

ВЛАТКО ЧИНГОСКИ  
БИЛЈАНА ЧИТКУШЕВА ДИМИТРОВСКА



# ЕЛЕКТРИЧНИ МЕРЕЊА

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 100 = \frac{100}{200 + 100} \cdot 220 = 62,85 \text{ V}$$

$$\Delta' = U_2' - U_2 = 62,85 - 73,3 = -10,45 \text{ V}$$

$$\delta' = \frac{\Delta'}{U_2} \cdot 100 = -\frac{10,45}{73,3} \cdot 100 = -14,25 \%$$

$$\Delta'' = U_2'' - U_2 = 72,84 - 73,3 = -0,46 \text{ V}$$

$$\delta'' = \frac{\Delta''}{U_2} \cdot 100 = \frac{-0,46}{73,3} \cdot 100 = -0,63 \%$$

## ЗБИРКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ

Влатко Чингоски  
Билјана Читкушева Димитровска

# **ЕЛЕКТРИЧНИ МЕРЕЊА**

*ЗБИРКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ*

Штип, 2020



Влатко Чингоски  
Билјана Читкушева Димитровска

ЕЛЕКТРИЧНИ МЕРЕЊА  
*ЗБИРКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ*

**Автори:** проф. д-р. Влатко Чингоски, асс. докторанд Билјана Читкушева Димитровска

**ЕЛЕКТРИЧНИ МЕРЕЊА**  
**ЗБИРКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ**

**Рецензенти:**

Проф. Д-р Василија Шарац  
Проф. Д-р Сашо Гелев

**Лектор:**

Виолета Игнат Карагунова

**Техничко уредување:**

Ивона Лазарова  
Деспина Соколова

**Издавач:**

Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип

**Објавено во е-библиотека:**

<https://e-lib.ugd.edu.mk>

**DOI:** [https:// www.doi.org/10.46763/9786082447650](https://www.doi.org/10.46763/9786082447650)

CIP - Каталогизација во публикација

Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

621.317(045.8)(076)

ЧИНГОСКИ, Влатко

Електрични мерења [Електронски извор] : збирка задачи и проблеми /  
Влатко Чингоски, Билјана Читкушева Димитровска. - Штип : Универзитет  
"Гоце Делчев", Електротехнички факултет, 2020

Начин на пристапување (URL): <https://e-lib.ugd.edu.mk/957>. - Текст во  
PDF формат, содржи 116 стр., илустр., - Наслов преземен од екранот. -  
Опис на изворот на ден 03.11.2020. - Биографски податоци: стр. 115. -  
Библиографија: стр. 114

ISBN 978-608-244-765-0

1. Читкушева Димитровска, Билјана [автор]

а) Електрични мерења -- Високошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 52402949

# УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Влатко Чингоски

Билјана Читкушева Димитровска

## **Електрични мерења**

*ЗБИРКА ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМИ*

Штип, 2020

## ПРЕДГОВОР

Збирката задачи по електрични мерења е наменета за студентите од втора година на Електротехничкиот факултет. Истата треба да послужи за совладување на материјалот по истоимениот предмет т.е. појаснување преку примери. Збирката е сликовито преточување на теориското помагало. Електричните мерења се присутни во секојдневниот живот и се неопходна секвенца во секој сегмент од понатошошните студии. Затоа оваа збирка ќе им помогне на студентите и на сите заинтересирани да надминат некои потешкотии во совладување на материјалот поврзан со електричните мерења.

Збирката е поделена на осум дела, опфаќајќи ги темелите на електричните мерења, со што ги обучува студентите во едно сосема ново подрачје во светот на електротехниката: општо за мерењата и грешките што може да се јават, мерење на основните величини напони и струи (меѓу кои и наизменични напони и струи), моќност и енергија, препознатливите мерни мостови, мерни трансформатори (напонски и струјни), некои посепцифични мерења и осцилоскопи. Втората глава која се однесува на мерења на напони и струи, поради својата обемност е поделена на неколку области меѓу кои: општи мерења на основните големини, проширување на мерно подрачје, мерење на отпорност со шантирање, мерење на напон и струја, мерење со U-I метода и мерење на капацитивност и индуктивност.

Материјалот е обемен, но избобилува со разновидни примери кои опфаќаат речиси од секој предмет на обработка на оваа област. Разновидноста ќе им помогне на студентите да се соочат со различни проблеми и ќе ги предизвика да ги бараат решенијата на истите проблеми. Тоа ќе ги направи подготвени за решавање на ситуации и во секојдневниот живот.

Затоа овој прирачник е едновремено наменет за сите почетници во електричните мерења, за оние кои веќе се запознати со нив и за тие што бараат решенија на проблеми поврзани со мерењата во секојдневниот живот и работата.

Ја користиме оваа прилика и да се благодараме на сите оние кои несебично вложија труд во изработка на оваа збирка, на оние кои придонесоа со нивните идеи и на студентите од Електротехничкиот факултет.

Од Авторите,  
Штип, 2020

## Содржина

ПРЕДГОВОР .....	6
ВОВЕД .....	8
Глава 1: Определување на грешки при мерењата .....	11
Глава 2: Мерења на напони и струи.....	24
Општи мерења на основните големини (напон, струја, отпорност, моќност, грешки )....	24
Проширување на мерно подрачје .....	31
Мерење на отпорност со шантирање.....	37
Мерење на напон и струја.....	51
Мерења со U-I метода.....	52
Мерење на капацитивност и индуктивност .....	55
Глава 3: Мерења на наизменични големини .....	57
Глава 4: Мерни мостови .....	68
Глава 5: Мерење на електрична моќност и енергија.....	81
Глава 6: Струјни и напонски мерни трансформатори .....	97
Глава 7: Специфични мерења (заземјување и дефекти на кабли) .....	101
Глава 8: Мерења со помош на осцилоскоп.....	104
Користена литература .....	115

## ВОВЕД

Мерењето е множество на експериментални постапки кои имаат за цел одредување на една физичка величина. Вредноста на мерената величина добиена со мерење се нарекува резултат на мерењето. Науката за мерењето, методите на мерење, средствата за мерење, како и точноста на мерењето се нарекува метрологија.

Метрологијата како наука е релативно нова, но нејзините корени се уште од стариот Египет (пред повеќе од 5000-6000 години ) каде луѓето се користеле со прамерки. За мерење на должина користеле прст, палец, педа, за мерење на волумен дланка, за тежина најчесто се вршело споредба со познати објекти како семки, овошки итн. Египќаните му придавале големо значење на мерењето, што се гледа по тоа што градителите и сите оние кои биле задолжени и одговорни за тоа ги казнувале со смрт во случај на грешки.

Со развиток на цивилизацијата, постепено луѓето почнале да си создаваат и свои мерки, со кои си го олеснувале секојдневниот живот. Врвот бил постигнат за време на Француската револуција, кога на Француската академија и била доделена задача да изработи единствен мерен систем.

Тоа се почетоците на модерната метрологија бидејќи од тогаш почнуваат да се формираат унифицирани единици кои ќе важат за сите народи и во сите сегменти.

Мерењата ги има во секоја област на секојдневието, па така и во електротехниката. Се произведуваат и првите мерни уреди, познати како аналогни за потоа да се појават и дигиталните. Со амперметарот, волтметарот, ватметарот, ом-метарот се разбиваат сите мистерији поврзани со основните електротехнички величини. Нивната точност може да се потврди и рачно, преку применување на некој од мерните методи, како познатата U-I метода, метода на компензација итн.

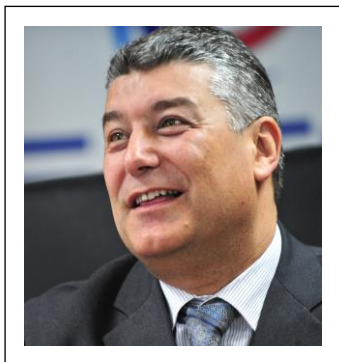
Едноставноста на мерните мостови ни овозможува забавно решавање на проблемите.

Ќе се запознаеме и со броилата, мерните трансформатори, како и осцилоскопите како помошни или главни мерни уреди. Без нив денешницата би била поразлична од тоа што е.

Затоа, оваа збирка ќе претставува едно патување исполнето со предизвици кои ќе ве поттикнат ентузијастички да ги барате одговорите за да го олесните реалниот живот.

Од Авторите  
Штип, 2020

## БИОГРАФСКИ ПОДАТОЦИ

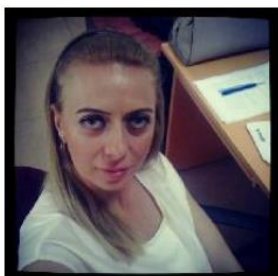


**ПРОФ. Д-Р ВЛАТКО ЧИНГОСКИ Е РОДЕН ВО ОХРИД ВО 1962 ГОДИНА. ДИПЛОМИРАЛ И МАГИСТРИРАЛ ВО ОБЛАСТИТЕ НА ИНДУСТРИСКА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЈА НА ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИОТ ФАКУЛТЕТ ПРИ УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“ ВО 1986 И 1990 ГОДИНА СООДВЕТНО, А ДОКТОРИРАЛ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО ХИРОШИМА, ЈАПОНИЈА ВО ОБЛАСТА НА НУМЕРИЧКИ**

**МЕТОДИ ЗА АНАЛИЗА НА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИ ПОЈАВИ КАЈ ЕЛЕКТРИЧНИТЕ МАШИНИ И УРЕДИ ВО 1996 ГОДИНА.**

**ЗА ДОЦЕНТ БИЛ ИЗБРАН ВО 1996 ГОДИНА НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО ХИРОШИМА КАДЕ РАБОТЕЛ ОД 1996 ДО 1999 ГОДИНА. ЗА ВОНРЕДЕН ПРОФЕСОР Е ИЗБРАН ВО 2012 ГОДИНА, ДОДЕКА ВО 2016 ГОДИНА ПРОФ. Д-Р ВЛАТКО ЧИНГОСКИ Е ИЗБРАН ЗА РЕДОВЕН ПРОФЕСОР НА ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИОТ ФАКУЛТЕТ ПРИ УНИВЕРЗИТЕТОТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ ВО ШТИП, КАДЕ РАБОТИ И ДЕНЕС.**

**ГЛАВЕН ИНТЕРЕС ВО НЕГОВАТА БОГАТА ЕДУКАТИВНА И ИСТРАЖУВАЧКА ДЕЈНОСТ СЕ ЕНЕРГЕТИКАТА, ЕНЕРГЕТСКАТА ПОЛИТИКА, ОБНОВЛИВИТЕ ЕНЕРГЕТСКИ ИЗВОРИ, ЕЛЕКТРИЧНИТЕ МАШИНИ И ЕЛЕКТРОМОТОРНИТЕ ПОГОНИ. АВТОР И КОАВТОР Е НА ПОВЕЌЕ ОД 150 СТРУЧНИ И НАУЧНИ ТРУДОВИ ВО ДОМАШНИ И МЕЃУНАРОДНИ СПИСАНИЈА И УЧЕСНИК НА ГОЛЕМ БРОЈ ДОМАШНИ И СТРАНСКИ СОВЕТУВАЊА, КОНФЕРЕНЦИИ И СИМПОЗИУМИ.**



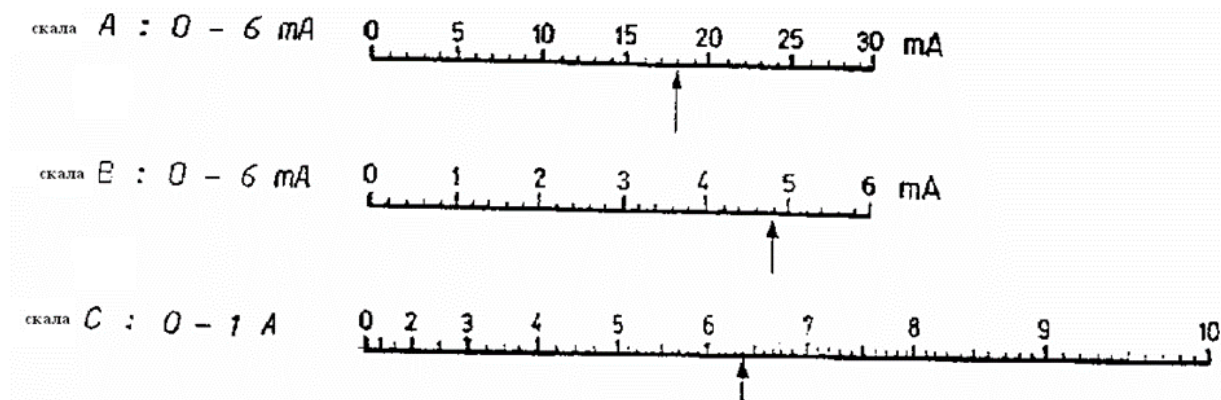
**М-Р БИЛЈАНА ЧИТКУШЕВА ДИМИТРОВСКА Е РОДЕНА НА 27 МАРТ 1982 ГОДИНА ВО ШТИП. ДИПЛОМИРАЛА ВО МАРТ 2007 ГОДИНА СО ОДБРАНЕТИОТ ДИПЛОМСКИ ТРУД СО НАСЛОВ „ТСР/ІР МУЛТИПЛЕКСИРАЊЕ НА ИНТЕРНЕТ СЕРВИСИТЕ: ЕЛЕКТРОНСКА ПОШТА И ВЕБ“ И СЕ СТЕКНАЛА СО СТРУЧЕН НАЗИВ ДИПЛОМИРАН ИНЖЕНЕР ПО ЕЛЕКТРОТЕХНИКА. ВО АПРИЛ 2012 СЕ СТЕКНАЛА СО НАУЧЕН СТЕПЕН МАГИСТЕР ПО**

**ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ. ВО ДЕКЕМВРИ 2012 Е ИЗБРАНА ЗА ПОМЛАД АСИСТЕНТ, А 2015 ГОДИНА Е ИЗБРАНА ЗА АСИСТЕНТ ДОКТОРАНД НА ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ ПРИ УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ ВО ШТИП. НЕЈЗИНИОТ НАУЧНОИСТРАЖУВАЧКИ ОПУС СЕ СОСТОИ ОД ОБЈАВУВАЊЕ НА ПОВЕЌЕ ТРУДОВИ КАКО АВТОР И КОАВТОР, КАКО И УЧЕСТВО НА МНОГУ ДОМАШНИ И МЕЃУНАРОДНИ КОНФЕРЕНЦИИ.**

Back cover/ Задна корица  
Задна страница

## Глава 1: Определување на грешки при мерењата

**Задача 1.1.** Аналоген мерен инструмент со кој располагаме за мерење на струја има мерни подрачја и скали како на сликата. Под влијание на мерната величина стрелката се поставила на означените места. Таблично да се прикажат карактеристичните вредности на скалата и добиените вредности при спроведеното мерење.



Слика бр. 1.1. Мерно подрачје и скала на аналоген инструмент

**Решение :**

СКАЛА	ПОКАЖУВАЊЕ		МЕРНО ПОДРАЧЈЕ	ЕДИНИЧНА ВРЕДНОСТ НА СКАЛАТА	КОНСТАНТА СКАЛА	МЕРНА ВРЕДНОСТ
	вредност	делови на скалата				
А	18,0	18	0-6mA	0,2mA	0,2mA	3,6mA
В	4,8	24	0-6mA	0,2mA	1,0mA	4,8mA
С	6,4	-	0-1A	-	0,1mA	0,64mA

**Задача 1.2** Со милиамперметар со мерно подрачје  $I_V = 120 \text{ mA}$ , класа на точност  $r=0.5$ , во однос на максималната вредност на мерното подрачје измерена е јачина на струјно коло  $I_I = 110.3 \text{ mA}$ . Сите важни величини имат референтна вредност, освен температурата која изнесува:  $\theta = 25^\circ\text{C}$ .

- Колкава е грешката на милиамперметарот при референтна температура?
- Да се определи промената на покажувањето поради влијанието на температурата.
- Да се прикаже точната вредност на мерната величина.

**Решение :**

а) Права вредност на мерната величина ни е непозната, па од референтната температура можеме да ја одредиме најголемата грешка со помош на сигурните граници на грешка:

$$G_a = \pm \frac{r}{100} \cdot I_V = \pm 0,6 \text{ mA}$$

b) Промената на покажување не можеме да ја утврдиме бидејќи не ја знаеме вредноста која инструментот ќе ја покаже при референтна вредност. Можеме само да ја одредиме најголемата дозволена промена на покажување – граници на промена на покажување:

$$G_{pp} = \pm \frac{r}{100} \cdot I_v = \pm 0,6mA$$

с) Правата вредност на мерната величина во овој пример можеме да ја изразиме само со помош на границите на грешка при референтна температура и границата на промена на покажувањето кај зададена температура.

$$I = i_i \pm 2 \cdot \frac{r}{100} \cdot I_v = 110,3mA \pm 1,2mA$$

Или едноставно речено грешката се зема со двобројна вредност на класата на точност.

**Задача 1.3.** Со мерење на напонот и струјата ја одредуваме моќноста на еднофазен потрошувач. Употребени се волтметар со мерно подрачје  $U_V = 200 V$  со кој е измерен напон  $U_0 = 100 V$ , и амперметар со мерно подрачје  $I_V = 5 A$  со кој е измерена струја  $I_0 = 2 A$ . Двата инструменти имаат класа на точност при максимален отклон на мерното подрачје од  $r = 1,0$ .

- Колку се сигурни границите на апсолутната и релативната грешка при мерењето на моќноста?
- Колку се статистичките граници на грешка при мерење на моќноста?
- да се прикаже резултатот на мерењето со помош на двете граници на грешка и да се даде коментар?

**Решение :**

a) Границите на грешка на мерните инструменти се:

$$G_U = -2V, G_I = \pm 5 \cdot 10^{-2} A$$

Од изразот за моќност  $P = UI$  и сигурните граници на грешка множени со мерните величини ги добиваме апсолутната ( $G'_{Pa}$ ) и релативната граница ( $G'_{Pr}$ ).

$$G'_{Pa} = \pm [I \cdot G_U + U \cdot G_I] = \pm [2A \cdot 2V + 100V \cdot 5 \cdot 10^{-2} A = \pm 9W]$$

$$G'_{Pr} = \pm \frac{G_{Pa}}{P} = \pm \frac{9VA}{100V \cdot 2A} = \pm 4.5 \cdot 10^{-2}$$

b) Статистичките граници на грешка за мерење на моќноста се:

$$G''_{Pa} = \pm \sqrt{(I \cdot G_U)^2 + (U \cdot G_I)^2} = \pm \sqrt{(2A \cdot 2V)^2 + (100V \cdot 5 \cdot 10^{-2})^2} = \pm 6.4W$$

$$G''_{Pr} = \frac{G_{Pa}}{P} = \pm \frac{6.4VA}{100V \cdot 2A} = 3.2 \cdot 10^{-2}$$

c) Резултатот на мерење со помош на сигурните граници на грешка е:

$$P = U_I \cdot I_I \pm G_{Pa} = 200 \text{ W} \pm 9 \text{ W} = 200 \cdot (1 \pm 4.5 \cdot 10^{-2}) \text{ W}$$

Резултатот на мерење со помош на статистичките граници на грешка е:

$$P = U_I \cdot I_I \pm G_{Pa}'' = 200 \text{ W} \pm 6.4 \text{ W} = 200 \cdot (1 \pm 3.2 \cdot 10^{-2}) \text{ W}$$

**Дискусија:** Гледаме дека се статистичките граници на грешката кај резултатот се помали. Точната вредност се наоѓа внатре со веројатност од приближно 97%. Сигурните граници на грешка се пошироки, што значи дека точната вредност се наоѓа внатре во вредноста на грешката со веројатност од 100%.

**Задача 1.4.** Со волтметар со линеарна скала со најголема вредност на мерното подрачје  $U = 100 \text{ V}$ , класа на точност  $r = 1.0$  во однос на најголемата вредност на мерното подрачје измерен е напон  $U_i = 20 \text{ V}$ .

Колкави се границите на апсолутната и релативната грешка на инструментот и резултатот на мерење?

**Решение :**

Границата на апсолутната грешка е:

$$G_a = \pm \frac{r}{100} \cdot U_v = \pm 1 \text{ V}$$

Границата на релативната грешка во проценти е:

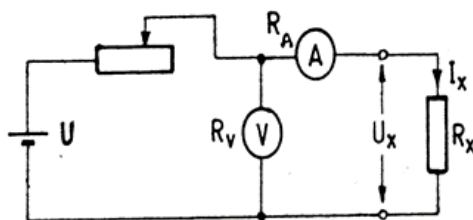
$$G_r = - \frac{G_a}{U_i} \cdot 100\% = \pm 5\%$$

Резултатот на мерење е:

$$U = 20 \text{ V} \pm 1 \text{ V} = 20 \cdot (1 \pm 5 \cdot 10^{-2}) \text{ V}$$

Грешката на кој било дел на скалата може да изнесува најмногу 1% од мерното подрачје  $U_v$ , односно 1 V. Тоа значи дека за мерниот напон од 20 V грешката во проценти изнесува 5%.

**Задача 1.5.** Низ непознат отпор  $R_x$  тече струја со вредности  $I_x$  која ја мериме со амперметар. Претпоставувајќи дека внатрешниот отпор на амперметарот е  $R_a = 0$ , волтметарот го мери падот на напонот  $U_x$  на мерниот отпор.



Слика бр. 1.2. Мерно коло со амперметар и волтметар

**Дискусија :**

Вредноста на мерниот отпор го сметаме од равенката:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x}$$

Грешка се прави со тоа што се зема да  $R_A = 0$ , па волтметарот мери  $U = U_x + U_A$ , а не  $U_x$ . Процентната систематска грешка  $\varepsilon_p$  на мерната постапка се пресметува од равенките:

$$\frac{U}{U_x} = \frac{R + R_x}{R_x}$$

односно  $U$  е:

$$U = U_x \left(1 + \frac{R}{R_x}\right)$$

Односно добиваме системска грешка при мерењето,

$$\varepsilon_p = + \frac{R_A}{R_x} \cdot 100\%$$

За отстранување на ова систематска грешка треба да се пронајде вредност за поправка која ја добиваме од равенката за  $R_x$ :

$$R_x = \left(\frac{U}{I_x} - R_A\right)$$

Така, точноста на мерната метода е ограничена со:

- систематската грешка на мерната метода и
- границите на грешка на применетите мерни инструменти.

**Задача 1.6.** Со дигитален мерен инструмент со мерно подрачје  $U_v = 20 \text{ V}$ , измерена е вредност  $U_i = 12,54 \text{ V}$ , додека инструментот има грешка на мерење дадена со:

$$\pm 0.2\% U_i + 0.05 U_v$$

Да се одреди апсолутната граница на грешката и да се прикаже резултатот на мерењето?

**Решение :**

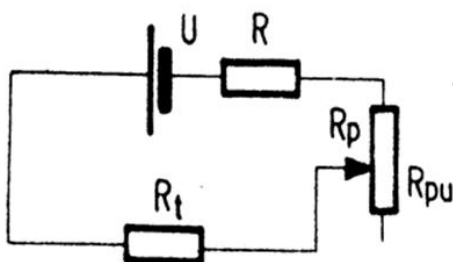
Максималните граници на апсолутната грешка се:

$$G_a = \pm \left( \frac{0.2 \cdot 12.54}{100} + 0.05 \cdot 20 \right) \text{V} = \pm 0.035 \text{V}$$

Резултатот на мерење го прикажуваме со помош на измерената вредност и границите на апсолутната грешка:

$$U = 12.54 \text{V} \pm 0.035 \text{V} = 12.54 \cdot \left(1 \pm 2.8 \cdot 10^{-3}\right) \text{V}$$

**Задача 1.7.** Колку треба да биде вредноста на отпорникот  $R$  и лизгачкиот отпорник  $R_{PU}$  ако сакаме да ја регулираме струјата во колото во границите од 25 до 50 mA? При тоа  $U = 6\text{ V}$ , а  $R_t = 20\ \Omega$ .



Слика бр. 1.3. Мерно коло со лизгачки отпорник

**Решение :**

Максималната струја се добива од  $R_p = 0$

$$I_{\max} = \frac{U}{R + R_t}$$

$$R = 100\ \Omega$$

Минималната струја се добива од  $R_p = R_{PU}$

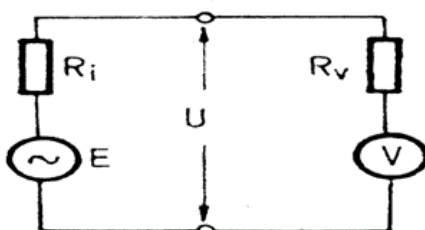
$$I_{\min} = \frac{U}{R + R_t + R_{PU}}$$

$$R_{PU} = 120\ \Omega$$

Согласно на тоа, вредноста на отпорникот треба да биде помеѓу 100 и 120  $\Omega$ .

**Задача 1.8.** Имаме извор на синусен напон со внатрешен отпор  $R_i = 600\ \Omega$ :

Да се одреди со помош на волтметар напонот на празен од на овој извор? Колку најмалку треба да изнесува внатрешниот отпор на волтметарот  $R_V$  за да измерениот напон  $U$  не би се разликувал од правата вредност на напонот на празен од за вредност помала од  $p = 2\%$ ?



Слика бр. 1.4.

**Решение :**

$$p = \frac{U - E}{E} \cdot 100\% = -\frac{R_i}{R_i + R_V} \cdot 100\%$$

$$R_V \geq -R_i \left(1 + \frac{100}{p}\right) \geq 29,5k\Omega$$

**Задача 1.9.** Во мерното коло со потрошувач се измерени пад на напон и струја низ него со следните релативни грешки:

$$\frac{\Delta U}{U} = -0.011, \frac{\Delta I}{I} = 0.02$$

Работниот отпор на потрошувачот се знае од релативната грешка:

Колку е релативната грешка при мерење на моќноста на потрошувачот?

**Решение :**

Од равенката за моќност се добива:

$$P = U \cdot I$$

$$P + \Delta P = (U + \Delta U) \cdot (I + \Delta I) = U \cdot I + \Delta U \cdot I + U \cdot \Delta I + \Delta U \cdot \Delta I$$

Бидејќи  $\Delta U \cdot \Delta I \rightarrow 0$  и со кретење лево и десно на  $P$  и  $U \cdot I$  се добива:

$$\Delta P = \Delta U \cdot I + U \cdot \Delta I$$

Ако овој израз се подели со  $P$ , добиваме:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U \cdot I}{U \cdot I} + \frac{U \cdot \Delta I}{U \cdot I} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = -0.011 + 0.02 = 0.009$$

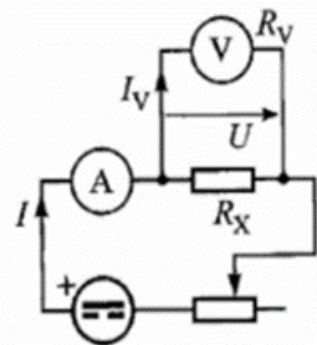
**Задача 1.10.** Отпорот  $R_X$  е мерен со  $U$ - $I$  метода во спој за мерење на мали отпори. Напонот е мерен со волтметар со мерно подрачје  $100\text{ V}$  со  $100$  делови на скала и карактеристичен отпор  $2k\Omega/V$ , а струјата е мерена со амперметар со мерен домет  $0.001\text{mA}$  со  $100$  делови на скала и внатрешен отпор  $10\ \Omega$ . Колку изнесува отпорот  $R_X$  ако на волтметарот е прочитано  $57$  делови на скала, додека на амперметарот е прочитано  $85$  делови на скала?

**Решение :**

$$\text{Напон : } U_V = \frac{\alpha_V}{\alpha_{Vmax}} \cdot MO_V = \frac{57}{100} \cdot 100 = 57\text{ V}$$

$$\text{Струја : } I_A = \frac{\alpha_A}{\alpha_{Amax}} \cdot MO_A = \frac{85}{100} \cdot 0.01 = 8.5\text{ mA}$$

$$R_X = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{57}{8.5 \cdot 10^{-3} - \frac{57}{200 \cdot 10^3}} = 6938.5\ \Omega$$



Слика бр. 1.5. Мерно коло со амперметар и волтметар

**Задача 1.11.** Колкава грешка внесува отпорот на заземјување  $R_{S1}$  на сондата  $S1$  со вредност  $100 \Omega$  кај  $U-I$  метода на мерење на отпорот на заземјување ако се употребува волтметар со карактеристичен отпор  $1k\Omega/V$  на мерно подрачје од  $6V$ .

**Решение :**

$$R_V = R_{kV} \cdot MO_V = \frac{1k\Omega}{V} \cdot 6V = 6k\Omega$$

$$p\% = \frac{-R_{S1}}{R_V + R_{S1}} \cdot 100 = \frac{-100}{6000 + 100} \cdot 100 = -1.64\%$$

**Задача 1.12.** Со амперметар со мерно подрачје  $100mA$  и внатрешен отпор  $50m\Omega$  и волтметар со мерно подрачје  $2V$  и со карактеристичен отпор  $10k\Omega/V$  мериме отпор  $R_X$  со приближна вредност  $30\Omega$ .

Да се избере коло и да се одреди мерениот отпор ако со амперметарот е измерена струја  $58mA$ , а со волтметарот е измерен напон  $1.96V$ ?

**Решение :**

$$R_X \text{ и } R_A \quad \frac{R_X}{R_A} \approx \frac{30}{0.05} = 600$$

$$R_V \text{ и } R_X \quad \frac{R_V}{R_X} \approx \frac{20 \cdot 10^3}{30} = 667$$

**Избран е напонски спој**

$$\text{Корекции } R'_X = \frac{U_V}{I_A} = \frac{1.96}{0.058} = 33.79 \Omega$$

$$R_X = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}} = \frac{1.96}{0.058 - \frac{1.96}{20 \cdot 10^3}} = 33.85 \Omega$$

**Задача 1.13.** Со универзален амперметар со мерно подрачје  $1A$  мериме наизменична струја на која факторот на облик е  $\xi_0 = 1.11$ ,  $\xi = 1.06$ .

Колкава е грешката на инструментот? Колкава е ефективната вредност на мерената струја ако инструментот покажува  $0.556A$ ?

**Решение :**

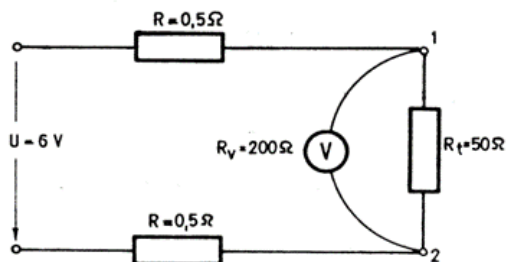
$$I_i = I_{sr} \cdot \xi_0 = 0.556 A$$

$$I_{sr} = \frac{I_i}{\xi_0} = \frac{0.556}{1.11} = 0.5 A$$

$$I_{ef} = I_{sr} \cdot \xi = 0.5 \cdot 1.06 = 0.53 A$$

$$p\% = \frac{\xi_0 - \xi}{\xi} \cdot 100 = \frac{1.11 - 1.06}{1.06} \cdot 100 = 4.7\%$$

**Задача 1.14.** Во мерното коло според сликата го мериме напонот на потрошувачот. Да се одреди апсолутната и релативната грешка во проценти предизвикана од внатрешниот отпор на волтметарот?



- $R$  – отпор на надворешните проводници
- $R_t$  – отпор на потрошувачот
- $R_v$  – внатрешен отпор на волтметарот
- $U$  – напон на изворот

Слика бр. 1.6. Мерно коло со потрошувач

**Решение :**

Напонот на потрошувачот (помеѓу точките 1 и 2), при вклучување на волтметарот е:

$$U_t = U \frac{R_t}{R_t + 2R} = 5,88V$$

Со вклучување на волтметарот помеѓу точките 1 и 2, отпорот помеѓу нив добива нова вредност:

$$R'_t = \frac{R_t \cdot R_v}{R_t + R_v} = 40 \Omega$$

Со тоа ќе се промени и напонот на потрошувачот, па волтметарот ќе покаже:

$$U_v = U \cdot \frac{R'_t}{R'_t + 2R} = 5,85V$$

Приклучениот волтметар предизвикува намалување на напонот на потрошувачот, па затоа измерената вредност на напонот ќе се разликува од вредноста кога волтметарот не е вклучен во колото. Присутна е систематска грешка:

$$P = U_v - U_t = -0,03V$$

$$p = \frac{U_v - U_t}{U_t} \cdot 100\% = -0,51\%$$

**Задача 1.15.** Еден отпорник со назначена вредност од  $700 \Omega$ , измерен е со многу точна постапка и добиена е вредност од  $700,8 \Omega$ . Да се одредат: номинална вредност на отпорникот  $R$ , конвенционално точната вредност, апсолутната и релативната грешка, како и корекцијата.

