Зборник на трудови од IV конгрес
на математичарите на Македонија
Струга, Македонија, 19-22.10. 2008
Стр. 111-125

Proceedings of IV congress
of mathematicians of Republic of Macedonia
Struga, Macedonia, 19-22.10. 2008
Pages 111-125

ЕДЕН ПРИОД ВО ВОВЕДУВАЊЕ И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА ЕКОНОМСКИТЕ ФУНКЦИИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Татјана Атанасова – Пачемска[1], Билјана Златановска[2], Лимонка Лазарова[2]

Апстракт: Методолошките аспекти на понудата и побарувачката го опфаќаат оној дел од квантитативните истражувања кои се однесуваат на проучувањето на законитостите на понудата и побарувачката со помош на функционални релации т.е. во облик на функции. Ова отвора широки можности за решавање на сложени економски проблеми.

Воведувањето и интерпретацијата на економските функции е една од основните задачи на наставата по математика во средните економски училишта и на универзитетите. Еден начин на воведување и интерпретација ќе биде даден во овој труд.

Клучни зборови: функција на понуда, функција на побарувачка, еквилибриум, еластичност на понудата и побарувачката.

1.Функција на побарувачка

Почетоците на истражувањата на функционалните облици на побарувачката се поврзани со работите на L. Walrasa, A. Marshall, H. Moore, и H. Schultz кои дале огромен придонес во изготвувањето на практичните методи поврзани со формулацијата на функцијата на побарувачка кои и денес претставуваат база за многу економетриски истражувања.

Дефиниција 1: Количината x на еден производ, што се бара да се купи по определена цена p ја нарекуваме ***побарувачка.***

Во следниот дел ќе биде дадена општата дефиниција на функцијата на побарувачка.

Во услови на слободен пазар, побарувачката за производот X зависи од голем број фактори: најпрвин од цената на производот p, но и од цените на останатите производи (супститути), од куповната моќ на потрошувачите, од временскиот фактор и повеќе други фактори кои на посреден или непосреден начин можат да влијаат на формирањето на обликот на побарувачката.

Ако споменатите фактори ги земеме како променливи величини тогаш можеме да ја дадеме следната дефиниција:

Дефиниција 2: Побарувачката за даден производ X, $x = f(p, p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m)$ (1), е функција од повеќе променливи каде p е цената на производот X, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ се цените на останатите производи X_i, а $q_1, q_2, \ldots, q_m$ се останатите фактори од кои зависи побарувачката.

Изразот (1) го нарекуваме ***општ облик на функцијата на побарувачка.***

За да (1) има и реално значење потребно е функцијата на побарувачка да има извод по цената p на интервал (a,b) и притоа $\frac{\partial f}{\partial p} < 0$, т.е. побарувачката да опаѓа со порастот на цената на даден производ.

Овој услов е познат како ***услов за нормалност*** на побарувачката. Значи, побарувачката во нормални услови на пазарот е монотоно опаѓачка функција по цената p.

Останатите парцијални изводи по $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m$ (доколку постојат) може да бидат со различен знак, што зависи од влијанието на факторите на побарувачката на производот X.

Меѓутоа, испитувањето на побарувачката преку (1) е релативно сложено и честопати практично неизводливо, освен во некои специјални случаи. Затоа, во трудот ќе ја разгледаме наједноставната зависност на побарувачката за даден производ X од неговата цена p. (претпоставуваме дека останатите фактори не влијаат на побарувачката).

$x = f(p)$ при услов $\frac{df}{dp} < 0$. (2)

На овој начин поимот реална функција со една променлива и испитувањето на нејзиниот тек и график добива и конкретна примена во економската теорија и практика што е од особена важност во наставата по математика во средните економски училишта и на универзитетите.

Методичка напомена: За функцијата (2), освен условот $f' < 0$ треба да се исполнети и други услови за да има економска смисла.

1) Интервалот на дефинираност (a,b) треба да биде конечен или приближно еднаков на интервалот на емпириски добиените вредности.
2) Во интервалот (a,b) треба $p > 0$ и $f(p) > 0$.

Во училишната практ
побарувачка е линеарната ф
даден аналитичкиот израз
располага со емпириски под

нез.пром.	p	p_1	p_2
нез.пром.	x	x_3	x_2

Врз основа на податок
најдобро ќе ја апроксимира
направиме со методот на на

Пример 1: На еден п
на цената и побарувачката

Цена	
побарувачка	

Врз основа на горнит
побарувачката ако се знае д
линеарна.

