослободи стол 1. Потенцијалниот корисник ќе влезе во салонот доколку столот 1 е празен. (Тој ќе влезе во салонот и ако има корисник на столот 2, а нема на столот 1). Се претпоставува дека клиентите пристигнуваат во согласност со Поасонов поток со параметар λ, и времињата на опслужување се независно распределени експоненцијални распределби со параметри μ_1 и μ_2. Да се најде:

а) Кој е процентот од потенцијални корисници што влегуваат во системот?

б) Средниот број на корисници во системот?

в) Средното (просечното) време што корисникот го троши во системот?

Решение: Најпрво треба да се најде просторот од состојби. Јасно е дека состојбите што го опишуваат системот, мора да содржат повеќе информации, а не само бројот на корисници во системот. Не е доволно ако се има информација дека во системот има само еден клиент, ако не се знае на кој стол е тој клиент. Исто така ако само се знае дека имаме два стола во системот, не се знае дали корисникот на столот 1 се уште се опслужува, или пак чека корисникот на столот 2 да заврши со опслужувањето. Значи системот може да се најде во една од следниве 5 состојби: (0, 0) , (1, 0), (0, 1), (1, 1), (*b*,1). При што:

(0,0) – нема корисници во системот

(1, 0) – има еден корисник во системот, и тој е на столот 1

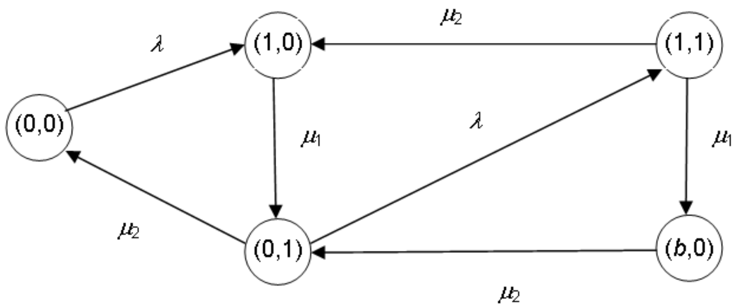
(0, 1) – има еден корисник во системот, и тој е на столот 2

(1, 1) – има двајца корисници во системот и двајцата моментално се опслужуваат

(*b*, 1) – има двајца корисници во системот, но корисникот на стол 1, чека да се ослободи столот 2.

Овде треба да се забележи, дека кога системот е во состојба (*b*, 1), корисникот на столот 1 иако не го има завршено опслужување сепак ги „блокира“ потенцијалните корисници да дојдат во системот.

На слика 1 е даден дијаграмот на состојби на премин



Фигура 7.1

Стрелката од состојба (0, 0) во состојба (1, 0) означена со λ, значи дека процесот од состојба (0, 0), т.е. кога системот е празен, оди во состојба (1, 0) со рата (интензитет) λ, односно имаме едно пристигнување во системот. Истото објаснување е и за преминот од состојба (0, 1) во состојба (1, 1), бидејќи и овде имаме едно пристигнување во системот.
Кога процесот е во состојба (1, 0), тој ќе премине во состојба (0, 1) кога корисникот на стол 1 ќе го заврши ослушувањето, и тоа се случува со рата μ_1 (времето на опслужување на првиот стол е експоненцијално со рата μ_1.), затоа стрелката од (1, 0) до (0, 1) е означена μ_1. Истото објаснување е и за преминот од состојба (1, 1) до состојба (*b*, 1), бидејќи и овде е завршено опслужувањето на корисникот на столот 1.

Од состојба (b, 1) во состојба (0, 1) се преминува кога корисникот од стол 2 ќе заврши со опслужување, со рата μ_2. Од состојба (1, 1) процесот може да премине во состојба (1, 0) кога корисникот на столот 2 ќе го заврши опслужување, јасно со рата μ_2. И од состојба (0, 1) може да премине во состојба (0, 0) кога корисникот од столот 2 ќе го заврши опслужувањето, јасно ратата и овде е μ_2.