**Решение :**

Номиналната вредност е дадена во задачата:

$$R_N = 700 \Omega$$

Конвенционално точната вредност ја читаме, исто така, од задачата:

$$R_T = 700,8 \Omega$$

Апсолутната грешка ја пресметува како:

$$\Delta R = R_N - R_T = 700 - 700,8 = -0,8 \Omega$$

Додека, пак, релативната грешка е:

$$g_R \% = \frac{\Delta R}{R_N} \cdot 100 = -\frac{0,8}{700} \cdot 100 = -0,114 \%$$

### Корекција:

Кога мериме со мерки за да се добие конвенционално точната вредност, треба да се изврши корекција. Корекцијата е вредност која треба да се додаде на измерената вредност за да се добие конвенционално точната вредност на мерената големина. Корекцијата е еднаква на апсолутната грешка, но со спротивен знак.

$$k = -\Delta R = -(-0,114)\Omega = 0,114 \Omega$$

**Задача 1.16.** Да се одредат максималните релативни грешки што ги прави амперметарот при мерење на струја од 2 A и 3 A, ако неговата класа на точност е 1,5, а мерното подрачје е  $I_{mp} = 4 A$ .

*Забелешка:* За потребите на практичната мерна техника се дефинира  $\Delta X_{max}$  како апсолутна максимална грешка која има дефинирани граници помеѓу кои мора да се наоѓа резултатот од мерењето.

### Решение :

Класата на точност на инструментите е граничната релативна грешка изразена во проценти [%].

$$kl. \text{ toc. } \% = g_g = \frac{\Delta X_{max}}{X_{mp}} \cdot 100$$

$$\Delta X_{max} = \frac{kl. \text{ toc. } \cdot X_{mp}}{100} = \frac{1,5 \cdot 4}{100} = 0,06 A$$

При која било положба на стрелката на инструментот е дефинирана максималната релативна грешка.

$$g_{max1} = \pm \frac{\Delta X_{max}}{2 A} \cdot 100 = \pm \frac{0,06}{2} \cdot 100\% = \pm 0,03 \cdot 100\% = \pm 3\%$$

$$g_{max2} = \pm \frac{\Delta X_{max}}{3 A} \cdot 100 = \pm \frac{0,06}{3} \cdot 100\% = \pm 0,02 \cdot 100\% = \pm 2\%$$

**Задача 1.17.** Со волтметар со мерно подрачје  $U_{mp} = 150 V$  и класа на точност 0,5 измерени се напони од  $U_1 = 85 V$  и  $U_2 = 140 V$ . Пресметајте ги максималните грешки за двата мерени напони.

**Решение :**

$$\Delta X_{max} = \frac{kl.toc \cdot X_{mp}}{100} = \frac{0,5 \cdot 150}{100} = 0,75 V$$

$$g_{max1} = \pm \frac{\Delta X_{max}}{U_1} \cdot 100 = \pm \frac{0,75}{85} \cdot 100\% = \pm 0,0088 \cdot 100\% = \pm 0,88\%$$

$$g_{max2} = \pm \frac{\Delta X_{max}}{U_2} \cdot 100 = \pm \frac{0,5}{140} \cdot 100\% = \pm 0,0035 \cdot 100\% = \pm 0,35\%$$

**Задача 1.18.** Колку изнесуваат максималната апсолутна и релативна грешка на волтметар ако е измерен напон 70 V на мерно подрачје 100 V и ако граничната релативна грешка на инструментот е  $\pm 1\%$ ?

**Решение :**

Поаѓајќи од формулата  $\Delta X_{max} = \frac{kl.toc \cdot X_{mp}}{100}$ , за  $\Delta U_{max}$  се добива следнава релација:

$$\Delta U_{max} = \frac{kl.toc \cdot U_{mp}}{100} = \frac{\pm 1 \cdot 100}{100} = \pm 1 V$$

На сличен начин:

$$g_{max} = \frac{\Delta U_{max}}{U_i} \cdot 100 = \pm \frac{1}{70} \cdot 100 = \pm 0,014 \cdot 100 \cong 1,4 \%$$

**Задача 1.19.** Колку изнесува максималната апсолутна и релативна грешка на дигитален волтметар со  $4 \frac{1}{2}$  дигити за мерно подрачје од  $U_{mp} = 978 mV$  и резолуција од 0,1 mV ако максимално дозволена грешка на инструментот е:

$$\Delta = \pm A_{pv}\% + B_{dig} = -0,5\% + 2 dig$$

каде што

$$A_{pv}\% = \frac{\Delta x}{X_{mp}} \cdot 100,$$

а  $B_{dig}$  е грешката во дигити дадена од производителот.

**Решение :**

Апсолутната грешка од покажаната вредност  $A_{pv}$  се пресметува според изразот:

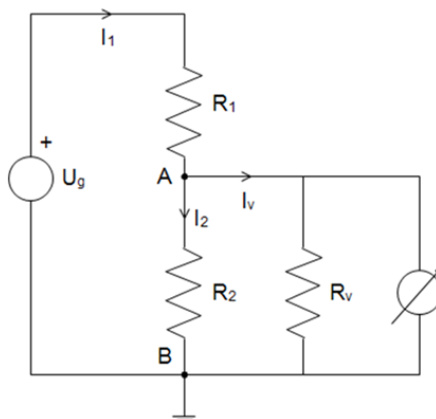
$$\Delta x_{max} = \frac{A_{pv}\%}{100} \cdot x_{mp} = \frac{0,5\%}{100} \cdot 978 mV = 4,89 mV$$

Вкупната апсолутна грешка се пресметува според:

$$\Delta = \pm(4,89 \text{ mV} + 2 \cdot 0,1 \text{ mV}) = \pm 5,09 \text{ mV} = \Delta_{max}$$

$$kl. \text{ toc} = \pm \frac{\Delta x_{max}}{x_{mp}} \cdot 100 = \pm \frac{4,89}{978} \cdot 100 = \pm 0,5\%$$

**Задача 1.20.** Напонски делител составен од  $R_1 = 200 \text{ k}\Omega$  и  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  е приклучен на влезен напон од  $U_i = 220 \text{ V}$ . Делителот е прикажан на сликата.



Слика бр. 1.7. Напонски делител

а) Колку изнесува излезниот напон  $U_2$  од делителот во случај кога истиот е мерен со волтметар со карактеристична отпорност  $1 \text{ k}\Omega/\text{V}$  при мерно подрачје од  $400 \text{ V}$  ?

б) Колку изнесува излезниот напон  $U_2$  од делителот во случај кога истиот е мерен со волтметар со карактеристична отпорност  $20 \text{ k}\Omega/\text{V}$  при мерно подрачје од  $500 \text{ V}$  ?

в) Да се одредат грешките под а) и б).

**Решение :**

$$U_2 = \frac{R'_2}{R_1 + R'_2} \cdot U_i \quad R'_2 = \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v}$$

а)

$$R'_k = 1000 \Omega/\text{V}$$

$$U_{mp} = 400 \text{ V}$$

$$R'_v = R'_k \cdot U_{mp} = 1000 \frac{\Omega}{\text{V}} \cdot 400 \text{ V} = 400 \text{ k}\Omega$$

$$R'_2 = \frac{R_2 R'_v}{R_2 + R'_v} = \frac{100 \cdot 400}{500} = 80 \text{ k}\Omega$$

$$U'_2 = \frac{R'_2}{R_1 + R'_2} \cdot U_i = \frac{80}{200 + 80} \cdot 220 = 62,85 \text{ V}$$

б)

$$R''_k = 20000 \Omega/\text{V}$$

$$U_{mp} = 500 \text{ V}$$

$$R''_v = R''_k \cdot U_{mp} = 20000 \frac{\Omega}{V} \cdot 500 \text{ V} = 10000000 \Omega = 10000 \text{ k}\Omega$$

$$R''_2 = \frac{R_2 R''_v}{R_2 + R''_v} = \frac{100 \cdot 10000}{100 + 10000} = 99 \text{ k}\Omega$$

$$U''_2 = \frac{R''_2}{R_1 + R''_2} \cdot U_i = \frac{99}{200 + 99} \cdot 220 = 72,84 \text{ V}$$

в)

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_i = \frac{100}{200 + 100} \cdot 220 = 73,3 \text{ V}$$

$$\Delta' = U'_2 - U_2 = 62,85 - 73,3 = -10,45 \text{ V}$$

$$\delta' = \frac{\Delta'}{U_2} \cdot 100 = -\frac{10,45}{73,3} \cdot 100 = -14,25 \%$$

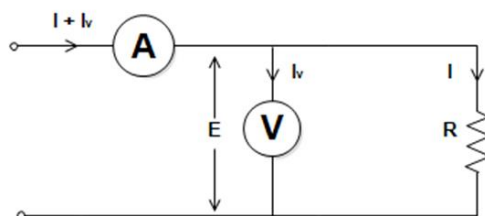
$$\Delta'' = U''_2 - U_2 = 72,84 - 73,3 = -0,46 \text{ V}$$

$$\delta'' = \frac{\Delta''}{U_2} \cdot 100 = \frac{-0,46}{73,3} \cdot 100 = -0,62 \%$$

**Задача 1.21.** Мерното коло на сликата се користи за мерење отпорност.

Отпорностите на амперметарот и волтметарот се  $0,01 \Omega$  и  $2000 \Omega$ , соодветно.

Инструментите соодветно прикажуваат  $2 \text{ A}$  и  $180 \text{ V}$  од каде измерената отпорност е  $90 \Omega$ . Колкава е процентуалната грешка при мерењето?



Слика бр. 1.8. Мерно коло за мерење на отпорност

**Решение :**

Струјата низ волтметарот се пресметува според Омов закон:

$$I_v = \frac{E}{2000} = \frac{180}{2000} = 0,09 \text{ A}$$

$$I + I_v = 2 \text{ A}$$

$$I = 2 - I_v = 2 - 0,09 = 1,91 \text{ A}$$

$$R = \frac{E}{I} = \frac{180}{1.91} = 94.24 \Omega$$

Во идеален случај:

$$R_0 = \frac{180}{2} = 90 \Omega$$

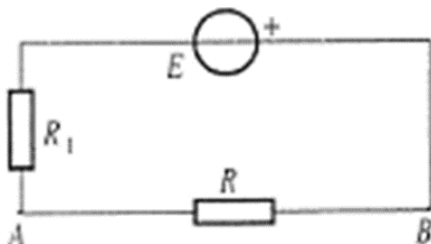
Процентуалната грешка се пресметува:

$$G_{pr(\%)} = \frac{R - R_0}{R_0} \cdot 100 = \frac{94.24 - 90}{90} \cdot 100 = 4.71 \%$$

## Глава 2: Мерења на напони и струи

### 2.1. Општи мерења на основните големини (напон, струја, отпорност, моќност, грешки)

**Задача 2.1.1.** Генератор со константна ЕМС  $E=10\text{ V}$  и занемарлива внатрешна отпорност, отпорник  $R_1=200\ \Omega$  и дополнителен отпорник  $R$  поврзани се во електрично коло како на сликата. Колкава е вредноста на дополнителниот отпорник  $R$  ако вредноста на напонот помеѓу точките  $A$  и  $B$  изнесува  $U_{BA}=8\text{ V}$ ?



Слика бр. 2.1.1. Едноставно електрично коло

#### Решение :

Ако го решиме електричното коло за отпорноста  $R$ , може да се напише следното:

$$R = \frac{U_{BA}}{I} = \frac{U_{BA}}{\frac{E}{R_1 + R}}$$

$$U_{BA} \cdot (R_1 + R) = E \cdot R$$

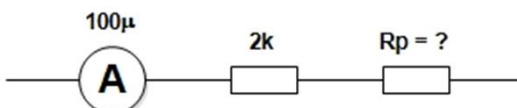
$$(E - U_{BA}) \cdot R = U_{BA} \cdot R_1$$

Конечно, за отпорникот  $R$  добиваме:

$$R = \frac{R_1}{\frac{E}{U_{BA}} - 1} = \frac{200}{\frac{10}{8} - 1} = 800\ \Omega$$

**Задача 2.1.2.** За мерење на наизменичен напон на располагање имаме микроамперметар со подвижен калем, домет од  $100\ \mu\text{A}$  и внатрешна отпорност  $2\ \text{k}\Omega$ , и едностран исправувач.

Да се одреди вредноста на предотпорникот кој треба да се употреби за да можена тој начин добиениот волтметар, да се мерат наизменични напони со ефективни вредности до  $12\text{V}$ .



Слика бр. 2.1.2. Серија на амперметар и предотпорник

**Решение :**

Бидејќи се користи едностран исправувач, отчитаната вредност на сигналот се множи со 2.22:

Максималната струја е  $100 \mu\text{A}$  т.е.

$$100 \mu\text{A} \cdot 2.22 = 222 \mu\text{A}$$

Вкупната отпорност се пресметува според Омов закон:

$$\frac{U_{max}}{I_{max}} = \frac{12}{222 \cdot 10^{-6}} = 0.054 \cdot 10^6 = 54 \cdot 10^3 \Omega = 54 \text{ k}\Omega$$

Отпорноста на предотпорот  $R_p$ :

$$R_p = 54 \text{ k}\Omega - 2 \text{ k}\Omega = 52 \text{ k}\Omega$$

**Задача 2.1.3.** Универзален мерен инструмент се користи како волтметар. Инструментот има скала со вкупно 30 поделци. Со овој инструмент мериме напон во мерен опсег од 300 V. Колку изнесува константата на инструментот? Колкав напон се мери со инструментот ако стрелката на инструментот покажува 22 поделци.

**Решение:**

$$D_v = 300 \text{ V}$$

$$\alpha_m = 30 \text{ под}$$

$$\alpha_v = 22 \text{ под}$$

$$K_v = \frac{D_v}{\alpha_m} = \frac{300 \text{ V}}{30 \text{ под}} = 10 \left[ \frac{\text{V}}{\text{под}} \right]$$

$$U_v = K_v \cdot \alpha_v = 10 \frac{\text{V}}{\text{под}} \cdot 22 \text{ под} = 220 \text{ V}$$

**Задача 2.1.4.** Универзален мерен инструмент кој се користи како амперметар има вкупно 100 поделци. Со овој инструмент потребно е да мериме јачина на електрична струја во мерен опсег од 500 mA. Колку изнесува константата на инструментот? Кокава струја се мери со инструментот ако стрелката покажува 76 поделци?

**Решение:**

$$D_A = 500 \text{ mA}$$

$$\alpha_m = 100 \text{ под}$$

$$\alpha_A = 76 \text{ под}$$

$$K_A = \frac{D_A}{\alpha_m} = \frac{500 \text{ mA}}{100 \text{ под}} = 5 \left[ \frac{\text{mA}}{\text{под}} \right] = 0,005 \left[ \frac{\text{A}}{\text{под}} \right]$$

$$U_v = K_A \cdot \alpha_A = 0,005 \frac{\text{A}}{\text{под}} \cdot 76 \text{ под} = 0,38 \text{ A}$$

**Задача 2.1.5.** Со електродинамичен ватметар се мери моќност во електрично коло. Скалата на инструментот има вкупно 120 поделци. Ако струјниот опсег на инструментот е 5 A, напонскиот опсег 240 V, колку изнесува константата на ватметарот? Колкава електрична моќност мери ватметарот ако стрелката на мерниот систем покажува 98 поделци?

**Решение:**

$$D_A = 5 \text{ A}$$

$$D_V = 240 \text{ V}$$

$$\alpha_m = 120 \text{ под}$$

$$\alpha_A = 98 \text{ под}$$

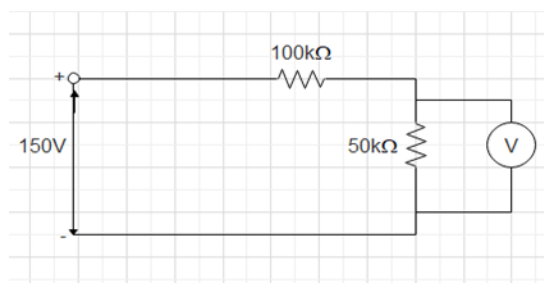
$$K_W = \frac{D_A D_V}{\alpha_m} = \frac{5 \text{ A} \cdot 240 \text{ V}}{120 \text{ под}} = 10 \left[ \frac{\text{W}}{\text{под}} \right]$$

$$P_W = K_W \alpha_m = 10 \frac{\text{W}}{\text{под}} \cdot 98 \text{ под} = 980 \text{ W}$$

**Задача 2.1.6.** Треба да се измери напонот низ отпорник од 50 kΩ во колото прикажано на сликата. Два волтметри се достапни за оваа цел: (1) Волтметар А со осетливост од 1000 Ω/V, и (2) Волтметар В со осетливост од 20 000 Ω/V. Двата волтметри имаат ист опсег од 0-50 V.

Пресметај:

- вредноста која ја покажува секој од волтметрите, и
- процентуалната грешка во секое покажување.



Слика бр. 2.1.3. Мерно коло со волтметар

**Решение:**

Вредноста на напонот низ отпорник од 50 kΩ, изнесува:

$$V = \frac{50}{100 + 50} \cdot 150 = 50V$$

**а) (1) Волтметар А:**

Отпорноста на волтметарот е:

$$R_v = S_v \cdot V = 1000 \cdot 50 = 50k\Omega$$

Овој волтметар е поврзан низ отпорник од 50 kΩ затоа отпорноста на паралелната комбинација на волтметарот и отпорникот е

$$\frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 25k\Omega$$

Напонот низ комбинацијата од волтметарот и отпорникот

$$V = \frac{25}{100 + 25} \cdot 150 = 30V$$

**(2) Волтметар Б:**

Отпорноста на волтметарот изнесува:

$$R_v = S_v \cdot V = 20000 \cdot 50 = 1000k\Omega$$

Отпорноста на комбинација од волтметар и отпорник од 50 kΩ изнесува:

$$\frac{1000 \cdot 50}{1000 + 50} = 47.6k\Omega$$

Напонот низ комбинација од волтметар и отпорник

$$V = \frac{47.6}{100 + 47.6} \cdot 150 = 48.36V$$

**б) (1) Волтметар А:**

Процентуалната грешка изнесува:

$$G_{pr} = \frac{30 - 50}{50} \cdot 100 = -40\%$$

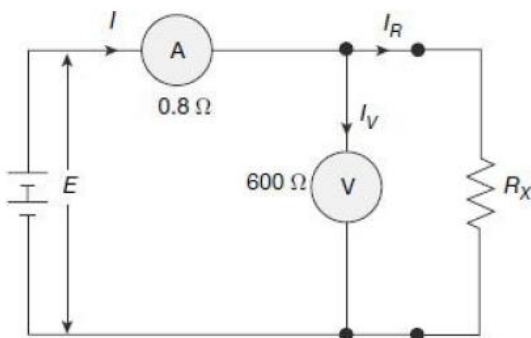
**(2) Волтметар Б:**

Процентуалната грешка изнесува:

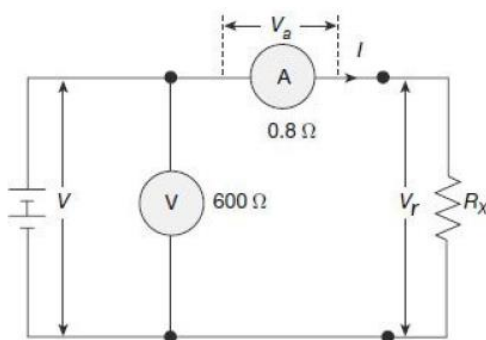
$$G_{pr} = \frac{48.36 - 50}{50} \cdot 100 = -3.28\%$$

**Задача 2.1.7.** Волтметар со внатрешна отпорност од  $600 \Omega$  и милиамперметар со внатрешна отпорност од  $0.8 \Omega$  се искористени за да се измерат две непознати отпорности според  $U-I$  методата. Ако волтметарот покажува вредност  $40 \text{ V}$ , а милиамперметарот покажува вредност  $120 \text{ mA}$  во двата случаја, пресметај ја процентуалната грешка во вредностите на измерените отпорности ако:

- а) во првиот случај милиамперметарот е сериски поврзан со електричниот извор, а волтметарот е поврзан паралелно со непознатиот отпорник.



- б) во вториот случај волтметарот е поврзан паралелно со електричниот извор, а милиамперметарот е поврзан во серија со непознатиот отпорник.



**Решение:**

- а)  $V=40 \text{ V}$  ;  $I=120 \text{ mA}$ ;

Измерена отпорност од покажувањата на волтметарот и амперметарот изнесува:

$$R_m = \frac{V}{I} = \frac{40}{120 \cdot 10^{-3}} = 333 \Omega$$

Амперметарот ја покажува струјата  $I_R$  која тече низ отпорникот  $R_x$  исто така и струјата  $I_V$  која тече низ отпорноста на волтметарот  $R_V$ . Па затоа  $I = I_V + I_R$

$$V = I_R \cdot R_x = I_V \cdot R_V$$

Струјата низ волтметарот:

$$I_V = \frac{V}{R_V} = \frac{40}{600} = 66.67 \text{ mA}$$

Струјата низ отпорноста:

$$I_R = I - I_V = 120 - 66.67 = 53.33 \text{ mA}$$

Отпорноста на непознатиот отпорник е:

$$R_X = \frac{V}{I_R} = \frac{40}{53.33 \cdot 10^{-3}} = 750 \Omega$$

Процентуалната грешка:

$$G_{pr} = \frac{R_m - R_x}{R_x} = \frac{|333 - 750|}{750} \cdot 100\% = 55.6\%$$

б)  $V=40 \text{ V}$ ;  $I=120 \text{ mA}$

Измерена отпорност од покажувањата на волтметарот и амперметарот

$$R_m = \frac{V}{I} = \frac{40}{120 \cdot 10^{-3}} = 333 \Omega$$

Волтметарот го покажува падот на напонот  $V_R$  низ отпорникот  $R_X$  како и падот на напонот  $V_A$  низ отпорноста на амперметарот  $R_A$ .

Затоа:  $V = V_A + V_R$

Пад на напон низ амперметарот:

$$V_A = I \cdot R_A = 120 \cdot 10^{-3} \cdot 0.8 = 0.096 \text{ V}$$

Пад на напон низ отпорникот:

$$V_R = V - V_A = 40 - 0.096 = 39.904 \text{ V}$$

Отпорноста на отпорникот:

$$R_X = \frac{V_R}{I} = \frac{39.904}{120 \cdot 10^{-3}} = 332.53 \Omega$$

Процентуалната грешка:

$$G_{pr} = \frac{333 - 332.53}{332.53} \cdot 100\% = 0.14\%$$

**Задача 2.1.8.** Електричен генератор со константа ЕМС и занемарлива внатрешна отпорност формира електрично коло со потрошувач кој има отпорност  $R=20 \Omega$ . Кога во електричното коло се вклучи амперметар со внатрешна отпорност  $R_A = 0,2 \Omega$ , тој покажува дека јачината на струјата во електричното коло изнесува  $I=128,7 \text{ mA}$ .

Колкава е јачината на струјата во електричното коло пред да се вклучи амерметарот во него? Колкава апсолутната, а колкава релативна грешка внесува амерметарот во процесот на мерењето?

**Решение :**

Во случај на вклучен амперметар, измерената јачина на струја изнесува:

$$I = \frac{E}{R_A + R}$$

Односно за вредноста на константниот напон на генераторот добиваме:

$$E = (R_A + R) \cdot I = (20 + 0,2) \cdot 0,1287 = 2,599 \text{ V} \approx 2,6 \text{ V}$$

Соодветно, кога не би бил приклучен амперметарот, јачината на струјата во електричното коло треба да биде:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2,6}{20} = 0,130 \text{ A} = 130 \text{ mA}$$

Апсолутната грешка при ова мерење изнесува:

$$G_A = 130 - 128,7 = 1,3 \text{ mA}$$

Додека релативната грешка изнесува:

$$G_R = \frac{1,3}{130} \cdot 100 = 1\%$$

**Задача 2.1.9.** Колку е внатрешниот  $R_U$  отпор на еднонасочен извор со напон  $E = 6,41 \text{ V}$  ако со волтметар со карактеристичен отпор  $R_V = 2000 \Omega/V$  и мерно подрачје од  $10 \text{ V}$  е измерен напон  $U_V = 6,25 \text{ V}$ .

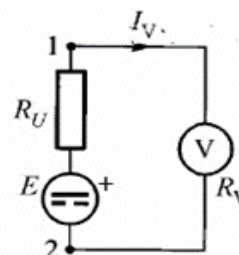
**Решение :**

$$R_V : U_V = 6.25 \text{ V}$$

$$E = 6.41 \text{ V}$$

$$R_V = R_{kV} \cdot MO = 2 \frac{k\Omega}{V} \cdot 10V = 20 \text{ k}\Omega$$

$$R_u = \frac{E - U_V}{I_V} = \frac{6.41 - 6.25}{6.25/20 \cdot 10^3} = 512 \Omega$$



Слика бр. 2.1.4. Мерно коло со еднонасочен извор и волтметар

**Задача 2.1.10.** Потребно е да се определи отпорноста на еден бакарен проводник низ кој протекува електрична струја на амбиентна температура  $T = 18^\circ \text{C}$ . Бидејќи не е можно прекинување на електричното коло, извршено е мерење на отпорноста со помош на омметар на работна температура од  $51,6^\circ \text{C}$  (кога низ бакарниот проводник протекува електрична струја) при што добиена е вредност од  $4,12 \Omega$ . Ако се знае дека

температурниот коефициент на бакарот изнесува  $\alpha = 0,0043 \frac{\Omega}{\Omega^{\circ}\text{C}}$  да се определи вредноста на неговата отпорност при  $T=18^{\circ}\text{C}$  ?

**Решение :**

Ако знаеме дека отпорноста на бакарниот проводник при температура  $\theta$  се менува согласно следната формула:

$$R_{\theta} = R_{18} \cdot [1 + \alpha(\theta - 18)]$$

Следува дека за отпорност при амбиентна температура  $T=18^{\circ}\text{C}$  добиваме:

$$R_{18} = \frac{R_{\theta}}{[1 + \alpha(\theta - 18)]} = \frac{4,12}{[1 + 0,0043(51,6 - 18)]} = \frac{4,12}{1,144} = 3,6 \Omega$$

## 2.2. Проширување на мерно подрачје

**Задача 2.2.1.** Инструмент со подвижна намотка чија отпорност е  $25 \Omega$  има максимален опсег на скалата од  $1 \text{ mA}$ . Треба да се направи проширување на овој инструмент со манганин шант кој ќе мери струја до  $100 \text{ mA}$ . Пресметај ја грешката предизвикана од порастот на температурата за  $10^{\circ}\text{C}$  ако:

- а) бакарна подвижна намотка е поврзана паралелно со манганин шантот;
- б) манганин отпорник од  $75 \Omega$  е поврзан во серија со инструментот со подвижна намотка;
- в) Температурниот коефициент на бакарот е  $0.004^{\circ}\text{C}$ , а температурниот коефициент на манганинот е  $0.00015^{\circ}\text{C}$ .

**Решение:**

- а) Фактор на множење на шантот:

$$m = \frac{I}{I_m} = \frac{100}{1} = 100$$

Отпорност на шантот:

$$R_{sh} = \frac{R_m}{m - 1} = \frac{25}{100 - 1} = \frac{25}{99} = 0.2525 \Omega$$

Отпорност на инструментот при зголемување на температурата од  $10^{\circ}\text{C}$

$$R = 25 \cdot (1 + 10 \cdot 0.004) = 26 \Omega$$

Отпорност на шантот при зголемување на температурата од  $10^{\circ}\text{C}$

$$R_{sht} = 0.2525 \cdot (1 + 10 \cdot 0.00015) = 0.2529 \Omega$$

$$I_{mt} = 100 \cdot \frac{0.2529}{26 + 0.2529} = 0.963mA$$

Грешка при порастот на температурата:

$$G = (0,963 - 1) \cdot 100 = -3.7\%$$

б) Вкупна отпорност во колото:

$$R_m + R = 25 + 75 = 100\Omega$$

Отпорност на шантот:

$$R_{sh} = \frac{R_m}{m - 1} = \frac{100}{99} = 1.01\Omega$$

Отпорност на инструментот при покачување на температурата за 10°C

$$R_{mt} = 25 \cdot (1 + 10 \cdot 0.004) + 75 \cdot (1 + 10 \cdot 0.00015) = 101.11\Omega$$

Отпорност на шантот за покачување на температурата за 10°C

$$R_{sht} = 1.01 \cdot (1 + 10 \cdot 0.00015) = 1.0115\Omega$$

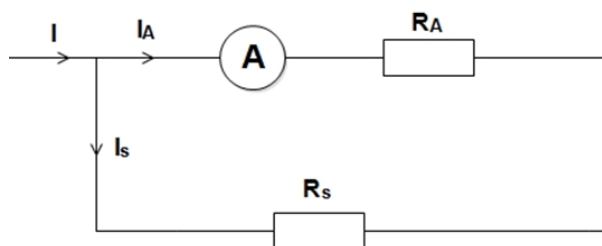
$$I_{mt} = 100 \cdot \frac{1.0115}{101.11 + 1.0115} = 0.9903mA$$

Грешката:

$$G = (0.9903 - 1) \cdot 100 = -0.97\%$$

**Задача 2.2.2.** Амперметар има мерно подрачје од (0 – 5) А и внатрешна отпорност од 0.2 Ω. Колкав отпорник и на кој начин треба да се приклучи кон амперметарот за мерното подрачје да се промени на (0 – 25) А?

**Решение :**



**Слика бр. 2.2.1. Мерно коло со амперметар и отпорник**

$$I_A = 5 A$$

$$R_A = 0,2 \Omega$$

$$I = 25 \text{ A}$$

$$R_S = ?$$

Струјата низ шантот се пресметува според првиот Кирхофов закон, т.е.:

$$I = I_A + I_S$$

одовде,

$$I_S = I - I_A = 25 - 5 = 20 \text{ A}$$

Напонот на краевите на амперметарот е еднаков со напонот на краевите на паралелно приклучениот отпорник:

$$I_S R_S = I_A R_A$$

Ако од ова равенство се изрази  $R_S$ , се добива:

$$R_S = \frac{I_A R_A}{I_S} = \frac{5 \cdot 0.2}{20} = 0.05 \Omega$$

Вредноста на шантот  $R_S = 0.05 \Omega$

**Задача 2.2.3.** Волтметар со мерно подрачје  $100\text{mV}$  и внатрешен отпор  $R_V = 120\Omega$ , е споен на шант  $20\text{A}/150\text{mV}$  со проводници кои имат по  $R_V = 0.8\Omega$ . Колку е струјата  $I_X$  ако волтметарот покажува  $90\text{mV}$ ?

