УДК: 378 (497.7)
ISSN: 1409-9187

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
University "St. Cyril and Methody" - Skopje
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип
Pedagogical Faculty "Gotse Delchev" - Shtip

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAL MISCELLANEOUS COLLECTION

Година 2

Книга 2, Год. 2

Штип - Shtip
2002

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
University "St. Cyril and Methody" - Skopje
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип
Pedagogical Fakulty "Gotse Delchev" - Shtip

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAL MISCELLANEOUS COLLECTION

Штип - Shtip
2002

Годишен зборник на Педагошкиот факултет
„Гоце Делчев“ - Штип

Издавач:
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип

За издавачот:
Д-р Блаже Китанов, декан

Јазична редакција:
Д-р Блаже Китанов

Компјутерска обработка:
Николче Ѓорѓев

Адреса: Педагошки факултет „Гоце Делчев“, Штип,
Република Македонија
Address: Pedagogical Fakulty "Gotse Delchev", Shtip,
Republic Macedonia

ЕКСТЕНЗИЈА НА РАМНОМЕРНО НЕПРЕКИНАТА ФУНКЦИЈА

Нека M е метрички простор, $A \subseteq M$, $x \in M$

Дефиниција 1: *Растојание* од точка до множество во метричкиот простор M се дефинира на следниот начин:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) | \, a \in A\}.$$

Теорема 1: $d(x, A) = 0$ ако и само ако $x \in \overline{A}$.

Теорема 2: Нека $A \subseteq M$. Тогаш растојанието $d(x, A): M \to R$ е непрекината функција на M.

Дефиниција 2: Растојание меѓу две множества во метрички простор X се дефинира на следниот начин:

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

Дефиницијата за рамномерна непрекинатост на реална функција ја пренесуваме и за пресликувања помеѓу метрички простори.

Дефиниција 3: Нека (X, d) и (Y, d_1) се метрички простори и $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување. f е *рамномерно непрекинато пресликување на метричкиот простор* X, ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$, така што за произволни $x, x' \in X$, ако $d(x, x') < \delta$, тогаш $d_1(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Теорема 3: ([6], IX, 8.17)

Нека $f : X \to Y$ е непрекинато пресликување од компактен метрички простор (X, d) во метрички простор (Y, d_1). Тогаш f е рамномерно непрекинато пресликување.

Теорема 4: ([8], III, теорема 6.1)

Нека (X, d) и (Y, d_1) се метрички простори, A е секаде густо во X и $f : A \to Y$ е рамномерно непрекинато пресликување. Тогаш постои единствено рамномерно непрекинато пресликување

$\bar{f} : X \to Y$ така што $f(a) = \bar{f}(a)$, за секое $a \in A$. ($\bar{f}$ е проширување на f)

Следната теорема покажува дека конвергентна низа од рамномерно непрекинати функции во метрички простор конвергира кон рамномерно непрекината функција.[28]

Теорема 5: Нека $(f_n : X \to R)_{n \in N}$ е конвергентна функционална низа од рамномерно непрекинати функции во метрички простор X. Тогаш и $f : X \to R$ така што $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ е рамномерно непрекината функција.

Доказ: Нека (x_n) , (y_n) се низи во метричкиот простор X такви што $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$. $\quad (*)$

Треба да покажеме дека $\lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

Да претпоставиме спротивно, дека $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ не е рамномерно непрекината функција. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ и постојат подннизи (x_{n_i}) од (x_n) и (y_{n_i}) од (y_n) така што за секој $i > 0$, постои $n_i > 0$ и притоа е исполнето неравенството:

$$\left| f(x_{n_i}) - f(y_{n_i}) \right| \geq 3\varepsilon \quad (**)$$

Функциите $f_k : X \to R$ се рамномерно непрекинати , за секој k, па

$$|f_k(x_n) - f_k(y_n)| \to 0 \text{ кога } n \to \infty. \quad (***)$$

Низата функции $(f_k)_{k \in N}$ конвергира кон функцијата f, па постои $k_0 \in N$ така што за $\forall k \geq k_0$,

$$| f_k(x) - f(x) | < \varepsilon, \ \forall x \in X.$$

Имајќи го предвид неравенството $(***)$ се добива:

$$\left| f_k(x_{n_i}) - f(x_{n_i}) \right| < \varepsilon \text{ и}$$

$$\left| f_k(y_{n_i}) - f(y_{n_i}) \right| < \varepsilon$$

каде што (x_{n_i}) и (y_{n_i}) се претходно избраните подннизи од (x_n) и (y_n).

[28] Теоремата е формулирана и докажана заедно со проф. д-р Никита Шекутковски, редовен професор на ПМФ - Скопје

Бидејќи f_k е рамномерно непрекината функција за секое $k \in N$, па $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ така што од $d(x, y) < \delta$, следува дека $| f_k(x) - f_k(y) | < \varepsilon$.