Решение: Нека $x = a$
b, ќе го користиме методо
следнава табела:

i	p_i
1	12
2	22
3	32
4	38
$\sum$	104

Го добиваме следниот сист

Овој систем на равенки им
Конечно, бараната функци

Во училишната практика, наједноставен облик на функцијата на побарувачка е линеарната функција $x = ap + b$. Меѓутоа, најчесто не ни е даден аналитичкиот израз за функцијата на побарувачката, туку се располага со емпириски податоци како во следнава табела:

нез.пром. p	p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n
нез.пром. x	x_3	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n

Врз основа на податоците треба да се најде функција $x = ap + b$ која најдобро ќе ја апроксимира вистинската функција. Последното може да се направиме со методот на најмали квадрати.

Пример 1: На еден пазар се утврдени следниве односи за движењето на цената и побарувачката на еден производ:

Цена	12	22	32	38
побарувачка	70	65	52	40

Врз основа на горните податоци да се определи функцијата на побарувачката ако се знае дека зависноста на побарувачката од цената е линеарна.

Решение: Нека $x = ap + b$. За да ги определиме коефициентите a и b, ќе го користиме методот на најмали квадрати. Најпрво ја составуваме следнава табела:

i	p_i	x_i	p_i^2	$x_i p_i$
1	12	70	144	840
2	22	65	484	1430
3	32	52	1024	1664
4	38	40	1444	1520
$\sum$	104	227	3096	5454

Го добиваме следниот систем равенки:

$$\begin{cases} 3096a + 104b = 5454 \\ 104a + 4b = 227 \end{cases}$$

Овој систем на равенки има единствено решение: $a \approx 1{,}14$; $b \approx 86{,}46$.
Конечно, бараната функција е $x = 1{,}14p + 86{,}46$.

2.Функција на понуда

Аналогно на разгледувањата на функцијата на побарувачка, може да се дефинира и функцијата на понуда со таа разлика што економската смисла на понудата е различен од побарувачката.

Дефиниција 1: Количината y на еден производ, што се нуди да се купи по определена цена p ја нарекуваме ***понуда.***

Во услови на слободното дејствување на економските законитости на пазарот, понудата y за одреден производ X зависи од пазарната цена p на производот X, од цената на останатите производи $p_1', p_2', \ldots, p_n'$, што најчесто се цени на суровините, репроматеријалите, работната сила...како и други фактори $q_1', q_2', \ldots, q_m'$ кои најчесто се поврзани со техничко-технолошките услови за производство.

Ако овие фактори се земат како променливи величини, тогаш може да се даде следнава дефиниција:

Дефиниција 2: Понудата на одреден производ X,

$$y = g(p', p_1', p_2', \ldots, p_n', q_1', q_2', \ldots, q_m') \qquad (3)$$

е функција од повеќе променливи, каде p е цената на производот, а p_i' и q_i' се дефинирани претходно.

Ако функцијата на понудата (3) има извод по цената p во интервалот на разгледување (a,b), тогаш $\frac{\partial g}{\partial p} \geq 0$, што значи дека понудата е монотоно растечка функција по цената p.

Ако извршиме симплификација како и во случајот на побарувачката, претпоставувајќи дека влијанието на цената на другите производи и останатите фактори се релативно мали во однос на цената p на производот X, тогаш функцијата на понуда може да се запише во облик:

$$y = g(p), \qquad \frac{dg}{dp} \geq 0$$

Повторно се добива еден приод во приближувањето на поимот на реална функција и давањето на економска смисла што е од особена важност во стручните економски училишта и на универзитетите.

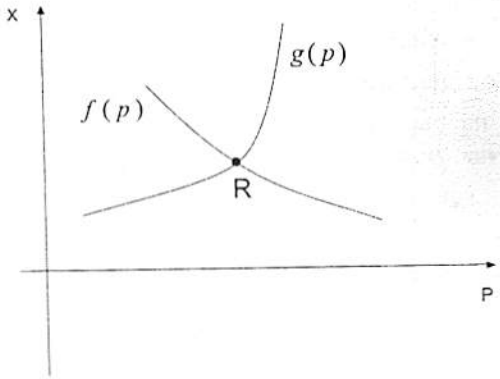
Посебното проучување на понудата и побарувачката на еден поизвод на пазарот може да даде одредени резултати. Меѓутоа, овие две економски величини се заемно поврзани. Еден од најважните показатели што ја

одразува оваа поврзаност е поимот ***еквилибриум (стабилност, рамнотежа) на пазарот.***

Нека за еден производ X се дадени функциите на побарувачка и понуда $x = f(p)$ и $y = g(p)$ соодветно, каде со p е означена цената на производот.

