

原著論文

電界強度を規範としたhアダプティブ有限要素生成法

h-Adaptive Mesh Generation using Electric Field Intensity Value as a Criterion

非 豊永 喜代美 (広島大学) 非 Vlatko CINGOSKI (広島大学)
 非 金田 和文 (広島大学) 正 山下 英生 (広島大学)
 Kiyomi TOYONAGA, Hiroshima University,
 1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Japan
 Vlatko CINGOSKI, Hiroshima University
 Kazufumi KANEDA, Hiroshima University
 Hideo YAMASHITA, Hiroshima University

Fine mesh divisions are essential to obtain accurate solution of two dimensional electric field analysis. It requires the technical knowledge to generate a suitable fine mesh divisions. In electric field problem, analysts are usually interested in the electric field intensity and its distribution. In order to obtain electric field intensity with high-accuracy, we have developed an adaptive mesh generator using electric field intensity value as a criterion.

Key Words : Finite Element Method, Adaptive Mesh Generation, Electric Field Analysis

1. まえがき

有限要素解析において、なるべく少ない計算コストで解の精度を維持するためには、要素分布に最適な粗密を与える必要がある。この分割のノウハウは、解析者の経験と勘に頼っているのが通常である。この問題を解決するのが、解の精度を自動的に維持させるアダプティブ法である。この手法を用いることにより、初心者でも精度の補償された解析結果を得ることができる。アダプティブ法には、誤差の大きい領域の要素を小さな要素に再分割するもの (h法) と、内挿関数の次数を変化させるもの (p法) がある。p法には、再分割する必要がないという利点があるが、異なる次数に対する内挿関数のプログラムを用意しなければならない。一方、h法は再分割が必要ではあるが、1つの内挿関数についてのプログラムを用意しておけばよい。

このh法には、既にいくつかの方法が提案されており、例えば、各要素のエネルギー変化が均一になるように節点を追加、削除するもの[1]や、エネルギー関数が最小になるように節点の追加、辺の削除やswapを行うもの[2]などがある。

ところで、電界解析を行う場合にも、上述の規範に基づくアダプティブ法を適用することができる。しかし、通常、解析者の興味は、電位分布ではなく、電界強度の大きさとその分布である。このことから、高精度の結果を期待する物理量を、アダプティブの規範に直接用いるのが有効と考える。本論文では、電界強度の精度を維持するために、要素の再分割およびその形状修正の規範に電界強度を直接用いる要素生成法を開

発し、良好な結果が得られたので報告する。なお、ここでは、電位を未知変数として2次三角形要素を用いる、2次元有限要素法について検討した。

2. 提案アルゴリズムの概要

提案するhアダプティブ法のアルゴリズムの概略を Fig. 1 に示す。

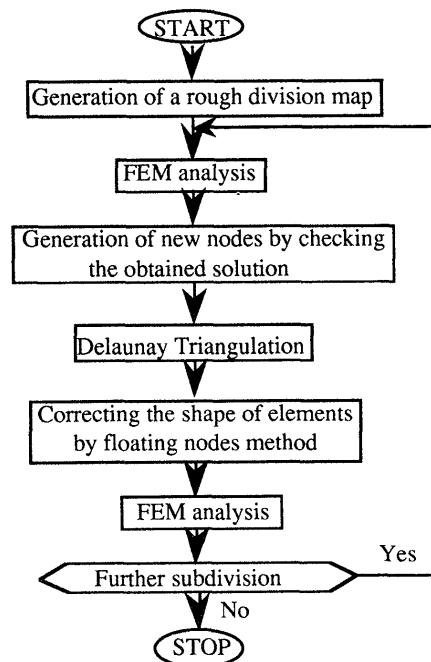


Fig. 1. Processing flow

まず初めに解析領域を粗分割し、電界解析を行う。その後、この解析結果に基づき、電界強度の高い要素に節点を発生させる。これらの節点群を用いて、一般によく使用されているDelaunayの方法により三角形を構

成する。しかし、この方法により構成される三角形形状は、必ずしも正三角形に近い形状になるとは限らない。これは、節点群の位置が固定されているからである。この形状修正を行うために、通常、ラプラス法 [3] が用いられる。これは、節点の位置を、その節点に隣接する節点から構成される多角形の重心に置く方法であり、これにより正三角形に近い要素形状が得られる。しかし、本論文の手法では、節点の位置を、その周囲に存在する節点の電界強度を重みとして決定する。すなわち、電界強度密度が解析領域全般にわたって、ほぼ等しくなるように節点位置を移動させる。以下に、節点発生法および要素形状修正法について詳述する。

