Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
University "Ss. Cyril and Methodius" - Skopje
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип
Pedagogical Fakulty "Gotse Delchev" - Shtip

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAL MISCELLANEOUS
COLLECTION

Штип - Shtip
2003/2004

Годишен зборник на Педагошкиот факултет
„Гоце Делчев“ - Штип

Издавач:
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип

За издавачот:
Д-р Блаже Китанов, декан

Јазична редакција:
Д-р Блаже Китанов

Компјутерска обработка:
јереј Николче Ѓорѓев

Адреса: Педагошки факултет „Гоце Делчев“, Штип,
Република Македонија
Address: Pedagogical Faculty "Gotse Delchev", Shtip,
The Republic of Macedonia

ПРЕСЛИКУВАЊА КОИ СЕ ПОМЕЃУ НЕПРЕКИНАТИ И РАМНОМЕРНО НЕПРЕКИНАТИ

Abstract: The uniformly approachable functions introduced by A.Berarducci, D.Dikranjan and J.Pelant, are defined by a property stronger than continuity and weaker than uniform continuity. They are a common generalization of uniformly continous functions and perfect functions.

In this paper we define uniformly approachable maps and develop some basic tools for the study of these maps.

Key words: uniformly approachable map, metric space, approximation.

Нека X,Y се метрички простори и $f:X\to Y$ е непрекинато пресликување.

Дефиниција 1:

1) За $K,M\subseteq X$ ќе кажеме дека $g:X\to Y$ е (K,M)-апроксимација на f ако g е рамномерно непрекинато пресликување така што $g(M)\subseteq f(M)$ и $g(x)=f(x)$, за секое $x\in K$.

2) Пресликувањето f е рамномерно апроксимабилно ако f има (K,M) - апроксимација за секое компактно множество $K\subseteq X$ и секое множество $M\subseteq X$.

3) Пресликувањто f е слабо рамномерно апроксимабилно, ако f има $(\{x\},M)$ апроксимација, за секое $x\in X$ и секое $M\subseteq X$. $\triangle$

Класата од сите рамномерно непрекинати пресликувања $f:X\to Y$ ќе ја означуваме со $C_{uc}(X,Y)$, класата од сите рамномерно апроксимабилни пресликувања $f:X\to Y$ ќе ја означуваме со $C_{ua}(X,Y)$ и класата од сите слабо рамномерно апроксимабилни пресликувања $f:X\to Y$ ќе ја означуваме со $C_{wua}(X,Y)$.

Лема 1: Секое рамномерно непрекинато пресликување $f:X\to Y$ е рамномерно апроксимабилно .

Доказ: Нека K е компактно подмножество од X и $M\subseteq X$. Тогаш пресликувањето $g:X\to Y$ дефинирано со:

$$g(x)=f(x),\forall x\in X$$

е рамномерно непрекинато и е (K,M) - апроксимација за f. ∎

Лема 2: Секое рамномерно апроксимабилно пресликување $f:X\to Y$ е слабо рамномерно апроксимабилно.

Доказ: Нека $f:X\to Y$ е рамномерно апроксимабилно. Тогаш постои рамномерно непрекинато пресликување $g:X\to Y$ така што за секое компактно множество $K\subseteq X$ и за секое множество $M\subseteq X$, g е (K,M) - апроксимација на f. Но, за секое $x\in X$, $\{x\}$ е компактно, па g е $(\{x\},M)$ - апроксимација на f.

Значи, f е слабо рамномерно апроксимабилно пресликување. ∎

Лема 3: Секое слабо рамномерно апроксимабилно пресликување $f:X\to Y$ е непрекинато.

Доказ: (Аналоген на доказот на теоремата 2.1 од [4])

Од лема 1, 2 и 3 се добива точноста на следните инклузии:

$$C_{uc}(X,Y)\subseteq C_{ua}(X,Y)\subseteq C_{wua}(X,Y)\subseteq C(X,Y) \qquad (1)$$

Понатаму, ќе бидат разгледани можни еднаквости во (1), за различни простори X и Y.

