Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
University "Ss. Cyril and Methodius" - Skopje
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип
Pedagogical Fakulty "Gotse Delchev" - Shtip

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAL MISCELLANEOUS
COLLECTION

Штип - Shtip
2003/2004

Годишен зборник на Педагошкиот факултет
„Гоце Делчев“ - Штип

Издавач:
Педагошки факултет „Гоце Делчев“ - Штип

За издавачот:
Д-р Блаже Китанов, декан

Јазична редакција:
Д-р Блаже Китанов

Компјутерска обработка:
јереј Николче Ѓорѓев

Адреса: Педагошки факултет „Гоце Делчев“, Штип,
Република Македонија
Address: Pedagogical Faculty "Gotse Delchev", Shtip,
The Republic of Macedonia

КОНСТРУКЦИЈА НА СЛОБОДНИ ГРУПОИДИ СО ВЕРИГА ПАРЦИЈАЛНИ ГРУПОИДИ: СЛОБОДЕН ШТАЈНОВ ГРУПОИД

Abstract: Every nontrivial variety of groupoids is generated by its free groupoid which can be obtained as a quotient-groupoid of the absolutely free groupoid over a countable set. The problem of the construction of a free groupoid in a variety is equivalent to the problem of discovering an efficient description of the congruence which is an object of the factorization, or to the problem of finding the set of identities of the free groupoid which equals to the set of common identities of all groupoids in the variety. In many cases, this is not an easy assignment, and there is no general method which can be applied to each particular variety.

Here a new approach for constructing free objects is proposed, by using a chain of partial groupoids which satisfy the identities of the variety. Every partial groupoid of the chain represents a better approximation than the previous one. The wanted free groupoid is built gradually as a union of the partial groupoids.

The description of the procedure is illustrated by the construction of a free groupoid in the variety defined by Stein identity $(xy)y\approx yx$.

Key words: Stein identity, free groupoid, variety, partial groupoid.

Вовед

Групоидите со идентитетот $(xy)y\approx yx$ или неговиот дуален $x(xy)\approx yx$, познати како идентитети на Штајн, се интересни од повеќе аспекти. За секоја квазигрупа со еден од наведените идентитети постои ортогонален комплемент кој исто така е квазигрупа. Идентитетот на Штајн, заедно со $xy\cdot yx\approx x$, односно $x\cdot xy\approx y$, дефинира многуобразие квазигрупи со својството (2,4), односно (2,5) соодветно, што значи дека секој таков групоид генериран со два различни елементи има точно 4, односно 5 елементи ([6], [8]). Од друга страна, наоѓањето опис на слободните објекти во многуобразието V=Mod($(xy)y\approx yx$), како проблем сам за себе претставува посебен предизвик, од причина што откривањето на сите релевантни идентитети е потешко во однос на некои други многуобразија.

Во [2] е даден краток опис на конструкцијата на слободните објекти во V со помош на верига парцијални групоиди. Во овој труд истата детално е опишана и се дадени комплетните докази на тврдењата. Врз основа на оваа постапка, откриена е структурата на идентитетите од многуобразието кои овозможуваат и директен опис на слободните групоиди и истиот е прикажан во [5]. Заради полесно следење на текот на конструкцијата, верификацијата на нетривијалните тврдења е дадена на крајот на овој текст.

Појдовна точка при наоѓањето на описот на слободниот групоид е следново својство.

Својство 1: Нека $(G, \cdot)$ е V-групоид. Тогаш за сите $x, y, x_0, x_1, x_2, \ldots \in G$ и секој $n \geq 1$

(i) $x \cdot yx = xy \cdot x$;

(ii) $x^2 \cdot x^2 = x^2$;

(iii) $x_0x_1 = x_2, x_1x_2 = x_3, \ldots, x_{n-1}x_n = x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1}x_n = x_1x_0$.

Доказ: *(i)* $x \cdot yx = (yx \cdot x)x = xy \cdot x$;

(ii) $x^2 \cdot x^2 = (x^2 \cdot x) \cdot x^2 = (x \cdot x^2) \cdot x^2 = x^2 \cdot x = x^2$;

(iii) Со индукција, $x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n \cdot x_n = x_nx_{n-1} = x_1x_0$. □

Наредното тврдење е непосредна последица на Својство 1 *(i)*, *(ii)* и дефинирачкиот идентитет.