Да га дадеме равенките, искористиме дека ратата со која процесот влегува во една состојба е еднаква со ратата со која ја напушта истата. Значи ќе ги добиеме следниве равенки.

За состојба (0, 0): $\lambda P_{00} = \mu_2 P_{01}$

За состојба (1, 0): $\mu_1 P_{10} = \lambda P_{00} + \mu_2 P_{11}$

За состојба (0, 1): $(\lambda + \mu_2)P_{01} = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{b1}$

За состојба (1, 1): $(\mu_1 + \mu_2)P_{11} = \lambda P_{01}$

За состојба (b, 1): $\mu_2 P_{b1} = \mu_1 P_{11}$

Исто така важи и:

$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{11} + P_{b1} = 1$

а) Да се најде процентот од потенцијални корисници што влегуваат во системот

Корисник ќе влезе во системот само доколку системот е во состојба (0, 0) или (0, 1), па следи дека процентот од потенцијални корисници што ќе влезат во систем е $P_{00} + P_{01}$.

б) Средниот број на клиенти во системот

Во системот нема корисници ако тој се наоѓа во состојба (0, 0), има еден корисник ако се наоѓа во состојба (0, 1) или (1, 0), и има два корисници ако се наоѓа во состојба (1, 1) или во состојба (b, 1). Па за L- средниот број на корисниците во системот имаме

$L = P_{01} + P_{10} + 2(P_{b1} + P_{11})$.

в) Да се најде просечното време што корисникот го троши во системот. $W = L/\lambda_a$. Бидејќи потенцијалниот корисник ќе влезе во системот само кога тој се наоѓа во состојба (0, 0) или (0, 1), од каде следи $\lambda_a = \lambda\,(P_{00} + P_{01})$, значи

$$W = \frac{P_{01} + P_{10} + 2(P_{11} + P_{b1})}{\lambda(P_{00} + P_{01})}$$

Задача 7.11 (Редица на чекање, со групно опслужување). Во овој модел се разгледува, систем со еден сервер за опслужување, времето на опслужување е експоненцијално распределено, и серверот во исто време може да опслужи два корисници одеднаш. Секогаш кога серверот ќе заврши со едно опслужување, на опслужување влегуваат следните два корисници во исто време. Меѓутоа, ако во системот има само еден корисник, тогаш тој ќе биде опслужен сам. Времето на опслужување е експоненцијално со параметар μ, било да се опслужува еден или двајца корисници. Клиентите пристигнуваат согласно со Поасонов поток со параметар λ. Да се најдат:

а) Граничните веројатности;

б) Средното време на задржување во редицата;

в) Средното време на задржување во системот;

г) Средниот број на клиенти во системот;

д) Средниот број на клиенти во редицата.

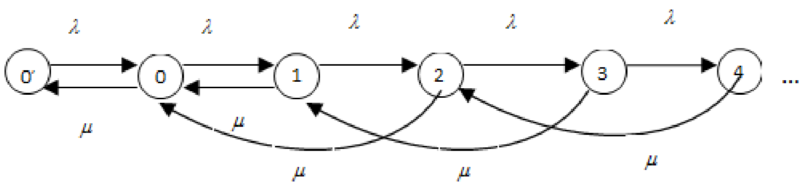
Решение: Состојбите на системот, може да се опишат ако е познато колку корисници има во системот, и дали еден или двајца се опслужуваат во тој момент. Значи ги имаме следниве состојби:

0 – не се опслужува ниту еден корисник

0 – серверот е зафатен, но еден корисник чека

n, *n* > 0 – *n* корисници чекаат во редицата

Дијаграмот на состојби е следниот:



Фигура 7.2

Бидејќи интензитетот (ратата) со кој процесот ја напушта некоја состојба е еднаков со интензитетот (ратата) со кој процесот пристигнува во оваа состојба, имаме:

$\lambda P_{0'} = \mu P_0$

$(\lambda + \mu)P_0 = \lambda P_{0'} + \mu P_1 + \mu P_2$

$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}$

Равенките од облик

$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+2}$,n=1, 2, …

Имаат решенија од форма

$P_n = \alpha^n P_0$

Па ако замениме:

