

# МАТЕМАТИКА

$$k_3 = hf \left( x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{k_2^{(i-1)}}{2} \right)$$

$$b_i = \frac{\left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}$$

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \frac{a_{ii} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x)$$

$$k_2 = \sqrt{(y_n + 0.5\tau k_1)^2 + (t_n + 0.5\tau)^2}$$





УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ ВО ШТИП  
Татјана Атанасова – Пачемска; Лимонка Лазарова

## **МАТЕМАТИКА**

Штип, 2013

**Автори:**

**Проф. д-р** Татјана Атанасова – Пачемска, вонреден професор

**М-р** Лимонка Лазарова

**МАТЕМАТИКА**

**Рецензенти:**

**Проф. д-р** Никита Шекутковски, редовен професор на ПМФ, УКИМ - Скопје

**Проф. д-р** Трајче Мицески, редовен професор на Економскиот факултет, УГД

**Лектор:**

Весна Ристова, дипл. проф. по македонски јазик

**Техничко уредување и корица:**

Влатко Атанасов, дипл. инг.

**Издавач:**

Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип

CIP - Каталогизација во публикација  
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51-77:33(075.8)

АТАНАСОВА-Пачемска, Татјана  
Математика [Електронски извор] / Татјана Атанасова-Пачемска,  
Лимонка Лазарова. - Текст. - Штип : Универзитет "Гоце Делчев",  
Факултет за информатика, 2013

Начин на пристап (URL): <http://www.ugd.edu.mk>. - Наслов превземен  
од екранот. - Опис на изворот на ден 02.12.2013. - Библиографија:  
стр. 261. - Содржи и: Додаток

ISBN 978-608-4708-65-0

1. Лазарова, Лимонка [автор]. - I. Пачемска, Татјана Атанасова-  
види Атанасова-Пачемска, Татјана  
а) Математика, применета - Економија - Високошколски учебници  
COBISS.MK-ID 95113482

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



Проф. д-р Татјана Атанасова – Пачемска

М-р Лимонка Лазарова

(

**МАТЕМАТИКА**

Штип, 2013

## ПРЕДГОВОР

Учебникот „Математика“ е напишан според наставната програма по предметот Математика 1 кој се изучува во прва година, прв семестар, на сите студиски програми на Економскиот факултет при Универзитетот „Гоце Делчев“-Штип.

Во учебникот се обработени основните теории и концепти на современата математичка наука кои се неопходни во оформувањето на профилот дипломиран економист. Од теориски и практичен аспект, обработени се елементи од теоријата на множества, реалните броеви, низите и бројните редови – со посебен осврт на аритметичката и геометриската прогресија како најупотребувани низи во економската теорија и практика, реалните функции со една реална променлива. Понатаму, дадени се основите на диференцијалното и интегралното сметање, дефинирани се функциите со повеќе променливи, но и посебно обликуван наставен материјал од економската анализа каде што се обработени основните економски поими и функции со помош на математичките методи на диференцијалното и интегралното сметање и својствата на реалните функции со една или повеќе променливи. Овој дел од учебникот е многу специфичен и многу малку е обработен во учебниците по математика, што на овој учебник му дава посебна одлика. На крајот од учебникот е даден додаток во кој дополнително се обработени основите на матричното сметање и примена.

Посебно внимание е обратено на обработката на реалните функции каде секој математички поим е поврзан со соодветен поим во економската теорија и практика, што на студентите ќе им ја приближи примената на математичките методи и инструменти во толкувањето на резултатите добиени од економските анализи и истражувања.

Учебникот содржи доволен број на решени примери кои на студентите ќе им помогнат во совладувањето на методите и техниките за решавање на математички проблеми во економски контекст. Примерите се поткрепени со графички прикази, најчесто нацртани во програмот MATHEMATICA 7 или COREL DRAW X4 . Учебникот содржи и задачи кои се делумно или целосно нерешени и тие се наменети за самостојна работа на студентите со цел постигнување на поголема ефикасност и ефективност во совладувањето на наставниот материјал.

За оформувањето на овој учебник посебна заслуга имаат и рецензентите проф. д-р Никита Шекутковски, редовен професор на Природно-математичкиот факултет при Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ – Скопје и проф. д-р. Трајче Мицески, редовен професор на Економскиот факултет при Универзитетот „Гоце Делчев“ – Штип, кои со своите сугестии и забелешки придонесоа во подобрувањето на квалитетот на ракописот, за што им искажуваме посебна благодарност.

Се надеваме дека учебникот ќе го користат студентите од Економскиот факултет, но и останатите студенти кои го изучуваат предметот математика во други студиски програми особено од техничките факултети.