Последица 1: Ако t е терм што содржи само една променлива u и $t \neq u$, тогаш $t \approx u^2$ е идентитет во V. □

Опис на конструкцијата

Нека B е непразно множество и $(T_B, \cdot)$ го означува апсолутно слободниот групоид над B. Пред да биде презентирана конструкцијата преку верига парцијални групоиди, накратко ќе се изложи нејзината идеја. Се поаѓа од непразно множество B кое ќе ја претставува базата на слободниот групоид што се конструира. Се дефинираат множества групоидни терми R_{n+1}, $n \geq 0$, $R_1 = B$ и соодветно на нив парцијални операции $*_{n+1}$ ($*_1 = \emptyset$). Со цел да се добие R_{n+1} од R_n, се додаваат одредени терми со должина точно $n+1$. Намерата е да бидат антиципирани „лошите“ терми и потоа да се дефинира саканата операција на нивниот комплемент во T_B, кога тоа ќе биде возможно, што значи, во некој нареден чекор од конструкцијата, освен можеби ако очекуваниот производ веќе не е достигнат. Затоа операцијата во прв момент е само парцијална. Доколку производот на елементите u и v може да се дефинира пред да се добие множеството R_{n+1}, каде $n+1$ е должината на uv, тогаш се отфрла термот uv бидејќи е еквивалентен на некој терм со помала должина. Сепак, ова дава добар резултат само ако должината на u не е помала од должината на v. Фактот дека uv е „добар“ терм само ако vu е таков, е искористен за надминување на овој проблем, со креирање на извесно „задоцнување“ во дефинирањето на „добрите“ терми, со нивно раздвојување во две дисјунктни множества E_{n+1} и F_{n+1}. Формалната дефиниција на наведените парцијални групоиди е дадена во продолжение.

Нека $R_1=B_1=B$, $*_1=\varnothing$ и нека B_i, R_i и парцијалните операции $*_i$ на R_i се дефинирани за $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Со $|t|$ ја означуваме должината на термот t (вкупниот број на појавувања на сите променливи што ги содржи t). Ги дефинираме и следните подмножества на T_B:

$C_{n+1}=\{uv \mid u\in B_i,\ v\in B_j,\ i\geq j,\ i+j=n+1,\ u*_n v$ е дефиниран$\}$;

$E_{n+1}=(\bigcup_{i\geq j\geq 1} B_iB_{n+1-i}) \setminus C_{n+1}$; $F_{n+1}=\{uv \mid vu\in E_{n+1}\}$.

Нека $B_{n+1}=E_{n+1} \cup F_{n+1}$ и $R_{n+1}=R_n \cup B_{n+1}$.

Да забележиме дека

(а) $u\in C_{n+1} \cup E_{n+1} \Rightarrow |u|=n+1$;

(б) $u\in R_{n+1}, \Rightarrow |u|\leq n+1$;

(в) $uv\in R_{n+1}, \Rightarrow vu\in R_{n+1},\ u,v\in R_n$;

(г) $R_n\cap B_{n+1}=\varnothing$.

Дефинираме парцијална операција $*_{n+1}$ на R_{n+1} со $*_{n+1}=*_n\cup\circ_{n+1}$, каде $\circ_{n+1}$ е дадена со правилата (1)-(7). За $u,v\in R_{n+1}$ и $u*_n v$ недефиниран,

(1) $uv\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=uv$;

(2) $u=v=w^2\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=w^2$;

(3) $u=wv\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=vw$;

(4) $u=pq\in B_{n+1},\ |u|>|v|>|q|,\ |v|\geq|p|,\ v*_n q=p \Rightarrow u\circ_{n+1}v=p$;

(5) $v=u^2\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=u^2$;

(6) $v=wu,\ u\neq w,\ uw\cdot u\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=uw\cdot u$;

(7) $v=pq,\ |v|>|u|>|q|,\ |u|\geq|p|,\ u*_n q=p,\ pu\in B_{n+1} \Rightarrow u\circ_{n+1}v=pu$.