2. Основни резултати

Лема 2.1: Нека $(X,d),(Y,d_1)$ и (Z,d_2) се метрички простори и нека $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ се рамномерно непрекинати пресликувања. Тогаш и композицијата $g\circ f:X\to Z$ е рамномерно непрекинато пресликување.

Доказ: Нека $x_1,x_2\in X$, $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$ (1)

$g:Y \to Z$ е рамномерно непрекинато, па за произволен $\varepsilon > 0$, постои $\varepsilon_1 > 0$ така што е исполнето:

$$d_1(y_1, y_2) < \varepsilon_1 \Rightarrow d_2(g(y_1), g(y_2)) < \varepsilon.$$

$f : X \to Y$ е рамномерно непрекинато, па за претходно избраниот $\varepsilon_1 > 0$, постои $\delta > 0$ така што

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_1(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon_1.$$

Имајќи го во предвид условот (1), добиваме:

За претходно избраниот $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ што е исто така претходно избран, така што

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(g(f(x_1)), g(f(x_2))) < \varepsilon.$$

Значи, $g \circ f : X \to Z$ е рамномерно непрекинато пресликување. ◻

Теорема 2.2:Композиција од рамномерно апроксимабилни пресликувања ерамномерно апроксимабилно пресликување.

Доказ: Нека $f : X \to Y$ и $f^{'} : Y \to Z$ се рамномерно апроксимабилни пресликувања.

Нека $K \subseteq X$ е компактно и $M \subseteq X$.

Тогаш $f(K)$ е компактно подмножество од Y.

Нека $g : X \to Y$ е (K, M) - апроксимација за f и $g^{'} : Y \to Z$ е $(f(K), f(M))$ - апроксимација за f'.

Тогаш $g(x) = f(x), \quad \forall x \in K$ і $g^{'}(f(x)) = f^{`}(f(x))$ за секој $f(x) \in f(K)$.

Имаме:

$(g' \circ g)(x) = g'(g(x)) = g'(f(x)) = f'(f(x)) = (f' \circ f)(x)$, за секој $x \in K.$

Значи $g^{'} \circ g$ се совпаѓа со $f^{`} \circ f$ на K.

$$g(M) \subseteq f(M) \text{ и } g^{'}(f(M)) \subseteq f^{`}(f(M))$$

па се добива дека $\left(g^{'} \circ g\right)(M) \subseteq \left(f^{`} \circ f\right)(M)$

Од лема 2.1, $g^{'} \circ g$ е рамномерно непрекинато, како композиција на две рамномерно непрекинати пресликувања.

Значи $g^{'} \circ g$ е (K, M)-апроксимација на $f^{`} \circ f$, па $f^{`} \circ f$ е рамномерно апроксимабилно пресликување. ◻

Теоремата 2.2. важи и за слабо рамномерно апроксимабилни пресликувања. За да се докаже теоремата за слабо рамномерно апроксимабилни пресликувања, доволно е во претходниот доказ, K да се замени со множеството $\{x\}$ кое е компактно.

Теорема 2.3: Нека F е подмножество од метрички простор X. Ако $f: X \to R$ е рамномерно апроксимибилна функција (или слабо рамномерно апроксимабилна), тогаш таква е и рестрикцијата $f\big|_F : F \to R$.

Доказ: Нека $f: X \to R$ е рамномерно апроксимабилна функција, нека $F \subseteq X$ и $K, M \subseteq F$, K е компактно. Тогаш постои (K, M) - апроксимација g на f.

$$g(x) = f(x),\ \forall x \in K \subseteq F \text{ и } g(M) \subseteq f(M) \text{ за } M \subseteq F$$

па $g\big|_F$ е (K, M) - апроксимација на $f\big|_F$. ■

Познат е резултатот дека секоја непрекината функција $f: R \to R$ е рамномерно апроксимабилна [4].

Во следната теорема ова својство се обопштува.

Теорема 2.4: Ако X е рамномерен простор, тогаш секоја непрекината функција $f: R \to X$ е рамномерно апроксимабилна.