Бидејќи низата (f_k) конвергира кон f, постои n_0 така што за $n_i \geq n_0$,

$$d(x_{n_i}, y_{n_i}) < \delta \qquad \text{заради } (*) \text{ и}$$

$$| f_k(x_{n_i}) - f_k(y_{n_i}) | < \varepsilon .$$

Имаме:

$$|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \leq \|f(x_{n_i}) - f_k(y_{n_i})\| + |f_k(x_{n_i}) - f_k(y_{n_i})| + |f_k(y_{n_i}) - f(y_{n_i})| <$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

што е во спротивност со неравенството $(**)$.

Значи, $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ е рамномерно непрекината функција што требаше да се покаже.

Последица 6: Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е конвергентен ред од рамномернонепрекинати функции на метрички простор X. Тогаш функцијата $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е рамномерно непрекината функција.

Проблемот на екстензија на рамномерно непрекината функција во метрички простор го решаваме, користејќи ја постапката на проширување на непрекината функција во нормален тополошки простор дадена од Урисон.

Дефиниција 4: Тополошкиот простор X се нарекува *нормален* ако за секои две затворени дисјунктни множества $F_0, F_1 \subset X$, постојат отворени множества $G_0, G_1 \subseteq X$ така што $F_0 \subset G_0$, $F_1 \subset G_1$ и $G_0 \cap G_1 = \varnothing$

Лема 7: (лема на Урисон):

Нека X е нормален простор. Тогаш за секои две затворени дисјунктни подмножества A, B од X, постои непрекината функција $f : X \to R$, така што е исполнето:

$$0 \le f(x) \le 1, \forall x \in X, \qquad f(A)=\{0\}, \qquad f(B)=\{1\}.$$

Теорема 8:(теорема на Тице за екстензија)

Нека X е нормален простор и F е затворено подмножество од X. Тогаш, за секоја непрекината функција $f : F \to R$, постои непрекината функција $\overline{f} : X \to R$ така што $\overline{f}(x)= f(x), \forall x \in F$. Уште повеќе, ако f е ограничена, т.е. $|f(x)| \le c$, тогаш и $\left|\overline{f}(x)\right| \le c, \forall x \in X$.

Теорема 9: Секој метрички простор е нормален.

Во разгледувањето на рамномерната непрекинатост на функција во метрички простор, се воведува поимот на рамномерна разделеност на множества.

Дефиниција 5: Нека X е метрички простор. За множествата $F,G \subseteq X$ се вели дека се *разделени во* X, ако постои $\delta > 0$, така што $d(F,G) \ge \delta$.

Лема 10: Ако F,G се разделени во X, тогаш и $\overline{F},\overline{G}$ се разделени во X.

Доказ: Нека F,G се разделени во X. Тогаш, $\exists \delta > 0$ така што $d(F,G) \ge \delta$.Имаме:

$$d(\overline{F},\overline{G}) = d(F,G) \ge \delta > 0$$

па и $\overline{F}$ и $\overline{G}$ се разделени во X.

Дефиниција 6: F и G се *рамномерно разделени во* X ако постои рамномерно непрекината функција $f : X \to [0.1]$ така што $f(F)=\{0\}$, $f(G)=\{1\}$.

Лема 11: F и G се рамномерно разделени во X ако и само ако F и G се разделени во X.

Доказ: Нека F и G се разделени во X. Тогаш $\exists \delta > 0$ така што $d(F,G) \ge \delta$. Дефинираме функција $g : X \to [0,1]$ на следниот начин:

$$g(x) = d(x,F).$$

Функцијата g е рамномерно непрекината и $g(F)=0$, $g(G) \ge \delta$.

Да ја разгледаме функцијата $f : X \to [0,1]$ дефинирана со:

$$f(x)=\delta^{-1}\min\{g(x),\delta\}.$$

Тогаш f е рамномерно непрекината функција и притоа $f(F)=0$ и $f(G)=1$ што требаше да се покаже.

Обратното тврдење секогаш важи.

Последица 12: Нека X е метрички простор и F и G се подмножества од X. Тогаш, постои рамномерно непрекината функција $f : X \to R$, така што $|f(F)-f(G)|>0$ секогаш кога $d(F,G)>0$. Уште повеќе, постои рамномерно непрекината функција $g : X \to R$, така што $g(F)=0$ и $g(G)=1$.

Теорема 13:(за екстензија на рамномерно непрекината функција)

Нека X е метрички простор и A е затворено подмножество од X. Тогаш секоја ограничена рамномерно непрекината функција $f : A \to R$ може да се прошири до рамномерно непрекината функција $\overline{f} : X \to R$. Уште повеќе, ако $|f(x)|<c$, тогаш и $|\overline{f}(x)|<c$, $\forall x \in X$.