Својство 2: Парцијалната операција $*_{n+1}$ на R_{n+1} е добро дефинирана и ако $u,v,u*_{n+1}v\in R_n$, тогаш $u*_n v$ е дефиниран и еднаков на $u*_{n+1}v$.

Последица 2: $(R_n,*_n)$ е парцијален подгрупоид на $(R_{n+1},*_{n+1})$, за секој $n\geq 1$. □

Со индукција по n може да се покаже следново својство.

Својство 3: R_n не содржи терми од ниту еден од следниве облици: $uv\cdot v$, $u^2\cdot u^2$, $u\cdot vu$. □

Својство 4: Ако $u*_n v$ е дефиниран и $|u|<|v|$, тогаш и $v*_n u$ е дефиниран.

Својство 5: Ако $uv\in R_n$, тогаш $u*_n v=uv$.

Последица 3: Ако $u*_n v\neq uv$ е дефиниран, тогаш $uv\notin R_m$, за секој $m\geq 1$. □

Својство 6: Производот $u*_{2n}v$ е дефиниран за сите $u,v\in R_n$ и секој природен број n.

Својство 7: Ако $u,v\in R_n$ и двата производа $(u*_n v)*_n v$ и $v*_n u$ се дефинирани, тогаш тие се еднакви.

Нека $R=\bigcup_{n\geq 1}R_n$ и $*=\bigcup_{n\geq 1}*_n$. Според Последица 2, Својство 6 и Својство 7, го имаме следново тврдење.

Својство 8: $(R,*)$ е *V*-групоид. □

Со индукција по должината на термите и Својство 5, се покажува следново тврдење.

Својство 9: Групоидот $(R,*)$ е генериран со B. □

Својство 10: За даден *V*-групоид $(G,\cdot)$, произволно пресликување од B во G може да биде проширено до хомоморфизам од R во G.

Претходните својства се сублимирани во главниот резултат, искажан во продолжение.

Теорема: $(R,*)$ е слободен во *V* со слободна база B. □

Докази на тврдењата

Доказ на Својство 2: Нека $(R_i,*_i)$, $i\leq n$, се парцијални групоиди. Бидејќи $*_n\cap\circ_{n+1}=\varnothing$, доволно е да покажеме дека произволни $u,v\in R_{n+1}$ не може да ги задоволуваат условите на повеќе од едно од правилата (1)-(7). Бидејќи (2) значи дека $|u|=|v|$, (3), како и (4), имплицира $|u|>|v|$ и секое од (5)-(7) имплицира $|u|<|v|$, веднаш е очигледно дека некои од правилата се заемно исклучиви.

Нека $u,v\in R_{n+1}$ се такви што $u*_n v$ не е дефиниран и u и v ги задоволуваат условите на

(1) и (2): тогаш $u=v=w^2\in B_{n+1}\Rightarrow |w^2|=n+1\Rightarrow |w^2\cdot w^2|>n+1\Rightarrow uv=w^2\cdot w^2\notin R_{n+1}$;

(1) и (3): тогаш $u=wv\in B_{n+1}\Rightarrow uv=wv\cdot v\notin B_{n+1}$;

(1) и (4): тогаш $u\in B_{n+1}\Rightarrow uv\notin B_{n+1}$;

(1) и (5): тогаш $v\in B_{n+1}\Rightarrow uv\notin B_{n+1}$;

(1) и (6): тогаш имаме дека $v=wu$ и $uw\cdot u$, $u\cdot wu\in B_{n+1}$, повлекувајќи $wu\cdot u\in B_{n+1}$, според дефиницијата на F_{n+1}. Имаме $|u|<|wu|=k\leq n$,

$v, uw \in B_k \subseteq R_k$, $u \in R_k$ и $v *_{k-1} u$ не е дефиниран (бидејќи $v \notin R_{k-1}$). Следува $v \circ_k u = wu \circ_k u = uw$, според (3), што значи $vu = wu \cdot u \in C_{n+1}$, односно $uv = u \cdot wu \notin B_{n+1}$;

(1) и (7): тогаш $pu \in B_{n+1} \Rightarrow uv = u \cdot pq \notin B_{n+1}$;

(3) и (4): тогаш $u = wv = pq \Rightarrow v = q$, но $|v| > |q|$;

(5) и (6): тогаш $v = u^2 = wu \Rightarrow w = u$;

(5) и (7): тогаш $|u| > |q|$, $v = u^2 = pq \Rightarrow u = q$;

(6) и (7): тогаш $|u| > |q|$, $v = wu = pq \Rightarrow u = q$.