Решение :

$$R_S = \frac{U_S}{I_S} = \frac{150 \text{ mV}}{20 \text{ A}} = 7.5 \text{ m}\Omega$$

$$I'_X = \frac{U_V}{R_S} = \frac{90 \text{ mV}}{7.5 \text{ m}\Omega} = 12 \text{ A}$$

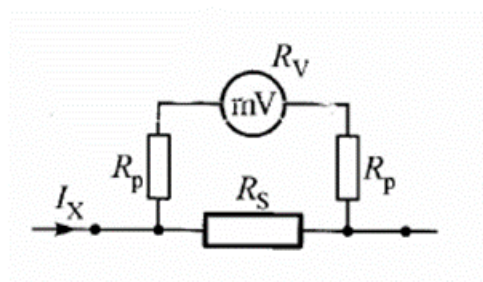
$$U_V = U_S \cdot \frac{R_V}{R_V + 2R_P}$$

$$U_S = I_X \cdot \frac{R_S(R_V + 2R_P)}{R_S + R_V + 2R_P} \cong I_X R_S$$

$$I_X = \frac{U_S}{R_S} = \frac{U_V(R_V + 2R_P)}{R_V R_S} = 12.16 \text{ A}$$

$$p = \frac{I'_X - I_X}{I_X} \cdot 100 = -1.3\%$$

$$U_V = U_{sr} \cdot \xi_0 = 12 \text{ V}$$



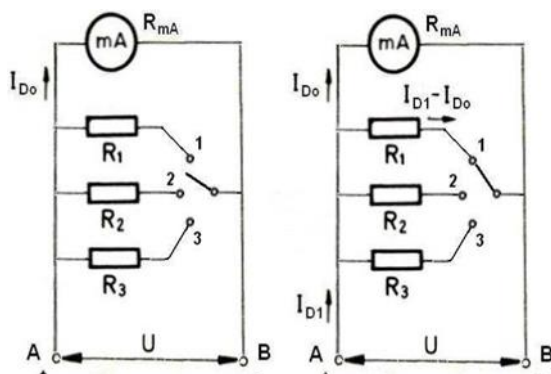
Слика бр. 2.2.2. Мерно коло со отпорници

$$U_{sr} = \frac{U_m}{2}$$

$$U = 2U_{sr} = 2 \cdot \frac{U_Y}{\xi_0} = 2 \cdot \frac{12}{1.11} = 21.6$$

**Задача 2.2.4.** Потребно е да се направи проширување на мерно подрачје на еден амперметар според дадената шема за да може истиот да мери струи со вредности од 500 mA и 1 A и 5 A. Амперметарот има основно мерно подрачје од 5 mA и внатрешна отпорност  $R_A = 3\Omega$ .

Да се определат вредностите на соодветните отпорници  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  со кои треба да се шантира овој амперметар!



Слика бр. 2.2.3. Шантирање на амперметар според вредностите на отпорници

**Решение:**

Со користење на равенките за изедначување на напоните:

$$U_{AB} = R_{mA} I_{D0}$$

$$I_o = I_{D1} \cdot I_{D0}$$

$$R_{mA} I_{D0} = R_1 (I_{D1} \cdot I_{D0})$$

$$R_1 = R_{mA} \frac{I_{D0}}{I_{D1} - I_{D0}}$$

За секој од отпорниците може да се пресмета:

$$R_1 = 3 \cdot \frac{5}{500 - 5} = 0,03 \Omega$$

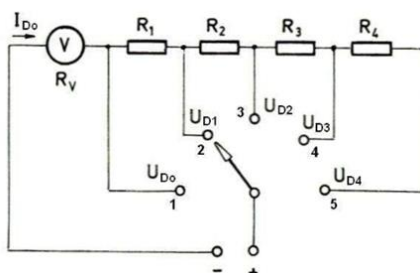
$$R_2 = 3 \cdot \frac{5}{1000 - 5} = 0,015 \Omega$$

$$R_3 = 3 \cdot \frac{5}{5000 - 5} = 0,003 \Omega$$

**Задача 2.2.5.** Потребно е да се направи проширување на мерно подрачје на еден волтметар според дадената шема за да може истиот да мери напони со вредности од

10 V и 100 V, 500 V и 1000 V. Волтметарот има основно мерно подрачје од 1 V и внатрешна отпорност  $R_V = 10 \text{ k}\Omega$ .

Да се определат вредностите на соодветните предотпори  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  со кои треба да се прошири напонското подрачје на овој волтметар!



Слика бр. 2.2.4. Проширување на напонско подрачје на волтметар

### Решение:

Во општ случај проширувањето на подрачјето се добива:

$$R_1 = R_V \frac{U_{D1} - I_{D0}}{U_{D0}}$$

Соодветно, за секој предотпор може да се пресмета:

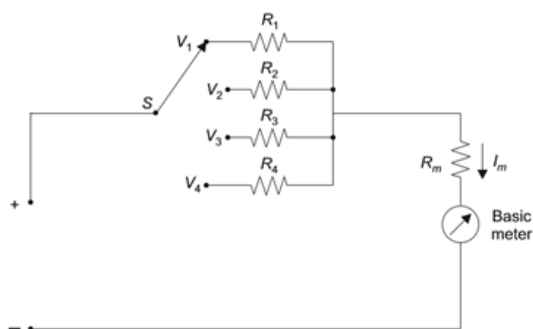
$$R_1 = 10 \cdot \frac{10 - 1}{1} = 90 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \cdot \frac{100 - 1}{1} = 990 - 90 = 900 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 10 \cdot \frac{500 - 1}{1} = 4990 - 90 - 900 = 4000 \text{ k}\Omega = 4 \text{ M}\Omega$$

$$R_4 = 10 \cdot \frac{1000 - 1}{1} = 9990 - 90 - 900 - 4000 = 5000 \text{ k}\Omega = 5 \text{ M}\Omega$$

**Задача 2.2.6.** Даден е DC волтметар со внатрешна отпорност од  $R_m = 50 \Omega$  и максимално дозволена јачина на струјата од  $I_m = 2 \text{ mA}$ . Потребно е да се прошири неговото мерно подрачје и истиот да се трансформира во волтметар кој може да мери во следните напонски подрачја: (0-10) V, (0-50) V, (0-100) V, и (0-250) V. Да се определат соодветните вредности на предотпорите  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$  за секое мерно подрачје поодделно, а да не се надмине максимално дозволената јачина на струјата.



Слика бр. 2.2.5. Проширување на напонско мерно подрачје

**Решение:**

Внатрешниот отпор е:  $R_m = 50 \Omega$

Максимална дозволена вредност на струјата низ волтметарот:  $I_m = 2 \text{ mA}$

**a) Опсег на волтметарот: (0 – 10) V**

Вкупниот отпор:  $R_T = ?$

Вкупниот  $R_T$  отпор за овој опсег на напон може да се добие како:

$$R_T = \frac{V}{I_m} = \frac{10}{2 * 10^{-3}} = 5 \text{ k}\Omega = 5000 \Omega$$

Така отпорникот  $R_4$  се пресметува:

$$R_4 = R_T - R_m = 5000 \Omega - 50 \Omega = 4950 \Omega$$

**b) Опсег на волтметарот: (0 – 50) V**

$$R_T = \frac{V}{I_m} = \frac{50}{2 * 10^{-3}} = 25 \text{ k}\Omega$$

За отпорникот  $R_3$  се добива како:

$$R_3 = R_T - R_m = 25 \text{ k}\Omega - 50 \Omega = 24,95 \text{ k}\Omega$$

**c) Опсег на волтметарот: (0 – 100) V**

$$R_T = \frac{V}{I_m} = \frac{100}{2 * 10^{-3}} = 50 \text{ k}\Omega$$

Отпорникот  $R_2$  се добива како:

$$R_2 = R_T - R_m = 50 \text{ k}\Omega - 50 \Omega = 49,95 \text{ k}\Omega$$

**d) Опсег на волтметарот: (0 – 250) V**

$$R_T = \frac{V}{I_m} = \frac{250}{2 \cdot 10^{-3}} = 125 \text{ k}\Omega$$

Отпорникот  $R_1$  се добива како:

$$R_1 = R_T - R_m = 125 \text{ k}\Omega - 50 \Omega = 124,95 \text{ k}\Omega$$

### 2.3. Мерење на отпорност со шантирање

**Задача 2.3.1.** Инструмент со подвижна намотка има максимална скала за мерење од 2 mA со внатрешна отпорност од 100  $\Omega$  треба да се претвори во амперметар кој ќе мери струја во опсег 0-150 mA. Пресметај ја потребната отпорност на шантот.

**Решение:**

$$R_m = 100\Omega, I_m = 2\text{mA}, I = 150\text{mA}$$

$$R_{sh} = \frac{I_m \cdot R_m}{I - I_m} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{150 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}} = 1.351\Omega$$

**Задача 2.3.2.** Инструмент со подвижна намотка има максимален отклон на скалата од 10 mA кога потенцијалната разлика низ неговите терминали е 100 mV. Пресметај:

а) отпорноста на шантот за струја од 100 A,

б) отпорностите во серија при напон од 100 V.

Пресметај ја загубата на моќност во двата случаја.

**Решение:**

Струјата низ инструментот:  $I = 10 \text{ mA}$

Отпорност на инструментот:

$$R_m = \frac{100}{10} = 10\Omega$$

а) Фактор на множење на шантот:

$$m = \frac{I}{I_m} = \frac{100}{10 \cdot 10^{-3}} = 10000$$

Отпорност на шантот:

$$R_{sh} = \frac{R_m}{m - 1} = \frac{10}{10000 - 1} = \frac{10}{9999} = 0.001\Omega$$

Дисипација на моќноста:

$$P = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 10\text{W}$$

б) Напонски фактор на множење:

$$m = \frac{V}{v} = \frac{1000}{100 \cdot 10^{-3}} = 10000$$

Множење на отпорноста:

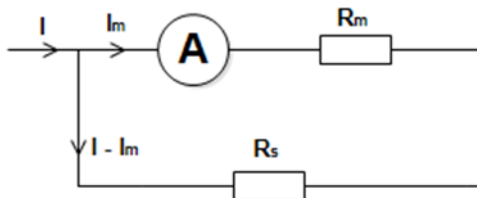
$$R_s = (m - 1) \cdot R_m = (10000 - 1) \cdot 10 = 99990\Omega$$

Дисипација на моќноста:

$$P = V \cdot I_m = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10\text{W}$$

**Задача 2.3.3.** DC амперметар има внатрешна отпорност од  $0.1 \Omega$  и мерен опсег за струи од  $(0 - 100) A$ . Потребно е истиот инструмент да мери јачини на струи во опсег од  $(0 - 500) A$ . Која вредност треба да ја има шантот? Да се нацрта мерното коло.

**Решение :**



Слика бр. 2.3.1. Мерно коло со амперметар и отпорник

$$I_m = 100 A$$

$$I = 500 A$$

$$I_m R_m = (I - I_m) R_s$$

$$R_s = \frac{I_m R_m}{(I - I_m)} = \frac{100 \cdot 0.1}{400} = 0.025 \Omega$$

**Задача 2.3.4.** Инструмент со подвижна намотка со опсег на скалата од  $1 mA$  и внатрешна отпорност од  $100 \Omega$  треба да се претвори во амперметар кој ќе мери струја  $0-100 mA$ . Пресметај ја потребната отпорност. Кои детали треба да бидат специфицирани на шантот?

**Решение:**

Отпорност на шантот:

$$R_{sh} = \frac{I_m \cdot R_m}{I - I_m} = \frac{1 \cdot 100}{100 - 1} = 1.01 \Omega$$

Пад на напон преку шантот:

$$V = 1 \cdot 100 = 100 mV$$

Еквивалентна отпорност од шантот во паралелна врска со амперметарот:

$$R = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} = 1 \Omega$$

Затоа, покажувањата на шантот треба да бидат  $100 mA$ ,  $100 mV$ ,  $1 \Omega$ ,  $100 mA$  или  $1 \Omega$ ,  $100 mV$ .

**Задача 2.3.5.** Моќноста на грејачот на електричен болјер е  $1450 W$ . Грејачот е приклучен на напон од  $220 V$ . Да се определат :

- времето за коешто  $4 L$  вода ќе се загрее од  $20^\circ$  до  $70^\circ$  ако коефициентот на полезно дејство на системот е  $96\%$ . Специфичниот топлински капацитет на водата е  $4200 J/kg^\circ C$  ;
- електричниот отпор на грејачот ;
- јачината на струјата којашто протекува низ грејачот.

**Решение :**

**Дадено :**  $P = 1450 \text{ W}$ ,  $U = 220 \text{ V}$ ,  $m = 4 \text{ kg}$ ,  $\eta = 0.96$ ,  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 70^\circ\text{C}$ ,  $c = 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$

**Се бара :** a)  $t$  - ?, b)  $R$  -?, c)  $I$  -?

a) Коэффициентот на полезно дејство на системот е :

$$\eta = \frac{Q_1}{Q} \quad (1)$$

каде што :

$$Q_1 = mc(t_2 - t_1) \quad (2)$$

Од друга страна важи :

$$t = \frac{Q}{P} \quad (3)$$

Со замена на (1) и (2) во (3) за времето се добива :

$$t = \frac{mc(t_2 - t_1)}{\eta P} = 603.4 \text{ s}$$

b) Отпорот на грејачот изнесува :

$$R = \frac{U^2}{P} = 33.38 \Omega$$

c) Јачината на струјата којашто тече низ грејачот изнесува:

$$I = \frac{P}{U} = 6.6 \text{ A}$$

**Задача 2.3.6.** Инструмент со подвижна намотка со опсег на скалата од 1 mA и внатрешна отпорност од 100  $\Omega$  треба да се претвори во амперметар кој ќе мери струја 0-100 mA. Пресметај ја потребната отпорност. Кои детали треба да бидат специфицирани на шантот?

**Решение:**

Отпорност на шантот:

$$R_{sh} = \frac{I_m \cdot R_m}{I - I_m} = \frac{1 \cdot 100}{100 - 1} = 1.01 \Omega$$

Пад на напон преку шантот:

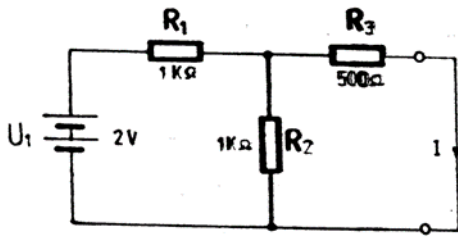
$$V = 1 \cdot 100 = 100 \text{ mV}$$

Еквивалентна отпорност од шантот во паралелна врска со амперметарот:

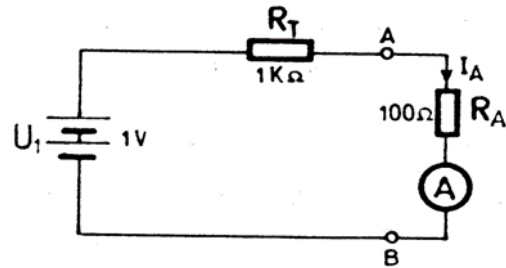
$$R = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-3}} = 1 \Omega$$

Затоа, покажувањата на шантот треба да бидат 100 mA, 100 mV, 1  $\Omega$ , 100 mA или 1  $\Omega$ , 100 mV/

**Задача 2.3.7.** Во струјното коло на сликата треба да се измери струјата во гранката помеѓу точките A и B. Да се одреди апсолутната и релативната грешка, предизвикана од внатрешниот отпор на амперметарот  $R_A = 100\Omega$ .



а) мерно коло



б) коло со амперметар

### Решение:

Прво пристапуваме кон трансформација на мерното коло во еквивалентно Тевененово коло на кое му додаваме во гранката A-B амперметар (слика б). Еквивалентните Тевененови напон и отпор се:

$$U = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1V$$

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 1k\Omega$$

Од вредностите на елементите во мерното коло и еквивалентното Тевененово коло со амперметар го добиваме односот на струјата без амперметар  $I$  и струјата во колото со амперметар е  $I_A$ :

$$\frac{I_A}{I} = \frac{R_S}{R_S + R_A} = 0,91 \text{ ili } I_A = 0,91I$$

Или едноставно доаѓаме до релативна грешка во проценти

$$p = \frac{I_A - I}{I} \cdot 100\% = \frac{0,91I - I}{I} \cdot 100\% = -9\%$$

За пресметка на апсолутната грешка потребно е да се пресмета вредноста на струјата:

$$I = \frac{U}{R_S} = \frac{1V}{1000\Omega} = 1mA$$

$$I_A = 0,91mA$$

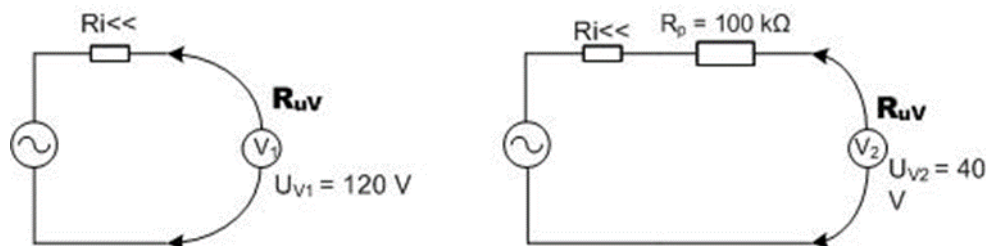
$$P = I_A - I = -0,09mA$$

**Задача 2.3.8.** Со директно приклучување на волтметар со внатрешен отпор  $R_{UV}$  на извор со занемарлив внатрешен отпор и непроменет напон, волтметарот покажал напон  $U_{V1}=120\text{ V}$ . При приклучување на истиот волтметар со сериски врзан отпорник со вредност  $R_p=100\text{ k}\Omega$  на приклучоците на изворот, волтметарот покажал напон  $U_{V2}=40\text{ V}$ .

a. Да се нацртаат мерните кола за двата случаја.

b. Колкава е вредноста на внатрешниот отпор на волтметарот  $R_{UV}$  ?

**Решение :**



a) Ако имаме во предвид дека измерениот напон на изворот кога во колото нема отпорник, (слика а) е  $U_{V1} = 120\text{ V}$ , тој во случај на сликата б) ќе се распредели:

$$\begin{aligned} R_p / R_V &= (120 - 40) / 40 \\ R_V &= 50\text{ k}\Omega \end{aligned}$$

**Образложение:**

Во случај на слика а), волтметарот, всушност, го мери напонот на изворот и тој изнесува  $120\text{ V}$ , додека во вториот случај ја мери разликата помеѓу напонот на изворот (кој е непроменлив) и падот на напонот на отпорникот  $R_p = 100\text{ k}\Omega$ . Според тоа, може да се напише:

$$\begin{aligned} R_V &= \frac{120}{I_1} = \frac{40}{I_2} \\ \frac{120}{E} &= \frac{40}{E} \\ \frac{E}{R_V} &= \frac{E}{R_V + R_p} \end{aligned}$$

Од каде може да се добие:

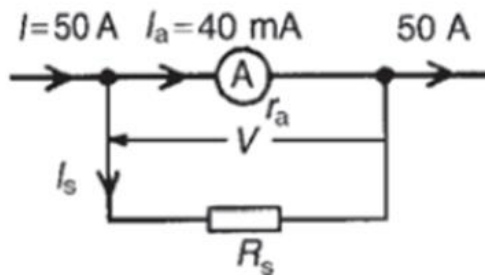
$$120 \cdot R_V = 40 \cdot (R_V + R_p)$$

односно:

$$R_V = \frac{1}{2} R_p = 50\text{ k}\Omega$$

**Слика 2.3.9.** Инструмент со подвижна намотка има максимална скала за мерење од  $40\text{ mA}$  и внатрешна отпорност од  $25\ \Omega$ . Да се определи со колкав отпор треба да се

шантира амперметарот за да може истиот да се користи за мерење на јачина на електрична струја до 50 A!



Слика бр. 2.3.2. Шантирање на амперметар

**Решение:**

Бидејќи максималната струја која може да помине низ амперметарот изнесува 40 mA, важат следните релации:

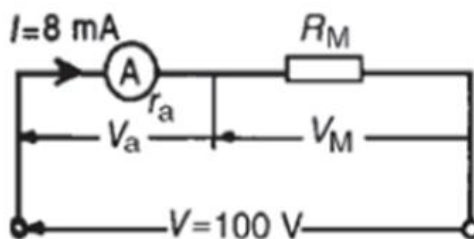
$$I = I_a + I_s, \quad \text{односно} \quad I_s = I - I_a = 50 - 0,040 = 49,96 \text{ A}$$

Од друга страна, користејќи ја еднаквоста на напонот на краевите на амперметарот и шантот, може да се напише следното:

$$V = I_a R_a = I_s R_s$$

$$R_s = \frac{I_a}{I_s} R_a = \frac{0,04}{49,96} \cdot 25 = 0,020019 \Omega = 20,02 \text{ m}\Omega$$

**Задача 2.3.10.** Инструмент со подвижна намотка има внатрешна отпорност од 10 Ω кога се користи како амперметар со максимално мерно подрачје од 8 mA. За да се искористи овој инструмент за мерење на напон, потребно е да се определи вредноста на сериски поврзаниот отпорник во колото заедно со амперметарот за да можат да се мерат напони со максимална вредност до 100 V.



Слика бр. 2.3.3. Инструмент со подвижна намотка

**Решение:**

Ако ги напишеме равенките за рамнотежа на напоните кај ова мерно коло се добива:

$$V = V_a + V_m = I \cdot R_a + I \cdot R_m$$

односно:

$$100 = 0,008 \cdot 10 + 0,008 \cdot R_m$$

од каде за Rm може да се напише:

$$R_m = \frac{99,92}{0,008} = 12490 \Omega = 12,49 \text{ k}\Omega$$

**Задача 2.3.11.** Инструмент со подвижна намотка има максимална скала од 10 mA. Ако се занемари внатрешната отпорност на инструментот, да се определат приближните вредности за отпорниците кои треба сериски да се приклучат на инструментот за истиот да може да мери до а) 20 V, б) 100 V, в) 250 V.

**[Решение: (а) 2kΩ (б) 10kΩ (в) 25kΩ]**

**Задача 2.3.12.** За амперметар со внатрешна отпорност од 50Ω и максимален отклон од 4 mA потребно е да се прошири неговото мерно подрачје и истиот да може да мери до: а) 15 mA, б) 20 A, в) 100 A. Да се определат вредностите на шантовите кои треба да се вклучат во мерното коло.

**[Решение: (а) 18.18 Ω (б) 10.00 mΩ (в) 2.00 mΩ]**

**Задача 2.3.13.** Инструмент со подвижна намотка има внатрешна отпорност од 20 Ω и може да мери максимална вредност на јачина на струја до 5 mA. Да се определи вредноста на отпорникот кој треба сериски да се поврзе со инструментот за истиот да може да се користи како волтметар за мерење на максимални вредности на напонот до 200 V.

**[Решение: 39.98 kΩ]**

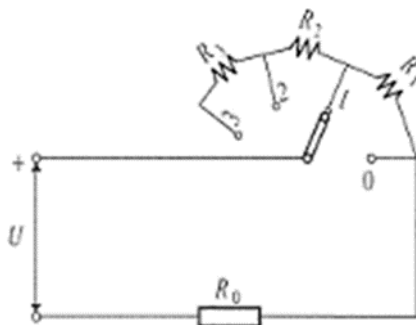
**Задача 2.3.14.** Инструмент со подвижна намотка има максимално мерно подрачје како амперметар до 20 mA и внатрешна отпорност од 25 Ω. Да се определи: а) вредноста на шантот за да може да се користи инструментот како амперметар за мерење на струи со јачина од 0 – 10 A, б) вредноста на отпорникот кој треба да се додаде во колото за да може инструментот да се користи како волтметар за мерење на напони од 0 – 100 V, в) да се нацртаат шемите за мерење под а) и б) со соодветно додадените шантови/отпорници.

**[Решение: (а) 50.10 mΩ паралелно (шант), (б) 4.975 kΩ сериски]**

**Задача 2.3.15.** Амперметар со внатрешна отпорност од 40 Ω дава максимален отклон на скалата за мерење при вредност на јачина на струјата од 15 mA. Да се определат вредностите за отпорите кои треба да се приклучат сериски или паралелно и да се нацртаат соодветни шемии ако треба: а) инструментот да мери јачина на струја до 50 A, и б) напон до 250 V. **[Решение: (а) 12.00 mΩ паралелно, (б) 16.63 kΩ сериски]**

**Задача 2.3.16.** Потрошувач со омска отпорност  $R_0=300 \Omega$  и реостат со можност за скалеста промена на отпорноста приклучени се во серија како на сликата. Целиот систем е приклучен на константен напон од 120 V, додека реостатот има три можни позиции со што се вклучуваат соодветно трите отпорности  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

Колкави треба да се вредностите на отпорите  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  за со соодветна префрлање на позицијата на преклопникот од 0 до 3, вредноста на струјата низ потрошувачот степенесто да се намалува за вредност од 0,1 A?



Слика бр. 2.3.4. Мерно коло со потрошувач и реостат

**Решение:**

Кога преклопката е во позиција „0“ вредноста на струјата низ потрошувачот изнесува:

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{120}{300} = 0,4 \text{ A}$$

Ако преклопката сега е префрлиме во позиција „1“, тогаш струјата низ потрошувачот треба да изнесува 0,3 A, а се пресметува како:

$$I_1 = \frac{U}{R_0 + R_1} = 0,3$$

Од каде се добива:

$$R_1 = \frac{U - 0,3 \cdot R_0}{0,3} = \frac{120 - 0,3 \cdot 300}{0,3} = 100 \ \Omega$$

Соодветно, за другите два отпорника се добиваа следните вредности:

$$R_2 = \frac{U - 0,2 \cdot (R_0 + R_1)}{0,2} = \frac{120 - 0,2 \cdot 400}{0,2} = 200 \ \Omega$$

$$R_3 = \frac{U - 0,1 \cdot (R_0 + R_1 + R_2)}{0,1} = \frac{120 - 0,1 \cdot 600}{0,1} = 600 \ \Omega$$

**Задача 2.3.17.** Мерен инструмент со подвижен калем има сопствена отпорност од  $R_m = 5 \ \Omega$  и максимален опсег на скалата при мерење на јачина на електричната струја од  $I_m = 5 \text{ mA}$ . Покажи дека истиот инструмент може да се користи за мерење на струјата до максимална вредност од 10 A и пронајди ја отпорноста на шантот.

**Решение:**

$$R_m = 5 \ \Omega$$

$$I_m = 5 \text{ mA}$$

Треба да се измери максимална вредност на струјата од  $I = 10 \text{ A}$

Знаеме дека напонот на мерачот е :

$$U_m = I_m \cdot R_m$$

Со замена на вредностите од погорната равенка се добива:

$$U_m = 5 * 5 * 10^{-3} = 25 \text{ mV}$$

Струја на шантот:

$$I_{sh} = I - I_m = 10 - 5 * 10^{-3} = 9.995 \text{ A}$$

Оттука може да се види дека кога  $I_{sh} = 9.995 \text{ A}$  и  $I_m = 0.005 \text{ A}$ , вкупната струја што може да ја измери амперметарот е  $10 \text{ A}$ . Согласно на тоа, отпорноста на шантот може да се добие како:

$$R_{sh} = \frac{I_m * R_m}{I_{sh}} = \frac{U_m}{I_{sh}} = \frac{25 * 10^{-3}}{9.995} = 2,501 \text{ m}\Omega$$

**Задача 2.3.18.** Мерен инструмент со максимална вредност на јачината на струјата од  $2 \text{ mA}$  и внатрешна отпорност од  $100 \Omega$  треба да се користи како амперметар за мерење на јачина на струја во опсег од  $0 - 150 \text{ mA}$ . Да се определи отпорноста на шантот кој треба да се додаде во мерното електрично коло.

**Решение:**

Дадените вредности се:  $R = 100 \Omega$ ,  $I_m = 2 \text{ mA}$ ,  $I = 150 \text{ mA}$

$$R_{sh} = \frac{I_m * R_m}{I - I_m}$$

$$R_{sh} = \frac{2 * 10^{-3} * 100}{[150 * 10^{-3} - 2 * 10^{-3}]} = 1,351 \Omega$$

**Задача 2.3.19.** Потребно е да се изработи DC милиамперметар за мерење на струи во повеќе опсежна скакла. Инструментот има внатрешна отпорност  $R_m = 50 \Omega$  и максимален отклон на скалата при струја од  $I_m = 1 \text{ mA}$ . Мерните подрачја кои се потребни се:

$$0 - 10 \text{ mA}, \quad 0 - 50 \text{ mA}, \quad 0 - 100 \text{ mA}, \quad 0 - 500 \text{ mA}$$

**Решение:**

**0 - 10 mA опсег**

Мултиплицираната мерна вредност на струјата е:

$$m = \frac{I}{I_m} = \frac{10}{1} = 10$$

Отпорноста на шантот е:

$$R_{sh1} = \frac{R_m}{m - 1} = \frac{50}{9} = 5.56 \Omega$$

**0 – 50 mA опсег**

Мултиплицираната мерна вредност на струјата е:

$$m = \frac{50}{1} = 50$$

Отпорноста на шантот е:

$$R_{sh2} = \frac{R_m}{m - 1} = \frac{50}{50 - 1} = 1.03 \Omega$$

**0 – 100 mA опсег**

Мултиплицираната мерна вредност на струјата е:

$$m = \frac{100}{1} = 100$$

Отпорноста на шантот е:

$$R_{sh3} = \frac{50}{100 - 1} = 0,506 \Omega$$

**0 – 500 mA опсег**

Мултиплицираната мерна вредност на струјата е:

$$m = \frac{500}{1} = 500$$

Отпорноста на шантот е:

$$R_{sh4} = \frac{50}{500 - 1} = 0.1 \Omega$$

Соодветно потребните отпорности на шантовите се: 5.59  $\Omega$ ; 1.03  $\Omega$ ; 0.506  $\Omega$  и 0.1  $\Omega$ .

**Задача 2.3.20.** Најдете ја мултиплицираната вредност на мерниот инструмент на кој е приклучен шант со отпорност од  $R_{sh} = 200 \Omega$  користена со галванометар со внатрешна отпорност  $R_m = 1000 \Omega$ . Одреди ја вредноста на отпорот на шантот за да даде мултиплицираната вредност на мерниот инструмент од 50.

**Решение:**

Мултиплицираната моќност:

$$m = 1 + \frac{R_m}{R_{sh}} = 1 + \frac{1000}{200} = 6$$

Отпорноста на шантот за мултиплицирана вредност од 50 изнесува:

$$R_{sh} = \frac{R_m}{m-1} = \frac{1000}{50-1} = 20,408 \Omega$$

**Задача 2.3.21.** Инструмент со подвижен калем дава максимален отклон на скалата при јачина на мерената струја од  $I_m = 20 \text{ mA}$ , при максимален напон од  $V_m = 200 \text{ mV}$ .

Пресметај:

а) отпорност на шантот за да може овој инструмент да се користи како амперметар за опсег од 0-200 A,

б) вредност на мултипликаторот за да може инструментот да се искористи како волтметар за опсег од 0-500 V.

**Решение:**

$$I_m = 20 \text{ mA}$$

$$V_m = 200 \text{ mV}$$

$$V_m = I_m * R_m$$

$$200 \text{ mV} = (20 \text{ mA}) * R_m$$

$$R_m = 10 \Omega$$

а) Кога се користи како амперметар отпорноста на шантот треба да биде:

$$I = 200 \text{ A}$$

$$R_{sh} = \frac{I_m * R_m}{I - I_m} = \frac{20 * 10^{-3} * 10}{200 - 20 * 10^{-3}} = 0,001 \Omega$$

б) Кога се користи како волтметар потребна е вредност на мултипликаторот од:

$$V = 500 \text{ V}$$

$$R_{sh} = \frac{V}{I_m} - R_m = \frac{500}{20 * 10^{-3}} - 10 = 24,99 \text{ k}\Omega$$

**Задача 2.3.22.** Амперметар на подвижен калем има фиксен шант со отпорност  $R_{sh} = 0,001 \Omega$ . Со отпорноста на калемот која изнесува  $750 \Omega$  и пад на напон од  $400 \text{ mV}$  низ него, се добива целосен отклон на скалата.

а) Пресметај ја струјата преку шантот.

б) Отпорноста на мерачот при целосен отклон на скалата ако струјата е 50 A.

**Решение:**

а) Падот низ шантот е ист како и падот низ калемот.

$$I_{sh} R_{sh} = 400 \text{ mV}$$

$$I_{sh} = \frac{400 * 10^{-3}}{0.01} = 40 A$$

б) Напонот низ шантот за струја од 50 А е:

$$V_{sh} = I_{sh} * R_{sh} = 50 * 0.01 = 0.5 V$$

За овој напон, мерачот треба да даде отклон од целата скала.

