Факултет за електротехника и
информациски технологии

Јасмина Буралиева

Фуриеова трансформација, STFT и Вејвлет трансформација

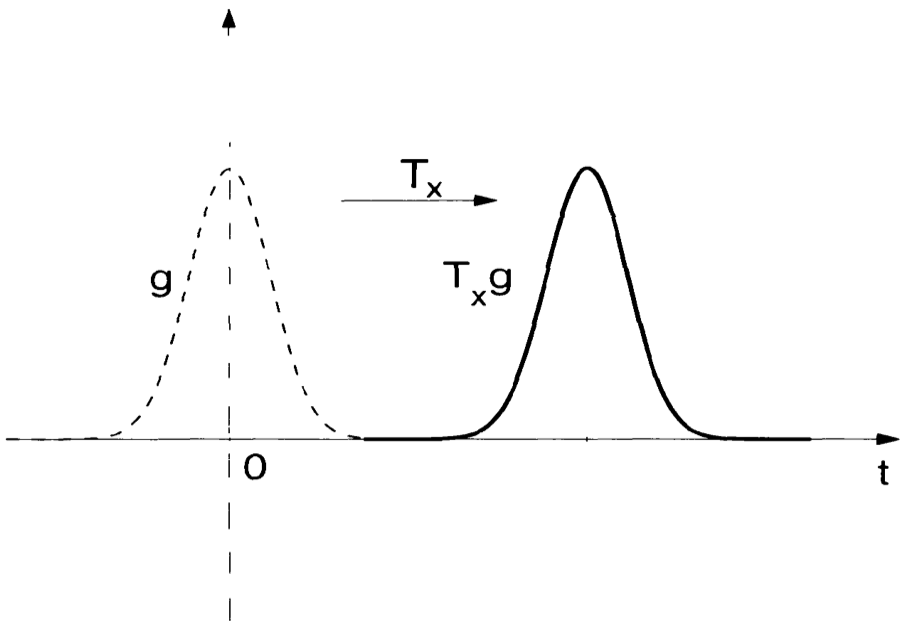
Банско, јуни 2011

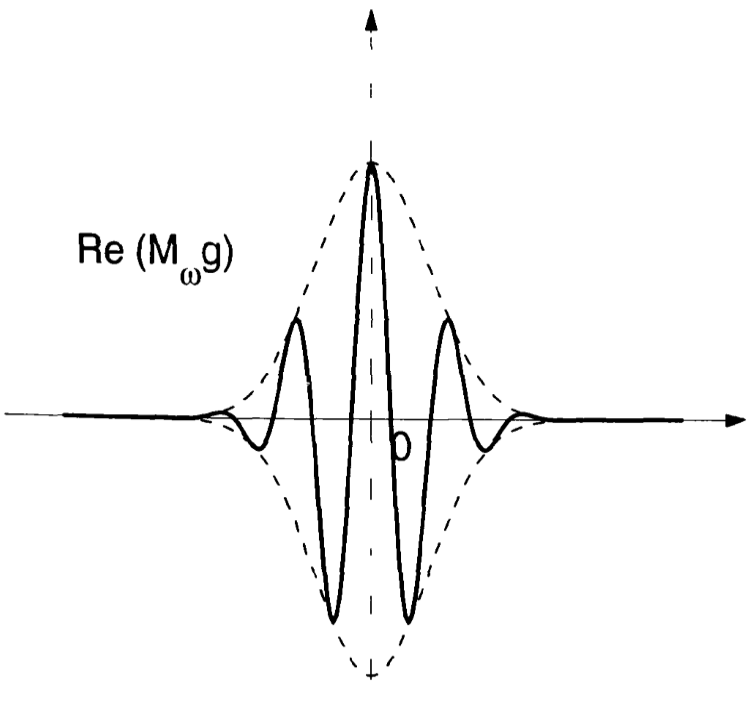
Содржина

- Дефиниција на Фуриеова трансформација, STFT и вејвлет трансформација
- Фуриеова трансформација наспроти STFT
- STFT наспроти вејвлет трансформацијата
- Споредба на
    - Парсевалови формули кај ФТ, STFT и ВТ
    - Инверзни формули кај ФТ, STFT и ВТ