Така, со индукција по n, покажавме дека $*_{n+1}$ е добро дефинирана.

Продолжуваме со докажувањето на преостанатиот дел на тврдењето. Ако $u, v, w = u *_{n+1} v \in R_n$ и $u *_n v$ не е дефиниран, тогаш, според дефиницијата на $u \circ_{n+1} v = w$, имаме дека $u \in B_{n+1}$ или $v \in B_{n+1}$ или $w \in B_{n+1}$. Бидејќи $R_n \cap B_{n+1} = \emptyset$, следува дека $u *_n v$ мора да е дефиниран и $*_n \subseteq *_{n+1}$ имплицира дека овој производ е еднаков на w. □

Лема 1: Ако $u, v \in R_n$ и $u *_n v = u$, тогаш $|u| \geq |v|$ и

(i) $|u| > |v| \Rightarrow u = v^2$;

(ii) $|u| = |v| \Rightarrow u = v = w^2$.

Доказ: Согласно правилата (1)-(7), не постои можност $u *_n v = u$ и $|u| < |v|$.

(i) Да забележиме дека, според наведените услови, $u *_n v$ може да биде дефинирано само со (3). Во тој случај $u = wv$ и $wv = u = u *_n v = wv *_n v = vw$, така $w = v$, т.е. $u = v^2$.

(ii) Во овој случај $u *_n v$ мора да е дефиниран со (2). □

Лема 2: Ако $pq *_n v$ е дефиниран со (4), тогаш $v *_{n-1} q = p$ е дефиниран со (3) или (4).

Доказ: Бидејќи условите на (4) го вклучуваат и $|v| > |q|$, $v *_{n-1} q$ може да биде дефиниран евентуално со (1), (3) или (4). Но овој производ не може да биде дефиниран со (1), бидејќи $p = v *_{n-1} q = vq$ води до противречноста $pq = vq \cdot q$, согласно Својство 3. □

Доказ на Својство 4: Производот $u *_n v$ е дефиниран со едно од правилата (1), (5), (6), (7). Без губење на општоста, можеме да сметаме дека n е најмалиот природен број за кој $u *_n v$ е дефиниран, т.е. $u *_n v = u \circ_n v$.

(i) Нека $u *_n v$ е дефиниран со (1), т.е. $u *_n v = uv$. Тогаш $uv \in B_n$, што имплицира и $vu \in B_n$ (што значи дека $vu \notin C_n$), па $v *_{n-1} u$ не е дефиниран. Затоа $v \circ_n u = vu$, според (1).

(ii) Нека $u*_n v$ е дефиниран со (5), т.е. $v=u^2 \in B_n$ и $u*_n v=u^2$. Бидејќи од $v \in B_n$ следува дека $v*_{n-1}u$ не е дефиниран, имаме $v*_n u=u^2 \circ_n u=u^2$, согласно (3).

(iii) Ако $u*_n v$ е дефиниран со (6), тогаш $v=wu$ и $u*_n v= u*_n wu=uw \cdot u \in B_n$. Нека $m=|wu|$. Тогаш $m<n$, $wu,uw \in B_m$ и $u \in R_m$, па затоа $v \circ_m u=wu \circ_m u=uw$, според (3), од каде $v*_n u= v*_m u=uw$.