Дефиниција 3: За цената p_0 се постигнува ***еквилибриум (рамнотежа) на пазарот*** ако $f(p_0) = g(p_0)$.

Графички условот за еквилибриум $R(p_0, f(p_0) = g(p_0))$ ја претставува пресечната точка на кривата на понудата и кривата на побарувачката на производот X.



Равенката $f(p) = g(p)$ може да има повеќе реални решенија па се стекнува привиден впечаток дека еквилибриум се остварува во повеќе точки. Меѓутоа, ваквиот заклучок не е исправен бидејќи во интервалот на дефинираност (a,b), $f(p)$ е монотоно опаѓачка функција и $g(p)$ е монотоно растечка, па во тој интервал не може да има повеќе од една пресечна точка. Надвор од тој интервал може да има повеќе пресечни точки, но тие немаат соодветна економска интерпретација, па поради ова не се земаат во предвид.

Потребно е професорот по математика да побара објаснување од учениците зошто е тоа така.

Пример 2: Дадени се функциите на побарувачка и понуда на еден производ $f(p) = -20 - 2p - p^2$ и $g(p) = 3p - 26$. За да се определи цената p при која се постигнува рамнотежа на пазарот треба да се реши равенката

$$f(p) = g(p)$$
$$20 + 2p + p^2 = 26 - 3p$$
$$p^2 + 5p - 6 = 0$$

Решенијата на последната равенка се: $p_{1/2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$

т.е. $p_{1/2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2}$

$p_1 = -6$ и $p_2 = 1$.

За цената $p_2 = 1$ се добива $f(p_2) = g(p_2) = 23$, додека цената $p_1 = -6$ нема реална економска смисла (цената секогаш е позитивен број).

Методичка напомена: Честопати функциите на понуда и побарувачка се зададени со посложени формули т.е. зависноста не е линеарна. Логично е да се запрашаме дали цената p може да ги прима сите вредности од дефиниционата област на функциите $x = f(p)$ и $y = g(p)$. Одговорот на ова прашање е негативен, а за да се најдат допустливите вредности на p треба да се земат во предвид елементарните економски законитости како што се:

- цената p мора да биде позитивна т.е. $p > 0$,
- ако на слободниот пазар цената на еден производ е повисока, тој помалку ќе се купува (побарува), а повеќе ќе се нуди, што значи дека функцијата $x = f(p)$ монотоно опаѓа, а функцијата $y = g(p)$ монотоно расте, т.е. $f'(p) \le 0$, а $g'(p) \ge 0$, и
- побарувачката и понудата се позитивни величини, т.е. $f(p) \ge 0$ и $g(p) \ge 0$

3.Еластичност на понуда и побарувачка

Во многубројните истражувања, а особено во анализата на побарувачката, од посебно значење е поимот ***еластичност.***

Вистинското значење на овој поим се согледува во компаративната анализа, каде постои потреба за споредување на побарувачката на различни производи при соодветна промена на цените. Фактот што производите се изразуваат во различни единици мерки (килограми, метар, парче, итн.) како и фактот што нивоата на цените на производите се различни, ја исклучуваат можноста за апсолутна споредба на побарувачката (промена на побарувачката) и соодветните цени (промена на цената) за различни производи. Во тој смисол еластичноста на побарувачката како однос (мерка) за релативната промена на

побарувачката при соодветните релативни промени на цената, ги овозможува споменатите споредувања на задоволителен начин отворајќи пат кон широки аналитички истражувања.

Еластичноста на побарувачката ја одредуваме во два случаи:

1) за дискретно множество вредности (во случај кога побарувачката е дадена со емпириски вредности);

2) за континуирано множество вредности (кога побарувачката е дадена како непрекината функција).

3.1.1. Еластичност на побарувачката во дискретен случај

Најпрвин ќе ја определиме еластичноста на побарувачката за дискретен случај:

Нека побарувачката за производот X е дадена со следните емпириски вредности: (табела 1, прва и втора колона).

p	x	$\Delta p_i = p_i - p_{i-1}$	$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
p_1	x_1	-	-
p_2	x_2	$\Delta p_2 = p_2 - p_1$	$\Delta x_2 = x_2 - x_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_{i-1}	x_{i-1}		
p_i	x_i	$p_i - p_{i-1}$	$x_i - x_{i-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p_n	x_n	$p_n - p_{n-1}$	$x_n - x_{n-1}$

Во третата колона се пресметани разликите во цената, а во четвртата колона разликата на побарувачка за соодветните промени на цената.