3. 節点の発生法

各要素の電界強度密度を等しくするために、最初に与えられた粗分割による電界解析結果から、電界強度の高い要素内に数点の節点を発生させる。このとき、どの要素のどの位置に節点を発生させるかが問題となるが、ここでは、三角形要素の各辺に対して、その両端点の電位差をその辺の長さで除した値 E_{ei} (要素 e の辺 i に沿った電界強度) を用いる。 E_{ei} ($i=1\sim 3$) の最大値 E_{emax} と、あらかじめ与えられた3種のしきい値 E_{oj} ($j=1\sim 3, E_{o1} > E_{o2} > E_{o3}$) との大小関係により、以下の方法で節点を発生させる。なお、再分割の反復回数ができるだけ少なくすむように、1つの要素内に複数個の節点を発生させる (ここでは最大3個)。また、粗分割時の要素が、解析領域あるいは物質の境界に接しているときには、境界边上に新たに節点を発生させる必要がある。したがって、境界辺を含む要素とそれ以外の要素とは、別々の節点発生法をとるものとする。

1. 対象となる要素 e が境界辺を含むとき

1) $E_{emax} > E_{o1}$ のとき

次の3つの位置に節点を発生させる (Fig.2)。

- ・境界辺の中点
- ・要素の重心
- ・ E_{ei} ($i=1\sim 3$) のうち、その値が大きな2つの辺が共有する頂点と重心との中点

2) $E_{o1} > E_{emax} > E_{o2}$ のとき

次の2つの位置に節点を発生させる。

- ・境界辺の中点
- ・要素の重心

3) $E_{o2} > E_{emax} > E_{o3}$ のとき

次の位置に節点を発生させる。

- ・境界辺の中点

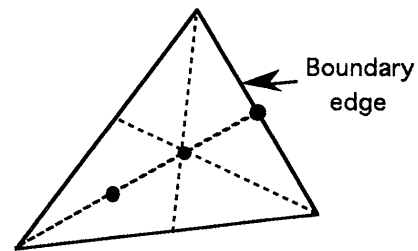


Fig. 2. Position of new nodes (element including boundary edge)

2. 対象とする要素 e が境界辺を含まないとき

1) $E_{emax} > E_{o1}$ のとき

次の3つの位置に節点を発生させる (Fig.3)。

- ・要素の重心と各3頂点との中点
- ##### 2) $E_{o1} > E_{emax} > E_{o2}$ のとき
- 次の2つの位置に節点を発生させる。
- ・要素の重心
 - ・ E_{ei} ($i=1\sim 3$) のうち、その値が大きな2つの辺が共有する頂点と重心との中点

3) $E_{o2} > E_{emax} > E_{o3}$ のとき

次の位置に節点を発生させる。

- ・要素の重心

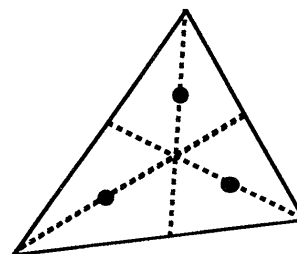


Fig. 3. Position of new nodes (inner element)

なお、しきい値 $E_{o1}\sim E_{o3}$ はユーザが自由に設定可能であるが、暗黙値としては以下のようにしている。

$$E_{o1} = \text{全要素における } E_{emax} \text{ の最大値} \times 3/4$$

$$E_{o2} = \text{全要素における } E_{emax} \text{ の最大値} \times 2/4$$

$$E_{o3} = \text{全要素における } E_{emax} \text{ の最大値} \times 1/4$$

4. 要素生成と節点の移動法

4.1 要素生成法

粗分割の節点と、前節で発生させた節点を用いて要素を生成する。要素形状をできるだけ正三角形に近づけるため、分割方法としては、Delaunayの分割[3]を用いた。しかし、Delaunayの分割を用いても、節点の位置関係によっては偏平な要素が生成されることがあるため、要素形状をより良く

するためには、Delaunayの分割だけでは不十分である。そこで、以下に述べる形状修正法を用いる。

4.2 要素形状修正法 移動対象となる節点は、解析領域や物質の形状を決定する角点および、曲辺上の点を除いた、全ての点である。ただし、解析領域や物質境界を構成する直辺上の節点は、その直辺上を移動可能とする。節点の移動は、対象となる節点を、その電界強度値が、周辺の節点の電界強度値の重心となる位置に移動させる (Fig.4)。すなわち、移動後の節点の座標 (x, y) は次式のようになる。

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n x_i E_i}{\sum_{i=1}^n E_i} \quad (1)$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i E_i}{\sum_{i=1}^n E_i} \quad (2)$$