(iv) На крај го проверуваме случајот кога $u*_n v$ е дефиниран со (7), што значи $v=pq$, $|pq|>|u|>|q|$, $|u| \geq |p|$, $pu \in B_n$, $u*_{n-1}q=p$ и $u*_n v=pu$. Имаме $|pu|=n$ и потоа $m=|v|=|pq|<|pu|=n$. Добиваме $u,q,p= u*_{n-1}q \in R_{m-1}$, од каде $u*_{m-1}q=p$, согласно Својство 2. Сега, условите за v и u од правилото (4) се задоволени, па имаме $v \circ_m u=p$, т.е. $v*_n u=p$. □

Доказ на Својство 5: Нека $uv \in B_m \subseteq R_n$. Тогаш $m \leq n$. Да забележиме дека $u*_k v$ е дефиниран за некој $k \leq m$. Имено, ако за секој $k<m$, $u*_k v$ не е дефиниран, тогаш $u \circ_m v=uv$, според (1). Да претпоставиме дека $u \circ_k v=w$ и $k<m$. Тогаш $w \neq uv$. Имаме два случаи за разгледување:

$|u| \geq |v|$ - тогаш $u*_{m-1}v$ е дефиниран и $uv \in C_m$, што дава $uv \notin B_m$;

$|u|<|v|$ - според Својство 4, $v*_k u$ исто така е дефиниран и $vu \in C_m$, т.е. $vu \notin B_m$, имплицирајќи $uv \notin B_m$. □

Ако $u*_m v$ е дефиниран и $m \leq n$, тогаш и $u*_n v$ е дефиниран, исто така. Затоа кога велиме „$u*_n v$ е дефиниран со едно од правилата (1)-(7)“ мислиме дека $u \circ_m v$ е дефиниран според соодветното правило, за некој $m \leq n$ и не неопходно $m=n$.

Следното тврдење се добива од фактот дека за $|u|=|v|$, производот $u*_n v$ може да биде дефиниран само со едно од правилата (1) или (2).

Лема 3: Ако $uv \in R_n$, тогаш за $u=v$, $uv*_{2|uv|}vu=u^2$ и за $u \neq v$, $uv*_{2|uv|}vu=uv \cdot vu$. □

Доказ на Својство 6: Нека $u,v \in R_n$ и $k=|uv| \leq 2n$. Ако $|u| \geq |v|$ и $u*_{k-1}v$ е дефиниран, тогаш $u*_{2n}v$ исто така е дефиниран. Во спротивно, $uv \in B_k$ и, според Својство 5, $u*_{2n}v$ е дефиниран.

Понатаму претпоставуваме дека $|u|<|v|$.

Ако $v*_{k-1}u$ не е дефиниран, тогаш $vu \notin C_k$, па $vu \in B_k$, што имплицира $uv \in B_k$. Во овој случај, $u*_{k-1}v$ не е дефиниран, според Својство 4. Тогаш $u \circ_k v=uv$, па $u*_{2n}v$ е дефиниран.

Ако $v*_{k-1}u$ е дефиниран, тогаш бидејќи $vu \notin B_{k-1}$, тој е дефиниран со едно од правилата (3) или (4). Нека $v \in B_l$, $|v|=j \leq k-1$. Имаме два случаи на разграничување:

(a) $v*_{k-1}u$ е дефиниран со (3), $v=wu$.

(a.1) Ако $u=w$, тогаш $u*_{2n}v=u\circ_j v=u\circ_j u^2=u^2$, според (5).

(a.2) Ако $u\neq w$, ќе покажеме дека u и v ги задоволуваат условите на (6) во R_k и тогаш $u*_{2n}v$ ќе биде дефиниран. Единствено треба да се осигураме дека $uw\cdot u\in B_k$. Ако $uw\cdot u\notin B_k$, тогаш $uw*_{k-1}u$ би бил дефиниран. Бидејќи $|uw|>|u|$ и $uw\cdot u\notin R_{k-1}$, последниот производ може да биде одреден според едно од правилата (3) или (4). Но $u\neq w$ повлекува дека правилото (3) не би можело да биде применето. Условите на (4) исто така водат до противречност. Имено, во тој случај, $|u|>|w|$ и $u*_{k-2}w=u$. Од Лема 1 добиваме $u=w^2$ и $v=wu=w\cdot w^2$, што противречи на Својство 3.