Количникот $s_i = \dfrac{\Delta x_i}{\Delta p_i} = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{p_i - p_{i-1}}$ (4) се вика ***стапка на промена на побарувачката*** и ја покажува промената на побарувачката за единица промена на цената. Во нормални на пазарот, стапката на промена s_i е негативна ($s_i < 0$).

Ако за друг производ X' ја одредиме стапката на промена s_i' во општ случај не можеме да извршиме споредба на s_i и s_i' бидејќи единиците мерки на производите X и X' како и нивните цени се различни.

Ги разгледуваме релативните промени на цените:

$$r_p = \frac{\Delta p_i}{p_{i-1}}, \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (5)$$

и соодветните релативни промени на побарувачката

$$r_x = \frac{\Delta x_i}{x_{i-1}}, \; i = 1, 2, ..., n \qquad (6)$$

r_p го покажува релативното (процентуално) зголемување на цената во однос на цената p_{i-1} $(p_i > p_{i-1})$.

r_x го покажува релативното (процентуално) намалување на побрувачката во однос на побарувачката x_{i-1} $(x_i < x_{i-1})$.

Дефиниција 1: ***Коефициент на еластичност на побарувачката*** е односот $E_x = -\frac{r_x}{r_p} = -\frac{p_{i-1}\Delta x_i}{x_{i-1}\Delta p_i}$.

Забелешка: Коефициентот на еластичност на побарувачката E_x ја изразува релативната промена на побарувачката на единица релативна промена на цената т.е. покажува за колку проценти се менува побарувачката кога цената се промени за 1% на интервалот (p_{i-1}, p_i). E_x е неименуван број па овозможува меѓусебно споредување на побарувачките за различни производи. Во дискретен случај, E_x зависи од варијацијата на цената т.е. од интервалот во кој се определува. Доколку интервалот е помал, толку E_x попрецизно ја изразува релативната промена на побарувачката.

Пример 3: Дадена е побарувачката на производот X во зависност од неговата цена.

p (€)	1,0	1,2	1,8	2,0
x	40	24	20	10

Решение: $E_1 = -\frac{1{,}0 \cdot (24-40)}{40 \cdot (1{,}2-1{,}0)} = \frac{16}{40 \cdot 0{,}2} = 2$

$$E_2 = -\frac{1{,}2 \cdot (20-24)}{24 \cdot (1{,}8-1{,}2)} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

Во првиот случај, релативната промена на побарувачката е значајна во однос на релативната промена на цената. $r_p = 0{,}20$ па порастот на

цената е за 20%, а $r_x = -0{,}4$ па е забележан пад на побарувачката за 40%. Значи, за 1% зголемување на цената на производот X, побарувачката опаѓа за 2% во разгледуваниот интервал.

Во вториот случај се добива релативно мала промена на побарувачката за релативно голема промена на цената.

Дефиниција 2: 1) Побарувачката е еластична ако $E_x > 1$ т.е. ако релативната промена на побарувачката е поголема од релативната промена на цената.

2) Побарувачката е нееластична ако $E_x < 1$.

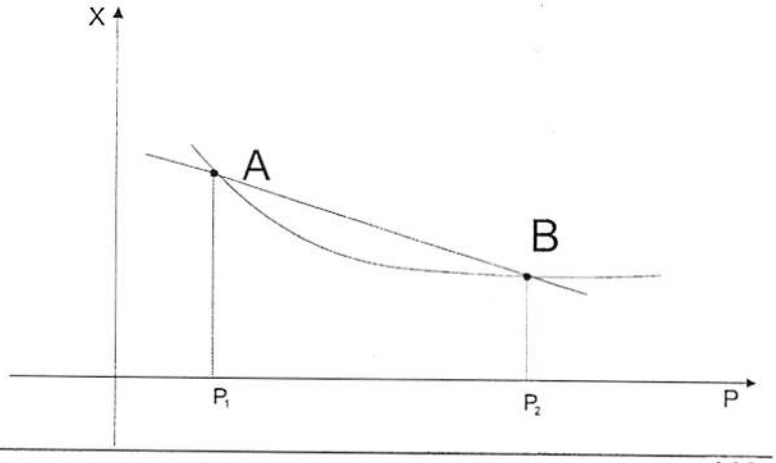
3) Побарувачката е совршено нееластична ако $E_x = 0$. Во тој случај $r_x = 0$, па промената на цената на производот не влијае на побарувачката.