ここで、n: 対象節点 t に接続している節点数

(x_i, y_i): 周辺節点 i の座標

E_i: 周辺節点 i における電界強度値

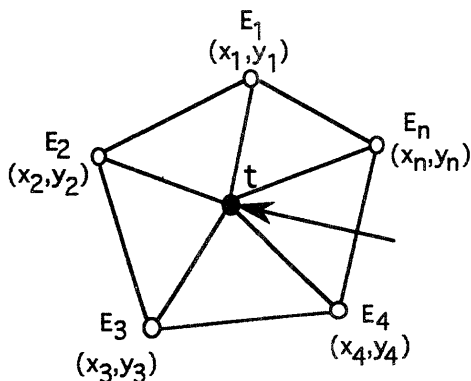


Fig. 4. Floating nodes method

境界の直辺上の節点については、以下の手順により、その座標を決定する。

- 1) x座標を (1) 式によって決定し、これをその節点が属する境界直辺の方程式に代入することにより y座標を決定する。
- 2) y座標を (2) 式によって決定し、これをその節点が属する境界直辺の方程式に代入することにより x座標を決定する。
- 3) 1),2)により求めた座標の平均をとる。

5. 考察

本手法の有用性を検討するために、Fig.5(a)に示す無限同軸円筒コンデンサ (解析領域は1/4領域) を用いた。また、最初に与える粗分割を同図(b)に示す。本手

法による結果をFig.6に示す。ここで、本論文で提案した形状修正法の有用性を示すために、(a)に節点移動前の分割図を、(b)に節点移動後の分割図を示す。Fig.6より、電界強度の大きな円筒の内径側の要素分布密度が高くなり、また、節点移動操作による要素の形状修正も有効に行われていることが判る。

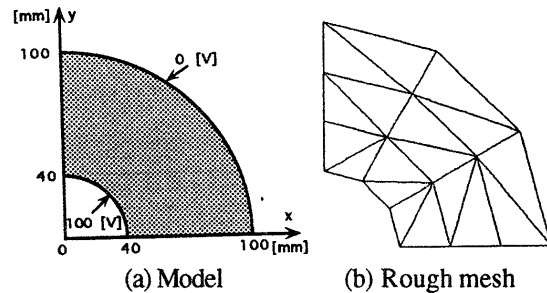
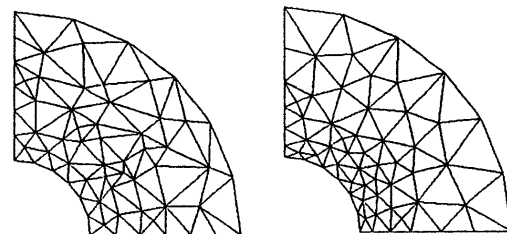
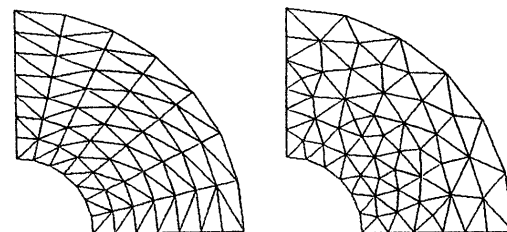