Доказ: Нека $A \subset X$, A затворено и $f : A \to R$ е ограничена рамномерно непрекината функција. Тогаш $\exists M>0$ така што

$$\|f\|_n=\sup\{|\ f(x)\ |, x \in A\}\leq M .$$

Значи, $-M \leq f(x) \leq M$ за $x \in A$.

Нека $\quad a=min_A f(x), \quad b=max_A f(x)$.

Дефинираме функција :

$$g(x)=\frac{2M}{b-a}\left(f(x)-\frac{a+b}{2}\right)$$

g е рамномерно непрекината на A ако и само ако f е рамномерно непрекината на A и притоа:

$$min_A\, g(x)=-M\ ,\ max_A\, g(x)=M .$$

Избираме реални броеви r_n на следниот начин:

$$r_n=\frac{1}{2}M\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n\in N,\ f_1=f,\ \|f_1\|=\|f\|\leq M=3r_1 .$$

Ќе дефинираме низа на рамномерно непрекинати функции $\{f_n\}_{N\in \mathrm{N}}$, $f_n : A \to R$ така што $\|f_n\|\leq 3r_n$, за секој природен број n.

Индуктивно, ќе го покажеме следното тврдење:

$$\| f_n \| \leq 3r_n \Rightarrow \| f_{n+1} \| \leq 3r_{n+1}$$

Нека $A_n = \{x \in A \,|\, f_n(x) \leq -r_n\}$

$B_n = \{x \in A \,|\, f_n(x) \geq r_n\}$

Тогаш имаме:

$$d(f_n(A_n), f_n(B_n)) \geq 2r_n > 0$$

па од последица 12, постои рамномерно непрекината функција g_n на X така што е исполнето:

$$g_n(A_n) = \{-r_n\},\ g_n(B_n) = \{r_n\} \text{ и } \|g_n\|_n \leq r_n .$$

Нека $f_{n+1} = f_n - g_n|_A$ (*)

Тогаш, според претходно воведените ограничувања, се добива:

$$-3r_n \leq f_n(x) \leq -r_n \text{ на } A_n$$

$$r_n \leq f_n(x) \leq 3r_n \text{ на } B_n \text{ и}$$

$$-r_n \leq f_n(x) \leq r_n \text{ на } A \setminus (A_n \cup B_n).$$

Бидејќи $\| g_n \| \leq r_n$ на A, се добива дека:

$$\| f_{n+1} \| \leq 2r_n = 3r_{n+1}$$

што и требаше да го покажеме.

Бидејќи $\| g_n \| \leq r_n$ и g_n се рамномерно непрекинати $\forall n \in N$, од последица 6 се добива дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ е конвергентен и сумата на редот $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ е рамномерно непрекината функција.

Сега ќе ја покажеме ограниченоста на g.

Имаме:

$$|g(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} M \left(\frac{2}{3} \right)^n = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = M,\ \forall x \in X .$$

На крај, ни остана да покажеме дека g е проширување на f:

$$(g_1 + g_2 + \cdots + g_n)|_A = f_1 - f_2 + f_2 + \cdots + f_n - f_{n+1} = f_1 - f_{n+1} .$$

Бидејќи $f_{n+1} \leq 3r_{n+1} \to 0$ на A, добиваме дека:

$$g|_A(x) = \lim_{n\to\infty} (g_1 + \cdots g_n)|_A(x) = f_1(x)$$

Со ова теоремата целосно е покажана.

Оваа теорема многу често ќе се користи при проучувањето на рамномерно апроксимабилните функции кои се предмет на истражување на авторот.

Литература:

[1] Atsuji M., *Uniform continuity of continuous functions on metric spaces,* Can. J. Math. 13 (1961), 657-663.

[2] Berarducci A., Dikranjan D., *Uniformly approachable function and UA-spaces,* Rend.Ist. Matematico Univ. di Trieste 25 (1993), 23 - 56 .

[3] Ciesielski K., Dikranjan D., *Between continuous and uniformly continuous functions on* R^n, Topology Appl. 114, (2001), 311-315.

[4] Dikranjan D., private comunication.

[5] Hocking J. G., Young G. S., *Topology,* Dower Publications, Inc., New York, 1988.

[6] Ивановски Н., *Реална Анализа,* Просветно дело, Скопје, 1997.

[7] Shekutkovski N., *A criterion for uniform continuity using sequences,* Scientific review 19-20 (1996), 147 - 153 .

[8] Шекутковски Н., *Математичка Анализа,* Просветно дело, Скопје, 1996.

[9] Шекутковски Н., *Топологија,* Унив. „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 2002.

Summary

In this paper we are giving a solution to the problem of extension of uniformly continuous function $f: A \to R$ *, bo* $f: X \to R$ *where* X *is metric space and A is subset of X.*