Доказ: Нека $K \subseteq R$ е компактно и $M \subseteq R$ е произволно множество. Избираме интервал $[a, b]$ што го содржи K на следниот начин:

i) или $a \in M$ или $(-\infty, a] \cap M = \emptyset$

ii) или $b \in M$ или $[b, \infty) \cap M = \emptyset$

Нека $r: R \to [a, b]$ е ретракција т.е.

$$r(x) = \begin{cases} x, & x \in [a, b] \\ a, & x < a \\ b, & x > b \end{cases}$$

Функцијата r е рамномерно непрекината функција.

Дефинираме функција:

$$g = f\big|_{[a,b]} \circ r,\ g: R \to X$$

g е рамномерно непрекината функција како композиција од две рамномерно непрекинати функции.

За $x \in K \subseteq [a,b]$ имаме:

$$g(x) = f\big|_{[a,b]}(r(x)) = f(x) \text{ т.е. } g \text{ се совпаѓа со } f \text{ на } K.$$

Ќе покажеме дека $g(M) \subseteq f(M)$.

1) Нека $x \in M$ и $x \in [a,b]$. Тогаш :

$$g(x) = f\big|_{[a,b]}(r(x)) = f\big|_{[a,b]}(x) = f(x)$$

2) и) Нека $x < a$ и $a \in M$. Тогаш:

$$g(x) = f\big|_{[a,b]}(r(x)) = f\big|_{[a,b]}(a) \in f(M)$$

ии) $x < a$ и $(-\infty, a] \cap M = \varnothing$. Овој случај не е можен.

Аналогно, се дискутира за $x > b$ и $b \in M$.

Добиваме дека $g(M) \subseteq f(M)$.

Значи g е (K, M) - апроксимација на f т.е. $f : R \to X$ е рамномерно апроксимабилна функција. ◻

Следната теорема ни претставува критериум за проверка на слаба апроксимабилност на функции.

Теорема 2.5: Нека (X, ρ) е сепарабилен метрички простор и $f : X \to R$ е непрекината функција. Ако постои непреброиво множество $Y \subseteq R$ така што $f^{-1}(y)$ е непразно и сврзано за секое $y \in Y$ и $\rho\left(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right) = 0$, за секој $x, y \in Y$, тогаш f не е слабо рамномерно апроксимабилна функција.

Доказ: Нека $Y \subseteq R$ е непреброиво. Ќе претпоставиме дека $X = f^{-1}(Y)$. Ова можеме да го направиме бидејќи ако тврдењето го покажеме за $f^{-1}(Y)$, тогаш, според теоремата 2.3. ќе важи за секој простор $X \supseteq f^{-1}(Y)$.

Нека $D \subseteq X$ е преброиво секаде густо множество во X и нека $M = f^{-1}(f(D))$.

Бидејќи $f^{-1}(f(D)) \supseteq D$ се добива дека $D \subseteq M$ па и M е секаде густо во X .

Уште повеќе:

$$f(M)=f\left(f^{-1}(f(D))\right)\supseteq f(D) \text{ и}$$
$$f(M)=f\left(f^{-1}(f(D))\right)\subseteq f(D)$$

па се добива дека $f(M)=f(D)$.

Значи, $M\subset X$ бидејќи $Y=f(X)$ е непреброиво по услов на теоремата, а $f(M)=f(D)$ е преброиво.

Тогаш, постои $x\in X\setminus M$.

$$x\notin M=f^{-1}(f(D))=f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(f(D))\right)\right)=f^{-1}(f(M))$$

па се добива дека $f(x)\notin f(M)$.

$(*)$

Ќе покажеме дека f нема $(\{x\},M)$ - апроксимација.

Да претпоставиме спротивно, нека постои рамномерно непрекината функција $g:X\to R$ т.ш. $g(x)=f(x)$ и $g(M)\subseteq f(M)$.

Тогаш:

$$g(M)\subseteq f(D).$$

$f(D)$ е преброиво множество па $g(M)$ е нула-димензионално. Тоа значи дека $g(M)$ е тотално несврзано т.е. сите компоненти на сврзаност на $g(M)$ се состојат најмногу од една точка.