Во првиот случај, струјата преку мерачот за целосно отклонување беше

$$I_m = \frac{400 mV}{R_m} = \frac{400 * 10^{-3}}{750} = 0,533 mA$$

Истата струја  $I_m$  мора да тече за нов напон низ мерачот од 0.5 V

$$I_m * R'_m = 0.5$$

$$5.33 * 10^{-4} R'_m = 0.5$$

$$R'_m = 937,5 \Omega$$

Ова е отпорност на мерачот потребна за струја на шант која изнесува 50 А да даде целосен отклон на скалата.

**Задача 2.3.23.** Амперметар со подвижен калем има фиксен шант од  $R_{sh} = 0,02 \Omega$  со отпорност на калемот од  $R = 1 k\Omega$  и е потребно делумно празнење од 0.5 V низ него за целосно отклонување.

а) За која максимална вредност на струјата ова може да се примени?

б) Пресметај ја вредноста на шантот за да се добие целосен отклон на скалата кога тоталната струја е 10 А и 75 А.

### **Решение:**

а) Напонот низ шантот е еднаков на напонот низ калемот на мерачот и изнесува 0.5 V.

Струјата низ шантот е:

$$I_s = \frac{0.5}{R_{sh}} = \frac{0.5}{0.02} = 25 A$$

Струјата низ мерниот калем:

$$I_m = \frac{0.5}{R_m} = \frac{0.5}{1 * 10^3} = 0.0005 A$$

Вкупна струја тогаш изнесува:

$$I = I_s + I_m = 25 + 0,0005 = 25,0005 A$$

б) Вредноста на отпорноста на шантот е:

$$R_{sh} = \frac{I_m \cdot R_m}{I - I_m}$$

Овде:  $I_m = 0.0005 \text{ A}$ ;  $R_m = 1 \text{ k}\Omega = 1000 \Omega$ ;  $I =$  струја на струјно коло

Кога,  $I = 10 \text{ A}$

$$R_{sh} = \frac{0.0005 \cdot 1000}{10 - 0.0005} = 0.05 \Omega$$

Кога:  $I = 75 \text{ A}$

$$R_{sh} = \frac{0.0005 \cdot 1000}{75 - 0.0005} = 0,00667 \Omega$$

**Задача 2.3.24.** Дизајнирај мултиметражен DC милиамперметар со внатрешна отпорност од  $75 \Omega$  и целосен опсег на скалата за струја од  $2 \text{ mA}$ .

Потребните опсези се:  $0\text{-}10 \text{ mA}$ ,  $0\text{-}50 \text{ mA}$  и  $0\text{-}100 \text{ mA}$ .

**Решение:**

**За опсег 0-10 mA:**

$$I_1 = 10 \text{ mA}, I_m = 2 \text{ mA}, R_m = 75 \Omega$$

$$R_1 = \frac{I_m \cdot R_m}{(I_1 - I_m)} = \frac{2 \cdot 75}{10 - 2} = 18.75 \Omega$$

**За опсег 0-50 mA:**

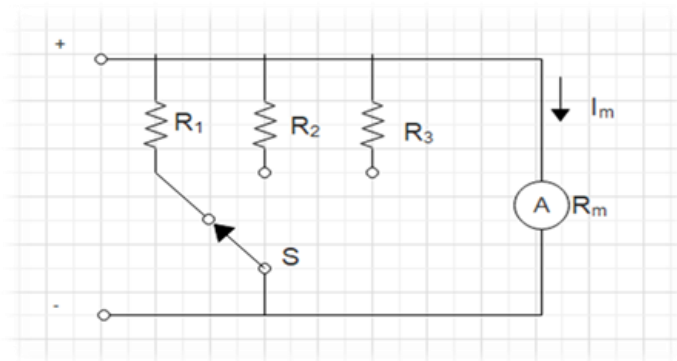
$$I_2 = 50 \text{ mA}, I_m = 2 \text{ mA}, R_m = 75 \Omega$$

$$R_2 = \frac{I_m \cdot R_m}{(I_2 - I_m)} = \frac{2 \cdot 75}{50 - 2} = 3.125 \Omega$$

**За опсег 0-100 mA:**

$$I_3 = 100 \text{ mA}, I_m = 2 \text{ mA}, R_m = 75 \Omega$$

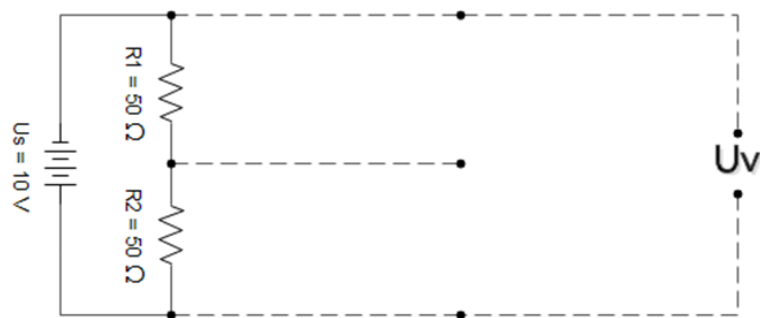
$$R_3 = \frac{I_m \cdot R_m}{(I_3 - I_m)} = \frac{2 \cdot 75}{100 - 2} = 1.53 \Omega$$



Слика бр. 2.3.5. Мултиметражен DC милиамперметар

**Задача 2.3.25.** Одредете ја вкупната отпорност  $R_v$ , струјата  $I$  во колото и со нивна помош пресметајте го вкупниот напон на отпорниците ако се дадени два сериски поврзани отпорника  $R_1$  и  $R_2$ .

*Потсетување:* Кога има сериски поврзани отпорници, вкупната вредност на напонот е збир од напоните на одделните отпорници.



Слика бр. 2.3.6. Мерно коло со сериски отпорници

**Решение:**

$$R_v = R_1 + R_2 = 100 \, \Omega$$

$$I = \frac{U}{R_v} = \frac{10}{100} = 0.1 \, A$$

$$U_1 = R_1 \cdot I = 50 \cdot 0.1 = 5 \, V$$

$$U_2 = R_2 \cdot I = 50 \cdot 0.1 = 5 \, V$$

$$U_v = 100 \cdot 0.1 = 10 \, V$$

$$(U_v = U_s)$$

$$U_v = U_1 + U_2 = 10 \, V$$

## 2.4. Мерење на напон и струја

**Задача 2.4.1.** На влезот на дигитален мултиметр кој мери средна вредност се носи напон со триаголен бранов облик симетричен во однос на временската оска. Притоа инструментот покажува 10 V. Која вредност би ја покажал инструментот кој мери ефективна вредност (rms) доколку на неговиот влез се приклучи истиот овој напон?

### Решение :

Средната вредност за напон со триаголен бранов облик се пресметува според релацијата:

$$V_{av} = \frac{V_m}{3}$$

Ефективната (rms) вредност за напон со триаголен бранов облик се пресметува според релацијата:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{3}}$$

Доколку се рационализира изразот, се добива:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \frac{V_m}{3} = \sqrt{3} \cdot V_{av} = \sqrt{3} \cdot 10 \text{ V} = 17.32 \text{ V}$$

**Задача 2.4.2.** Мерен инструмент со максимален отклон на скалата  $I_m = 30 \text{ mA}$  и отпорност на калемот од  $R_m = 1,2 \text{ k}\Omega$  треба да се користи како DC амперметар. Шант со отпорност  $R_{sh} = 133,3 \Omega$  е поврзан со инструментот. Одредете ја измерената струја при: а) максимален отклон на скалата, б) половина од максималниот отклон, и с) 1/3 од максималниот отклон на скалата?

### Решение:

$$I_m = 30 \text{ mA}$$

$$R_m = 1.2 \text{ k}\Omega$$

$$R_{sh} = 133.3 \Omega$$

а) Напонот на мерачот  $U_m$  даден со формулата:

$$V_m = I_m \cdot R_m$$

Заменувајќи ги вредностите добиваме:

$$V_m = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 1.2 \cdot 10^3$$

$$V_m = 36 \text{ V}$$

Струјата на шантот  $I_{sh}$  е:

$$I_{sh} = \frac{V_m}{R_{sh}} = \frac{36}{133.3} = 0.27 \text{ A}$$

Вкупната струја е дадена со формулата:

$$I = I_m + I_{sh}$$

$$I = 30 + 270$$

$$I = 300 \text{ mA}$$

б) На половина од мерната скала струјата на мерачот  $I_m$  може да се пресмета како:

$$I_m = 0.5 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ mA}$$

Напонот на мерачот  $U_m$  е даден како:

$$U_m = I_m \cdot R_m$$

Заменувајќи ги вредностите, добиваме:

$$U_m = 15 \cdot 10^{-3} \cdot 1.2 \cdot 10^3 = 18 \text{ V}$$

Струјата на шантот изнесува:

$$I_{sh} = \frac{U_m}{R_{sh}} = \frac{18}{133.3} = 0.135 \text{ A}$$

Вкупната струја изнесува:

$$I = I_m + I_{sh} = 15 + 135 = 150 \text{ mA}$$

с) На 1/3 од максималниот отклон на скалата вредноста на струја може да се пресмета како :

$$I_m = 0.33 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 9.9 \text{ mA}$$

Напонот е:

$$U_m = I_m R_m = 9.9 \cdot 10^{-3} \cdot 1.2 \cdot 10^3 = 11.88 \text{ V}$$

Струјата на шантот е :

$$I_{sh} = \frac{U_m}{R_{sh}} = \frac{11.88}{133.3} = 0.089 \text{ A}$$

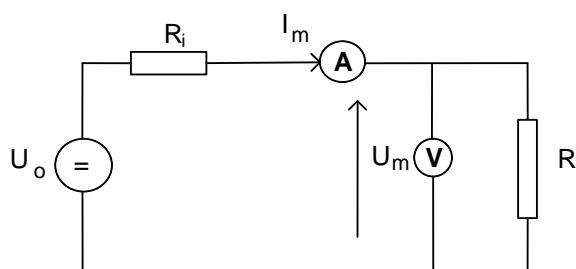
Вкупната струја е :

$$I = I_m + I_{sh} = 9.9 + 89 = 98.9 \text{ mA}$$

## 2.5. Мерења со U-I метода

**Задача 2.5.1.** За мерење на непозната отпорност  $R$  изведено е мерно коло како на дадената слика. При мерењето употребени се амперметар и волтметар со следните карактеристики:

- $AM$ : мерно подрачје  $I_V = 1 \text{ A}$ ; внатрешен отпор  $R_A = 1 \Omega$ ; класа на точност  $r = 1,0$ ,
- $VM$ : мерно подрачје  $U_V = 100 \text{ V}$ ; внатрешен отпор  $R_V = 50 \text{ k}\Omega$ ; класа на точност  $r = 1,5$ .



Слика бр. 2.5.1. Мерно коло со амперметар, волтметар и отпорник

- Како се вика оваа мерна постапка и за кои вредности на отпори е применлива?
- Да се пресмета апсолутната грешка на мерење со  $AM$  ( $G_A$ ) и  $VM$  ( $G_V$ )!
- Ако  $VM$  покажал  $U_m = 75 \text{ V}$ , а  $AM$   $I_m = 375 \text{ mA}$ , колкава е вредноста на отпорот  $R$ ?

**Решение:**

a) Оваа метода се вика I-U метода на мерење со амперметар (AM) и волтметар (VM) и се користи за мерење на отпорности со мала вредност, многу помала од внатрешната отпорност на волтметарот (VM) за струјата низ волтметарот (VM) да биде мала и да не влијае значително врз мерената вредност на струјата со амперметарот (AM).

b) Точната вредност на мерењето би била:

$$P' = U_v \cdot I,$$

додека приближната, онаа што ќе биде измерена со оваа метода, би била:

$$P = U_v \cdot (I_1 - I_2) = U_v \cdot (I_1 - U_v/R_v)$$

Соодветно **апсолутната грешка** кај ова мерење изнесува:

$$\Delta P = P' - P = U_v \cdot I - U_v \cdot (I_1 - U_v/R_v) = U_v^2/R_v$$

$$\Delta P = \frac{100^2}{50000} = 0,2 \quad \text{(I-U метод)}$$

Додека **релативната грешка** би била:

$$\Delta P / P = (U_v^2/R_v)/(U_v \cdot I) = (U_v^2/R_v)/(U_v^2/R_x) = R_x/R_v$$

Ако се користи соодветната волтметар и амперметар мерна U-I метода, тогаш **апсолутната грешка** би била:

$$\Delta P = P' - P = U_v \cdot I - (U_v - R_A \cdot I) \cdot I = R_A \cdot I^2$$

$$\Delta P = 1 \cdot 1^2 = 1 \quad \text{(U-I метод)}$$

а **релативната грешка** би била:

$$\Delta P / P = R_A \cdot I^2 / U \cdot I = R_A \cdot I / R_x \cdot I = R_A/R_x$$

d) Ако  $U_m = 75 \text{ V}$  и  $I_m = 375 \text{ mA}$ , тогаш за отпорноста имаме:

Струјата низ волтметарот изнесува:

$$I_V = \frac{75}{50000} = 0,0015 \text{ A (1,5 mA)},$$

а струјата низ отпорникот би била:

$$I_R = I_m - I_V = 375 - 1,5 = 373,5 \text{ mA}$$

Соодветно, за вредноста на отпорноста R добиваме:

$$R = \frac{U_m}{I_R} = \frac{75}{0,3735} \approx 200 \Omega$$

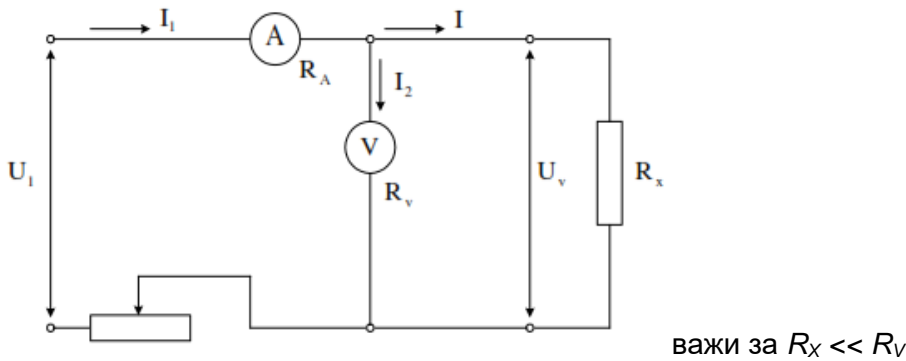
Бидејќи  $R \ll R_V$  ( $200 \Omega \ll 50\,000 \Omega$ ), може да се каже дека избраната метод е коректна.

**Задача 2.5.2.** Со  $U$ - $I$  мерна постапка за мерење на мали отпори се добиени следните вредности за измерените величини:  $I = 200 \text{ mA}$ ,  $U = 6 \text{ V}$ . Мерните инструменти се со следните внатрешни отпори: за волтметарот  $R_V = 1 \text{ k}\Omega$ , а за амперметарот  $R_A = 100 \text{ m}\Omega$ .

- Да се нацрта шемата за мерното коло за  $U$ - $I$  постапка за мерење на мали отпори.
- Да се пресмета вредноста на отпорот  $R_X$  земајќи ги во предвид внатрешните отпори на мерните инструменти.
- Да се пресметат апсолутната и релативната грешка на мерната постапка.

**Решение:**

- Мерната шема е дадена на сликата подолу:



- Ако се анализира даденото електрично коло се добива:

$$R_X = \frac{U_V}{I}$$

$$I = I_1 - I_V = I_1 - \frac{U_V}{R_V} = 200 - \frac{6}{1000} = 0,200 - 0,006 = 0,194 \text{ A}$$

Соодветно:

$$R_X = \frac{U_V}{I} = \frac{6}{0,194} = 30,9 \Omega$$

- Апсолутната грешка кај оваа метода (за мали отпори) изнесува:

$$\frac{U_V^2}{R_V} = \frac{6^2}{1000} = 0,036$$

Додека **релативната грешка** се определува според формулата:

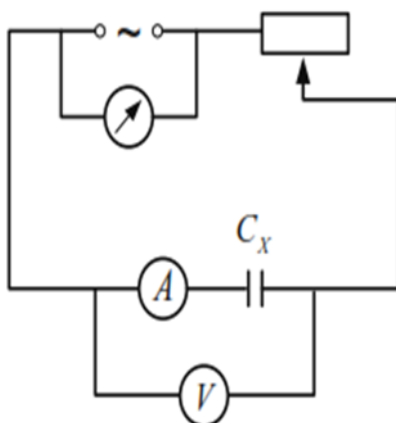
$$\frac{R_X}{R_V} = \frac{30,9}{1000} = 0,0309$$

## 2.6. Мерење на капацитивност и индуктивност

**Задача 2.6.1.** Да се нацрта мерното коло за мерење на вредноста на непознат капацитет  $C_x$  за кондензатор базирано на  $U$ - $I$  методата. За истото коло да се даде појаснување при кои услови може да се користи и како се определува вредноста на непознатиот капацитет  $C_x$ .

**Решение :**

а)



Слика бр. 2.6.1. Мерење на непознат капацитет базирано на  $U$ - $I$  метода

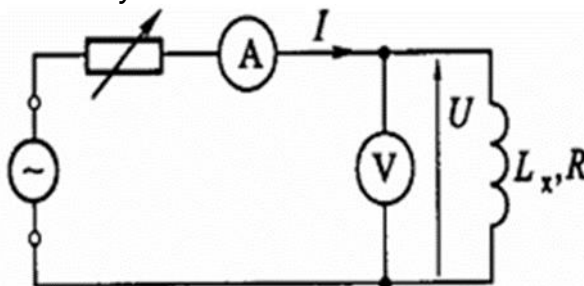
б) Ова коло може да се користи само за определување на приближната вредност на капацитетот  $C_x$  односно, преку занемарување на неговата омска отпорност. Начинот на пресметка на капацитетот се реализира со следните равенки:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{U}{X_C} = \omega C U = 2\pi f \cdot C U$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{2\pi f U}$$

**Задача 2.6.2.** За колото од сликата со примена на  $U$ - $I$  методот да се опише постапката за мерење на непознатата индуктивност  $L_x$  на намотката.



Слика бр. 2.6.2. Коло составено од амперметар, волтметар, индуктивитет и потрошувач

**Решение:**

За разлика од колата за еднонасочна струја, кај колата со наизменична струја односот помеѓу измерениот напон на краевите на намотката и струјата која протекува низ неа, нема да ја даде омската отпорност, туку импедансата на намотката:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L_X)^2}$$

Според тоа, ако е позната омската отпорност на намотката  $R$ , тогаш може да се определи вредноста на индуктивноста  $L_X$  според равенката:

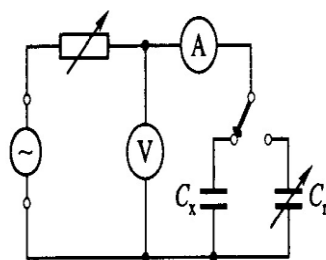
$$L_X = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega}$$

Доколку не е однапред позната вредноста на омската отпорност на намотката  $R$ , тогаш потребно е да се извршат две мерења: првото мерење со извор на еднонасочна струја при кој со  $U-I$  методата ќе се определи вредноста на омската отпорност  $R$  и второ мерење со извор на наизменичен напон, кој преку  $U-I$  методата ќе ја даде вредноста на импедансата  $Z$ .

(Пример:  $U_{AC}=100\text{ V}$ ,  $I_{AC}=2,97\text{ A}$ ,  $U_{DC}=100\text{ V}$ ,  $I_{DC}=8,33\text{ A}$ ) => Да се определи  $L_X$ ? (Решение:  $L_X=0,1\text{ H}$ )

**Задача 2.6.3.** За колото на сликата кое претставува основа за пресметка на непозната капацитивност на еден кондензатор со метод на споредба, потребно е:

- да се опише методот за пресметка на вредноста на капацитетот на кондензаторот  $C_X$ ,
- да се напишат релациите за рамнотежа во колото.



Слика бр. 2.6.3. Коло со паралелни кондензатори

### Решение:

а) Најпрво, преклопката се става во позиција лево (како на сликата) и се отчитуваат (дополнително со помош на променливиот отпорник  $R$  се подесуваат) соодветни вредности на струјата низ кондензаторот  $C_X$  и напонот на неговите краevi.

Потоа, **без да се врши промена на отпорникот  $R$**  и напонот на изворот, се префрла преклопката во десно и со помош на променливиот кондензатор  $C_n$  се подесува струјата низ амперметарот да ја добие истата вредност како и при првото мерење. Кога ќе се постигне тоа, вредноста на капацитетот на непознатиот кондензатор  $C_X$  ќе биде еднаква на вредноста на капацитетот на променливиот кондензатор  $C_n$ .

б) При непроменет  $R$ , и вредности на струјата  $I_{C_X}=I_{C_n}$ , тогаш,  $C_X=C_n$ .

### Глава 3: Мерења на наизменични големини

**Задача 3.1.** Ако максималната вредност на еден синусен периодичен сигнал е 20V, да се одредат ефективната вредност и средната вредност.

**Решение:**

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,14 \text{ V}$$

$$U_{sr} = |\bar{U}| = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} |u(t)| dt = \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi} |U_m \sin(\omega t)| d(\omega t) = -\frac{2}{\pi} \cdot U_m \cdot \cos(\omega t) \Big|_0^{\pi}$$

$$U_{sr} = |\bar{U}| = -\frac{2}{\pi} \cdot U_m (0 - 1) = \frac{2}{\pi} \cdot U_m = \frac{2}{\pi} \cdot 20 = 12,73 \text{ V}$$

**Задача 3.2.** За едно коло е измерена ефективна вредност на напонот 120V и максимална вредност на струјата од 30A.

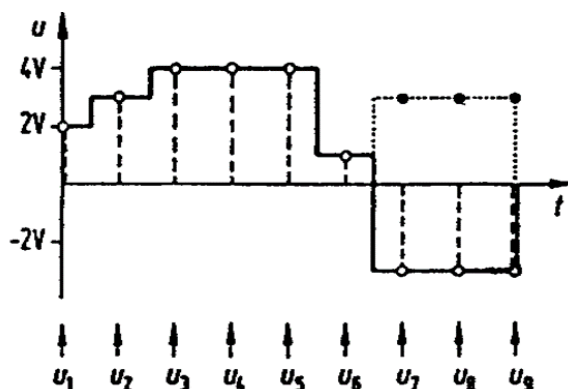
Да се пресмета максималната вредност на напонот и ефективната вредност на струјата.

**Решение:**

$$U_m = \sqrt{2} \cdot U_{eff} = \sqrt{2} \cdot 120 = 169,7 \text{ V}$$

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21,21 \text{ A}$$

**Задача 3.3.** Даден е дијаграм на мерниот напон на сликата. Да се пресмета средната вредност на исправениот напон  $|\bar{U}|$ .



Слика бр. 3.1. Дијаграм на мерен напон

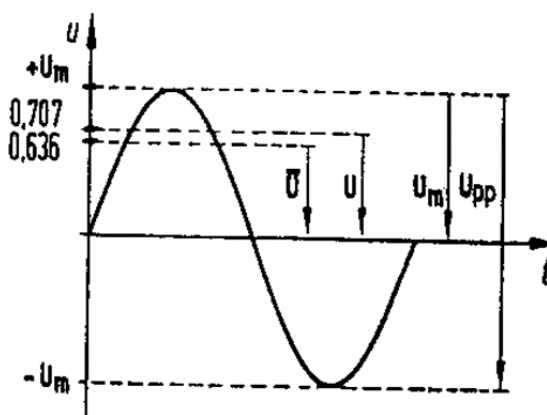
**Решение :**

Почнувајќи од моментот  $t = 0$ , ја земаме апсолутната моментална вредност на напонот на секои  $t = T/8$  (долна слика), а потоа правиме линеарна средна вредност:

$$|\bar{U}| = \frac{|U_1| + |U_2| + |U_3| + |U_4| + |U_5| + |U_6| + |U_7| + |U_8| + |U_9|}{9}$$

$$= \frac{2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 1 + |-3| + |-3| + |-3|}{9} = \frac{27}{3} = 9 [V]$$

**Задача 3.4.** Таблично да се прикажат факторите на пресметка помеѓу карактеристичните вредности на синусните величини според долната слика:



Слика бр. 3.2. Синусен напон и негови карактеристични величини

	$U_m$	$U_{eff}$	$ \bar{U} $	$U_{pp}$
$\cdot U_m$	<b>1</b>	<b>0.707</b>	<b>0.637</b>	<b>2</b>
$\cdot U_{eff}$	<b>1.41</b>	<b>1</b>		
$\cdot  \bar{U} $		<b>1.11</b>	<b>1</b>	
$\cdot U_{pp}$				<b>1</b>

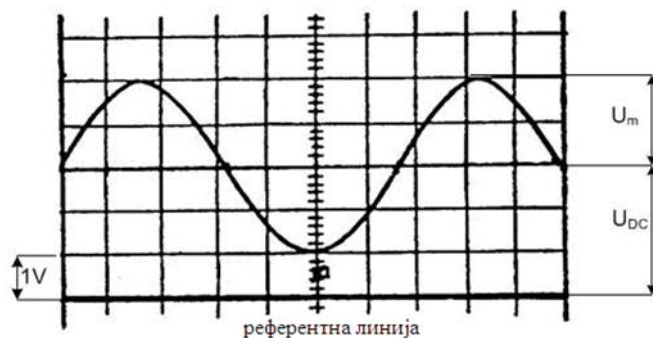
**Решение:**

Во долната табела со црвена боја внесени се факторите на пресметка и сооднос помеѓу карактеристичните вредности на наизменичните мерни величини на синусниот бранов облик кои се важни за мерење и покажување на мерниот дел на инструментот.

	$U_m$	$U_{eff}$	$ \bar{U} $	$U_{pp}$
$\cdot U_m$	<b>1</b>	<b>0.707</b>	<b>0.637</b>	<b>2</b>
$\cdot U_{eff}$	<b>1.41</b>	<b>1</b>	<b>0,9</b>	<b>2,82</b>
$\cdot  \bar{U} $	<b>1,57</b>	<b>1.11</b>	<b>1</b>	<b>3,14</b>
$\cdot U_{pp}$	<b>0,5</b>	<b>0,3535</b>	<b>0,3185</b>	<b>1</b>

**Задача 3.5.** При некое мерење, осцилоскоп се користи како мерен уред. Притоа, на екранот од осцилоскопот при мерењето на напонот се појавуваат два напона: едниот синусоидален бранов облик како на сликата и уште еден еднонасочен напон, исто така, прикажан на сликата подолу.

Да се определи ефективната вредност на мерниот напон која би ја дал волтметар за вкупната вредност на напонот ако се знае дека вредноста на  $U_{DC}$  е 3V. Да се дискутира добиеното решение.



Слика бр. 3.3. Екран на осцилоскоп со синусен напон

### Решение :

Земајќи ја во предвид положбата на референтната линија можеме да ја одредиме карактеристичната вредност:

- врвната вредност на наизменичниот дел  $U_{ACm}$  и вредноста на еднонасочниот напон  $U_{DC}$ .

$$U_{ACm} = 2 \text{ V} ; U_{ACeff} = 0,707 \cdot U_{ACm} = 0,707 \cdot 2 = 1,414 \text{ V}$$

$$U_{eff} = \sqrt{(U_{DC})^2 + (U_{ACeff})^2} = \sqrt{3^2 + 1,414^2} = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11} = 3,31 \text{ [V]}$$

**Дискусија:** Гледаме дека ефективната вредност на мерната величина која би ја покажал мерниот инструмент е помала од сумата на ефективните вредности на нејзините делови ( $3 + 1,414 = 4,414 \text{ V}$ ). Заради тоа, при мерењата треба да се внимава какви вредности мери мерниот инструмент, дали мери максимални вредности или ефективни вредности на мерената големина.

**Задача 3.6.** На мерен инструмент, чиј мерен орган има одсув на средна вредност на мерената големина, приклучен е наизменичен напон со следниот облик:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) + \frac{1}{3} U_m \sin(3\omega t)$$

Ако инструментот врши мерење врз основа на ефективна вредност на мерениот сигнал, колкаво ќе биде покажувањето на овој мерен инструмент?

### Решение :

Дадената функција претставува суперпозиција на основниот и третиот хармоник на некоја мерена големина. Врвната вредност на третиот хармоник е  $1/3$  од врвната вредност на основниот, додека обликот на мерената големина е изобличен заради присуството на третиот хармоник заедно со основниот.

Мерниот инструмент, имајќи ја предвид измерената средна вредност, ќе ја даде следната вредност:

$$\begin{aligned} |\bar{U}| &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ U_m \sin(\omega t) + \frac{1}{3} U_m \sin(3\omega t) \right] dt \\ |\bar{U}| &= \frac{2}{\pi} \left( U_{m1} + \frac{U_{m3}}{3} \right) = \frac{2}{\pi} \left( U_{m1} + \frac{U_{m1}}{3 \cdot 3} \right) \\ |\bar{U}| &= 1,11 \cdot \frac{2}{\pi} U_{m1} \end{aligned}$$

Ефективната вредност на изобличениот основен хармоник (т.е. стварна ефективна вредност) ќе биде:

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m1}}{3 \cdot \sqrt{2}}\right)^2} = 1,05 \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}$$

Додека факторот на изобличување на основниот хармоник ќе изнесува:

$$f = \frac{U}{|\bar{U}|} = \frac{1,05 \cdot \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}}{1,1 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot U_{m1}} = 1,054$$

Според тоа ефективната вредност, која ќе ја покаже инструментот, ќе содржи грешка во мерењето заради постоењето на брановиот облик во вредност од:

$$p_f = \frac{f_0 - f}{f} \cdot 100\% = \frac{1,11 - 1,054}{1,054} \cdot 100\% = 5,3\%$$

Односно, инструментот ќе покаже за 5.3% поголема вредност.

### **Заклучок :**

Со оглед дека мерната пракса изобилува со мерење на мерни големини, чии бранови облици се различни од синусен облик, за мерење на вистинската ефективна вредност треба да се користат инструменти само со одзив на нивната ефективна вредност.

**Задача 3.7.** На мерен инструмент, чиј мерен орган има одзив на средна вредност на мерената големина, приклучен е наизменичен напон со следниот облик:

$$U(t) = U_{m1} \cdot \sin(\omega t) + U_{m5} \cdot \sin(5\omega t)$$

A) Да се опише мерната големина.

Б) Да се определи ефективната вредност на мерената големина ако е:

$$U_{m1} = 5 \cdot U_{m5},$$

Ц) Да се утврди вредноста на напонот која ќе ја покаже инструментот при мерењето.

Д) Да се определи колкава ќе биде грешката при мерењето во проценти.

### Решение:

А) Дадената функција претставува суперпозиција на основниот и петтиот хармоник на некоја мерена големина. Врвната вредност на петтиот хармоник е 1/5 од врвната вредност на основниот, додека неговиот облик заедно со основниот хармоник доведува до изобличување на мерената големина од правилна синусоида.

Б) Ефективната вредност на мерената големина изнесува:

$$U = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m5}^2} = \sqrt{\left(\frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m1}}{5 \cdot \sqrt{2}}\right)^2} = 1,0198 \cdot \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} \approx 1,02 \cdot \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}$$

Ц) Бидејќи инструментот покажува средна вредност на мерената големина, тој ќе ја покаже следната вредност:

$$|\bar{U}| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [U_{m1} \cdot \sin(\omega t) + U_{m5} \cdot \sin(5\omega t)] dt$$

$$|\bar{U}| = \frac{2}{\pi} \left( U_{m1} + \frac{U_{m5}}{5} \right) = \frac{2}{\pi} \left( U_{m1} + \frac{U_{m1}}{5 \cdot 5} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{26}{25} \cdot U_{m1} = 1,04 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot U_{m1}$$

Д) Грешката при мерењето изнесува:

$$P_f = \frac{U}{|\bar{U}|} = \frac{1,02 \cdot \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}}}{1,04 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot U_{m1}} = \frac{1,02 \cdot \pi}{1,04 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3,204}{3,018} = 1,089$$

Според тоа, грешката во мерењето изнесува 8,9 %.