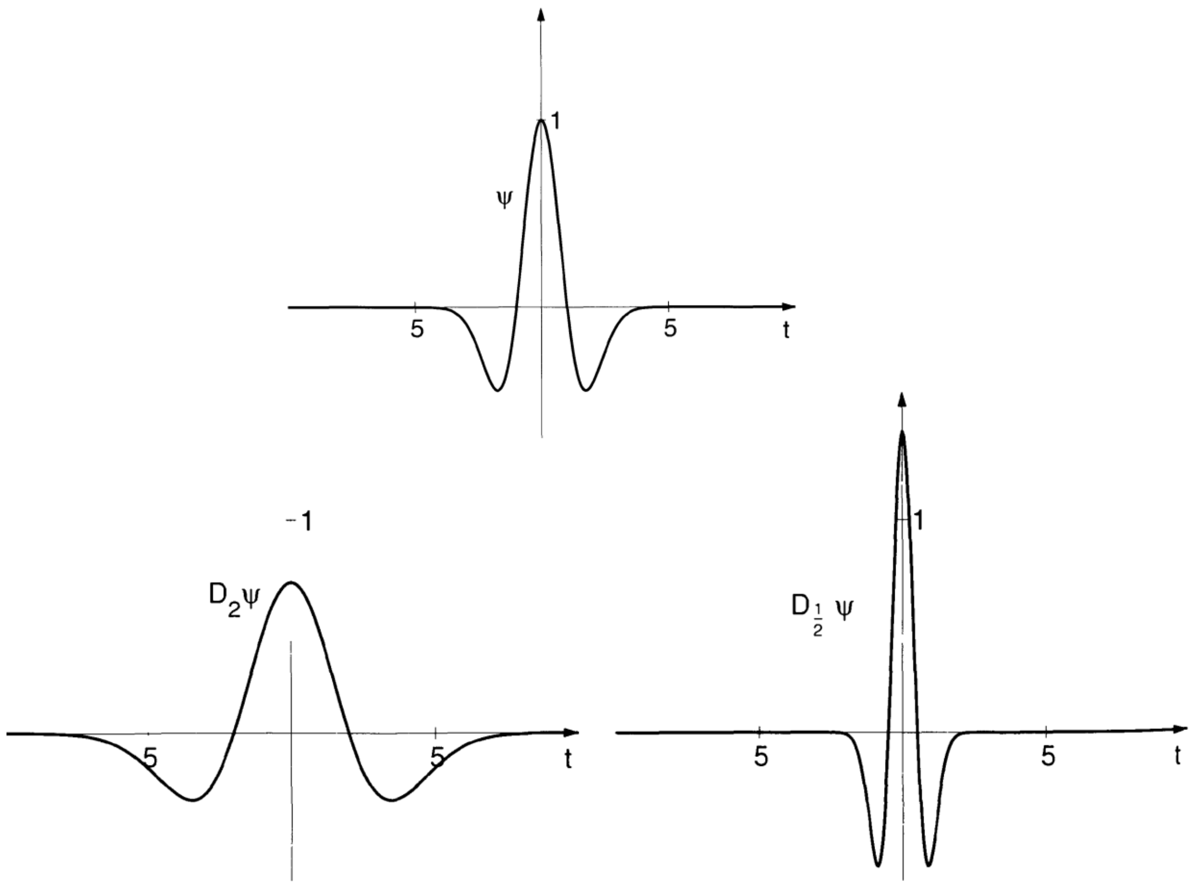
Основни операции

- Транслација: $x \in R$ $\quad T_x g(t) = g(t-x)$
- Модулација: $\omega \in R$ $\quad M_\omega g(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} g(t)$





- Дилатација: $D_a f(x) = |a|^{-1/2} f(a^{-1}x)$, за $a \in R,\ a \neq 0$.