$(\lambda + \mu)\alpha^n P_0 = \lambda\alpha^{n-1} P_0 + \mu\alpha^{n+2} P_0$

$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda + \mu\alpha^3$

Со решавање на равенката, се добива:

Јасно дека α = 1 , е решение на равенката, па ако ја поделиме равенка $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda + \mu\alpha^3$ со α - 1 се добива квадратната равенка:

$\mu\alpha^2 + \mu\alpha - \lambda = 0$

Решенија по α на оваа квадратна равенка се:

$\alpha = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2}$ и $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2}$

Јасно α = 1 не може да биде решение... ($P_n = \alpha P_0$) и $\alpha = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2}$ (ќе добиваме веројатности помали од нула)

Значи -

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda/\mu}}{2}$$

и

$P_n = \alpha^n P_0$

$$P_{0'} = \frac{\mu}{\lambda} P_0$$

Да го добиеме сега P_0

$$P_0 + P_{0'} + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$$

или

$$P_0 \left[1 + \frac{\mu}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \right] = 1$$

$$P_0 \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\mu}{\lambda} \right] = 1$$

$$P_0 = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}$$

$$P_n = \frac{\alpha^n \lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}$$

$$P_{0'} = \frac{\mu(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)}$$

Да го определиме средниот број на клиенти....

$$L_Q = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\lambda + \mu(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$$

Да ја најдеме сумата, $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ со диференцирање

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(a^n)}{da} = \alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

Па за L_Q се добива

$$L_Q = \frac{\lambda\alpha}{(1-\alpha)[\lambda + \mu(1-\alpha)]}$$

И

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} L_Q$$

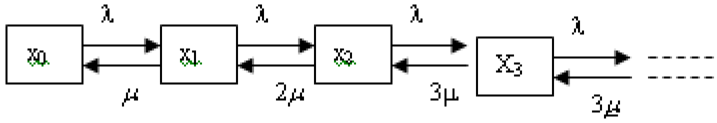
$$W = W_Q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W .$$

Задача 7.12. Да разгледаме систем со три сервери за опслужување. Времето на опслужување нека е експоненцијално распределено со параметар μ. Клиентите пристигнуваат согласно со Пуасонов процес со параметар λ. Да се пресметаат граничните веројатности?

Решение: Ако во системот има помалку од три клиенти тие ќе се опслужуваат на некој од серверите. Ако кога клиентот ќе пристигне, три сервери се зафатени тогаш тој чека во редицата за чекање. Значи интензитетот (ратата на заминување) ако во системот има еден клиент е μ, ако има двајца 2μ, а ако има 3 или повеќе 3μ.

Го имаме следниот дијаграм на премини;



Фигура 7.3 Дијаграм на премини

Да га дадеме равенките, искористиме дека ратата со која процесот влегува во една состојба е еднаква со ратата со која ја напушта истата. Значи ќе ги добиеме следниве равенки.

Состојбите на системот, да ги означиме со бројот на клиенти присутни во системот.

$\lambda P_0 = \mu P_1$

k=1; $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$

k=2; $(\lambda + 2\mu)P_2 = \lambda P_1 + 3\mu P_3$

и за

$k \geq 3$; $(\lambda + 3\mu)P_k = \lambda P_{k-1} + 3\mu P_{k+1}$

Да ги решиме сега постепено равенките:

Од првата равенка имаме

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

Па ако замениме за P_2ќе добиеме:

$$P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0$$

Ако замениме за во наредната равенка добиваме:

$$P_3 = \frac{\lambda^3}{3 \cdot 2\mu^3} P_0 = \frac{1}{3!}(\frac{\lambda}{\mu})^3 P_0$$

Да видиме за $k>3$

$$P_4 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})}{3} P_3 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})}{3}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^3}{3!} P_0 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^4}{3 \cdot 3!} p_0, \quad k > 3. \quad P_5 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{3^2} P_3 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2}{3^2}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^3}{3!} P_0 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^5}{3^2 \cdot 3!} P_0,$$

Или општо за $k \geq 3$

$$P_k = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{k-3}}{3^{k-3}} P_3 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{k-3}}{3^{k-3}}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^3}{3!} P_0 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{3^{k-3} \cdot 3!} P_0,$$

и од

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{3^{k-3} 3!} \right)^{-1}.$$

Во горниот пример претпоставивме дека должината на редицата е бесконечна. Да ги најдеме веројатностите доколку должината на редица е 5.