**Задача 3.8.** За наизменичниот напон чиј временски дијаграм е дефиниран со изразот:

$$u(t) = U_m (\sin \omega t + k_{mh} \sin 3\omega t) \text{ при што важи } 0 \leq k_{mh} \leq 1, (f_0) = \pi / (2 \cdot 1.41).$$

А) Да се скицира временскиот дијаграм на напонот  $u(t)$  за периода  $T = 2\pi/\omega$  со избран фактор на односот на максималните вредности на хармониските членови  $k_{mh} = 0,5$ .

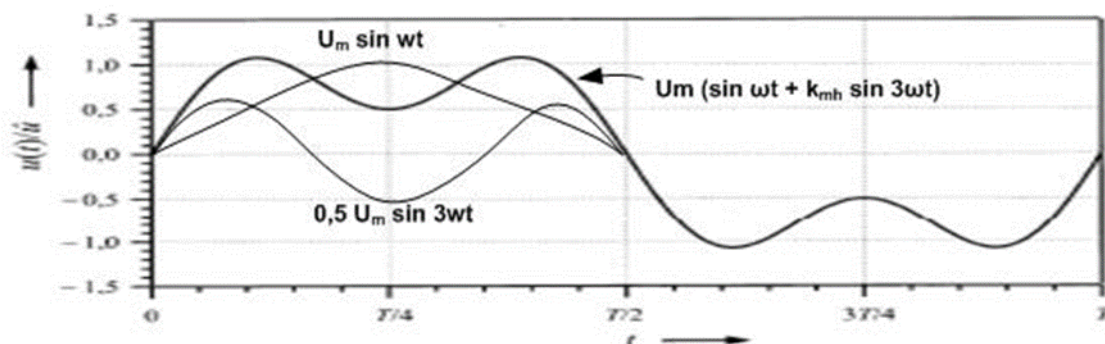
Б) Да се утврди покажувањето на волтметар кој ја мери средната вредност на двополупериодниот исправен напон  $u(t)$ , во зависност од максималната вредност  $U_m$  и факторот на односот на максималните вредности на хармониските членови  $k_{mh}$ .

Ц) Да се изведе израз за ефективната вредност на напонот во зависност од вредноста на  $U_m$  и  $k_{mh}$ .

Д) Да се изведе израз за релативната грешка на покажувањето на волтметарот поради брановиот облик ( $p_r$ ).

### Решение:

**A)** На сликата се дадени временските дијаграми на основниот и третиот хармоник на напонот опишан со горниот израз, како и нивниот збир како мерен напон  $u(t)$ . Разгледуваниот временски период одговара на периодот на основниот хармоник  $T$ .



**Слика бр. 3.4. Временски дијаграм на основен и трет хармоник и нивниот збир**

**B)** Мерниот инструмент за средна вредност ја мери аритметичката средна вредност на целобрановиот исправен напон  $u(t)$ . Бидејќи двете полупериоди се симетрични, за пресметка на средната вредност на исправениот напон доволно е да се спроведе интеграција само на вредноста за една полупериода ( $T/2$ ).

$$|\bar{U}| = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |u(t)| dt = 2 * \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} U_m (\sin \omega t + K_{mh} \sin 3\omega t) dt$$

$$|\bar{U}| = \frac{U_m}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin \omega t + K_{mh} \int_0^{\pi} \sin 3\omega t \right] dt$$

$$|\bar{U}| = \frac{U_m}{\pi} \left[ [-\cos \omega t]_0^{\pi} + \frac{K_{mh}}{3} [-\cos 3\omega t]_0^{\pi} \right]$$

$$|\bar{U}| = \frac{2U_m}{\pi} \left( 1 + \frac{K_{mh}}{3} \right)$$

Мерниот инструмент за средна вредност ќе ја покаже вредноста која ја мери ( $U_{mj} = |\bar{U}|$ ) помножена со факторот за синусен бранов облик ( $f_0$ ):

$$U_{pok} = f_0 * |\bar{U}| = f_0 * U_{mj} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{2U_m}{\pi} \left( 1 + \frac{K_{mh}}{3} \right) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{K_{mh}}{3} \right)$$

За дадената вредност на  $K_{mh}=0,5$ , мерниот инструмент за средна вредност ќе покаже:

$$U_{pok} = 0,825 * U_m$$

**C)** Изразот за ефективната вредност на сложената хармониска величина го добиваме од основната равенка:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\omega t)]^2 dt}$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U_m (\sin \omega t + K_{mh} \sin 3\omega t)]^2 d\omega t}$$

Со квадрирање на изразот во заградата и претворањето во некои тригонометриски функции ќе дојдеме до израз за ефективната вредност на сложената хармониска функција изразена

со помош на  $U_m$  и факторот на односот на максималните вредности на хармониските членови  $K_{mh}$ :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + K_{mh}^2}$$

D) Релативната грешка поради брановиот облик на напонот ќе ја пресметаме со равенката:

$$\rho_f = \frac{U_{pok} - U}{U} = \frac{\left(1 + \frac{K_{mh}}{3} - \sqrt{1 + K_{mh}^2}\right)}{\sqrt{1 + K_{mh}^2}}$$

**Задача 3.9.** На волтметар со целобранов насочувач за синусни напони се доведува:

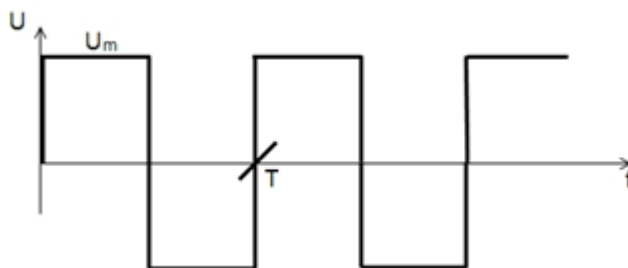
а) напон со правоаголен облик и

б) напон со триаголен облик.

За двата случаја да се пресмета факторот на облик на сигналот и релативната грешка во покажувањето на волтметарот.

### Решение:

а) напон со правоаголен облик :



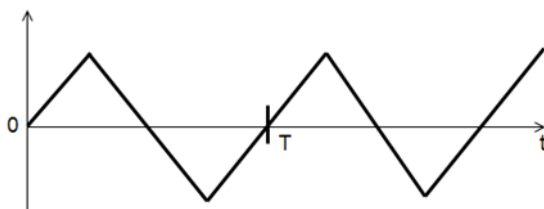
$$U_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} U_m dt = U_m$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot \sqrt{\int_0^{\frac{T}{2}} U_m^2 dt} = U_m$$

$$\xi = \frac{U_{eff}}{U_{sr}} = \frac{U_m}{U_m} = 1$$

$$g\% = \frac{\xi_o - \xi}{\xi} \cdot 100\% = \frac{1,11 - 1}{1} \cdot 100\% = 11\%$$

б) напон со триаголен облик :



$$U(t) = \begin{cases} \frac{U_m}{T} \cdot t & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ (2U_m - \frac{4U_m}{T} \cdot t) & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U(t) dt = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4 \cdot U_m}{T} \cdot t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left( 2 \cdot U_m - \frac{4 \cdot U_m}{T} \cdot t \right) dt \right] = \frac{U_m}{2}$$

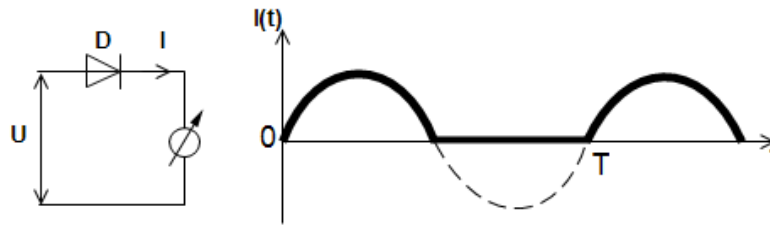
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16 \cdot U_m^2}{T^2} t^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left( 2 \cdot U_m - \frac{4 \cdot U_m}{T} t \right)^2 dt \right]}$$

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

$$\xi = \frac{U_{eff}}{U_{sr}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.154$$

$$g\% = \frac{\xi_o - \xi}{\xi} \cdot 100 = \frac{1,11 - 1,154}{1,154} \cdot 100 = -3.87\%$$

**Задача 3.10.** Пресметај го факторот на облик на струјата низ инструмент со полубранов насочувач и инструмент со целобранов насочувач. Напонот на извор е со синусен облик.



Слика бр. 3.5. Инструмент со полубранов насочувач. Синусен напон

**Решение:**

Факторот на облик е дефиниран со односот на ефективната и средната вредност.

$$\xi = \frac{U_{eff}}{U_{sr}}$$

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) dt$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt}$$

За полубранов насочувач:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t dt$$

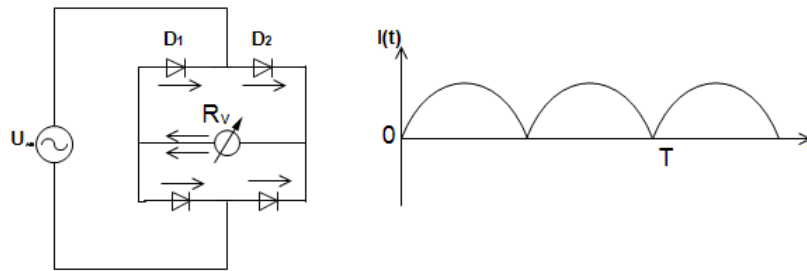
$$I_{sr} = \frac{I_m}{\pi}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} (I_m \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t)^2 dt}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{T}{4}} = \frac{I_m}{2}$$

$$\xi = \frac{U_{eff}}{U_{sr}} = \frac{\frac{I_m}{2}}{\frac{I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2} = 1,57$$

За целобранов насочувач (Грецов спој) :



Слика бр. 3.6. Инструмент со целобранов насочувач ( Грецов спој )

$$I_{sr} = \frac{2 \cdot I_m}{\pi}$$

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} i^2(t) dt} = I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

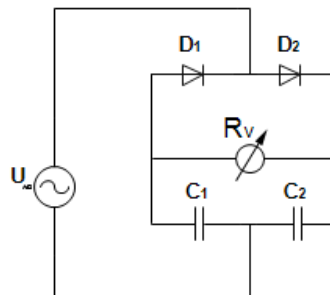
$$\xi = \frac{I_{eff}}{I_{sr}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2 \cdot I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2,83}$$

$$\xi = \xi_o = 1,11$$

**Задача 3.11.** За колото на сликата важи дека временската константа на празнење на кондензаторите е многу поголема од периодот на поведениот влезен синусен напон ( $\tau \gg T$ ). Да се одреди:

а) напонот што ќе го покаже волтметарот за еднонасочни големини ако влезниот напон е синусен со ефективна вредност:  $U_{eff} = 5 V$ ;

б) ако  $C_1 = C_2 = 1 \mu F$ ,  $R_v = 10^5 \Omega$ , да се одреди  $\tau$ .



Слика бр. 3.7. Мерно коло со целобранов исправувач и сериски кондензатори

**Решение:**а) Од условот ( $\tau \gg T$ ) :

$$U_v = U_{c1} + U_{c2}$$

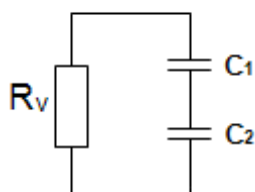
Кондензаторите нема да имаат време да се испразнат преку внатрешната отпорност:

$$U_v = U_m + U_m = 2U_m$$

$$U_m = U_{eff} \cdot \sqrt{2} = 7.071 V$$

Па напонот на волтметарот изнесува:  $U_v = 14.142 V$ 

б)



$$\tau = R_v \cdot C_{ekv}$$

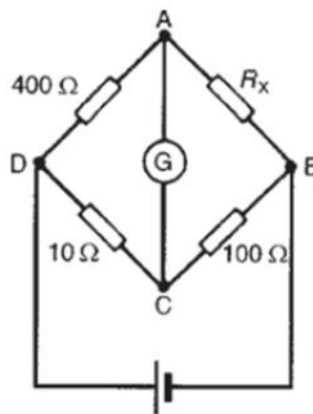
$$C_{ekv} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{2} = 0,5 \cdot 10^{-6} F$$

$$\tau = 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 0,05 s$$

**Слика бр. 3.8. Паралелна RC врска**

## Глава 4: Мерни мостови

**Задача 4.1.** Кај еден Витстонов мост со јазли ABCD галванометарот е поврзан помеѓу точките A и C, додека батеријата помеѓу точките B и D како на сликата подолу. Кога мостот е во рамнотежа добиени се прикажаните вредности за отпорност во гранките. Да се определи вредноста на непознатата отпорност  $R_x$ ?



Слика бр. 4.1. Витстонов мост

### Решение:

Познати вредности:

$$R_1 = 400 \, \Omega; R_3 = 10 \, \Omega; R_4 = 100 \, \Omega;$$

$$R_2 = R_x = ?$$

Од условот за рамнотежа имаме:

$$U_{AC} = 0$$

$$I_g = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_g$$

$$I_4 = I_g + I_3$$

$$I_g = 0$$

$$I_g = 0$$

$$I_1 = I_2$$

$$I_4 = I_3$$

$$-R_1 I_1 - R_g I_g + R_3 I_3 = 0 \text{ бидејќи } I_g = 0 \text{ се добива: } R_1 I_1 = R_3 I_3$$

$$-R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_g I_g = 0 \text{ бидејќи } I_g = 0 \text{ се добива: } R_2 I_2 = R_4 I_4$$

$$\frac{R_1 I_1}{R_2 I_2} = \frac{R_3 I_3}{R_4 I_4}$$

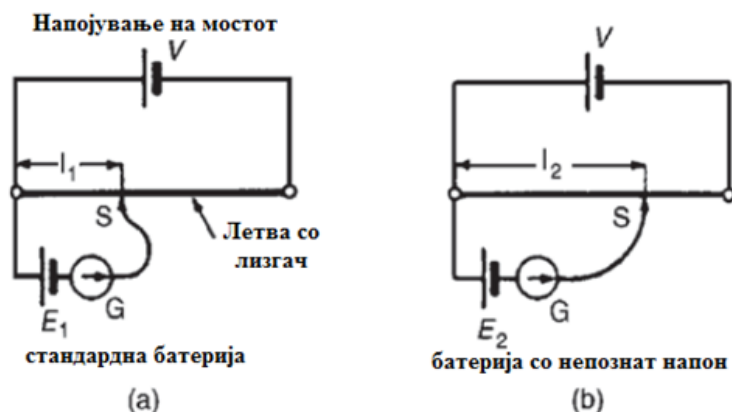
Со кратење на струите се добива:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

$$R_X = R_2 = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_3}$$

$$R_X = \frac{400 \cdot 100}{10} = 4000 \Omega = 4 \text{ k}\Omega$$

**Задача 4.2.** Кај еден мостен инструмент со летва прикажан на сликата подолу постигната е рамнотежа при должина на отцепката на летвата од 400 mm кога се користела стандардна батерија со напон од 1,0186 V. Потребно е да се определи вредноста на напонот на батеријата ако мостниот инструмент постигнува рамнотежа при отцеп од 650 mm.



**Решение:**

Бидејќи вредноста на напонот на напојувањето на лизгачкиот мост е непроменета, тогаш должината на отцепките, при кои доаѓа до урамнотежување на мерниот мост, е пропорционална на вредноста на напонот на батеријата, односно:

$$l_1 \rightarrow E_1; \quad l_2 \rightarrow E_2$$

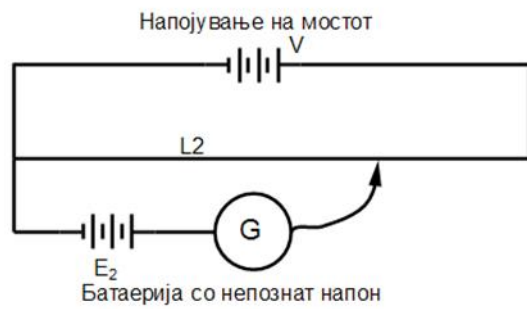
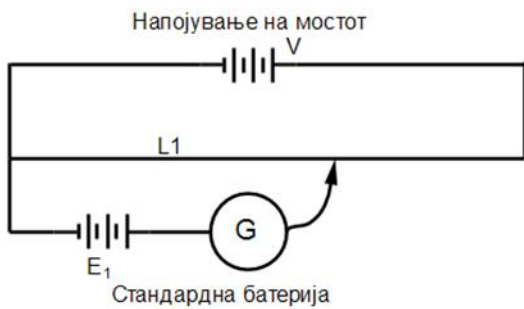
Оттука следува дека:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

односно,

$$E_2 = E_1 \cdot \frac{l_2}{l_1} = 1,0186 \cdot \frac{650}{400} = 1,655 \text{ V}$$

**Задача 4.3.** Ако рамнотежа кај еден мост со лизгач е постигната при отцепка од 31,2 cm и при стандарден напон на батеријата од 1,0186 V, колкав напон има непознатата батерија ако рамнотежата на мостот е постигната при отцепка од 46,7 cm?



**Решение :**

Дадени се вредностите:

$$E_1 = 1,0186 \text{ V}; l_1 = 31,2 \text{ cm} = 31,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}; l_2 = 46,7 \text{ cm} = 46,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

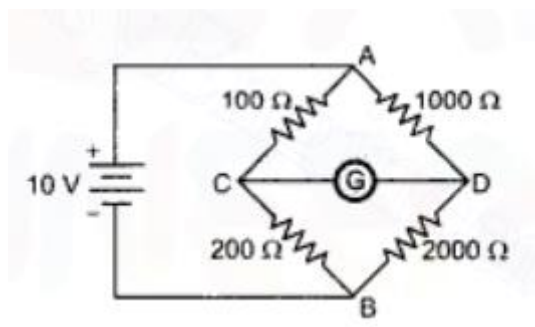
Согласно задача 5.3. имаме:

$$l_1 \rightarrow E_1; l_2 \rightarrow E_2;$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$E_2 = E_1 \cdot \frac{l_2}{l_1} = 1,0186 \cdot \frac{46,7 \cdot 10^{-2}}{31,2 \cdot 10^{-2}} = 1,542 \text{ V}$$

**Задача 4.4.** Галванометарот има струјна чувствителност од  $12 \mu\text{A}$ . Внатрешната отпорност на галванометарот е  $200 \Omega$ . Пресметајте го отклонот на галванометарот предизвикана од  $5 \Omega$  нерамнотежа во гранката BD.



Слика бр. 4.2. Витстонов мост

**Решение:**

Од дадениот мост добиваме:

$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 1000 \Omega$$

$$R_3 = 200 \Omega$$

$$R_4 = 2000 \Omega$$

Сега,

$$R_1 \times R_4 = 100 \times 2000 = 20000$$

$$R_2 \times R_3 = 200 \times 1000 = 20000$$

За  $R_4 = 2000$  мостот е балансиран, но небалансирањето доаѓа од  $5 \Omega$  во отпорноста на гранката BD т.е  $R_4 = 2000 + 5 = 2005 \Omega$ .

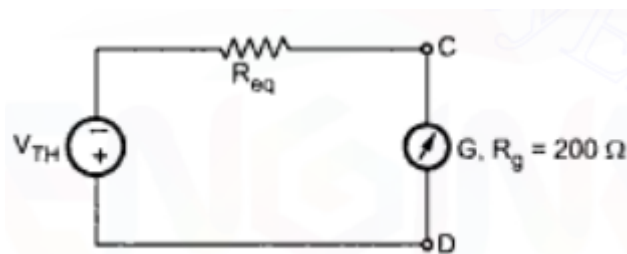
Заради оваа нерамнотежа струјата ќе тече низ галванометарот.

По равенката на Тевинин

$$V_{th} = E \left[ \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right] = 10 \left[ \frac{200}{100 + 200} - \frac{2005}{1000 + 2005} \right] = 10 [0.6667 - 0.6672] = -5.213 \mu V$$

Негативниот знак индицире дека D е со поголема позитивност за разлика од C

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{100 \times 200}{(100 + 200)} + \frac{1000 \times 2005}{(1000 + 2005)} = 733.888 \Omega$$



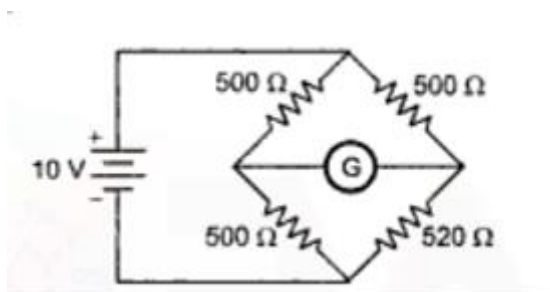
Слика бр. 4.3. Еквивалентен (упростен) Витстонов мост

Оттука тевининовата еквиваленција е

$$I_s = \frac{V_{th}}{R_{eq} + R_g} = \frac{5.213 \times 10^{-3}}{733.888 + 200} = 5.582 \mu A$$

Сега отклонувањето на галванометарот е пропорционално со неговата чувствителност.

**Задача 4.5.** Пресметајте ја струјата преку галванометарот со внатрешен отпор од  $125 \Omega$  ако мостот е во нестабилна состојба.



Слика бр. 4.4. Витстонов мост

**Решение:**

За мостот е зададено  $R = 500 \Omega$  и  $\Delta r = 20 \Omega$

Употребувајќи го приближниот резултат

$$V_{th} = \frac{E \Delta r}{4R} = \frac{10 \times 20}{4 \times 500} = 0.1V$$

додека,

$$R_{eq} = R = 500 \Omega$$

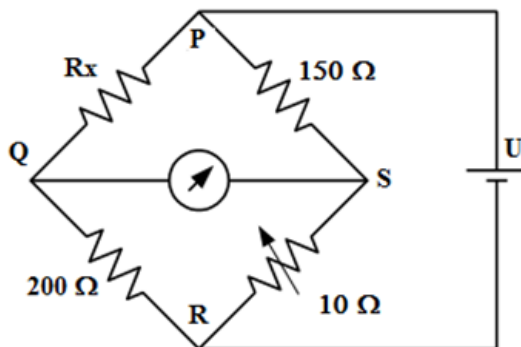
$$R_g = 125 \Omega$$

$$I_g = \frac{V_{th}}{R_{eq} + R_g} = \frac{0.1}{500 + 125} = 160 \mu A$$

**Задача 4.6.** Даден е Витстонов мост со четири јазли PQRS при што галванометарот е поврзан помеѓу јазлите Q и S, додека напонскиот извор е поврзан помеѓу јазлите R и P. Ако е постигната рамнотежа кај овој мост при вредност на отпорностите во гранките од:  $R_{(Q-R)} = 200 \Omega$ ,  $R_{(R-S)} = 10 \Omega$ , и  $R_{(S-P)} = 150 \Omega$ , да се определи вредноста на непознатата отпорност во гранката  $R_{(P-Q)} = ?$  Да се нацрта овој мост со дадените податоци.

**Решение:**

Мостот е прикажан на сликата:



Слика бр. 4.5. Витстонов мост

Вредноста на непознатата отпорност изнесува:

$$R_x = R_{(P-Q)} = \frac{150 \cdot 200}{10} = 3000 \Omega = 3 k\Omega$$

**Задача 4.7.** За небалансиран Витстонов мост е зададено:

$R_1 = 2 k\Omega$   $R_2 = 2.5 k\Omega$   $R_3 = 6 k\Omega$   $R_4 = 8 k\Omega$   $E_b = 5 V$   $R_m = 200 \Omega$

Утврдете ја струјата што тече низ детекторот.

**Решение:**

Еквивалентниот потенцијал на Тевенин помеѓу терминалите г и с може да се изрази како

$$= 0.66 \times 10^{-4} + 5.33 \times 10^{-4} [0.16]$$

$$E_{th} = E \left[ \frac{R_1}{R_1 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \right]$$

Заменувајќи ги вредностите, се добива:

$$E_{th} = 5 \left[ \frac{2 \times 10^3}{2 \times 10^3 + 6 \times 10^3} - \frac{2.5 \times 10^3}{2.5 \times 10^3 + 8 \times 10^3} \right] = 0.059 \text{ V}$$

Тевениновиот отпор може да се пронајде преку релацијата:

$$R_{th} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

Заменувајќи ги вредностите, добиваме

$$R_{th} = \frac{2 \times 10^3 \times 6 \times 10^3}{2 \times 10^3 + 6 \times 10^3} + \frac{2.5 \times 10^3 \times 8 \times 10^3}{2.5 \times 10^3 + 8 \times 10^3} = 3.4 \text{ k}\Omega$$

Сега струјата што тече ќе може да ја утврдиме со

$$I_m = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_m}$$

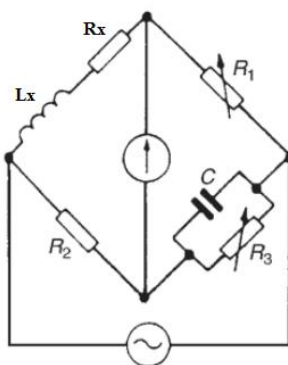
Заменуваме и добиваме

$$I_m = \frac{0.059}{3.4 \times 10^3 + 0.2 \times 10^3} = 0.0016 \text{ }\mu\text{A}$$

**Задача 4.8.** За мерење на отпорноста и индуктивноста на една намотка потребо е да се изврши мерење со помош на Максвел-Виенов мост.

- Да се нацрта приципиелната шема на овој мост.

- Ако се познати вредностите на параметрите на мостот во моментот кога е постигната рамнотежата при што:  $R_1 = R_2 = 400 \text{ }\Omega$ ,  $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$  and  $C = 7.5 \text{ }\mu\text{F}$ , да се определи вредноста на непознатата отпорност  $R_x$  и индуктивитет  $L_x$  во гранката на непознати вредности кај овој мост.

**Решение:**

Слика бр. 4.6. Максвел-Виенов мост

Од условите за рамнотежа кај овој мост, може да се пресмета:

$$L_x = R_1 R_2 C = 400 \cdot 400 \cdot 7.5 \cdot 10^{-6} = 1.2 \text{ H}$$

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_3} = \frac{400 \cdot 400}{5000} = 32 \Omega$$

Факторот на добивка **Q**, исто така, може директно да се определи:

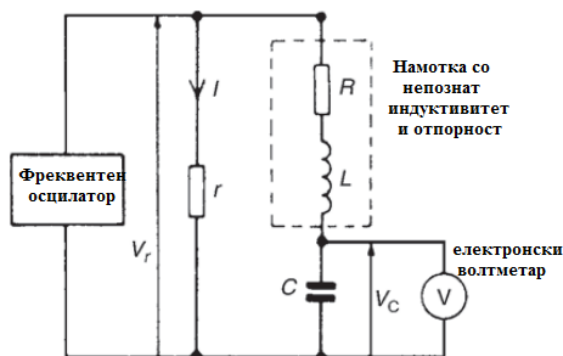
$$Q = \omega R_3 C = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 5000 \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} = 11,78$$

Или со користењето на определените вредности за индуктивитет и отпорност:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_x}{R_x} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1,2}{32} = 11,78$$

**Задача 4.9.** Максвелов мост со јазли ABCD ги има следните вредности на имеданси во гранките: гранка (A-B) отпорник од 250 Ω, гранка (B-C) паралелна врска помеѓу кондензатор со капацитет од 15 μF и отпорник од 10 kΩ, гранка (C-D) отпорник од 400 Ω, и гранка (D-A) намотка со непознат индуктивитет Lx и отпорност Rx. Да се нацрта шемата на Максвеловиот мерен мост и да се определат непознатите вредности за индуктивитетот и отпорноста на намотката. **[Решение: 1.5H, 10Ω]**

**Задача 4.10.** Потребно е да се определи индуктивитетот и отпорноста на еден калем со помош на резонантно коло дадено на сликата. Ако резонанцијата во колото се добива при фреквенција од 400 kHz и капацитет од 400 pF, при што факторот на добротата изнесува Q=100, да се определи индуктивноста и отпорноста на калемот.



Слика бр. 4.7. Резонантно коло

**Решение:**

Бидејќи кај резонантното коло, резонанцијата настанува при задоволените услови:

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}}$$

Може да напишеме дека:

$$(2 \cdot \pi \cdot f_r)^2 = \frac{1}{LC}$$

Односно:

$$L = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot f_r)^2 \cdot C} = \frac{1}{(2 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 10^3)^2 \cdot 400 \cdot 10^{-12}} = 0,396 \text{ mH}$$

За определување на вредноста на отпорноста ќе го користиме резултатот за факторот за добротата Q, кој изнесува:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}{R}$$

од каде за вредност на отпорноста при резонантност на колото се добива:

$$R = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L}{Q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 0,396 \cdot 10^{-3}}{100} = 9,952 \Omega$$

**Задача 4.11.** Да се определат индуктивноста и отпорноста на калем кој влегува во резонанција со кондензатор со капацитет од 300 pF при фреквенција од 250 kHz и дава фактор на добротата Q = 200.

**[Решение: L = 1,351 mH и R = 10,61 Ω].**

**Задача 4.12.** Шеринговиот мост постигнал рамнотежа при следните вредности на променливите и непроменливите елементи во мостот:

$$C_1 = 24 \text{ pF}; \quad R_1 = 1300 \Omega; \quad R_2 = 1000 \Omega; \quad C_3 = 100 \text{ pF};$$

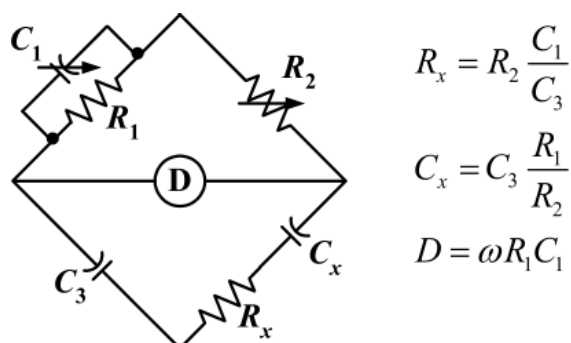
A) Нацртај ја принципиелната шема на Шеринговиот мост.

Б) Колкава е вредноста на непознатиот капацитет Cx и неговиот работен отпор Rx?

В) Уште кој користен податок може да се пресмета од вредностите на Cx и Rx? Пресметај го!

**Решение:**

A)



Слика бр. 4.8. Шерингов мост

Б)

$$C_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot C_3 = \frac{1300}{1000} \cdot 100 = 130 \text{ pF}$$

$$R_x = R_2 \frac{C_1}{C_3} = 1000 \frac{24}{100} = 240 \Omega$$

В) Може да се пресмета и Факторот на губитоци на кондензаторот  $tg(\delta)$ :

$$tg(\delta_x) = \omega \cdot C_x \cdot R_x = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_x \cdot R_x$$

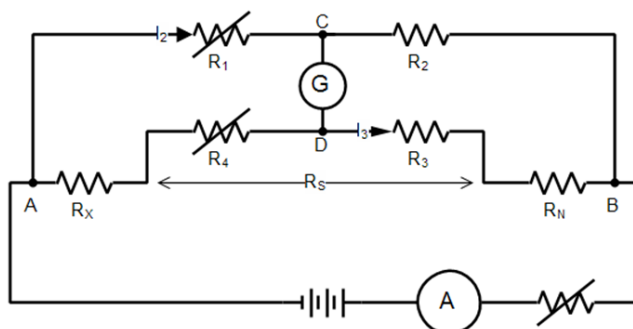
$$tg(\delta_x) = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 130 \cdot 10^{-12} \cdot 240 = 9,8 \cdot 10^{-6}$$

или

$$tg(\delta_x) = \omega \cdot C_1 \cdot R_1 = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_1 \cdot R_1$$

$$tg(\delta_x) = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 24 \cdot 10^{-12} \cdot 1300 = 9,8 \cdot 10^{-6}$$

**Задача 4.13.** Колкава е вредноста на отпорот измерен со Томсонов мост ако се:  $R_N = 0,1\Omega$ ,  $R_1 = R_4 = 64\Omega$  и  $R_2 = R_3 = 1000 \Omega$ . Колкава процентуална грешка ќе се направи ако  $R_4$  се зголеми за 5% од  $R_1$ , а притоа вредноста на мерниот отпор се пресметува според едноставниот израз за  $R_S = 10^{-4} \Omega$ ?