Нека $d\in D$ е произволна точка. Тогаш компонентата

$$C_d=f^{-1}(f(d))\subseteq M$$

е сврзана (по услов на теоремата) и

$$g(C_d)\subseteq g(M)\subseteq f(M)\subseteq f(D)$$

па се добива дека g е константна на секоја компонента на сврзаност C_d.

Тогаш, за $d,d'\in D,\ \rho(C_d,C_{d'})=0$ (според условот на теоремата).

g е рамномерно непрекината функција па сите овие константи се еднакви. (Ова е точно од теорема 6, дадена во $[8]$).

Тогаш, $g_{|M}(x)=b\in f(M)$.

Но, $f(x)\notin f(M)$ (заради $(*)$), па $g(x)=b\neq f(x)$.

Ова покажува дека g не може да биде $(\{x\},M)$-апроксимација на f.

Добивме дека $f: X \to R$ не е слабо рамномерно апроксимабилна функција што требаше да се покаже. $\square$

Последица 2.6: Функцијата $h: R^2 \to R$ зададена со $h(x,y) = x^2 - y^2$ не е слабо рамномерно апроксимабилна.

Доказ: Ќе ја разгледаме функцијата $h_{|[0,\infty)\times[0,\infty)}$. Ако покажеме дека h не е слабо-рамномерно апроксимабилна на $[0,\infty)\times[0,\infty)$, тогаш од теорема 2.3 ќе следува дека $h: R^2 \to R$ не е слабо рамномерно апроксимабилна на R.

Нека $Y = \left\{ a \,\middle|\, a \in R, a \geq 0, y = \sqrt{x^2 - a} \right\}$. $Y \subseteq R$ и Y е непреброиво.

Множеството $h^{-1}(a) = \left\{ (x,y) \,\middle|\, y = \sqrt{x^2 - a} \right\}$ е непразно и сврзано, за секој $a \in Y$.

Ја разгледуваме функцијата $y = \sqrt{x^2 - a}$ на интервалот $[0,+\infty)$.

За $a = 0$, се добива дека $y = \sqrt{x^2}$ па графикот на оваа функција е правата $y = x$ на интервалот $[0,+\infty)$. Ќе покажеме дека оваа права е коса асимптота на функцијата $y = \sqrt{x^2 - a}$, $a > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x} = 1 \text{ и}$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - a} - x\right) = 0.$$

па $y = x$ е коса асимптота за функцијата $y = \sqrt{x^2 - a}$. Значи за секое $a > 0$, графиците на функциите $y = \sqrt{x^2 - a}$ се доближуваат до правата $y = x$ па растојанието $\rho\left(h^{-1}(a_1), h^{-1}(x_2)\right) = 0, \quad \forall a_1, a_2 \in Y$.

Покажавме дека се исполнети условите од теорема 2.5 па функцијата $h_{|[0,\infty)\times[0,\infty)}$ не е слабо рамномерно апроксимабилна.

Тогаш и функцијата $h: R^2 \to R$ не е слабо рамномерно апроксимабилна. $\square$

