Aufgabe 1361 (Die einfache dritte Aufgabe): Die zehn Dominosteine mit den Augenzahlen 00, 01, 02, 03, 11, 12, 13, 22, 23, 33 sind als 10×2-Rechteck so auszulegen, dass die Augensummen in den beiden Zeilen gleich sind, weitere Regeln gibt es nicht. In den folgenden drei Fällen ist jeweils die Anzahl möglicher „Augenbilder" anzugeben.

a) Die Steine werden horizontal ausgelegt.

b) Die Steine werden vertikal ausgelegt.

c) Die Steine mit gleichen Augenzahlen werden vertikal, die anderen Steine horizontal ausgelegt.

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2016

Aufgabe 1347. Man berechne

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} J(n),$$

dabei ist $J(n) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}$.

Jürgen Spilker, Freiburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 11 Leser haben Lösungen eingesandt: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Ulrich Keller (Hinwil, CH), Martin Lukarevski (Skopje, MK), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die eingereichten Lösungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden. Entweder wird mit bekannten Identitäten der Riemannschen Zetafunktion operiert oder die Summe wird durch eine Potenzreihe hergeleitet. Wir folgen den Ausführungen von *Henri Carnal*, der mit der zweiten Methode arbeitet.

Sei

$$a_n = (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)} = (-1)^n \left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \quad (0 \le x \le 1).$$

Es ist $a_1 = 0$, also kann man auch ab $n = 1$ summieren und erhält

$$f(x) = \tfrac{2}{x}(\ln(1+x) - x) + \ln(1+x) = \left(\tfrac{2}{x} + 1\right) \ln(1+x) - 2, \tag{1}$$

wobei man $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\ln(1+x)$ benutzt hat.

Wegen $J(n) = \sum_{m \ge 1} m^{-n}$ ist die betrachtete Summe nach Umstellung der Summationsreihenfolge $S = \sum_{m \ge 1} f(\frac{1}{m})$. Aus (1) berechnet man

$$f\left(\tfrac{1}{m}\right) = (2m+1) \ln\left(1 + \tfrac{1}{m}\right) - 2 = (2m+1)\big(\ln(m+1) - \ln(m)\big) - 2,$$