Слика бр. 4.9. Томсонов мост

**Решение:**

$$I_2 R_1 = R_4 I_3 + R_x I_1$$

$$I_2 R_2 = R_N I_1 + R_3 I_3$$

$$I_3 (R_3 + R_4) = R_S (I_1 - I_3)$$

$$I_3 = \frac{R_S}{R_S + R_3 + R_4} I_1$$

$$I_2 R_1 = R_4 \frac{R_S}{R_S + R_3 + R_4} I_1 + R_x I_1$$

$$I_2 R_2 = R_N I_1 + R_3 \frac{R_S}{R_S + R_3 + R_4} I_1$$

Ако се поделат горните две релации се добива:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_X(R_S + R_3 + R_4) + R_S R_4}{R_S R_3 + R_N(R_S + R_3 + R_4)}$$

$$R_X(R_S + R_3 + R_4) = \frac{R_1}{R_2}(R_S R_3 + R_N(R_S + R_3 + R_4)) - R_S R_4$$

$$R_X = R_N \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_S R_3}{R_S + R_3 + R_4} \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_4}{R_3} \right)$$

Ако важи условот:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

Тогаш:

$$R_X = R_N \frac{R_1}{R_2} = 0,1 \cdot \frac{64}{1000} + 6,4 \text{ m}\Omega$$

$$R_4 = R_1 + \frac{5}{1000} R_1 = 67,2 \Omega$$

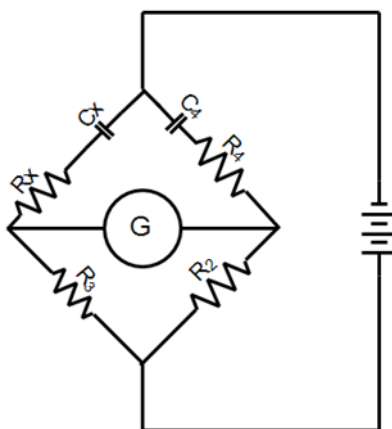
$$R_{x1} = R_N \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_S R_3}{R_S + R_3 + R_4} \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{R_4}{R_3} \right) = 6,39997 \text{ m}\Omega$$

$$G = \frac{R_X - R_{x1}}{R_{x1}} 100 = \frac{6,4 - 6,39997}{6,39997} 100 = 4,69 \cdot 10^{-4} \%$$

**Задача 4.14.** Со Виенов мост прикажан на сликата се мери капацитетот на еден кондензатор, прикажан со сервиска комбинација на капацитетот  $C_x$  и отпорот  $R_x$ . Колкава е вредноста на  $C_x$  и  $R_x$ , како и тангенсот на загуби на кондензаторот, ако се дадени вредностите:

$R_2 = 500 \Omega$ ;  $R_3 = 1000 \Omega$ ;  $R_4 = 10 \Omega$ ;  $C_4 = 0,05 \mu\text{F}$ ;  $f = 1200 \text{ Hz}$ ?

**Решение:**

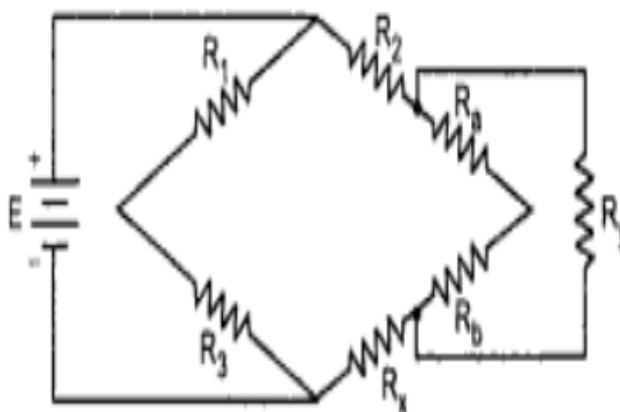


Слика бр. 4.10. Виенов мост

Условот за рамнотежа кај мостовите на наизменична струја е  $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$ , каде што:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_x + \frac{1}{j\omega C_x}; \\ Z_2 &= R_2; \\ Z_3 &= R_3; \\ Z_4 &= R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} \\ \left(R_x + \frac{1}{j\omega C_x}\right) R_3 &= \left(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4}\right) R_2 \\ R_x R_3 - j \frac{R_3}{\omega C_x} &= R_2 R_4 - j \frac{R_2}{\omega C_4} \\ R_x &= \frac{R_2 R_4}{R_3} = \frac{500 \cdot 10}{1000} = 5 \Omega \\ C_x &= C_4 \frac{R_3}{R_2} = 0,05 \cdot \frac{1000}{500} = 0,1 \mu F \\ \operatorname{tg} \delta &= \omega C_x R_x = \\ &= 2\pi f C_x R_x = \\ &= 2 \cdot 3,14 \cdot 1200 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 5 = 3,768 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

**Задача 4.15.** На сликата е прикажен Келвинов двоен мост, односот помеѓу  $R_a$  и  $R_b$  е  $1200 \Omega$  додека  $R_1$  е  $10 \Omega$  и  $R_1 = 0.5 \times R_2 \Omega$ . Пресметајте ја вредноста на непознатиот отпорник  $R_x$ .



Слика бр. 4.11. Келвинов двоен мост

**Решение:**

Од сликата и условот за баланс можеме да напишаме:

$$\frac{R_x}{R_2} = \frac{R_3}{R_1}$$

$\frac{R_3}{R_1}$  - односот помеѓу отпорностите на примарните гранки,

$\frac{R_b}{R_a}$  - односот помеѓу отпорностите на вторите (секундарни) гранки

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{R_3}{R_1} = \frac{1}{1200}$$

Сега:

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$R_1 = R_2 \times 0.5$$

$$R_2 = \frac{R_1}{0.5} = \frac{10}{0.5} = 20 \Omega$$

$$\frac{R_x}{20} = \frac{1}{1200}$$

$$R_x = \frac{20}{1200} = 0.0167 \Omega$$

**Задача 4.16.** 4-Терминален отпорник беше измерен со помош на Келвиновиот двоен мост при што се зададени следните вредности: стандарден отпорник со 98.2 nW, втрашен однос помеѓу гранките 98.022  $\Omega$  и 202  $\Omega$ . Надворешен однос помеѓу гранките 98.025  $\Omega$  и 201.96  $\Omega$ . Отпорноста што ги свързува стандардната отпорност и непозната отпорност е 600  $\mu\Omega$ .

### Решение:

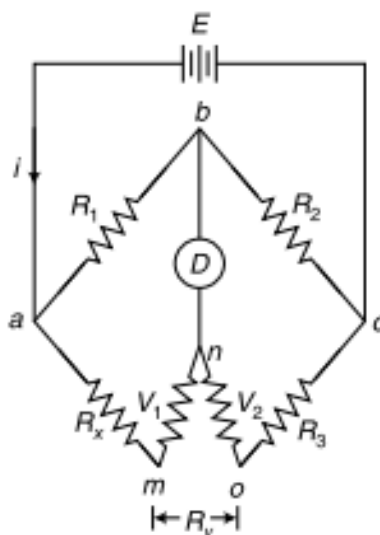
Равенка за непозната отпорност е

$$X = \frac{P}{Q} x S + \frac{qr}{p+q+r} \left[ \frac{P}{Q} - \frac{p}{q} \right]$$

оттука заменуваме

$$X = \frac{98.025}{201.96} x 98.02 x 10^{-6} + \frac{202 x 600 x 10^{-6}}{98.022 + 202 + 600 x 10^{-6}} \left[ \frac{98.025}{201.96} - \frac{98.022}{202} \right]$$

**Задача 4.17.** Ако отпорот на поврзувањето води од стандард до непознат отпор е 800  $\mu\Omega$ . Да се пресемета непозната отпорност при следните услови: стандардна отпорност изнесува 100  $\mu\Omega$ , внатрешен однос помеѓу гранките изнесува 15  $\Omega$  и 30  $\Omega$ , додека надворешен однос помеѓу гранките е 40  $\Omega$  и 60  $\Omega$ .



Слика бр. 4.12.

**Решение:**

Зададено е:

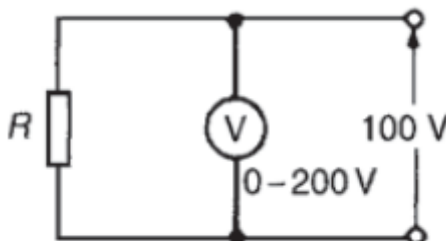
$R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \mu\Omega$ ,  
 $r_1 = 15 \Omega$ ,  $r_2 = 30 \Omega$ ,  $R_y = 800 \mu\Omega$

$$R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2} + \frac{r_2 R_y}{R_y + r_1 + r_2} \left[ \frac{R_1}{R_2} - \frac{r_1}{r_2} \right] = \frac{40 \times 100 \times 10^{-6}}{60} + \frac{30 \times 800 \times 10^{-6}}{(800 \times 10^{-6} + 15 + 30)} \left[ \frac{40}{60} - \frac{15}{30} \right] =$$

$$= 0.66 \times 10^{-4} + 5.33 \times 10^{-4} [0.16] = 1.5128 \times 10^{-4} = 151.28 \mu\Omega$$

## Глава 5: Мерење на електрична моќност и енергија

**Задача 5.1.** Да се пресмета моќноста која ќе се ослободи во отпорник со отпорност  $R$  и во волтметарот во коло дадено на сликата ако а)  $R = 250\Omega$  и б)  $R = 2\text{M}\Omega$ . Во пресметките да се земе дека специфичната отпорност на волтметарот изнесува  $10\text{k}\Omega/\text{V}$



Слика бр. 5.1. Мерно коло од отпорник и волтметар

### Решение:

Најпрво да ја определиме специфичната отпорност на волтметарот:

$$R_v = 10 \frac{\text{k}\Omega}{\text{V}} \cdot 200 \text{ V} = 2000 \text{ k}\Omega = 2 \text{ M}\Omega$$

а) Кога отпорникот (потрошувачот)  $R=250 \Omega$ , струите низ двете гранки (волтметар и отпорник) изнесува:

$$I_v = \frac{100}{2 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$I_r = \frac{100}{250} = 0,4 \text{ A}$$

Соодветно, моќностите во двете гранки ќе бидат:

$$P_v = I_v \cdot U_v = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ mW}$$

$$P_r = I_r \cdot U_r = 0,4 \cdot 100 = 40 \text{ W}$$

што укажува дека загубите во волтметарот се занемарливо мали во однос на моќноста предадена на потрошувачот (отпорникот).

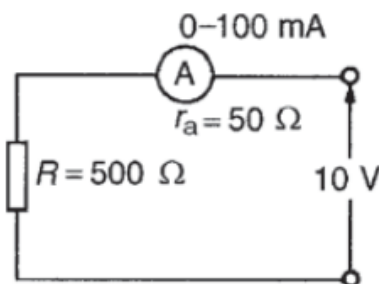
б) Кога отпорникот (потрошувачот) изнесува  $R = 2 \text{ M}\Omega$ , струите се:

$$I_v = \frac{100}{2 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$I_r = \frac{100}{2 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ A} = I_v$$

Според тоа, моќноста која се ослободува во отпорникот (потрошувачот) е еднаква на моќноста којашто се ослободува (загубите) во волтметарот и таа изнесува 5 mW.

**Задача 5.2.** Амперметар со максимално мерно подрачје 100mA од има внатрешна отпорност од  $50\Omega$  и се користи за мерење на јачината на електричната струја во коло дадено на сликата, каде што вредноста на отпорот на потрошувачот изнесува  $R = 500\Omega$ , а напонот  $U = 10V$ . Да се пресмета: а) покажувањето на амперметарот ако се занемари неговата внатрешна отпорност, б) вистинската вредност на струјата во електричното коло, в) загубите на моќност во амперметарот и д) енергијата предадена на потрошувачот.



Слика бр. 5.2. Мерно коло од отпорник и амперметар

**Решение:**

а) Ако се занемари внатрешната отпорност на амперметарот, вредноста која би ја покажал амперметарот треба да биде:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{500} = 0,02 \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

б) Реалната вредност на струјата низ електричното коло треба да биде:

$$I_r = \frac{U}{R + R_a} = \frac{10}{500 + 50} = \frac{10}{550} = 0,01818 \text{ A} = 18,18 \text{ mA}$$

што значи грешката при мерењето ќе биде:

$$G = \frac{20 - 18,18}{20} \cdot 100 = 9,1 \%$$

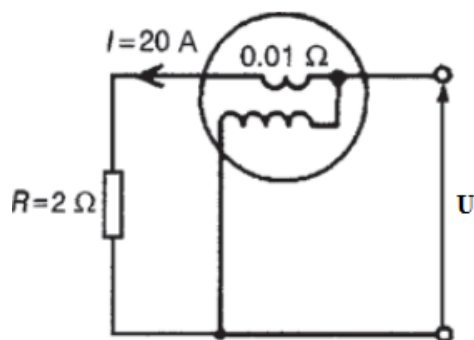
в) Загубите во амперметарот изнесуваат:

$$P_a = R_a \cdot I_a^2 = 50 \cdot 0,01818^2 = 0,0165 \text{ W} = 16,5 \text{ mW}$$

д) Моќноста предадена на потрошувачот изнесува:

$$P_r = R \cdot I_r^2 = 500 \cdot 0,01818^2 = 165 \text{ W}$$

**Задача 5.3.** Со помош на ватметар се врши мерење на моќност на еден потрошувач со отпорност  $R = 2\Omega$  низ кој протекува електрична струја со јачина 20A. Ако отпорноста на струјната гранка на ватметарот изнесува  $0,01\Omega$ , да се пресмета грешката при мерењето.



Слика бр. 5.3.

**Решение:**

Кога би се занемарила внатрешната отпорност на струјната гранка на ватметарот, тогаш моќноста која ја зема потрошувачот би била:

$$Pr = R \cdot I^2 = 2 \cdot 20^2 = 800 \text{ W}$$

Ако се земе во предвид и отпорноста на струјната гранка, тогаш загубите во оваа гранка на ватметарот изнесуваат:

$$Pw = R_{sw} \cdot I^2 = 0,01 \cdot 20^2 = 4 \text{ W}$$

Според тоа, ватметарот наместо да покаже 800 W, тој ќе покаже вкупна моќност од 804 W, со што мерењето ќе биде извршено со грешка од:

$$G = \frac{800 - 804}{800} \cdot 100\% = 0,5 \%$$

**Задача 5.4.** Амперметар со внатрешна отпорност од  $50\Omega$  и мерно подрачје од 0-1 A се користи за мерење на јачината на струјата која протекува низ еден потрошувач со отпорност од  $1k\Omega$  приклучен на напон  $U=250V$ . Да се пресмета: а) приближната вредност на струјата низ потрошувачот (ако се занемари внатрешната отпорност на амперметарот), б) вистинската вредност која ќе ја покаже амперметарот, в) грешката во мерењето во проценти, г) загубите во амперметарот и д) моќноста што се предава на потрошувачот.

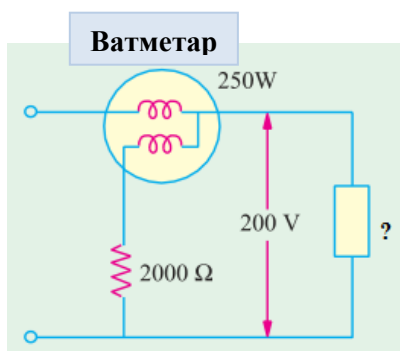
**Решение:** а) 0.250A б) 0.238A в) 4,8% г) 2.83W д) 56.64W

**Задача 5.5.** Струја со јачина од 15A тече низ потрошувач со отпорност  $R = 4\Omega$ . Да се пресмета: а) моќноста која се предава на потрошувачот, б) загубите во ватметарот со кој се врши мерење на моќноста ако тој има внатрешна отпорност на струјната гранка  $R_{ws} = 0.02\Omega$ , в) колкава грешка во мерењето внесува ватметарот во процесот на мерење.

**Решение:** а) 900W б) 904.5W в) 0.5%

**Задача 5.6.** Динамички ватметар се користи за мерење на моќност на еден потрошувач. При мерењето ватметарот покажал вредност од 250 W. Ако е познато дека отпорноста на напонската гранка на ватметарот изнесува  $2000\Omega$ , а напонот на

краевите на потрошувачот изнесува 200V, да се определи вистинската моќност на потрошувачот.



Слика бр. 5.4. Мерно коло составено од потрошувачи и динамички ватметар

**Решение:**

Очигледно, ватметарот, покрај моќноста на потрошувачот при мерењето, ќе ја покаже и загубата на моќност како резултат на загубите во напонската гранка на ватметарот која изнесува:

$$P_{wn} = \frac{U^2}{R_{wn}} = \frac{200^2}{2000} = 20 \text{ W}$$

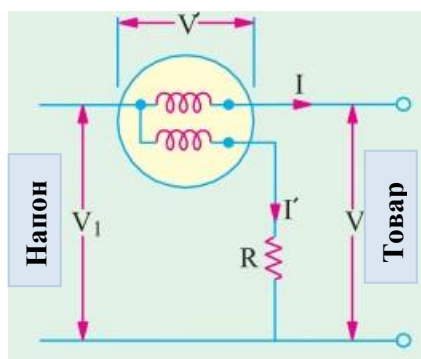
Според тоа, моќноста на потрошувачот ќе биде разлика помеѓу покажувањето на ватметарот и загубите на моќност во неговата напонска гранка:

$$P_t = P_w - P_{wn} = 250 - 20 = 230 \text{ W}$$

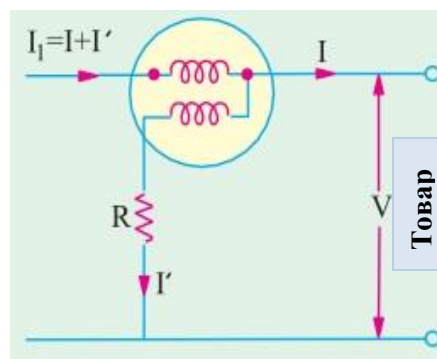
**Задача 5.7.** Ватметар со номинални податоци  $U=250 \text{ V}$  и  $I=10 \text{ A}$  и внатрешни отпорности на струјната гранка од  $0.5\Omega$  и напонската гранка од  $12.500\Omega$ , се користи за мерење на моќност. Да се определи процентуалната грешка која ја дава овој мерен инструмент како резултат двата начина на поврзување при мерењето при напон од  $250 \text{ V}$  и струја од а)  $4 \text{ A}$ , б)  $12 \text{ A}$ .

**Решение:**

Можни се два начина на поврзување на напонските и струјните гранки кај ватметарот:



Струјна



Напонска

а) Ако струјата низ потрошувачот е 4 А, тогаш за струјната шема важи:

- загуби во струјната гранка:  $P_{ws} = R_{ws} \cdot I^2 = 0,5 \cdot 4^2 = 8 \text{ W}$
- моќност на потрошувачот:  $P_t = U \cdot I = 250 \cdot 4 = 1000 \text{ W}$
- покажување на ватметарот:  $P_w = P_{ws} + P_t = 1008 \text{ W}$
- грешка:  $G_s = \frac{8}{1008} \cdot 100 = 0,794 \%$

За напонската шема, загубите и грешката се:

- загуби:  $P_{wn} = \frac{U^2}{R_{wn}} = \frac{250^2}{12500} = 5 \text{ W}$
- грешка:  $G_n = \frac{5}{1005} \cdot 100 = 0,497 \%$

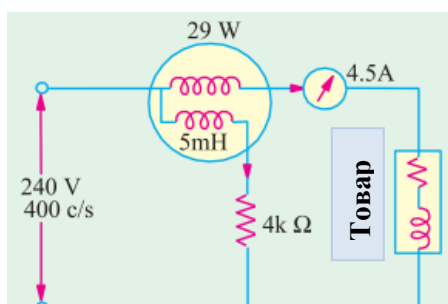
б) Во случај на товар со отпорност од 12 А, состојбата е следна:

- **струјна шема:**
- загуби:  $P_{ws} = R_{ws} \cdot I^2 = 0,5 \cdot 12^2 = 72 \text{ W}$
- моќност на потрошувачот:  $P_t = U \cdot I = 250 \cdot 12 = 3000 \text{ W}$
- покажување на ватметарот:  $P_w = P_{ws} + P_t = 3072 \text{ W}$
- грешка:  $G_s = \frac{72}{3072} \cdot 100 = 2,34 \%$

**напонска шема:**

- загуби:  $P_{wn} = \frac{U^2}{R_{wn}} = \frac{250^2}{12500} = 5 \text{ W}$
- грешка:  $G_n = \frac{5}{3005} \cdot 100 = 0,166 \%$

**Задача 5.8.** Струјната гранка на еден ватметар е поврзана во серија со амперметар и индуктивен товар како на долната слика. Волтметарот и напонската гранка на ватметарот се поврзани паралелно со индуктивниот товар и извор со фреквенција од 400 Hz. Амперметарот покажува вредност на струјата од 4,5 А, додека волтметарот и ватметарот 240 V и 29 W соодветно. Ако знаеме дека индуктивноста и отпорноста на напонската гранка на ватметарот изнесуваат 5 mH и 4kΩ, и ги занемариме загубите во амперметарот и во струјната гранка на ватметарот, да се определи грешката при мерење во проценти.



Слика бр. 5.5.

**Решение:**

Најпрво да ја определиме реактансата на напонската гранка на ватметарот:

$$X_{wn} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 400 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 12,56 \Omega$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{X_{wn}}{R_{wn}} = \frac{12,56}{4000} = 0,00314 \text{ rad } (0,18^\circ \text{ или } 0^\circ 11')$$

Бидејќи и во двете гранки (на потрошувач и напонска гранка) постои индуктивитет и истите се поврзани во паралела, тогаш важи следниот израз:

$$\frac{\text{вистинска вредност}}{\text{отчитана вредност}} = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}$$

$$\text{вистинска вредност} = V \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)} \cdot \text{отчитана вредност}$$

$$V \cdot I = \frac{\text{отчитана вредност}}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}$$

Бидејќи  $\alpha \approx 0$ , тогаш и  $\cos(\alpha) \approx 1$ , па може да се запише:

$$\cos(\varphi - \alpha) = \frac{\text{отчитана вредност}}{V \cdot I} = \frac{29}{240 \cdot 4,5} = 0,02685$$

$$(\varphi - \alpha) = 88,46$$

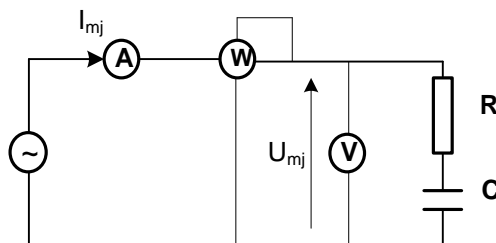
$$\varphi = 88,46 + 0,18 = 88,64 (88^\circ 39')$$

Според тоа, процентуалната грешка при ова мерење ќе биде:

$$\frac{\text{отчитана вредност}}{\text{вистинска вредност}} \cdot 100 = \frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi)} \cdot 100 = 113,23$$

Или грешката при мерењето ќе биде 13,23 %

**Задача 5.9.** Со мерното коло дадено на сликата се вршат мерења на моќност на капацитивниот товар даден на сериската комбинација R-C. Ако е познато дека отчитаните вредности на волтметарот и амперметарот се 220 V и 10 A, соодветно, додека Факторот на моќност е  $\cos \varphi = \frac{2}{3}$  при фреквенција од 50 Hz, да се пресмета: а) активната P, реактивната Q и привидната моќност S на потрошувачот, б) отпорноста R и капацитетот на потрошувачот C?



Слика бр. 5.6. Мерно коло за мерење на моќност на капацитивен товар при серија R-C

**Решение:**

Моќноста на монофазниот потрошувач е дадена со равенката:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 220 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} = 1466,67 \text{ W}$$

Привидната моќност може да се определи како:

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{1466,67}{2/3} = 2200 \text{ W}$$

Додека реактивната моќност е:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{2200^2 - 1466,67^2} = 1639,78 \text{ VAR}$$

Ако се има предвид дека целокупната активна моќност се троши на отпорникот  $R$ , тогаш може да се напише:

$$P = R \cdot I^2, \text{ односно } R = \frac{P}{I^2} = \frac{1466,67}{10^2} = 14,67 \Omega$$

За импедансата на колото може да се напише:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{10} = 22 \Omega$$

од каде реактансата на потрошувачот изнесува:

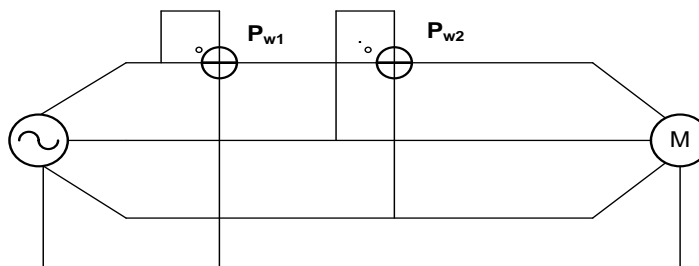
$$X_c = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{22^2 - 14,67^2} = 16,39 \Omega$$

За вредноста на кондензаторот се добива:

$$X_c = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

од каде за  $C$  добиваме:  $C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 16,39} = 1,94 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 194 \mu\text{F}$

**Задача 5.10.** Во трофазен наизменичен систем со вклучен неутрален проводник, симетрично оптоварен и со напон  $U_n = 400\text{V}$  приклучени се две ватметри како на сликата. Ватметрите покажуваат вредност на активна моќност од:  $P_{w1} = 150\text{W}$  и реактивна моќност  $P_{w2} = Q_{w2} = 216,5\text{W}$ .



**Слика бр. 5.7. Симетрично оптоварен трофазен наизменичен систем со неутрален проводник**

Врз основа на измерените вредности, а водејќи сметка за начинот на приклучување на ватметрите, да се пресмета: а) активната моќност, б) реактивната моќност, в) привидната моќност и факторот на моќност со која работи електромоторот.

**Решение:**

а) Ако внимателно ја погледнеме шемата, ќе видиме дека едниот ватметар ( $P_{w1}$ ) приклучен е помеѓу една фаза на трифазниот систем и нултиот проводник, што значи покажувањето на овој ватметар дава моќност по фаза во трифазниот систем. Дополнително, како што е наведено во задачата станува збор за симетрично трифазно оптоварување, според што за активната моќност на целиот трифазен потрошувач може да запишеме:

$$P = 3 \cdot P_{w1} = 3 \cdot 150 = 450 \text{ W}$$

б) Вториот ватметар е приклучен помеѓу две фази и, всушност, ја покажува реактивната моќност која ја зема моторот од мрежа по фаза, односно:

$$Q_{w1} = \frac{P_{w1}}{\sqrt{3}} = \frac{216,5}{\sqrt{3}} = 125 \text{ VAr}$$

Вкупната реактивна моќност во трифазниот систем тогаш е еднаква на:

$$Q = 3 \cdot Q_{w1} = 3 \cdot 125 = 375 \text{ VAr}$$

в) Соодветно, трифазната привидна моќност која овој мотор ја зема од мрежа изнесува:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{450^2 + 375^2} = 585,77 \text{ VA}$$

додека факторот на моќност е:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{450}{585,77} = 0,77 \quad (\varphi = 39,8^\circ)$$

$$U_n = 110V I_n = 1AK U_n = 10K I_n = 20$$

**Задача 5.11.** За мерење на моќност во еден трифазен систем употребени се два ватметри во Аронова врска. Едниот ватметар покажал вредност од 1500 W, додека другиот ватметар покажал вредност од 700 W. Колку изнесувала: а) активната моќност кај овој систем, а колку реактивната моќност; б) да се определи фактор на моќност кај овој потрошувач.

**Решение:**

При користење на Аронова врска може да се докаже дека моќноста на системот се определува според следните равенки:

Вкупна активна моќност:  $P = P_1 + P_2 = 1500 + 700 = 2200 \text{ W}$

Вкупната реактивна моќност:  $Q = \sqrt{3} \cdot (P_1 - P_2) = \sqrt{3} \cdot (1500 - 700) = 1385,64 \text{ VA}$

Фактор на моќност:  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \sqrt{3} \cdot \frac{800}{2200} = 0,6298 \quad (\varphi = 32,2^\circ)$

$$\cos \varphi = \cos 32,2 = 0,846$$

**Задача 5.12.** Два идентични ватметри се поврзани во Арноова врска за да се измери моќноста на еден трифазен систем за кој се знае дека има фактор на моќност  $\cos \varphi = 0.4$ . Ако вкупната моќност што ја зема трифазниот потрошувач изнесува 30 kW, да се определи: а) покажувањето на секој од ватметрите поодделно и б) вкупната реактивна и привидна моќност што ја зема потрошувачот.

**Решение:**

Ја користиме равенката за определување на аголот на моќност  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$$

За  $\cos \varphi = 0,4$  одговара агол  $\varphi = 66,43^\circ$

соодветно добиваме:

$$P_1 - P_2 = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{30}{\sqrt{3}} \cdot 2,29 = 39,68 \text{ kVAr}$$

Со решавање на системот на две равенки со две непознати се добива:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 30 \\ P_1 - P_2 &= 39,68 \end{aligned}$$

од каде се добиваат следните вредности за  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = 34,84 \text{ kW} \quad \text{и} \quad P_2 = -4,84 \text{ kW}$$

б) Вкупната реактивната моќност изнесува:

$$Q = \sqrt{3} \cdot (P_1 - P_2) = \sqrt{3} \cdot (34,84 - (-4,84)) = \sqrt{3} \cdot 39,68 = 69,04 \text{ kVAr}$$

додека вкупната привидна моќност е:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{30^2 + 69,04^2} = 72,275 \text{ kVA}$$

**Задача 5.13.** За мерење на енергијата предадена на еден потрошувач се користи индукционо броило кое е така калибрирано што му се потребни 600 вртежи за да покаже 1 kWh електрична енергија. Броилото прави пет (5) вртежи за секои 20 секунди. Да се определи колкава е моќноста на потрошувачот.

**Решение:**

Ако за 20 секунди броилото прави 5 вртежи, тогаш за еден вртеж му се потребни 4 секунди.

Според тоа, за да направи 600 вртежи ќе му бидат потребни:  $600 \cdot 4 = 2400$  секунди.

Според тоа, ако работи со овој режим (5 вртежи / 20 секунди), тогаш за 1 kWh ќе му бидат потребни 2400 секунди или  $2400/60 = 40$  минути.

Бидејќи енергијата најчесто ја изразуваме во kWh, тогаш можеме да напишеме:

$$3600 : X = 2400 : 1 \text{ kWh}$$

од каде следува дека потрошувачот зема часовна енергија од:

$$X = \frac{3600}{2400} \cdot 1 \text{ kWh} = 1,5 \text{ kWh}$$

или има инсталарна моќност од 1,5 kW.

**Задача 5.14.** Едно индукционо броило работи на номинален напон од 220 V и низ него во период од 20 минути протекува струја од 6 A. Притоа отчитани се почетните и крајните покажувања на броилото и тие изнесувале 3,53 и 4 kWh, соодветно. Да се пресмета грешката на броилото во проценти како и константата на броилото (број на вртежи/ kWh) ако во тие 20 минути дискот на броилото се завртело 470 пати.

**Решение:**

За 20 минути колку што работело броилото измерило потрошената енергија:

$$E_m = 4 - 3,53 = 0,47 \text{ kWh}$$

Од друга страна, математички пресметана енергијата која поминала низ броилото треба да биде еднаква на:

$$E_p = U \cdot I \cdot t = 220 \cdot 6 \cdot \frac{20}{60} = 440 \text{ W} = 0,44 \text{ kWh}$$

Соодветно, грешката на индукционото броило изнесува:

$$G = \frac{0,47 - 0,44}{0,47} \cdot 100 = 6,38 \%$$

Со оглед дека за 20 минути измерена е енергија од 0,47 kWh, а дискот се завртил 470 пати, тогаш за 1 kWh ќе бидат потребни:

$$\text{константа на броилото} = \frac{470}{0,47} = 1000 \text{ vrt/kWh}$$

**Задача 5.15.** Монофазно индукционо броило за домашна употреба е приклучено на напон од 230 V и има константно оптоварување од 4 A за период од 6 часа со фактор на моќност  $\cos \phi = 1.0$ , за кој броилото прави 2208 вртежи. Да се определи: а) константата на броилото, б) колкава енергија ќе покаже броилото ако се заврти 1472 вртежи и в) колкав е факторот на моќност на потрошувачот кој ја зема енергијата определена под точка б) при што напонот на броилото изнесува 230 V, а јачината на струјата низ броилото е константа и еднаква на 5 A за период од 4 часа.