дилатација за фактор 2 дилатација за фактор 1/2

Дефиниција на Фуриеова трансформација, STFT и вејвлет трансформација

- **Фуриеова трансформација (ФТ)** на $f \in L^1(R^d)$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{R^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\omega} dx = < f(x), e^{2\pi i x\cdot\omega} >.$$

$\mathcal{F}: L^2(R^d) \to L^2(R^d)$ со апроксимација

- **Short-time Фуриеова транформација (STFT)** на f во однос на функцијата $g \neq 0$, $f, g \in L^2(R^d)$

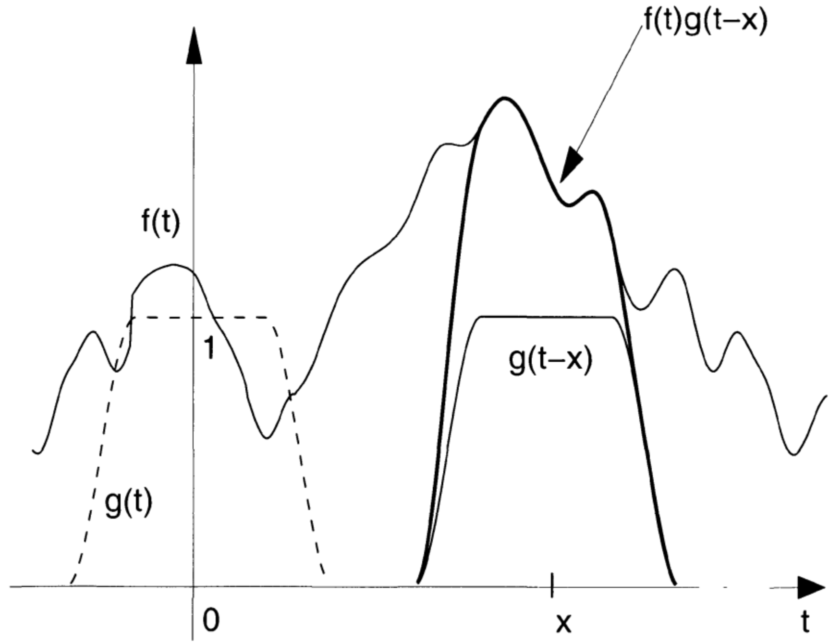
$$V_g f(x,\omega) = \int_{R^d} f(t)\, \overline{g(t-x)} e^{-2\pi\, it\cdot\omega} dt = < f, M_\omega T_x g >$$

g - прозорец.

- **Вејвлет трансформација (ВТ) на** $f \in L^2(R)$ во однос на вејвлет $\psi \in L^2(R^d)$ е

$$W_\psi f(a,b) = |a|^{-1/2} \int_R f(t)\, \overline{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = < f, T_b D_a \psi >$$

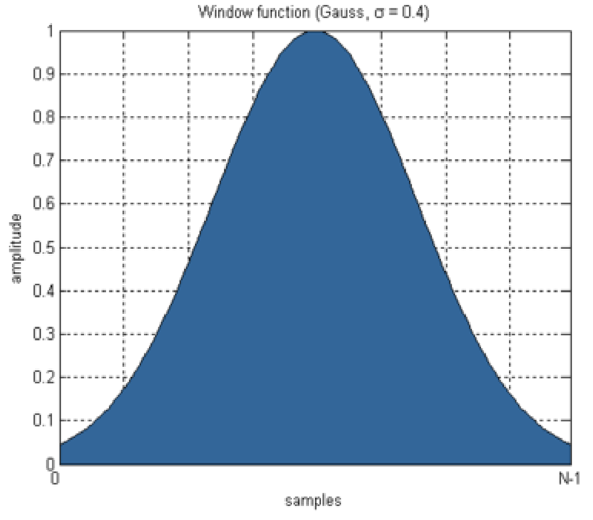
$a \in R \setminus \{0\},\ b \in R$.