(б) $v*_{k-1}u$ е дефиниран со (4), т.е. $v=pq\in B_j$, $|u|\geq|p|$, $|v|>|u|>|q|$, $u*_{j-1}q=p$. Нека $m=|p|+|u|$. Тогаш $j<m<k\leq 2n$, бидејќи $k=|u|+|v|=|u|+|pq|>|p|+|u|>|p|+|q|=|pq|=|v|=j$. Ќе покажеме дека u и v ги задоволуваат условите на (7) во R_m и тогаш $u*_m v$ ќе биде дефиниран. Имаме $u*_{m-1}q= u*_{j-1}q=p$, па доволно е да покажеме дека $up\in B_m$ (бидејќи тогаш и $pu\in B_m$). Да претпоставиме дека $up\notin B_m$. Ова значи дека $u*_{m-1}p\neq up$ и $u*_{m-1}p$ е дефиниран и, бидејќи $|u|\geq|p|$, ова е направено со едно од правилата (2)-(4). Ќе покажеме дека секој од овие случаи води кон противречност.

(б.1) Ако настапува (2), $u=p=w^2$. Тогаш $w^2*_{j-1}q=w^2$, според $u*_{j-1}q=p$, исто и $q=w$, според Лема 1(i). Така, од Својство 3 ја добиваме противречноста $v=pq=w^2\cdot w$.

(б.2) Условите на (3) имплицираат $u=sp$, за некој терм s и имаме $p=u*_{j-1}q=sp*_{j-1}q$. Од Лема 2, последниот производ е дефиниран со (3) или (4). Во првиот случај $q=p$ и противречноста е $p= sp*_{j-1}p=ps$. Вториот случај повлекува $p=u*_{j-1}q=sp*_{j-1}q=s$ и $q*_{j-1}p=s$, т.е. $q*_{j-1}p=p$ и од Последица 3 ова значи $qp,pq\notin B_j$.

(б.3) Нека $u*_{m-1}p$ е дефиниран со (4). Нека $u=st$, $|p|>|t|$, $|p|\geq|s|$ и $p*_{i-1}t=s$, за $i=|u|$. Тогаш $u*_i p=s$ и, јасно, $i\leq m-1$. Според Лема 2, $p= st*_{j-1}q$ мора да биде дефиниран со (3) или со (4). Првиот случај, т.е. $t=q$, дава $p= st*_{j-1}t=ts$, така $s=u*_i p=st*_i ts$, што е еднакво на s^2 или $st\cdot ts$, според Лема 3. Секој од овие случаи е невозможен ($s=s^2$ или $s= st\cdot ts$). Вториот случај вклучува $p=s$ ($=st*_{j-1}q$), па $p*_{i-1}t=p$ и од Лема 1, $p=t^2$. Но тогаш $u=pt=t^2\cdot t$, што противречи на Својство 3. □

Доказ на Својство 7: Нека $u,v\in R_n$. Ќе ги провериме сите случаи (1)-(7) што може да се појават во дефиницијата на производот $u*_n v$ и ќе го користиме Својство 5 и забелешката направена непосредно пред Лема 3.

(i) $uv \in R_n \Rightarrow (u *_n v) *_n v = uv *_n v = vu = v *_n u$.

(i) $u = v = w^2 \Rightarrow (u *_n v) *_n v = (w^2 *_n w^2) *_n w^2 = w^2 *_n w^2 = v *_n u$.

(iii) Нека $u = wv$. Ако $w = v$, тогаш $(u *_n v) *_n v = (v^2 *_n v) *_n v = v^2 *_n v = v^2 = v *_n v^2 = v *_n u$. Ако $w \neq v$, тогаш $v *_n u = v *_n wv = vw \cdot v = vw *_n v = (wv *_n v) *_n v = (u *_n v) *_n v$. (Овде $v *_n wv = vw \cdot v$ бидејќи само правилото (6) може да биде користено за да се дефинира $v *_n wv$.)

(iv) Нека $u = pq$, $|u| > |v| > |q|$, $|v| \geq |p|$, $v *_{n-1} q = p$. Тогаш $u *_n v = p$. Со цел да се дефинира производот $v *_n pq$, само правилото (7) може да биде применето. Имено, $|u| > |v|$ дозволува правилата (1), (5), (6) и (7) да бидат користени во дефиницијата на $v *_n pq$. Од (1) имаме дека $v *_n pq = v \cdot pq \in B_k$, каде $k = |v \cdot pq| \leq n$ и тогаш исто и $pq \cdot v \in B_k$, противречејќи на Последица 3. Од (5) и (6) имаме $q = v$, противречејќи на $|v| > |q|$. На тој начин, $v *_n u = v *_n pq = pv = p *_n v = (u *_n v) *_n v$.