**Решение:**

а) Вкупната енергија предадена на потрошувачот за овој период изнесува:

$$E = U \cdot I \cdot \cos \phi \cdot t = 230 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 = 5520 \text{ Wh} = 5,52 \text{ kWh}$$

Бидејќи знаеме дека за целиот тој период дискот на броилото се завртил 2208 пати, тогаш за неговата константа може да се напише:

$$\text{константа} = \frac{2208}{5,52} = 400 \text{ врт}/kWh$$

б) Ако дискот направи 1472 вртежи, соодветно на пресметаната константа, броилото ќе измери енергија:

$$E = \frac{1472}{400} = 3,68 \text{ kWh}$$

в) Енергијата со вредност од 3,68 kWh треба да ја потроши некој потрошувач кој работи под следните услови:

$$3,68 = U \cdot I \cdot \cos\phi \cdot t$$

од каде за факторот на моќност се добива:

$$\cos\phi = \frac{3680}{230 \cdot 5 \cdot 4} = 0,8$$

**Задача 5.16.** *Монофазно броило прави 500 вртежи за 1 kWh. За време на тестирањето утврдено е дека истото броило прави 40 вртежи за време од 58,1 секунди при оптоварување од 5 kW. Да се определи колкава е грешката на броилото и дали тоа броило сè уште може да се користи како индукционо броило со класа на точност 1.*

**Решение:**

Даденото броило треба да направи за период од 1 час:

$$\frac{3600}{58,1} \cdot 40 = 2478,5 \text{ вртежи}$$

Бројот на овие вртежи одговара на измерена моќност од:

$$\frac{2478,5}{500} = 4,957 \text{ kWh}$$

Имајќи предвид дека броилото е оптоварено со константна моќност од 5 kW за време од цел еден час, а броилото за тој час би измерило 4.957 kWh, тогаш процентуалната грешка на броилото изнесува:

$$G = \frac{4,957 - 5}{5} \cdot 100 = -0,86 \%$$

Соодветно, броилото греша за 0,86% и може да се смета дека е сè уште припаѓа на броила во класа на точност 1.

**Задача 5.17.** *Едно броило за енергија е предвидено да прави 100 вртежи за да прибележи потрошувачка од 1 kWh електрична енергија. Да се пресмета колкав број на вртежи треба да направи дискот на броилото ако е тоа приклучено на потрошувач со напон од 230 V, струја од 40 A и фактор на моќност  $\cos\phi = 0,4$  за период од 1 час. Ако тој број на вртежи изнесува 360, тогаш да се определи и процентуалната грешка кај ова индукционо броило*

**[Решение: 368 вртежи, 2,17% грешка]**

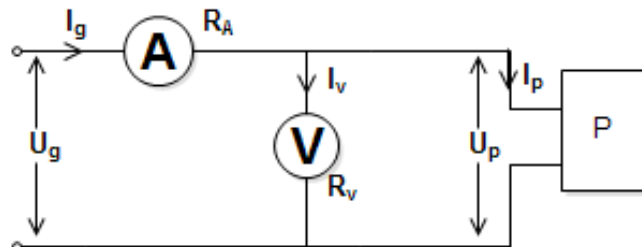
**Задача 5.18.** Константата на едно броило со номинални податоци 25 A и 220 V изнесува 500 врт/kWh. За време на баждарењето на броилото со полна моќност од 4400 W, неговиот диск прави 50 вртежи за времетраење од 83 секунди. Да се определи процентуалната грешка на броилото и неговата класа на точност.

**[Решение: 1,59%, класа на точност 2]**

**Задача 5.19.** Едно 50 A, 230 V броило за енергија е тестирано под полн товар и утврдено е дека неговиот диск прави 61 вртежи за време од 37 секунди. Ако декларираната константа на броилото изнесува 520 врт/ kWh да се определи класата на точност на ова броило и неговата процентуална грешка.

**[Решение: класа 1, -0,755%]**

**Задача 5.20.** Колку изнесува моќноста на едностраночен потрошувач и силата која ја дава изворот ако амперметарот со внатрешен отпор  $R_A = 0,1 \Omega$  покажал струја  $I_A = 0,5 A$ , а волтметарот со внатрешен отпор  $R_V = 20 k\Omega$  покажал напон  $U_V = 108 V$  ?



Слика 5.8. Мерење на моќност со амперметар и волтметар

**Решение:**

Користејќи ги ознаките на сликата, за моќноста на изворот се добива:

$$P_g = U_g \cdot I_g$$

Напонот  $U_g$  ќе се одреди од следниот израз:

$$U_g = U_p + I_g R_A$$

Внесувајќи го изразот за напонот во изразот за моќноста, ќе се добие:

$$P_g = (U_p + I_g R_A) I_g = (108 + 0,5 \cdot 0,1) \cdot 0,5 = 54,025W$$

Силата што ја троши потрошувачот е еднаква на:

$$P_p = U_p \cdot I_p$$

каде е:

$$I_p = I_g - I_v = I_g - \frac{U_p}{R_V}$$

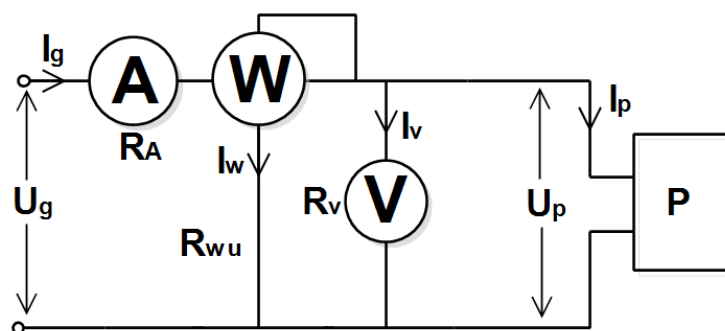
Внесувајќи го изразот за струјата во изразот за моќноста, се добива:

$$P_p = U_p \left( I_g - \frac{U_p}{R_V} \right) = 108 \cdot \left( 0,5 - \frac{108}{20 \cdot 10^{-3}} \right) = 53,417W$$

Разликата меѓу моќноста на изворот и на потрошувачот се јавува како резултат на потрошувачката на мерните инструменти и таа изнесува:

$$P_g - P_p = 54,025 - 53,417 = 0,608 \text{ W}$$

**Задача 5.21.** Колку изнесуваат моќноста на потрошувачот и моќноста која ја дава изворот, ако отпорностите на напонската и струјната гранка на ватметарот се соодветно  $R_{wu} = 3 \text{ k}\Omega$  и  $R_{wi} = 0.1 \text{ }\Omega$ ? Ватметарот покажал  $P_w = 102,5 \text{ W}$ , амперметарот има внатрешна отпорност  $R_A = 0,05 \text{ }\Omega$  и покажал струја  $I_g = 1,025 \text{ A}$ , а волтметарот со внатрешна отпорност  $R_v = 20 \text{ k}\Omega$  покажал напон  $U_p = 100 \text{ V}$ .



Слика 5.9. Директно мерење на моќност со ватметар

**Решение:**

$$P_p = U_p I_p$$

$$I_p = I_g - (I_w + I_v) = I_g - \left( \frac{U_p}{R_{wu}} + \frac{U_p}{R_v} \right)$$

$$P_p = U_p \left\{ I_g - \left( \frac{U_p}{R_{wu}} + \frac{U_p}{R_v} \right) \right\} = \underbrace{U_p I_g}_{P_w} - \frac{U_p^2}{R_{wu}} - \frac{U_p^2}{R_v}$$

$$P_p = P_w - \left( \frac{U_p^2}{R_{wu}} + \frac{U_p^2}{R_v} \right) = 102,5 - \left( \frac{100^2}{5 \cdot 10^2} + \frac{100^2}{20 \cdot 10^2} \right) = 100 \text{ W}$$

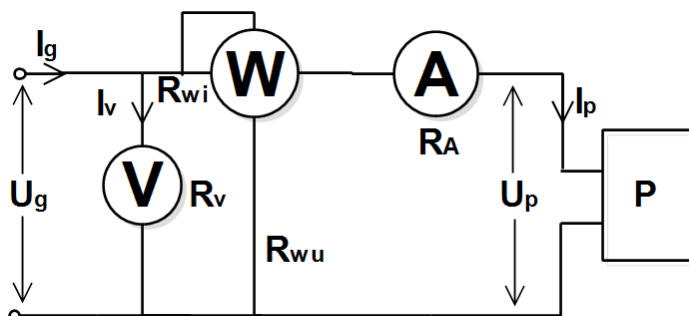
Моќноста која ја дава изворот е:

$$P_g = U_g I_g = I_g (R_A I_g + R_{wi} I_g + U_p)$$

$$P_g = \underbrace{U_p I_g}_{P_w} + I_g^2 (R_{wi} + R_A) = P_w + I_g^2 (R_{wi} + R_A)$$

$$P_g = P_w + I_g^2 (R_{wi} + R_A) = 102,5 + 1,025^2 \cdot (0,1 + 0,05) = 102,658 \text{ W}$$

**Задача 5.22.** Колкава грешка се прави ако вредноста што ја покажува ватметарот се изедначи со моќноста на потрошувачот? Ватметарот има отпори во напонската и струјната гранка  $R_{wu} = 5 \text{ k}\Omega$  и  $R_{wi} = 0,1 \text{ }\Omega$  соодветно, а покажува вредност  $100,15 \text{ W}$ . Амперметарот со внатрешна отпорност  $R_A$  покажал струја  $I_p = 1 \text{ A}$ .



Слика 5.10. Директно мерење на моќност со ватметар

**Решение:**

$$U_g = (R_{wi} + R_A) \cdot I_p + U_p$$

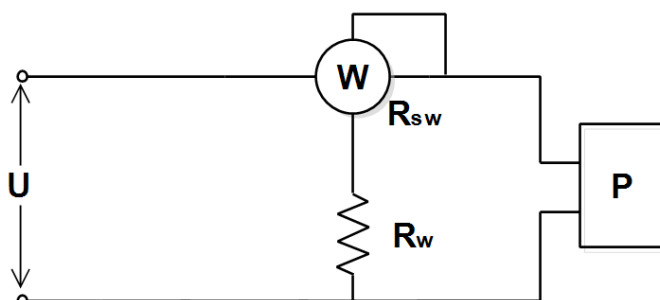
$$U_p = U_g - I_p(R_{wi} + R_A)$$

$$P_p = U_p I_p = [U_g - I_p(R_{wi} + R_A)] \cdot I_p = \underbrace{U_p I_g}_{P_w} - I_p^2(R_{wi} + R_A)$$

$$g = \frac{P_w - P_p}{P_p} \cdot 100\%$$

$$g = \frac{P_w - P_w + I_p^2(R_{wi} + R_A)}{P_w - I_p^2(R_{wi} + R_A)} \cdot 100\% = \frac{1^2 \cdot (0,1 + 0,05)}{100,15 - 1^2(0,1 + 0,05)} \cdot 100\% = 0,15\%$$

**Задача 5.23.** Електродинамичкиот инструмент даден на слика 4.4. со линеарна скала, без предотпорник  $R_w$  при полн отколн покажува  $P' = 0,25 \text{ W}$ . Колкав предотпорник треба да се додаде во напонската гранка, ако отпорникот во напонската гранка е  $R_{sv} = 50 \Omega$ , за да се добие мерно подрачје од 0 до 750 W?



Слика бр. 5.11. Електродинамички инструмент со линеарна скала

**Решение:**

Моќноста на ватметарот е еднаква на :

$$P = UI \cos \varphi$$

$$U' = \frac{R_{sv}}{R_{sv} + R_w} \cdot U \Rightarrow U = U' \cdot \frac{R_{sv} + R_w}{R_{sv}}$$

$$P = U' \cdot \frac{R_{sv} + R_w}{R_{sv}} \cdot I \cdot \cos\varphi$$

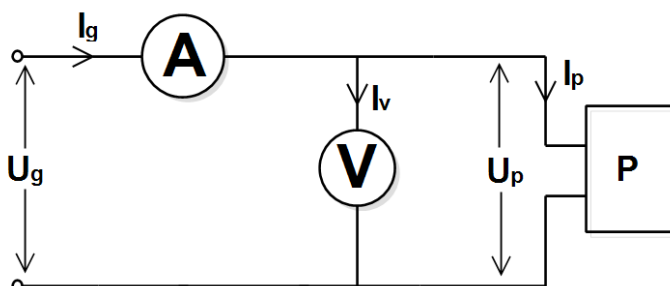
каде што  $U' I \cos\varphi = P'$  е моќноста што ја покажува ватметарот без предотпорник, следува:

$$P = P' \cdot \frac{R_{sv} + R_w}{R_{sv}}$$

$$R_w = R_{sv} \left( \frac{P}{P'} - 1 \right) = 50 \left( \frac{750}{0,25} - 1 \right) = 149,950 \text{ k}\Omega$$

$$R_w = 149,950 \text{ k}\Omega$$

**Задача 5.24.** Колку изнесуваат моќноста на потрошувачот и моќноста која ја дава изворот ако амперметарот со внатрешна отпорност  $R_A = 0,1 \Omega$  покажал струја  $I_A = 0,5 \text{ A}$ , а волтметарот со внатрешна отпорност  $R_V = 20 \text{ k}\Omega$  покажал напон  $U_V = 108 \text{ V}$ ?



Слика 5.12. Мерење на моќност со амперметар и волтметар (напонска шема)

**Решение:**

$$P_g = U_g I_g$$

$$U_g = R_A I_g + U_p$$

$$P_g = (R_A I_g + U_p) \cdot I_g$$

$$P_g = (0,1 \cdot 0,5 + 108) \cdot 0,5 = 54,025 \text{ W}$$

$$P_p = U_p I_p = U_p (I_g - I_v) = U_p \left( I_g - \frac{U_p}{R_V} \right)$$

$$P_p = 108 \cdot \left( 0,5 - \frac{108}{20} \right) = 53,417 \text{ W}$$

$$P_g - P_p = 54,025 - 53,417 = 0,608 \text{ W}$$

**Задача 5.25.** За мерење на моќност во еден трифазен систем се употребени два ватметра во Аронова врска. Едниот ватметар покажал вредност од  $1300 \text{ W}$ , додека другиот ватметар покажал вредност од  $600 \text{ W}$ . Колку изнесува активната моќност, а колку реактивната? Колкава е привидната моќност кај овој потрошувач чија моќност се мери и колкав е неговиот фактор на моќност  $\cos\varphi$ ?

**Решение:**

$$P = Pa + Pb = 1300 + 600 = 1900 \text{ W}$$

$$Q = \sqrt{3}(P1 - P2) = \sqrt{3}(1300 - 600) = 1212.4 \text{ VAr}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1900^2 + 1212.4^2} = 2254 \text{ VA}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{1200}{2254} = 0.53; \varphi = 58^\circ$$

**Задача 5.26.** Два идентични ватметра се поврзани во Аронова врска за да се измери моќноста на еден трифазен систем за кој се знае дека има фактор на моќност  $\cos \varphi = 0,4$ . Ако вкупната моќност што ја зема трифазниот потрошувач изнесува 30 kW, да се определи:

- а) покажувањето на секој од ватметрите одделно и  
 б) вкупната реактивна и привидна моќност што ја зема потрошувачот.

**Решение:**

$$а) \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} * \frac{P1-P2}{P1+P2}$$

$$\varphi = 66.43^\circ$$

добиваме:

$$P1 - P2 = \frac{P1 + P2}{\sqrt{3}} * \operatorname{tg}\varphi = \frac{30}{\sqrt{3}} * 2.29 = 3.68 \text{ kVar}$$

Со решавање на систем на две равенки со две непознати се добива:

$$\begin{aligned} P1 + P2 &= 30 \\ P1 - P2 &= 39.68 \end{aligned}$$

Добиени вредности за P1 и P2:

$$\begin{aligned} P1 &= 34.84 \text{ kW} \\ P2 &= -4.84 \text{ kW} \end{aligned}$$

б) Вкупната реактивна моќност изнесува:

$$Q = \sqrt{3} * (P1 - P2) = \sqrt{3} * (34.84 - (-4.84)) = \sqrt{3} * 39.68 = 69.04 \text{ kVar}$$

Вкупната привидна моќност е:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{30^2 + 69.04^2} = 72.275 \text{ kVA}$$

## Глава 6: Струјни и напонски мерни трансформатори

**Задача 6.1.** Струен трансформатор има само една примарна навивка и секундарна намотка со 60 навивки. Секундарната намотка е поврзана со амперметар со внатрешна отпорност од  $0.15\Omega$ , додека отпорноста на секундарната намотка изнесува  $0.25\Omega$ . Ако е познато дека јачината на струјата која тече низ примарната намотка изнесува 300 A да се определи: а) вредноста што ќе ја покаже амперметарот во секундарното коло, б) напонот на краевите на амперметарот, в) вкупната вредност на моќноста (VA) во секундарното мерно коло.

### Решение:

а) Вредноста која ќе ја покаже амперметарот е соодветна на преносниот однос на струјниот трансформатор, односно:

$$I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 300 \cdot \left(\frac{1}{60}\right) = 5 \text{ A}$$

б) Напонот на краевите на амперметарот е резултат на падот на напонот на неговата внатрешна отпорност, според кое добиваме:

$$\Delta V = R_a \cdot I_2 = 0,15 \cdot 5 = 0,75 \text{ V}$$

в) За да ја определиме вредноста на моќноста на секундарна страна, потребно е да се најде вкупниот пад на напонот на секундарна страна и струјата низ секундарната намотка, односно:

$$R_2 = R_a + R_n = 0,15 + 0,25 = 0,4 \Omega$$

$$\text{индуциран напон во секундарна намотка } V_{ind} = R_2 \cdot I_2 = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ V}$$

$$\text{моќност на секундарна страна} = V_{ind} \cdot I_2 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ VA}$$

или

$$\text{моќност на секундарна страна} = R_2 \cdot I_2^2 = 0,4 \cdot 5^2 = 10 \text{ VA}$$

**Задача 6.2.** Струен трансформатор има две навивки на примарната намотка и секундарната намотка со 260 навивки. Секундарната намотка е поврзана со амперметар со внатрешна отпорност од  $0.2\Omega$ , додека отпорноста на секундарната намотка изнесува  $0.3\Omega$ . Ако е познато дека јачината на струјата која тече низ примарната намотка изнесува 650 A, да се определи: а) вредноста што ќе ја покаже амперметарот во секундарното коло, б) напонот на краевите на амперметарот и в) вкупната вредност на моќноста (VA) во секундарното мерно коло.

**[Решение: а) 5 A, б) 1V, в) 7,5 VA]**

**Задача 6.3.** Во нисконапонската мрежа со индиректна постапка со употреба на струјни трансформатори (СМТ) се измерени следните податоци: Номинален однос на трансформација  $K_{nI}=500/5$ , и Номинална сила на секундарот на трансформаторот  $S_{nI}=30 \text{ VA}$ . Да се пресмета: а) колкава струја ќе тече низ секундарната намотка ако низ примарната намотка тече струја 150 A, б) ако амперметарот приклучен во

секундарното коло покажува вредност 2 A, колкава е струјата која тече низ примарната намотка, в) колку е идеалната вредност на импедансата со која можеме да го оптовариме секундарот на овој мерен трансформатор.

**Решение:**

а) Ако е познат преносниот однос кај овој СМТ, тогаш струите низ примарната и секундарната страна го задоволуваат следниот услов:

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)$$

Од каде може да се определи струјата низ секундарната намотка ако е позната примарната струја и обратно:

$$I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 150 \cdot \left(\frac{5}{500}\right) = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ A}$$

б) За примарната страна важи:

$$I_1 = I_2 \cdot \left(\frac{N_2}{N_1}\right) = 2 \cdot \left(\frac{500}{5}\right) = \frac{1000}{5} = 200 \text{ A}$$

в) Максималната импеданса е дефинирана од номиналната моќност на секундарното коло и номиналната секундарна струја:

$$Z = \frac{S_{2n}}{I_{2n}^2} = \frac{30}{5^2} = \frac{30}{25} = 1,2 \ \Omega$$

**Задача 6.4.** Во среднонапонската мрежа со индиректна постапка со употреба на еднополен изолиран напонски мерен трансформатор (НМТ) измерени се следните податоци: номинален однос на трансформација  $K_n U = (10000V/\sqrt{3})/(100V/\sqrt{3})$  и номинална моќност на секундарот на трансформаторот  $S_n U = 15VA$ . Ако волтметарот приклучен на секундарот на напонскиот мерен трансформатор (НМТ) покаже  $U_2=57,8V$  колкава е вредноста на напонот на примарот на трансформаторот  $U_1$ ?

**Решение:**

Слично како кај струјните мерни трансформатори и кај напонските мерни трансформатори, клучен е преносниот однос помеѓу примарната и секундарната страна, односно кој е соодветен на односот помеѓу бројот на навивките на примарната и секундарната страна:

$$U_1 = U_2 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 57,8 \cdot \left(\frac{\frac{10000}{\sqrt{3}}}{\frac{100}{\sqrt{3}}}\right) = 57,8 \cdot \left(\frac{10000}{100}\right) = 5780 \text{ V}$$

**Задача 6.5.** Низ примарната намотка на струен мерен трансформатор со номинален преносен однос  $100A/5A$  и номинална моќност  $5VA$  тече струја  $I_1=50A$ . Колкава најголема импеданса може да биде приклучена на секундарните приклучоци на трансформаторот

во овој случај? Колкава максимална импеданса може да се приклучи кога во примарното коло тече номинална струја?

**Решение:**

Најголемата импеданса на секундарното коло може да се определи од равенката за врската помеѓу моќноста и струјата на секундарот, односно:

$$Z_{TM} = \frac{S_n}{I_2^2}$$

При примарна струја од 50 A, низ секундарот ќе протекува струја со вредност:

$$I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 50 \cdot \left(\frac{5}{100}\right) = \frac{250}{100} = 2,5 \text{ A}$$

Па соодветно, најголемата импеданса би била:

$$Z_{TM} = \frac{S_n}{I_2^2} = \frac{5}{2,5^2} = \frac{5}{6,25} = 0,8 \ \Omega$$

Доколку низ примарната намотка протекува номинална струја, тогаш се добива:

$$I_2 = I_1 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = 100 \cdot \left(\frac{5}{100}\right) = \frac{500}{100} = 5 \text{ A}$$

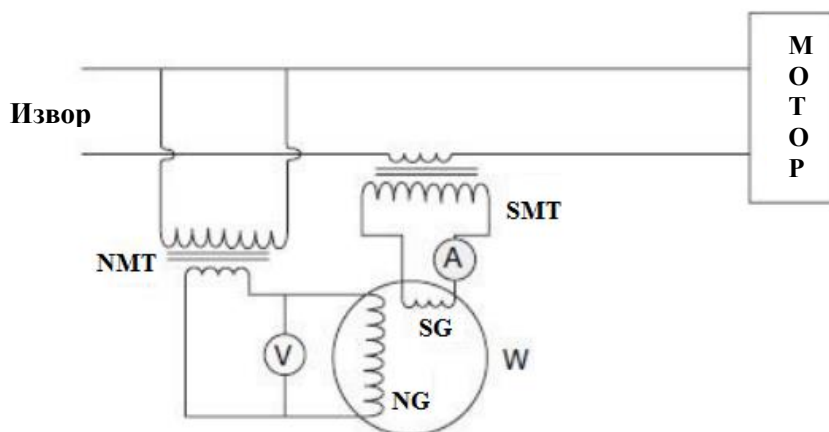
$$Z_{TM} = Z_n = \frac{S_n}{I_2^2} = \frac{5}{2,5^2} = \frac{5}{25} = 0,2 \ \Omega$$

**Задача 6.6.** Во среднонапонската мрежа со индиректна постапка со употреба на еднополен изолиран напонски мерен трансформатор (НМТ) измерени се следните податоци: номинален однос на трансформација  $K_{nU} = 5000V/\sqrt{3} / (100 V/\sqrt{3})$ , и номинална моќност на секундарот на трансформаторот  $S_{nU} = 15 \text{ VA}$ . Ако волтметарот приклучен на секундарот на напонскиот мерен трансформатор покаже  $U_2 = 57,8 \text{ V}$  колкава е вредноста на напонот на примарот на трансформаторот  $U_1$ ?

**[Решение: 2390V]**

**Задача 6.7.** За монофозен електричен мотор треба по пат на индиректно мерење со помош на ватметар приклучен преку соодветен напонски и струен трансформатор да се одреди активната моќност. Познати се следниве податоци: за ватметарот, номинален напон  $U_n = 110V$  и номинална струја  $I_n = 1A$ , преносен однос на напонскиот трансформатор  $K_{Un} = 10$  и преносен однос на струјниот трансформатор  $K_{In} = 20$ .

а) да се нацрта мерното коло и б) да се одреди вредноста на активната моќност на моторот ако аналогниот ватметар покажал на стрелката 75 делови од скалата од вкупно 110 делови на скалата за која е врзана најголемата вредност на мерното подрачје.

**Решение:**

Слика бр. 6.1. Монофазен електричен мотор

б) Ако стрелката на ватметарот е позиционирана на 75 дел од скалата која максимално има 110 делови, тогаш покажувањето на ватметарот означува отчитана вредност на секундарната страна од индиректниот мерен систем:

$$P_{sec} = U_n \cdot I_n \cdot \frac{75}{110} = 110 \cdot 1 \cdot \frac{75}{110} = 75 \text{ W}$$

Но, ако се има предвид дека струјниот и напонскиот трансформатор ги редуцираат реалните вредностите на напонот и струјата која тече во примарното коло кон електромоторот, тогаш реалната вредност на моќноста која ја зема електромоторот во примарната мрежа треба да се зголеми за преносните односи на напонскиот и струјниот трансформатори, или:

$$P_{pr} = P_{sec} \cdot K_{Un} \cdot K_{In} = 75 \cdot 10 \cdot 20 = 15000 \text{ W} = 15 \text{ kW}$$

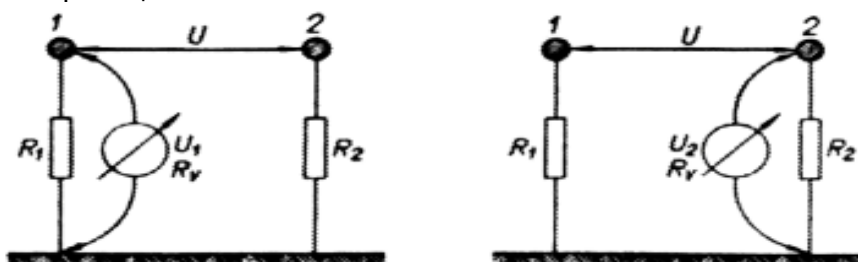
## Глава 7: Специфични мерења (заземјување и дефекти на кабли)

**Задача 7.1.** За мерење на отпорот кај една постројка под напон се користи метода на Фриш, при што измерени се следниве вредности: напон помеѓу проводниците 220 V, напон помеѓу земјата и првиот проводник изнесува 28 V, додека напон помеѓу вториот проводник и земјата изнесува 42 V.

Ако внатрешниот отпор на волтметарот со кој се врши мерењето изнесува 500 kΩ, а) да се нацрта шемата на мерење, б) да се најдат отпорноста на излоацијата за двата проводници, R1 и R2 и в) вкупната отпорност на постројката R.

### Решение:

Според методата на Фриш, мерењето на отпорностите под напон се врши според следната шема и следните релации:



Слика бр. 7.1. Шема на мерење отпорност под напон според методата на Фриш

$$R_1 = R_v \frac{U - U_1 - U_2}{U_2}$$

$$R_2 = R_v \frac{U - U_1 - U_2}{U_1}$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_v \left( \frac{U}{U_1 + U_2} - 1 \right)$$

а) Ако ги искористиме равенките и дадените измерени податоци се добива:

$$R_1 = R_v \cdot \frac{U - U_1 - U_2}{U_2} = 500 \cdot \frac{220 - 28 - 42}{42} = 1785,7 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = R_v \cdot \frac{U - U_1 - U_2}{U_1} = 500 \cdot \frac{220 - 28 - 42}{28} = 2678,6 \text{ k}\Omega$$

б) За вкупната отпорност на постројката се добива:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_v \left( \frac{U}{U_1 + U_2} - 1 \right) = 500 \left( \frac{220}{28 + 42} - 1 \right) = 1071,4 \text{ k}\Omega$$

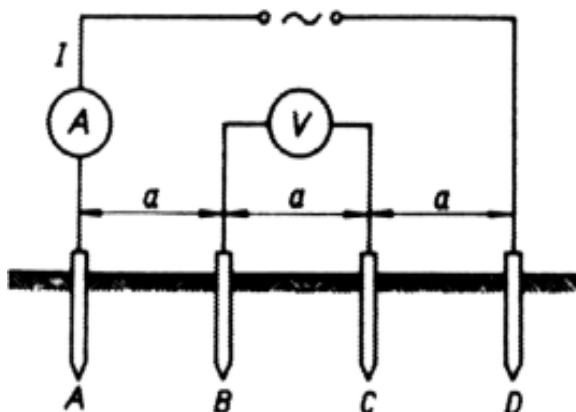
**Задача 7.2.** Пред да се пристапи кон изградба на една нова 110 kV трансфостаница, потребно е да се измери вредноста на специфичната отпорност на заземјувањер . За

таа цел се користи метода со четири сонди, при што во текот на мерењето направени се 10 различни мерења и добиени се средни вредности од мерењата и тоа:  $U_{BC} = 32V$  и струја  $I = 14,5A$ .

Да се нацрта шемата на мерењето и да се пресмета специфичниот отпор на заземјување  $\rho$  на оваа локација, ако при сите мерења меѓусебното растојание помеѓу сондите било константно и изнесувало  $a=30m$ .

**Решение:**

а) Шемата на мерење е прикажана на сликата подолу:



Слика бр. 7.2. Шема на мерење со четири сонди

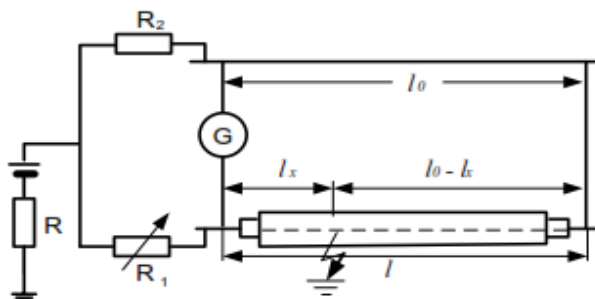
б) Отпорноста на заземјување се определува според следната равенка:

$$\rho = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{U_{BC}}{I} = 2 \cdot \pi \cdot 30 \cdot \frac{32}{14,5} = 416 \Omega m$$

**Задача 7.3.** Со користење на мерниот мост според метода на Мурџ со дополнителен вод избран како еден од исправните проводници во кабелот, потребно е да се определи локацијата на дефектот кај еден подземен кабел при што познато е дека вкупната должина на кабелот изнесува 4200 m, додека во состојба на рамнотежа кај мостот отчинати се следните вредности:  $R'l = 24\Omega$ , додека вредноста на отпорникот  $R_2 = 58,2\Omega$ .

Да се нацрта шемата на мерењето и да се утврди локацијата каде што е настанат дефектот (прекилот) на кабелот.

**Решение:**



Слика бр. 7.3. Шема на мерење

Определување на местото на дефект се врши преку процес на урамнотежувањето на овој мост, при што врз основа на прочитаните вредности за отпорноста  $R'_1$  и  $R_2$  може да се определи со голема прецизност местото на дефектот ако се користи следната релација:

$$l_x = (l + l_p) \cdot \frac{R'_1}{R'_1 + R_2} = (4200 + 4200) \cdot \frac{24}{24 + 58,2} = 2452,55 \text{ m}$$

**Задача 7.4.** Со  $U$ - $I$  метода се мери отпорот на заземјување на столбен заземјувач и добиени се следните вредности:  $U_V=10 \text{ V}$  и  $I_A=50 \text{ A}$ .