Fig. 5. Analyzed model



(a) After Delaunay triangulation (b) After floating nodes

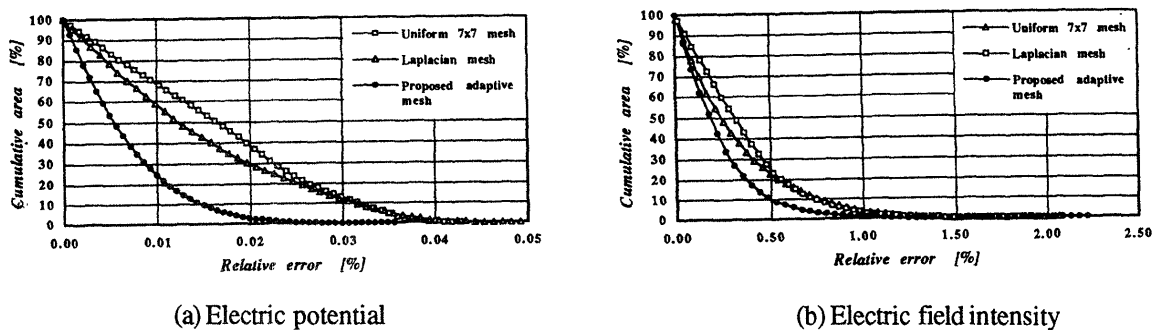
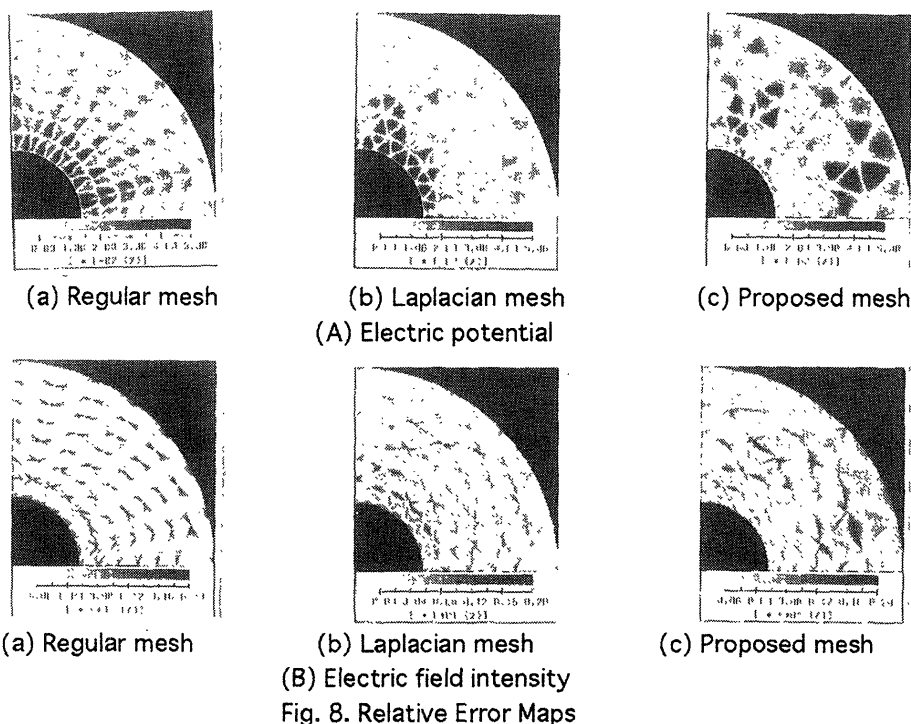
Fig. 6. Division map



(a) Regular mesh (b) Laplacian mesh

Fig. 7. Different division maps

次に、本手法による分割図 (Fig.6.(b)) を用いた有限要素解析結果の精度を確認する。精度比較のため、Fig.6(b)の分割と同程度の節点数、要素数を持つ7 x 7等分割図 (半径方向および回転方向に7分割、Fig.7 (a)) と、また、他の節点移動法との比較のために、ラプラシアン法[3]による節点移動を用いた分割図 (Fig.7 (b)) とを用いた。これら3つの分割による電位・電界誤差分布をFig.8に示す。これより、7 x 7等分割、ラプラシアン法を用いた分割の双方においては円筒の内径側で誤差が大きく、外径側で誤差が小さくなるという傾向があり、本分割においてはこれらと全く逆の傾向があることがわかる。しかし、電界解析では、高電界領域 (このモデルでは内径側) が重要であり、本手



法の有用性が認められる。さらに、高電界領域における誤差分布を詳しく検討するために、円筒軸から50mm×50mmの領域についての累積誤差分布を調べ、その結果をFig.9に示す。この図からも本手法の有用性が確かめられる。例えば、電位の累積誤差分布からは、本手法では誤差が0.01%以上となる部分が全解析領域の20%以下であるのに対し、他の2手法では解析領域の60%以上を占めていることがわかる。

6. あとがき

本論文では、有限要素電界解析のためのhアダプティブ法の一方法として、電界強度を直接規範に用いたアダプティブ要素生成法を提案し、その有用性を示した。本手法の特徴として以下の点が挙げられる。

- (1) 解析者が必要とする物理量を、直接規範として

用いることにより、その精度の向上が図れる。

- (2) 得られる要素形状が比較的等三角形に近い。
- (3) 入力データは粗分割のデータのみであり、入力データが比較的単純である。

(1994年3月16日受付)

参考文献

- [1] 斎藤、上田、小倉：有限要素法による二次元交流磁界解析のためのアダプティブ分割法、電気学会論文誌B, Vol.110-B, No.12, pp1059~1065, (1990)
- [2] Huges Hoppe, Tony DeRose, Tom Duchamp, John MacDonald, Werner Stuetzle: Mesh Oputimization, COMPUTER GRAPHICS Proceeding, Annual Conference Series, pp19~26, (1993)
- [3] 谷口健男：FEMのための要素自動分割, 森北出版 (1992)