(v) $v = u^2 \Rightarrow (u *_n v) *_n v \Rightarrow (u *_n u^2) *_n u^2 = u^2 *_n u^2 = u^2 = u^2 *_n u = v *_n u$.

(vi) $v = wu$, $w \neq u$, $uw \cdot u \in R_n \Rightarrow (u *_n v) *_n v = (u *_n wu) *_n wu = uw \cdot u *_n wu$. Сега, $uw \cdot u *_n wu$ мора да е дефиниран со (4), бидејќи $wu *_{n-1} u = uw$, според (3), па сите услови на (4) се исполнети. Тогаш $uw \cdot u *_n wu = uw = wu *_n u = v *_n u$.

(vii) Нека $v = pq \in B_m$ $(m < n)$, $|v| > |u| > |q|$, $|u| \geq |p|$, $u *_{n-1} q = p$. Тогаш од $u *_{n-1} q = p$ и $u, q, p \in R_{m-1}$ следува $u *_{m-1} q = p$, според Својство 2, па условите на правилото (4) се задоволени за u и v. Така, $v *_m u = p = v *_{n-1} u$. Имаме $(u *_n v) *_n v = pu *_n v$ и производот $pu *_n v$ исто така ги исполнува условите на (4), па $pu *_n v = p$. На тој начин покажавме дека $(u *_n v) *_n v = p = v *_n u$. □

Доказ на Својство 10: Нека $(G, \cdot)$ е *V*-групоид и $g: B \to G$ е произволно пресликување. Дефинираме пресликување $\hat{g}: R \to G$, индуктивно по должината на термите со

$b \in B \Rightarrow \hat{g}(b) = g(b)$, $\quad uv \in R \Rightarrow \hat{g}(uv) = \hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

Покажуваме дека $\hat{g}$ е хомоморфизам, т.е. $\hat{g}(u * v) = \hat{g}(u) \cdot \hat{g}(v)$, за сите u,v во R. Уште еднаш е неопходно да ги разгледаме сите правила кои може да го дефинираат производот $u * v$.

(i) $uv \in R_n \Rightarrow \hat{g}(u * v) = \hat{g}(uv) = \hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(ii) $u = v = w^2 \Rightarrow \hat{g}(u * v) = \hat{g}(w^2 * w^2) = \hat{g}(w^2) = \hat{g}(w)^2 = \hat{g}(w)^2 \cdot \hat{g}(w)^2 = \hat{g}(w^2) \cdot (w^2) = \hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(iii) $u = wv \Rightarrow \hat{g}(u * v) = \hat{g}(wv * v) = \hat{g}(vw) = \hat{g}(v)\hat{g}(w) = \hat{g}(w)\hat{g}(v) \cdot \hat{g}(v) = \hat{g}(wv)\hat{g}(v) = \hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(iv) $u=pq$, $|u|>|v|>|q|$, $|v|\geq|p|$, $v*q=p$. Според Лема 2, производот $v*q=p$ може да биде дефиниран само со правилата (3) или (4) и имаме два случаи за разгледување.

