**ЕДНО ДРУГО ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ТЕОРЕМАТА НА ОСТРОВСКИ-КАНТОРОВИЧ**

**ЗА СХОДИМОСТ НА МЕТОДА НА НЮТОН**

Александра Ристеска1, Йордан Живанович1, Ристе Тимовски1

*1 Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип, Технолошко-технички факултет, Р.Македония*

*Резюме:* *В този доклад дадено е едно ново доказателство на теоремата на Островски-Канторович за сходимост на метода на Нютон.*

*Клучови думи: итерационна редица, диференцируема функция, контролна функция, метрично пространство, начална точка, сходимост, корен, изображение .*

**ВЪВЕДЕНИЕ**

Ще формулираме теоремата на Островски-Канторович за сходимост на метода на Нютон (известен още като метод на допирателните) и ще дадем едно ново доказателство на същата. Тази теорема налага, че итерационния метод на Нютон се поставя като всеопща система от уравнения, приближаване до решение , кото е близко до някоя дадена точка . Ще докажем и една лема, която ще е помощна в доказването на теоремата и ще дадем някои определения и твьрдения, които ще бъдат неопходими в доказателството на теоремата.

**ПОМОЩНИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТВЬРДЕНИЯ**

***Определение 1***: Функцията  е контролна функция от ред  в интервала  ако:

1) , за всяко  и всяко 

2) , за всяко 

***Определение 2***: Нека  е метрично пространство и . Нека  такова, че е изпълнено  за всяко  и , където *φ* е контролна функция в *J*. Функцията *Е* наричаме функция на началното условие на изображението *Т*.

***Определение 3***: Нека  и  е функция на началното условие на изображението *Т* с контролна функция *φ* в интервала *J*. Точката  се нарича начална точка ако  и  т.е. .

***Лема 1***: Нека , , ,  и . Тогава:

, където: 

***Лема 2***: Нека ,  е функция на начално условие на *Т, х0* е начална точка на *Т* и *φ* е контролна функция от ред  в интервала *J*. Тогава изпълнени са следните свойства:

1) За всяко  е начална точка

2) 

3) , където  и  за всяко *t*

4) 

5) 

***Лема 3***: Нека ,  е функция на началното условие на Т с контролна функция *φ* в интервала *J*. Нека *Т* е итерационно свиващо изображение от вида  за всяко , и , където *β* е растяща функция в *J*, ( за всяко ).

Нека са изпълнени следните условия:

(\*)  и за всяко  и  *(TxD)*;

(\*\*) , , , където 

Тогава х0 е начална точка на изображението *Т*.

***Лема 4***: Нека ,  е функция на началното условие на *Т* с контролна функция *φ* от ред  в интервала *J* и нека *Т* e итерационно свиващо изображение, такова че:  за всяко  и  където *β* е растяща функция в *J*, такава, че:

1. *tβ(t)* е строга контролна функция от ред *r* в *J*
2. за всяко , където *φ* е растяща функция в *J* и 

Тогава:

1) 

2)  за всяко , където ,  и *ψ* е функция дефинирана в  за всяко  при това  и 

Ще въведем следните означения:

;

;

, но ;

Тъй като  и  следва, че ако , то .

Ако 

Сега да обобщим тези разсъждения:

 

**ИЗЛОЖЕНИЕ**

***Теорема : (Островски – Канторович)***

Нека *f* е диференцируема функция в интервал *Δ* и нека *f* удовлетворява условието на Липшиц за всяко :



Избираме начално приближение  така, че да са изпълнени следните условия:

1) 

, 

2) 

3) , където  и 

Тогава в сила са следните твърдения:

а) Уравнението  притежава корен *ξ* в интервала Δ и итерационната редица на Нютон  е сходяща към този корен.

б) За всяко  изпълнена е *apriori* оценката:

, където  и 

***Доказателство:***

Нека ,  така, че  и 

Оператора Т удовлетворява условието на Липшиц, следователно Т е непрекъснато изображение.

За доказателството на теоремата ще използваме следната лема:

***Лема 5***: Нека  за всяко , където 

Тогава е изпълнено следното:

1’)  е растяща функция в [0,1] ;

2’) 

***Доказателство:***

, 



  в 

Следователно φ е контролна функция от ред 2 в интервала .

  за всяко ,  и .

 е строго контролна функция от ред 2 в 

За всяко 

 е растяща функция в 

 за всяко .

Следователно получаваме  за 

Нека *х0* e начална точка. От признака за началните точки следва, че .

От условието имаме:





От 1)   т.е. 

Но от 2)  



От  получаваме, че .

Нека , където функцията *ψ* удовлетворява следното:

 

Следователно за  имаме:

 

 **□**

*Забележка*:   ; 

 

От б)  , където 



**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

От теоремата следва, че уравнението  има корен в  и при това  е единствен корен на  в . Ако , то коренът  е прост корен.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Metric Spaces By Micheal O Searcoid, Springer (2007)

[2] Metric Spaces By Satish Shirali, Harkrishan L. Vasudeva (2006)

[3] Solution of equations in Euclidean and Banach Spaces By Alexander M. Ostrowski

[4] Функционалъный анализ – Л. В. Канторович, Г. П. Акилов (1984)

[5] Математический анализ – В. Б. Уваров (1984)

[6] Высшая математика, Том 1 – А. А. Гусак (1983)