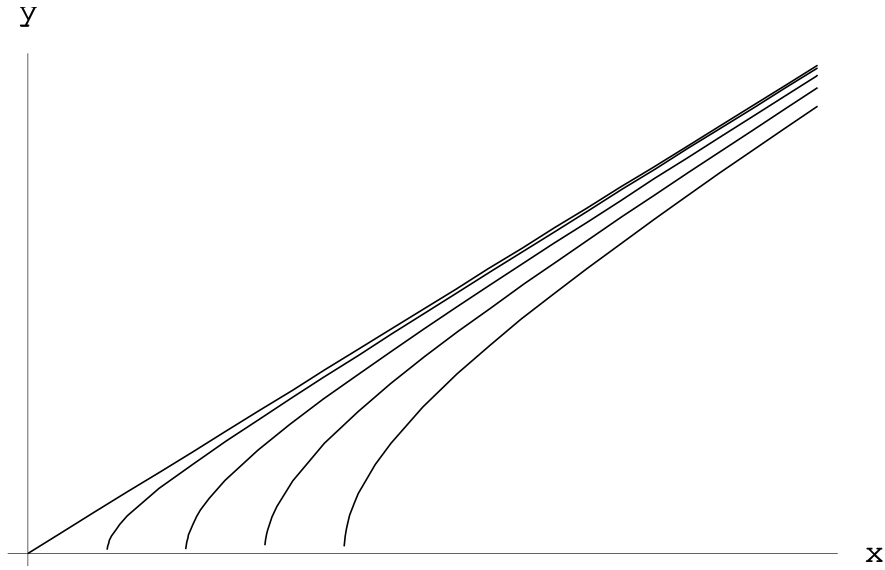

График на функцијата $y=\sqrt{x^2-a}$, за некои вредности на a

Во $[4]$ е покажан резулатот дека секоја совршена функција $f:R^n \to R$ е рамномерно апроксимабилна. Со следниот пример, ќе покажеме дека оваа теорема не може да се обопшти за совршените функции $f:R^2 \to R^2$.

Пример 2.7: Функциите $f,g:R^2 \to R$ зададени со формулите $f(x,y)=x^2$ и $g(x,y)=y^2$ се рамномерно апроксимабилни, додека совршената функција $H=(f,g):R^2 \to R^2$ не е слабо рамномерно апроксимабилна.

Доказ: Функцијата $f(x,y)=x^2$ е рамномерно апроксимабилна, како композиција од рамномерно непрекинатата функција $f_1:R^2 \to R,\ f_1(x,y)=x$ и рамномерно апроксимабилната функција $f_2:R \to R,\ f_2(x)=x^2$. (според теорема 2.4)

Аналогно, $g(x,y)=y^2$ е рамномерно апроксимабилна функција.

Функцијата $h : R^2 \to R$ зададена со $h(x,y) = x^2 - y^2$ не е слабо рамномерно апроксимабилна (обработена е во претходната последица), а таа е добиена како композиција од функциите $H : R^2 \to R^2$ и $h_1 : R^2 \to R$, $h_1(x,y) = x - y$ која е рамномерно непрекината. Тогаш, од теорема 2.2, H не може да биде слабо рамномерно апроксимабилна. ☐

Претходниот пример покажува дека пресликувањето $H = (f, g) : X \to Y \times Z$ не мора да биде слабо рамномерно апроксимабилно, иако и $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ се рамномерно апроксимабилни.

Забелешка: Ако X е метрички простор, тогаш $C(X,R)$ е линеарен тополошки простор, а $C_{uc}(X,R)$ е негов потпростор. Примерот 2.7 и последицата 2.6. покажуваат дека класите на рамномерно апроксимабилни пресликувања $C_{ua}(X,R)$ и на слабо рамномерно апроксимабилни пресликувања $C_{wua}(X,R)$ не се затворени во однос на операцијата собирање на функции.

Литература:

[1] Atsuji M., *Uniform continuity of continuous functions on metric spaces,* Pac. J. Math. 8 (1958), 11-16.

[2] Atsuji M., *Uniform continuity of continuous functions on metric spaces,* Can. J. Math. 13 (1961), 657-663.

[3] Berarducci A., Dikranjan D. and Pelant J. , *Function with distant fibers and uniform continuity,* Topology Appl. (2002) .

[4] Berarducci A.,Dikranjan D.,*Uniformly approachable function and UA-spaces,* Rend.Ist. Matematico Univ. di Trieste 25(1993),23 - 56 .

[5] Ciesielski K., Dikranjan D., *Between continuous and uniformly continuous functions on* R^n, Topology Appl. 114, (2001), 311-315.

[6] Engelking R., *General Topology, Revised and Completed Edition,*Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[7] Hocking J. G., Young G. S., *Topology*, Dower Publications, Inc., New York, 1988.

[8] Shekutkovski N., *A criterion for uniform continuity using sequences*, Scientific review 19-20 (1996), 147 - 153 .

[9] Shekutkovski N., *Topologija*, Univ. " Sv. Kiril i Metodij ", Skopje, 2002.