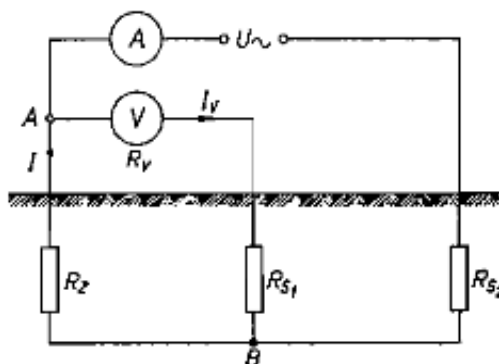
а) Да се нацрта принципиелната шема за мерење на отпорот на заземјувачот со  $U$ - $I$  мерна постапка.

б) Да се пресмета отпорот на заземјувачот  $R_{UZ}(\Omega)$ .

в) Колку ќе биде напонот на заземјувачот  $U_Z(V)$  кога во работни услови на дефект на една фаза преку заземјувачот со отпор на заземјување  $R_{UZ}$  протече струја од  $I_z = 300 \text{ A}$ ?

**Решение:**

а)



Слика бр. 7.4. Шема за мерење на отпор на заземјувач со  $U$ - $I$  метода

б) Вредноста на отпорноста на заземјувачот изнесува:

$$R_{uz} = \frac{U_v}{I_A} = \frac{10}{50} = 0,2 \Omega$$

в) Доколку дојде до дефект на една фаза и протече низ заземјувачот струја на куса врска од  $300 \text{ A}$ , тогаш напонот на заземјувачот ќе биде:

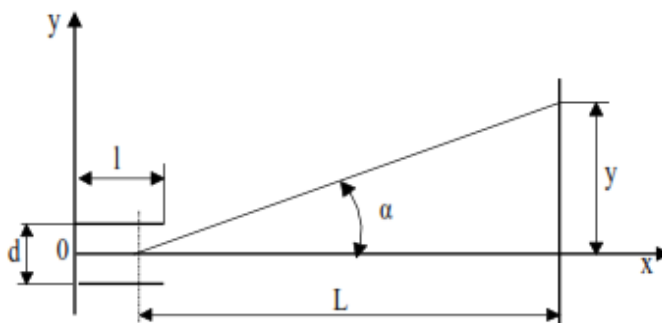
$$U_v = R_{uz} \cdot I_z = 0,2 \cdot 300 = 60 \text{ V}$$

## Глава 8: Мерења со помош на осцилоскоп

**Задача 8.1.** Кај еден аналоген катоден осцилоскоп вредноста на анодниот напон изнесува 2000 V, додека плочките за изместување на електронскиот сноп со должина од 1,5 cm се поставени на меѓусебно растојание од 5 mm. Ако екранот на осцилоскопот се наоѓа на растојание од 50 cm од плочките за изместување, да се определи: а) брзината на електронскиот сноп, б) чувствителноста на катодната цевка (CRT) и в) факторот на изместување на осцилоскопот.

### Решение:

На сликата подолу покажана е упростена работна шема на еден аналоген катоден осцилоскоп:



Слика бр. 8.1. Упростена работна шема на аналоген катоден осцилоскоп

Согласно равенките може да се пресмета:

а) за брзината на електронскиот сноп може да се запише  $V_x = \sqrt{2 \frac{U_a e_0}{m_0}}$  од каде се добива:

$$V_x = \sqrt{2 \cdot \frac{U_a e_0}{m_0}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 26,5 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

б) за определување на чувствителноста на осцилоскопот може да се напише:

$$S_r = \frac{l \cdot L}{2 \cdot U_a \cdot d} = \frac{0,5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0,000375 \frac{\text{m}}{\text{V}} = 0,375 \frac{\text{mm}}{\text{V}}$$

в) факторот на изместување претставува мерка за чувствителноста и претставува реципрочна вредност на факторот на чувствителност, односно:

$$G = \frac{1}{S_r} = \frac{1}{0,375} = 2667 \frac{\text{V}}{\text{mm}} = 2,66 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

**Задача 8.2.** Да се определи колкав напон треба да се донесе на плочките за изместување на електронскиот сноп ако максималниот отклон на снопот треба да биде 3 cm кај еден аналоген осцилоскоп со следните податоци: аноден напон 2000 V, плочи со должина од 2 cm поставени на меѓусебно растојание од 5 mm и растојание од екранот од 30 cm.

**Решение:**

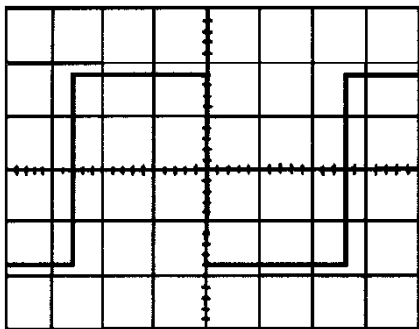
Максималното изместување на електронскиот сноп може да се определи според следната равенка (види слика од претходната задача):

$$y = L \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{U}{U_a} \frac{l}{d} \cdot L$$

односно, за вредноста на напонот доведен на плочите за изместување може да се напише:

$$U = \frac{2 \cdot U_a \cdot d \cdot y}{l \cdot L} = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3} = 100 \text{ V}$$

**Задача 8.3.** Кај еден аналоген катоден осцилоскоп добиен е аналоген сигнал прикажан на сликата. Ако коефициентите на вертикално и хоризонтално отстапување се:  $\text{volts/cm}=20 \text{ V/cm}$  и  $\text{time/cm}=100 \mu\text{s/cm}$ , да се определи: а) периодот на сигналот, б) неговата фреквенција и в) врв-до-врв (*peak-to-peak*) вредноста на мерниот напонски сигнал?



еден квадрат има димензии  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$

Слика бр. 8.2. Аналоген сигнал кај аналоген катоден осцилоскоп

**Решение:**

а) Со внимателно набљудување може да се утврди дека траењето на сигналот има должина од  $5 \text{ cm}$ , согласно на што, за периода на сигналот може да се пресмета:

$$T = 5 \text{ cm} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{s}}{\text{cm}} = 500 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0,5 \text{ ms}$$

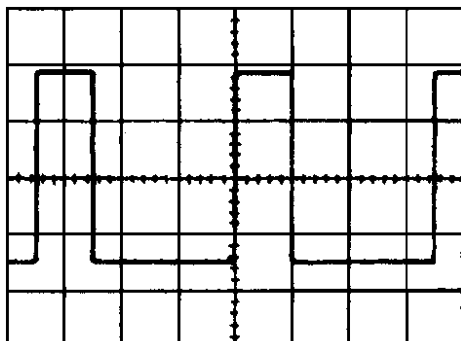
б) а фреквенцијата на сигналот изнесува:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{500 \cdot 10^{-6}} = 2000 \text{ Hz} = 2 \text{ kHz}$$

в) вредноста на мерениот напон (*peak-to-peak*) изнесува:

$$U_{\text{peak-to-peak}} = 4 \text{ cm} \cdot 20 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 80 \text{ V}$$

**Задача 8.4.** Кај еден аналоген катоден осцилоскоп добиен е аналоген сигнал прикажен на сликата. Ако коефициентите на вертикално и хоризонтално отстапување се:  $\text{volts/cm}=0.2 \text{ V/cm}$  и  $\text{time/cm}=50 \text{ ms/cm}$ , да се определи: а) периодот на сигналот, б) неговата фреквенција и в) врс-до-врс (peak-to-peak) вредноста на мерниот напонски сигнал.

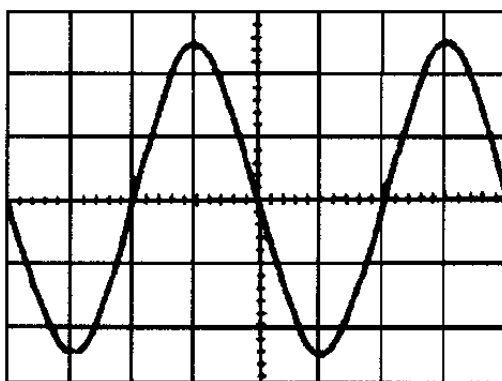


еден квадрат има димензии 1cm x 1cm

Слика бр.8.3. Аналоген сигнал кај аналоген катоден осцилоскоп

**[Решение: а) 175 ms, б) 5,71 Hz, в) 0.68 V]**

**Задача 8.5.** При мерење со аналоген катоден осцилоскоп добиен е синусоидален напон прикажен на сликата. Ако коефициентите на вертикално и хоризонтално отстапување се:  $\text{volts/cm}= 5 \text{ V/cm}$  и  $\text{time/cm}=500\mu\text{s/cm}$ , да се определи: а) фреквенцијата, б) врс-до-врс (peak-to-peak) вредноста на измерениот напон, в) амплитудата и г) ефективната вредност на синусоидалниот напон.

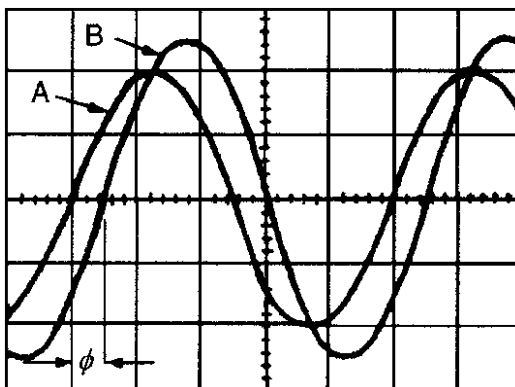


Слика бр. 8.4. Синусоидален напон кај аналоген катоден осцилоскоп

**[Решение: а) T=2 ms, f=500 Hz б) 25 V в) 12,5 V г) 8,84 V]**

**Задача 8.6.** Со двоканален аналоген осцилоскоп измерен е сигналот даден на сликата подолу. Ако коефициентите на вертикално и хоризонтално отстапување се:  $\text{volts/cm}=2 \text{ V/cm}$  и  $\text{time/cm}=100\mu\text{s/cm}$  да се определи: а) фреквенциите на двата сигнала, б)

максималната и ефективните вредности на измерените сигнали, в) фазната разлика помеѓу двата сигнала.



Слика бр. 8.5. Сигнал измерен со двоканален аналоген осцилоскоп

### Решение:

А) Двата измерени сигнала имаат ист период со должина од 5 cm, според тоа и двата сигнала имаат ист период:

$$T = 5 \text{ cm} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \frac{\text{s}}{\text{cm}} = 500 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

односно, двата сигнала имаат иста фреквенција:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{500 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 2000 \text{ Hz} = 2 \text{ kHz}$$

б) Максималните вредности на мерените сигнали се:

сигнал А = 4 cm, и сигнал В = 5 cm, според тоа, вредностите на измерените напони се:

$$U_A = 2 \text{ cm} \cdot 2 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 4 \text{ V}$$

$$U_B = 2,5 \text{ cm} \cdot 2 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 5 \text{ V}$$

Додека ефективните вредности соодветно се:

$$U_{A-eff} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2,83 \text{ V}$$

$$U_{B-eff} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ V}$$

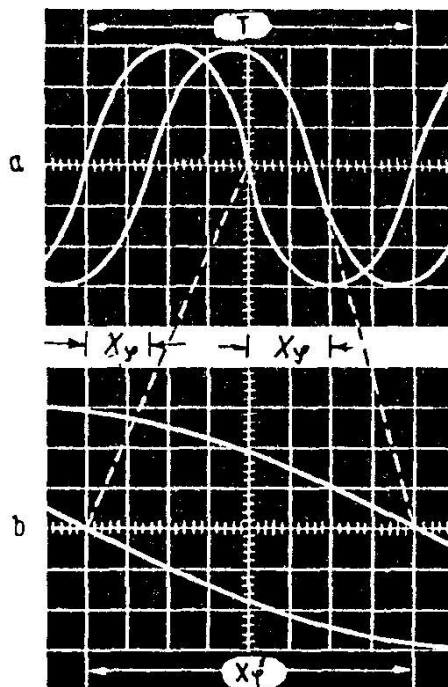
в) Бидејќи периодот на сигналите е ист и има должина од 5 cm, а бидејќи една периода има 360°, тогаш еден 1 cm изразен во степени изнесува: 360/5 = 72°.

Со оглед дека изместувањето помеѓу сигналите изнесува 0.5 cm, тогаш фазната разлика помеѓу двата сигнала изнесува:

$$\varphi = 0,5 \text{ cm} \cdot 72^\circ = 36^\circ$$

Односно, сигналот В доцни позади сигналот А за агол од 36°.

**Задача 8.7.** Со користење на мерењето прикажано на сликата **a** и **b** да се одреди фазниот агол помеѓу мерните сигнали.



Слика бр. 8.6. Сигнали добиени кај аналоген катоден осцилоскоп

**Решение:**

Определувањето на фазната разлика може да се реализира на два начина:

a) Мерен агол =  $360^\circ/8 \text{ cm} = 45^\circ/\text{cm}$  или  $45^\circ/\text{поделок}$

- Хоризонтално поместување изнесува:  $X_\phi = 1,6 \text{ cm}$  или 1,6 поделци соодветно.
- **Фазното поместување** изнесува:  $\phi = F_\phi \cdot X_\phi = 45^\circ/\text{cm} \cdot 1.6 \text{ cm} = 72^\circ$ .

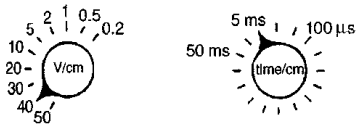
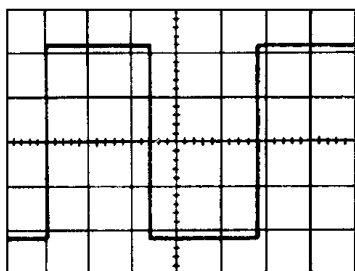
b) Ако се користи коефициент на развлекување на сигналот по x-оска, може да се добие таков сигнал при што директно ќе може да се определи фазната разлика. На пример: ако се користи коефициент на развлекување со вредност  $M_x = 5$ , тогаш добиваме:

- **Фазно поместување**

$$\phi^\circ = \frac{F_\phi}{M_x} \cdot X_\phi = \frac{45^\circ}{5} \cdot 8 = 72^\circ$$

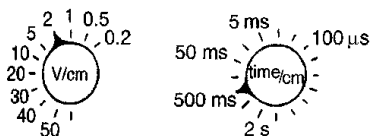
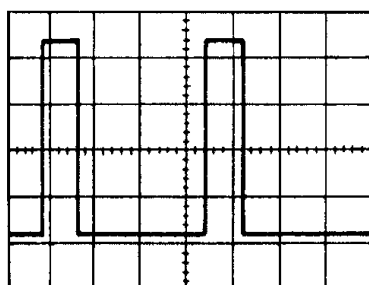
**Задача 8.8.** За следните измерени сигнали со помош на аналогни осцилоскопи да се определи:

а) фреквенцијата и б) реак-to-реак вредност



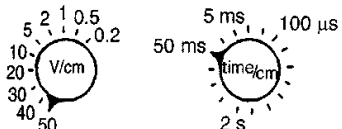
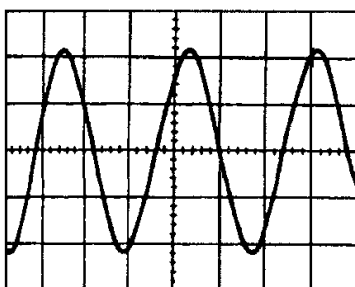
**[Решение:  $f=41,7$  Hz,  $V=176$  V]**

а) фреквенција и б) максималната вредност на мерниот сигнал



**[Решение:  $f=0,56$  Hz,  $V=8,4$  V]**

а) фреквенција, б) мах реак-to-реак и в) ефективната вредност на мерениот сигнал



**[Решение:  $f=7,14$  Hz,  $V_{pp}=220$  V,  $V_{ef}=77,8$  V]**

**Задача 8.9.** При користење на мерна сонда со преносен однос 10:1 ако влезната капацитивност на осцилоскопот изнесува 20 pF и капацитивноста на коаксијалниот кабел е дадена како 80 pF, да се определи:

- потребната капацитивност  $C_1$  и
- влезната капацитивност на сондата, што се гледа од крајниот извор.

**Решение:**

**Дадено е:**

капацитивноста на осцилоскопот  $C_{osc} = 20\text{pF}$ ,

капацитивноста на коаксијалниот кабел  $C_w = 80\text{pF}$ ,

$$C_2 = 80\text{pF} + 20\text{pF} = 100\text{pF}$$

- Знаеме дека :  $R_{osc} = 1\text{M}\Omega$  и  $R_1 = 9\text{M}\Omega$

Така, капацитетот  $C_1$  може да се пресмета како :

$$C_1 = C_2 \frac{R_{osc}}{R_1}$$

Заменувајќи ги потребните вредности добиваме :

$$C_1 = (100 \times 10^{-12}) \left( \frac{1 \times 10^6}{9 \times 10^6} \right) = 11.11\text{pF}$$

- Влезната капацитивност на сондата може да се утврди земајќи ја во предвид сериската врска на  $C_1$  и  $C_2$ . Така, можеме да напишеме :

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Заменувајќи ги познатите вредности, добиваме:

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{11.11 \times 10^{-12}} + \frac{1}{100 \times 10^{-12}} \text{ или } C_T = 10\text{pF}$$

**Задача 8.10.** Брановата форма прикажана на сликата се набљудува на екранот на осцилоскоп. Ако вертикалното слабеење е наместено на 0.5 V/div, одреди ја **peak to peak** амплитудата на сигналот.



Слика бр. 8.7. Бранова форма добиена на екран на осцилоскоп и нејзини основни карактеристики

### Решение:

Употребувајќи ја релацијата

$$V_{p-p} = \left( \frac{V}{\text{бр. на поделци}} \right) \times \left( \frac{\text{бр. на поделци}}{1} \right)$$

$$V_{p-p} = 0.5V \times 3 = 1.5V_{p-p}$$

**Задача 8.11.** Ако контролата  $t/div$  (бр. на поделци) е подесена на  $2\mu s/div$  кога брановата форма има изглед прикажан на екранот на осцилоскопот (сл.1), да се одреди фреквенцијата на сигналот.

### Решение:

Периодата на сигналот се одредува користејќи ја релацијата

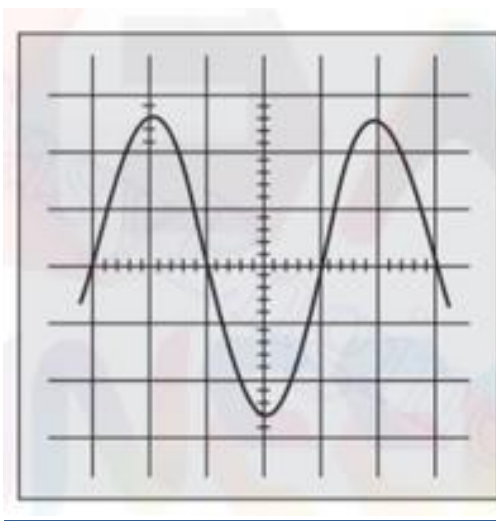
$$T = \left( \frac{t}{\text{бр. на поделци}} \right) \times \left( \frac{\text{бр. на поделци}}{\text{циклус}} \right)$$

$$T = 2\mu s \times 4 = 8\mu s$$

Оттука, фреквенцијата се пресметува како :

$$f = 1/T = 1/8\mu s = 125kHz$$

**Задача 8.12.** Сликата прикажува бранова форма на синусодален напон набљудуван на екранот на осцилоскоп. Вертикалното слабење изнесува  $2\text{mV/div}$ . Пресметај ја амплитудата на напонот и ефективната вредност.



Слика бр. 8.8. Синусодален напон добиен на екран на осцилоскоп

**Решение :**

Може да се забележи дека еден дел е поделен на 5 единици.

1 поделба =  $\frac{1}{5} = 0.2$  единици.

Исто така, може да се забележи дека позитивниот врв на сигналот одговара на 2 целосни поделби и 3 потподелби.

Па така, позитивниот врв е

**Позитивен врв = (2 целосни поделби) + (3 потподелби  $\times$  вредност на 1 потподелба)  
=  $2 + 3 \times 0.2 = 2.6$  поделби.**

Слично и за негативен врв,

**Негативен врв = 2.6 поделби**

Па така **peak-to-peak** напонот изнесува

$$V_{p-p} = 2.6 + 2.6 = 5.2 \text{ поделби}$$

$$V_{p-p} = \text{Број на поделби} \times \frac{V}{\text{бр. на поделци}} = 5.2 \times 2 \text{ mV} = 10.4 \text{ mV}$$

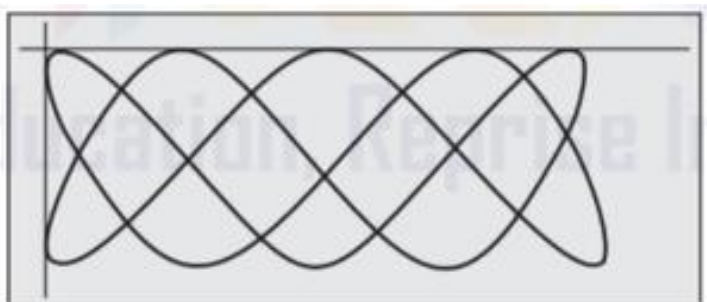
Знаеме дека амплитудата на брановата форма е дадена како

$$V_p = \frac{V_{p-p}}{2} = \frac{10.4}{2} = 5.2 \text{ mV}$$

Исто така, знаеме дека ефективната вредност на брановата форма е

$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{5.2}{\sqrt{2}}$$

**Задача 8.13.** Сликата ја покажува Лисајоусовата шема добиена на екранот на осцилоскоп при додавање на хоризонталниот сигнал со фреквенција од 1 kHz. Одреди ја непознатата фреквенција на вертикалниот сигнал.



Слика бр. 8.9. Лисајоусова шема на екран на осцилоскоп

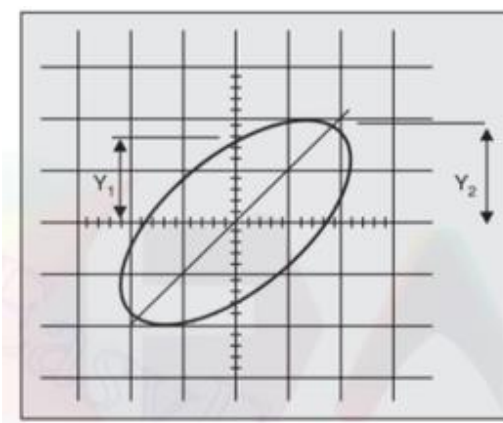
**Решение:**

Дадено е :  $f_H = 1kHz$ , број на вертикални тангенти = 2, број на хоризонтални тангенти=5

Знаеме дека:  $\frac{f_V}{f_H} = \frac{\text{бр.на хоризонтални тангенти}}{\text{бр.на вертикални тангенти}}$

$$\frac{f_V}{f_H} = \frac{5}{2}, f_V = \frac{5}{2} \times 1kHz = 2.5kHz$$

**Задача 8.14.** Лисајоусовата шема, добиена на осцилокопот, е прикажана на сликата. Пронајди ја фазната разлика помеѓу двата брана.



Слика бр. 8.10. Лисајоусова шема на екран на осцилоскоп

**Решение:**

Од Лисајоусовата фигура дадена на сл.4, гледаме дека  $Y_1 = 8$  единици,  $Y_2 = 10$  единици. Дополнително знаеме дека ако главната оска лежи во првиот и третиот квадрант, тогаш фазната разлика е дадена како:

$$\phi = \sin^{-1} \frac{Y_1}{Y_2} = \sin^{-1} \frac{8}{10} = 53.13^\circ$$

**Задача 8.15.** Најди ја ширината на опсег на осцилоскопот ако сигналот имајќи  $17\mu s$  време на пораст е распостранен со  $21\mu s$  време на пораст на осцилоскопот.

**Решение:**

$$T_{rs} = 17\mu s \text{ и } T_{rd} = 21\mu s$$

$$T_{rd} = \sqrt{(T_{rs})^2 + (T_{ro})^2}$$

$$21 \times 10^{-6} = \sqrt{(17 \times 10^{-6})^2 + (T_{ro})^2}$$

$$T_{ro} = 1.232 \times 10^{-5} \text{ sec}$$

$$B.W = \frac{0.35}{T_{ro}} = \frac{0.35}{1.232 \times 10^{-5}} = 28.388 \text{ kHz}$$

\*(B.W. – ширина на опсег на осцилоскопот )

**Задача 8.16.** Осцилоскопот со ширина на опсег од  $25 \text{ MHz}$  се користи за да се набљудуваат сигнали. Времето на пораст на емитуваниот сигнал е  $20 \text{ ns}$ . Пронајди го времето на пораст на сигналот.

**Решение :**

\*( B.W. – ширина на опсег на осцилоскопот )

$$B.W. = 25 \text{ MHz}, T_{rd} = 20 \text{ ns}$$

$$B.W. = \frac{0.35}{T_{ro}} \quad \text{т.е.} \quad T_{ro} = \frac{0.35}{B.W.} = 1.4 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$T_{rd} = \sqrt{(T_{rs})^2 + (T_{ro})^2}$$

$$20 \times 10^{-9} = \sqrt{(T_{rs})^2 + (1.4 \times 10^{-8})^2}$$

$$T_{rs} = 1.428 \times 10^{-8} \text{ s} = 14.28 \text{ ns}$$

## Користена литература

A. K. Theraja, & S. G. Tarnekar. (1999). *Electrical technology*.

Khurana, R. (2015). *Electronic instrumentation and measurement*. New Delhi: VIKAS® PUBLISHING HOUSE PVT LTD.

Morris, A. S. (2001). *Measurement & instrumentation principles*. London: Reed Educational and Professional Publishing Ltd.

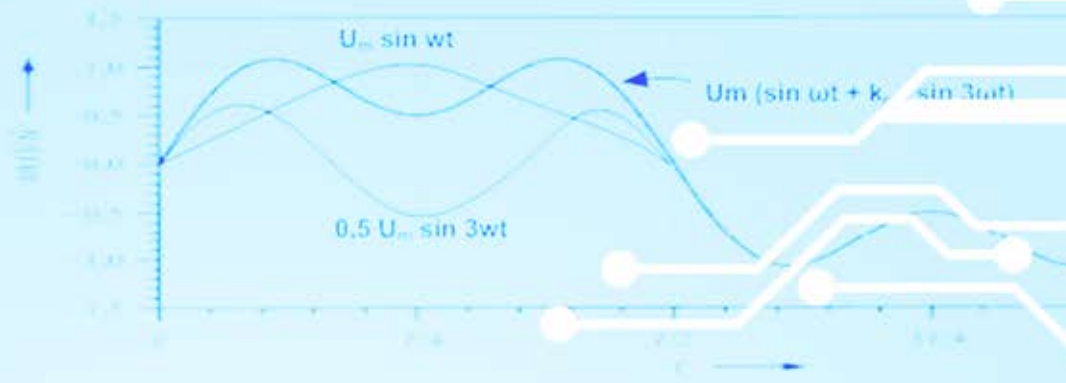
Northrop, R. B. (2014). *Introduction to instrumentation and measurements*.

Purkait, P., Biswas, B., Das, S., & Chiranjib Koley. (2013). *Electrical and Electronics Measurements and Instruments*. New Delhi: McGraw Hill Education (India).

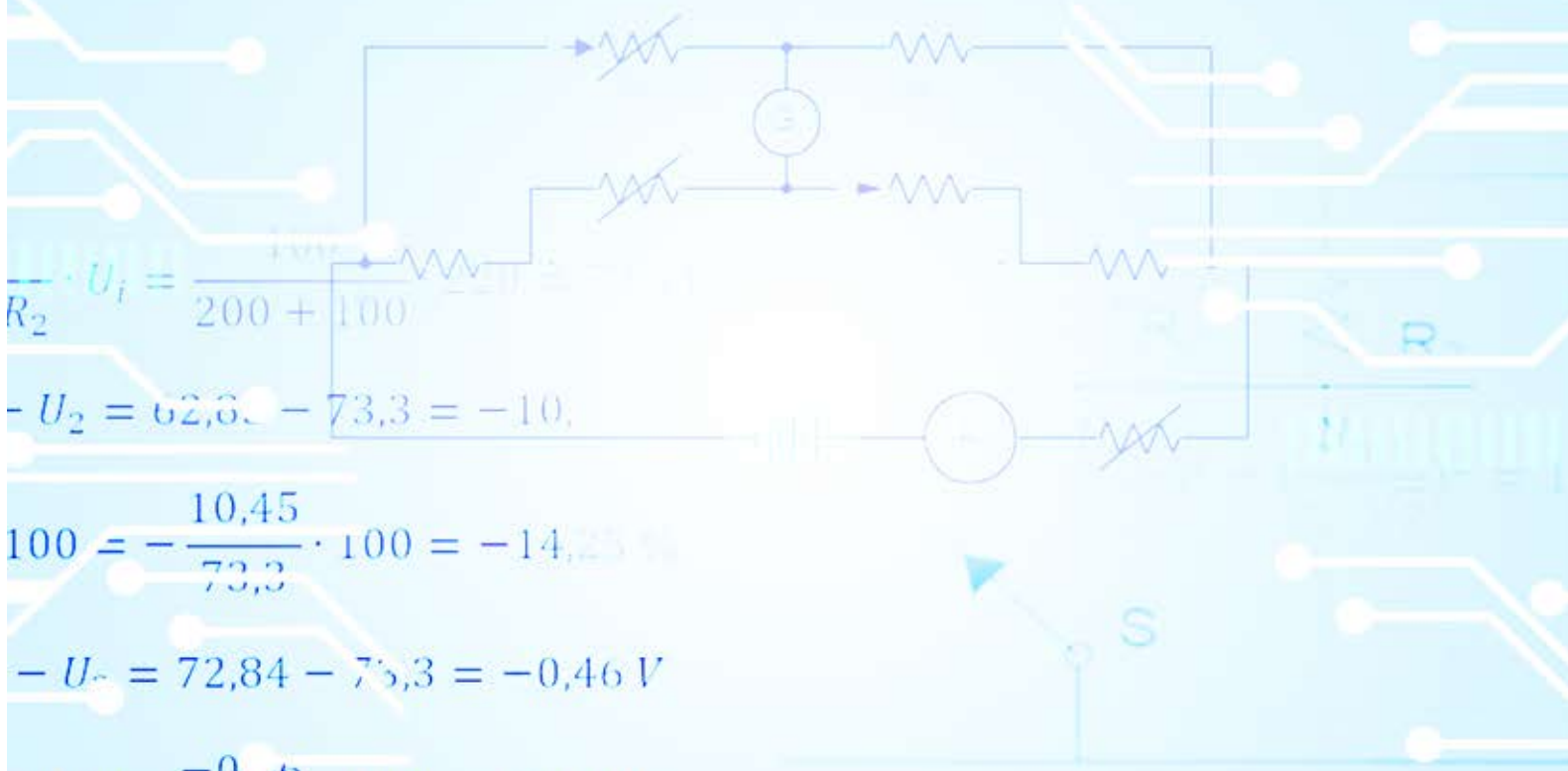
Sawhney, A. K. (1973). *A course in electrical and electronic measurements and instrumentation*. Delhi: Educational and technical publishers.

Sedha, R. S. (2013). *Electronic measurements and instrumentation*. Singapore: S. Chand & Company Pvt. Ltd.

U. A. Bakshi, A. V. Bakshi, & K. A. Bakshi. (n.d.). *Electrical measurements*. Pune: Technical Publications Pune.



$$U_{eff} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U^2(t) dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16 \cdot U_m^2}{T^2} t^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left( 2 \cdot U_m - \frac{4 \cdot U_m}{T} t \right)^2 dt \right]}$$



$$U_i = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot U_1 = \frac{200}{200 + 100} \cdot 100 = 66,7 \text{ V}$$

$$U_2 = 62,8 - 73,3 = -10,5 \text{ V}$$

$$\% = \frac{10,45}{73,3} \cdot 100 = -14,25 \%$$

$$U_3 = 72,84 - 73,3 = -0,46 \text{ V}$$

$$\% = \frac{-0,46}{73,3} \cdot 100 = -0,62 \%$$



$$R_{sh} = \frac{I_m \cdot R_m}{I - I_m}$$