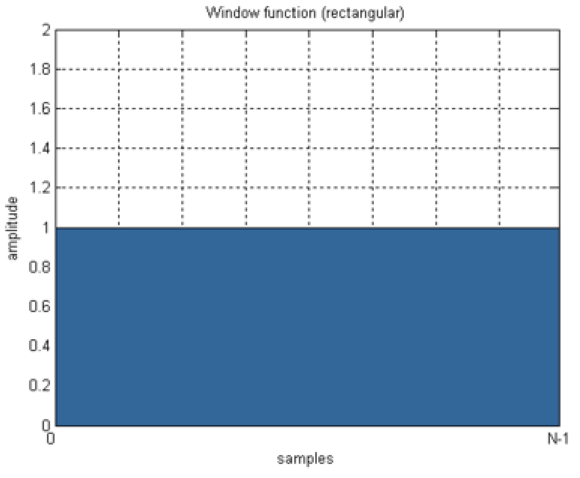


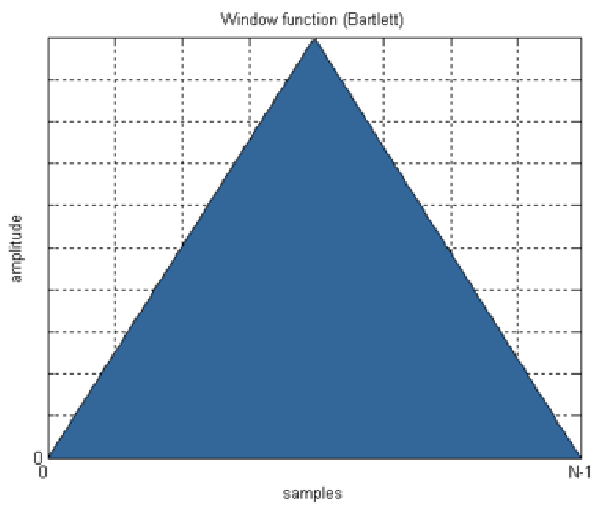
STFT како лизгачка прозорец Фуриеова трансформација

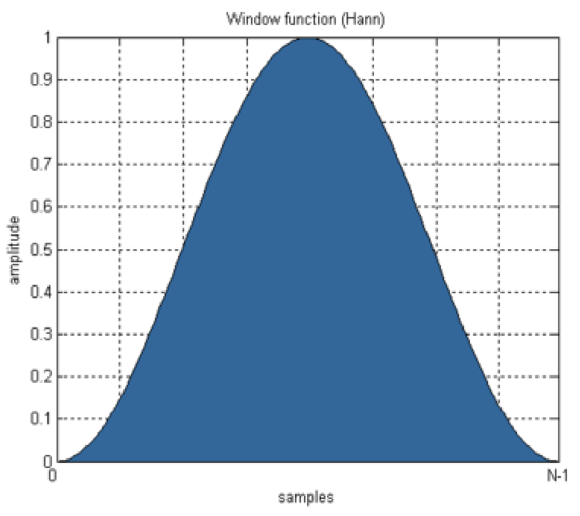
Функција-прозорец за STFT

- функција со компактен носач









Вејвлет

Деф. Функцијата $\psi \in L^2(R)$ се нарекува **вејвлет** ако $\int_R \psi(t)dt = 0$.

➢ $c_\psi = 2\pi \int_R \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$-вејвлет услов на допустливост за $\psi \in L^2(R) \cap L^1(R)$

- Нека φ е ненулта n –пати ($n \geq 1$) дифренцијабилна функција,$\varphi^{(n)} \in L^2(R)$. Тогаш $\psi(x) = \varphi^{(n)}(x)$ е вејвлет.
- Нека ψ е вејвлет и φ е ограничена интеграбилна функција, тогаш конволуцијата $\psi * \varphi$ е вејвлет.
- Нека $0 \neq \psi \in L^2(R) \cap L^1(R)$ и важи $\int_R \psi(t)dt = 0$ и $\int_R |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$ за $\beta > 1/2$. Тогаш ψ е вејвлет.
- За секој ненулти елемент $\psi \in L^2(R)$ со компактен носач, следниве тврдења се еквивалентни:

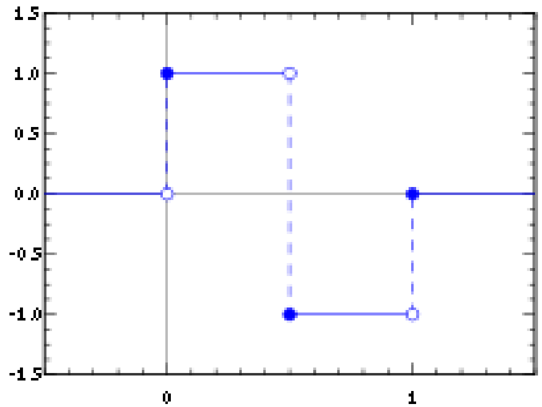
а) функцијата е вејвлет,

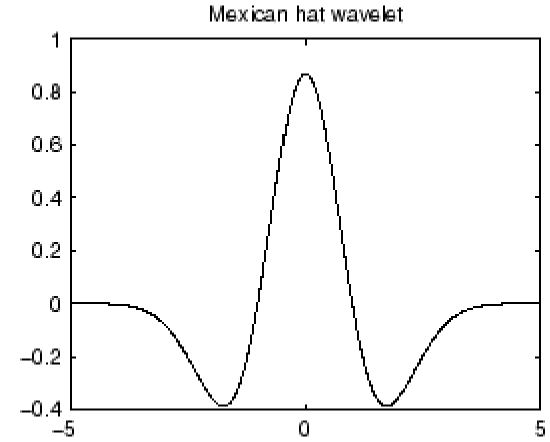
б) важи вејвлет условот на допустливост за ψ .

Примери на вејвлети

- **Хар вејвлет**

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 0, & x<0 \text{ или } x>1\end{cases}$$