Од авторите

## СОДРЖИНА

<b>Елементи од теорија на множеста и реални броеви</b> .....	<b>3</b>
Поим за множество. Операции со множества .....	3
Релации во исто множество .....	5
Пресликувања .....	8
Бројни множества. Множество на природни броеви .....	11
Множеството на цели броеви .....	14
Множеството на реални броеви .....	17
Апсолутна вредност на реален број .....	21
Интервали, отворени и затворени подмножества од $R$ .....	25
Приближни броеви .....	26
<b>Реална низа: дефиниција и основни поими</b> .....	<b>37</b>
Особини на конвергентните низи .....	43
Нула низи ( бескрајно мали низи) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .....	45
Бесконечни лимеси .....	46
Аритметичка прогресија .....	51
Геометриска прогресија .....	53
Бројни редови. Геометриски ред. Конвергенција .....	58
Критериуми на конвергенција на броен ред со позитивни членови: .....	60
<b>Реална функција со една променлива</b> .....	<b>65</b>
Поим за функција. Множество на вредности. Инверзна функција.....	65
Нули на функцијата .....	71
Парност и непарност на функција.....	73
Монотоност, ограниченост, екстремни вредности и периодичност на функција.	
Сложена функција .....	78
Елементарни функции со една реална променлива .....	86
Примена на елементарните функции во економијата. Добивка.	
Трошоци. Точка на рентабилност .....	96
Гранична вредност на функција.....	102
Врска меѓу гранични вредности на низи и функции.....	104
Посебни случаи на гранична вредност на функција (асимптоти) .....	109
Непрекинатост на функција. Својства на непрекинатите функции. ....	115
Точки на прекин и нивна класификација .....	118
<b>Диференцијално сметање</b> .....	<b>123</b>
Поим за извод на функција од една реална променлива. Геометриско и физичко	
толкување на изводот .....	123
Пресметување на извод на функција .....	126
Растење и опаѓање на реална функција. Локални екстреми.....	130
Привидно неопределени изрази ( Правило на Лопитал) .....	136
Изводи од повисок ред.....	138
Конвексност, конкавност, превој на функција .....	140
Поимот извод на функција во економијата .....	150
<b>Интегрално сметање</b> .....	<b>155</b>
Неопределен интеграл. Својства на неопределен интеграл.	
Методи на интеграција.....	155
Определен интеграл .....	162
Постапка за пресметување на определен интеграл (теорема на Њутн-Лајбниц) ...	166
Примена на интегралот во економијата .....	169

<b>Функции од две променливи.....</b>	<b>175</b>
Парцијални изводи на функција со две променливи.....	180
Парцијални изводи од втор и повисок ред.....	182
Локален екстрем на функција со две променливи .....	183
Конструкција на емпириски формули по методот на најмали квадрати.....	190
<b>Примена на реалните функции во економската теорија и практика .....</b>	<b>199</b>
Функција на побарувачка .....	199
Функција на понуда.....	202
Еластичност на понуда и побарувачка.....	207
Функција на вкупен приход.....	219
Функција на граничен приход.....	224
Функција на трошоци.....	227
Функција на добивка.....	234
<b>Детерминанти и матрици (Додаток) .....</b>	<b>241</b>
Детерминанти.....	241
Матрици .....	246

## Библиографија

1. Apostol M. T., *Calculus, One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc, USA, 1967
2. Crnjac M., Jukic D., Scitovski R., *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994
3. Fuente de la A., (2000) *Mathematical Methods and Models for Economists*, New York: Cambridge University Press
4. Joksimovic D., *Zbirka zadataka iz poslovne matematike*, Megatrend univerzitet primenjenih nauka, Beograd, 2003.
5. Karris S., (2007) *Mathematics for Business, Science and Technology*, Fremont: Orchard Publications
6. Kenneth R. H., (2007) *Discrete Mathematics and Its Applications*, New York: Mc Graw Hil
7. Kolarec B., *Uvod u poslovnu matematiku*, Zagreb, 2006
8. Kwok Yue K., (2008) *Mathematical Models for Financial Derivatives*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag
9. Merkle, M. (2006) *Matematička analiza – teorija, primeri, zadaci*, Beograd: Racunarski fakultet
10. Milovanovic V. G., Dordevic Z. R., *Matematička analiza I*, Нис, 2005
11. Smajlovic L., *Matematika za ekonomiste*, Ekonomski Fakultet, Sarajevo, 2010
12. Stojanovic D., (1968) *Matematičke metode u ekonomiji preduzeca*, Beograd, Rad
13. Pemberton M., Rau N., *Mathematics for economists, An introductory textbook*, London, 2001
14. Малчески Р., Малческа В., *Математика 2*, ФОН, Скопје, 2010
15. Малчески Р., Малчески С., (2010) *Математика за бизнис*, Скопје: ФОН – Универзитет
16. Мирчески Б., *Примери и задачи по математика за економисти*, Прилеп, 1996
17. Митевска Ј., Јорданова Ц. В., Маркоски Ѓ., *Математика*, Алфа-94, Скопје, 2006
18. Митевска Ј., Целакоска-Јорданова В., Маркоски Ѓ., (2006) *Математика*, Скопје: УКИМ-ФЗНХ
19. Томовски Ж., *Математика 2*, Просветно дело, Скопје, 2008
20. Тунески Н., Тунеска Ј. Б., *Интегрално сметање*, Скопје, 2011
21. Чианг Ц. А., Вејнрајт К., (2010) *Основни методи во економската математика*, Скопје: Табернакул
22. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н., *Предавања по виша математика*, книга 2, УКИМ, Скопје, 1984
23. Целакоски Н., *Задачи по линеарна алгебра*, Просветно дело, Скопје, 1996
24. Шекутковски Н., (2008), *Математичка анализа*, Скопје: Просветно дело