(iv.1) $v=wq$. Тогаш $p=v*q=wq*q=qw$. Од Својство 1(iii), избирајќи $x_1=\hat{g}(q)$, $x_0=\hat{g}(w)$ и потоа применувајќи го Својство 1(i) на x_3, имаме дека $\hat{g}(q)\hat{g}(w)=(\hat{g}(q)\hat{g}(w)\cdot\hat{g}(q))\cdot\hat{g}(w)\hat{g}(q)$. Сега, $\hat{g}(u*v)=\hat{g}(p)$ $=\hat{g}(qw)=\hat{g}(q)\hat{g}(w)=((\hat{g}(q)\hat{g}(w)\cdot\hat{g}(q))\cdot\hat{g}(w)\hat{g}(q)=\hat{g}(qw)\hat{g}(q)\cdot\hat{g}(wq)=\hat{g}(p)\hat{g}(q)\cdot$ $\hat{g}(wq)=\hat{g}(pq)\hat{g}(v)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(iv.2) $u*v=p$, $v*q=p$, обата производи се дефинирани со (4) и $|v|<|u|$. Со индукција по должината на првиот терм во производот добиваме $\hat{g}(u*v)=\hat{g}(p)=\hat{g}(v*q)=\hat{g}(v)\hat{g}(q)=\hat{g}(q)\hat{g}(v)\cdot\hat{g}(v) = (\hat{g}(v)\hat{g}(q)\cdot\hat{g}(q))\cdot$ $\hat{g}(v)=\hat{g}(v*q)\hat{g}(q)\cdot\hat{g}(v)=\hat{g}(p)\hat{g}(q)\cdot\hat{g}(v)=\hat{g}(pq)\hat{g}(v)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$. Покрај ова, мора да го провериме базниот случај, т.е. случајот кога $|u|=3$. Единствена можност е $u=ab\cdot a$, $v=ba$, т.е. $p=ab$, $q=a$, $v=ba$, $a\neq b$. Тогаш $\hat{g}(u*v)=\hat{g}(ab\cdot a*ba)=\hat{g}(ab)=\hat{g}(a)\hat{g}(b)$ и, од исти причини како и во (iv.1), последниот производ е еднаков на $\hat{g}(ab\cdot a)\hat{g}(ba)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(v) $v=u^2 \Rightarrow \hat{g}(u*v)=\hat{g}(u*u^2)=\hat{g}(u^2)=\hat{g}(u)^2=\hat{g}(u)^2\cdot\hat{g}(u)=\hat{g}(u)\cdot\hat{g}(u)^2$ $=\hat{g}(u)\cdot\hat{g}(u^2)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(vi) $v=wu$, $w\neq u \Rightarrow \hat{g}(u*v)=\hat{g}(u*wu)=\hat{g}(uw\cdot u)=\hat{g}(uw)\hat{g}(u)$ $=\hat{g}(u)\hat{g}(w)\cdot\hat{g}(u)=\hat{g}(u)\cdot\hat{g}(w)\hat{g}(u)=\hat{g}(u)\,\hat{g}(wu)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$.

(vii) $v=pq$, $|v|>|u|>|q|$, $|u|\geq|p|$, $u*q=p$, $pu\in R \Rightarrow \hat{g}(u*v)=\hat{g}(pu)$ $=\hat{g}(p)\hat{g}(u)=\hat{g}(v*u)\hat{g}(u)$ и бидејќи $v*u$ е дефиниран според (4), користејќи го (iv) добиваме дека последниот производ е еднаков на $\hat{g}(v)\hat{g}(u)\cdot\hat{g}(u)=\hat{g}(u)\hat{g}(v)$. □

Литература:

[1] Л. Горачинова-Илиева: *Слободни груроиди*, магистерски труд, Скопје (2001)

[2] Л. Горачинова-Илиева: *Слободни груроиди и методи на нивна конструкција*, Годишен зборник, ПФ „Гоце Делчев"-Штип (2001), 235-245

[3] J. Denes, A. D. Keedwel: *Latin Squares and their Applications*, English University Press, London (1974)

[4] J. Denes, A. D. Keedwel: *Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications*, Elseiver Sci. Publ. (1991)

[5] S. Markovski, L. Goračinova-Ilieva, A. Sokolova: *Free groupoids defined by the identity (xy)y=yx*, Proc. of the 10th Congress of Yugoslav Math., Belgrade (2001), 173-176

[6] L. Goračinova-Ilieva, S. Markovski, A. Sokolova: *On groupoids with the identity x(xy)=y*, Quasigroups and Related Systems 11 (2004), 39-54
[7] R. N. McKenzie, W. F. Taylor, G. F. McNulty: *Algebras, Lattices, Varieties*, Wadsworth & Brooks, Monterey, California (1987)
[8] R. Padmanabhan: *Characterization of a class of groupoids*, Algebra Universalis Vol.1 (1972), 374-382
[9] D. M. Smirnov: *Mnoguobraziya Algebr*, Nauka, Novosibirsk (1992)