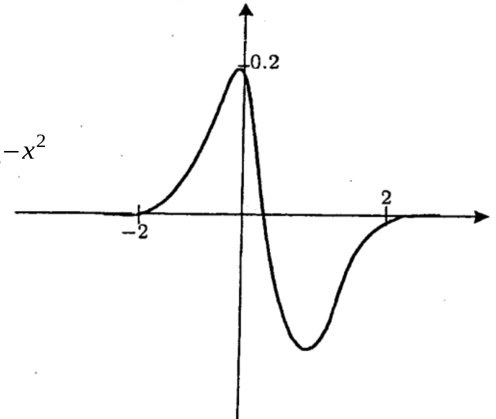




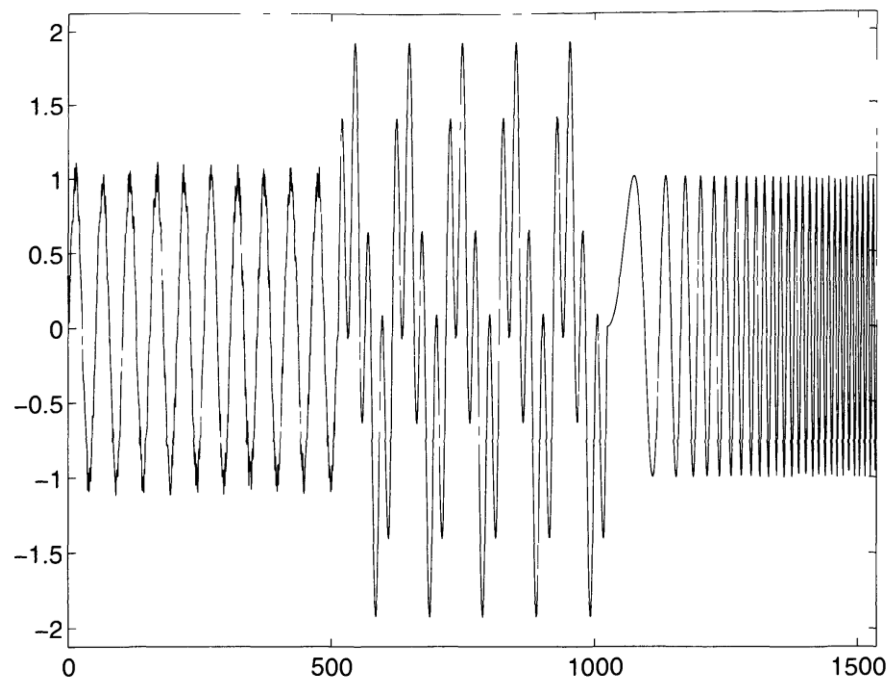
- **Вејвлет-мексиканска капа**

$$\psi(x)=\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow \psi(x)=-\frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

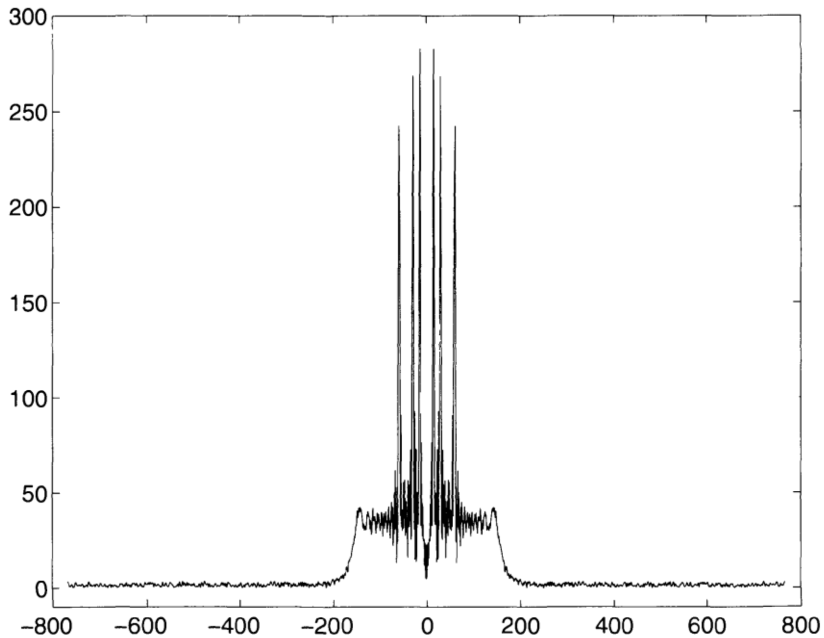
- **Конволуција на Хар вејвлетот со функцијата** $\varphi(x)=e^{-x^2}$