Тогаш:

$\lambda P_0 = \mu P_1$

k=1; $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2$

k=2; $(\lambda + 2\mu)P_2 = \lambda P_1 + 3\mu P_3$

и за

$3 \leq k < 5$; $(\lambda + 3\mu)P_k = \lambda P_{k-1} + 3\mu P_{k+1}$

$k=5$ $\quad 3\mu P_5 = \lambda P_4$

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{3} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{k!} + \sum_{k=3}^{5} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{3^{k-3}3!} \right)^{-1}.$$

За овој систем да ја најдеме прво веројатноста клиентот да биде опслужен

$P_{opsluzen} = P(k<5) = 1 - P_5$

Веројатноста клиентот да добие отказ е P_5

$$P_5 = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^5}{3^2 \cdot 3!} P_0,$$

Веројатноста сите канали да се зафатени е :

$$P(k \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^3}{3!} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{k-3}}{3^{k-3}} P_0 .$$

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

[1] A.O. Allen, “Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications”, Accademic Press, 1978.

8. [2]George S. Fishman, “Discrete-Event Simulation: Modeling, Programming, and Analysis**”,** Springer, Series in Operations Research,2001.

9. [3] Jerry Banks, John S. Carson II, Barry L. Nelson, David M. Nicol ,” Discrete-Event System Simulation”, 5th Edition, Prentice Hall, 2009.

[4] Магдалена Георгиева, Верица Бакева “Случајни процеси – Предавање и вежби”, 2007, Скопје.

[5] Taylor M. Howard, Karlin Samuel , “An Introduction to Stochastic Modeling ”, ACADEMIC PRESS, 1998.

[6] Tomislav Petrvic, Damir Sersic, “Zbirka resenih zadataka iz slucajnih procesa u sustavima, Sveuciliste u Zagrebu, Fakulet elektotehnike i racunarstva, 2012

БИОГРАФСКИ ПОДАТОЦИ

Благој Делипетрев е продекан и доцент на Факултетот за Информатика, Универзитет Гоце Делчев во Штип. Докторирал на Факултетот за Електротехника и Информатички Технологии, Универзитет Св Кирил и Методиј во Скопје во 2011 година, и магистрирал на истиот факултет во 2007 година. Неговите истражувања се во областите: нови алгоритми за оптимизација, симулација и моделирање, машинско учење и развивање на Облак апликации. Д-р. Делипетрев има објавено повеќе трудови во престижни интернационални списанија и учествува во неколку меѓународни и домашни проекти.

Наташа Максимова е лаборант на Факултетот за Информатика, на Универзитетот Гоце Делчев во Штип. Дипломира на Природно-математичкиот факултет на Универзитетот Св Кирил и Методиј во Скопје каде и магистрира во 2009 година. Нејзини области на истражување се теорија на графови и моделирање и симулации. М-р Максимова има објавено повеќе трудови во меѓународни списанија и конференции.

Зоран Утковски е доцент на Факултетот за информатика на Универзитетот Гоце Делчев во Штип и раководител на Катедрата за комуникациски технологии и процесирање на сигнали. Дипломира во 2000 година на Електротехничкиот Факултет, на Универзитетот “Св. Кирил и Методиј” во Скопје, на насоката Електроника и Телекомуникации. Магистрира (со дистинкција) во 2004 година на Техничкиот Универзитет Чалмерс во Шведска. Докторира (со дистинкција) на Универзитетот во Улм во 2010. Д-р. Утковски е добитник е на Фулбрајтовата стипендија и на ДААД стипендијата за Академска размена. Неговиот галавен истражувачки интерес е во областите на безжичните комуникации и процесирањето на сигнали.

ISBN 978-608-244-251-8