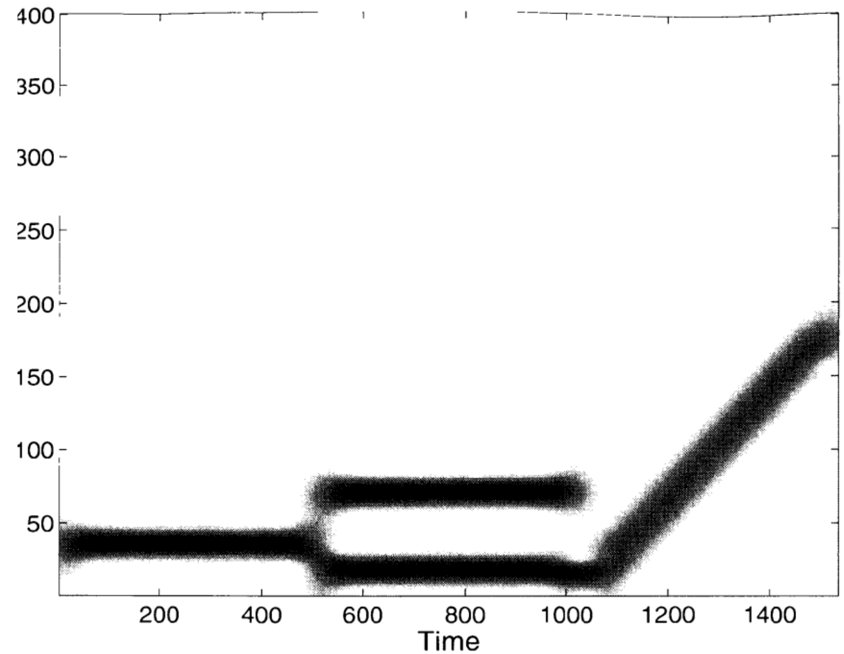
Фуриеова трансформација наспроти STFT



Мулти-компонентен сигнал



Фуриеова трансформација



STFT

STFT

- две променливи (x, ω)
- амплитуда на фреквенцијата ω во време x
- $\operatorname{supp} g \subseteq E$ ➡ $\operatorname{supp} M_{\omega} T_x g \subseteq E + x$

Фуриеова трансформација

- една променлива (ω)
- амплитуда на фреквенцијата ω
- нема

STFT наспроти вејвлет трансформацијата

STFT

- време и фреквенција
- транслација и модулација
- $\mathrm{supp}\, g \subseteq E$ ➡ $\mathrm{supp}\, M_\omega T_x g \subseteq E + x$
- нема таква карактеристика

- експлицитна временско-фреквенциска репрезентација

Вејвлет трансформација

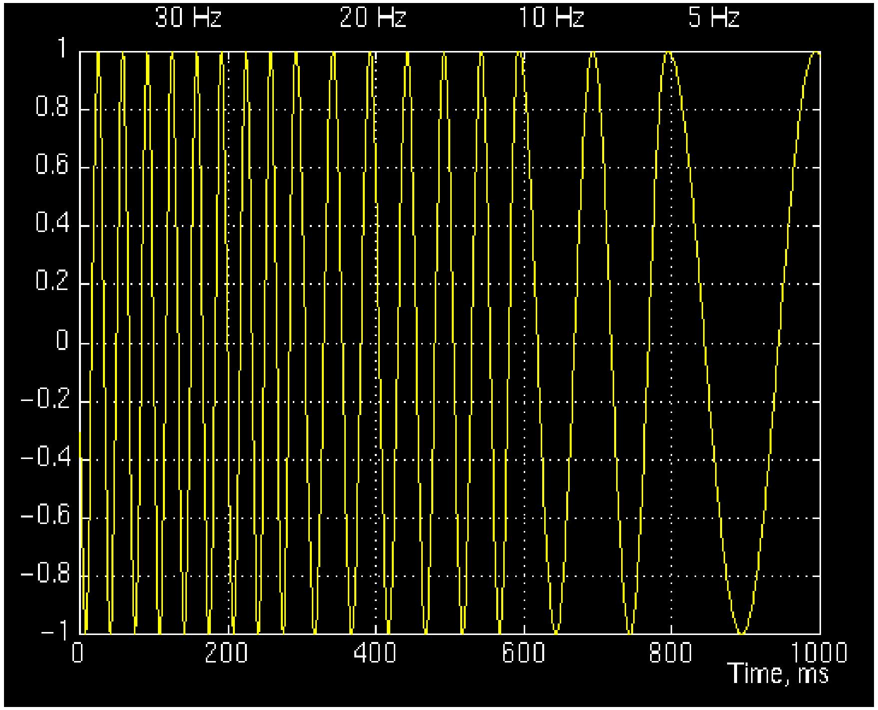
- време и скала
- транслација и дилатација
- $\mathrm{supp}\, \psi \subseteq E$ ➡ $\mathrm{supp}\, T_b D_a \psi \subseteq b + aE$
- за фиксно b и $a \to 0$ ➡ $W_\psi f(\cdot, b)$ зумира во b.

- не е експлицитна временско-фреквенциска репрезентација, но сепак дава фреквенциска локализација

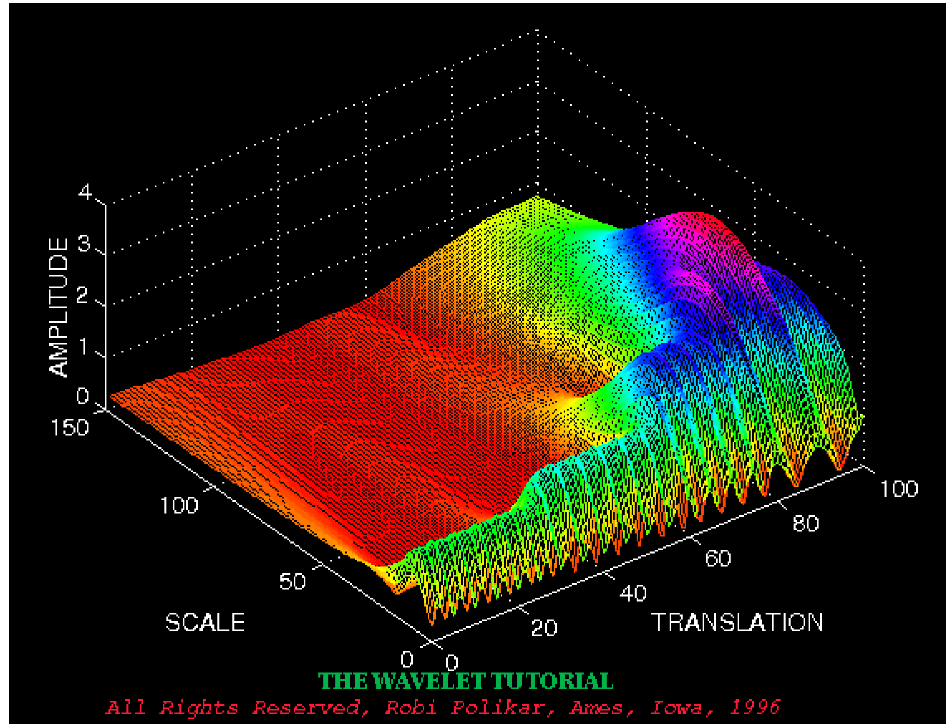
$$W_\psi f(b,a) = < \hat{f}, M_{-b} D_{1/a} \hat{\psi} >$$

$$\mathrm{supp}\, \hat{\psi} \subseteq \Omega \Rightarrow \frac{1}{a}\Omega = \mathrm{supp}\, D_{1/a} \hat{\psi}$$

Вејвлет трансформација



Сигнал од 4 фреквенции



Вејвлет трансформација на сигналот

Парсевалови формули кај ФТ, STFT и ВТ

- $< f, g > = < \hat{f}, \hat{g} >$ за секое $f, g \in L^2(R^d)$.

- Ако $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(R^d)$ тогаш $V_{g_j} f_j \in L^2(R^{2d})$ за $j = 1,2$ и важи

$$< V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 >_{L^2(R^{2d})} = < f_1, f_2 > \overline{< g_1, g_2 >}$$

- Нека $\psi \in L^2(R)$ го задоволува вејвлет условот на допустливост. Тогаш за било кои $f, g \in L^2(R)$ важи следната формула:

$$< f, g > = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f\,(a,b)\, \overline{W_\psi g}\,(a,b) \frac{dbda}{a^2} = \frac{1}{c_\psi} < W_\psi f, W_\psi g >$$

Инверзни формули кај ФТ, STFT и ВТ

- Ако $f \in L^1(R^d)$ и $\hat{f} \in L^1(R^d)$ тогаш $f(x) = \int_{R^d} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \cdot \omega} d\omega$ за секое $x \in R^d$.
- Претпоставуваме дека $g, \gamma \in L^2(R^d)$ и $< g, \gamma > \neq 0$. Тогаш за $\forall f \in L^2(R^d)$ важи

$$f = \frac{1}{< \gamma, g >} \iint_{R^{2d}} V_g f(x, \omega) M_\omega T_x \gamma \, d\omega dx \qquad (1)$$

- Нека $\psi \in L^2(R)$ го задоволува вејвлет условот на допустливост.

Тогаш, за секоја функција $f \in L^2(R)$ важи

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi f(a, b) |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2} \qquad (2)$$