4) Побарувачката е совршено еластична ако $E_x = +\infty$. Тогаш $r_p = 0$ за било кој обем на побарувачка.

Забелешка: На ист начин се дефинира коефициентот на еластичност E_Y на понудата на даден производ X.

3.1.2. Еластичност на побарувачката во непрекинат случај

Постои квалитативна разлика помеѓу еластичност на побарувачката во континуиран и дискретен случај. Како што видовме во претходниот дел, кај дискретниот случај должината на интервалот има одлучувачка улога во определувањето на коефициентот на еластичност. Во непрекинат случај должината на интервалот не е прецизирана и не е можен произволен избор, што од друга страна имплицира претпоставка за пропорционални промени на побарувачката во зависност од цената на производот без оглед на реалното движење на побарувачката на разгледуваниот интервал.



На сликата, промените на побарувачките x_1 и x_2 се разликуваат на интервалот (p_1, p_2).

Ако го пресметаме дискретниот коефициент на еластичност, добиваме $E_{x_1} = E_{x_2}$ т.е. не се кажува ништо за промените на побарувачката во дадениот интервал туку претпоставува пропорционална промена на побарувачката.

Наспроти ова, еластичноста на побарувачката во непрекинат случај ги опфаќа сите варијации на побарувачката т.е. овозможува определување на еластичноста за секоја вредност $p \in (p_1, p_2)$.

Значи, еластичноста на побарувачката претставува функција од цената.

Нека $x = f(p)$ е функција на побарувачката која е ограничена и непрекината функција на (a,b). Нека Δp е прирастот на цената, а Δx е соодветниот прираст на функцијата на интевалот (a,b).

Тогаш $\frac{\Delta p}{p}$ е релативна промена на цена за која одговара соодветната релативна промена на побарувачката $\frac{\Delta x}{x}$.

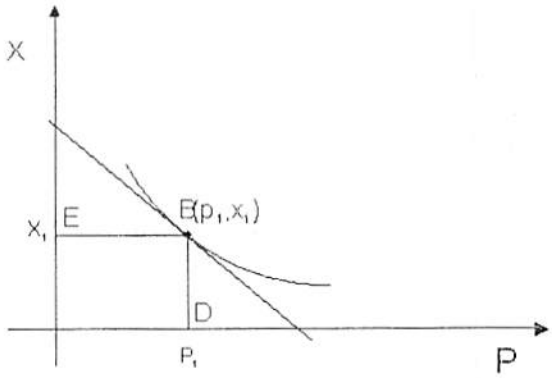
Дефиниција 1: ***Еластичноста на побарувачката*** е гранична вредност на количникот од релативната промена на побарувачката и соодветните релативни промени на цената кога $\Delta p \to 0$ т.е.

$$E_{x(p)} = -\lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} \right) = -\frac{p}{x} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = -\frac{p}{x} \cdot x'$$

или $E(p) = -\frac{p}{f(p)} f'(p)$.

Еластичноста на побарувачката како функција од цената постои на интервалот (a,b) ако и само ако функцијата на побарувачка $x = f(p)$ е диференцијабилна на (a,b).

Графички, еластичноста на побарувачката $x = f(p)$ во точката $B(p_1, x_1)$ може да се прикаже на следниот начин:



Тангентата на кривата на побарувачка во точката B прави отсечоци OC и OA на p и x- оските кои се разликуваат од еластичноста на побарувачката само во знакот.

Имено: $E = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$.

$E = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ каде $\frac{dx}{dp} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ т.е. $E = -\frac{\overline{OD}}{\overline{CD}}$ па еластичноста на побарувачката во точката B е еднаква на отсечките $\overline{OD}$ и $\overline{DC}$.

Аналогно, од триаголниците ABE и BCD може да се утврди дека $E = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EO}}$.

Прашање: Дали може да се одреди еластичност на цената во зависност од побарувачката?

Нека $x = f(p)$ е функција на побарувачката.

Инверзниот облик на оваа функција е $p = \varphi(x)$.

Ако во дефиницијата за еластичност $E = -\frac{p}{x} x'$ извршиме замена на променливите ќе добиеме:

$$E = -\frac{x}{p} p' = -\frac{x}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) \qquad (7)$$

Изразот (7) во економската литература е познат под името ***флексибилност*** и ја покажува релативната промена на цената на единица релативна промена на побарувачката.

Смислата на оваа еластичност е да се утврди осетливоста на промената на цената при релативна промена на побарувачката за различни производи.

Во овој дел уште еднаш се покажува огромната потреба од математичките знаења и нивната примена во толкувањето на економските законитости.

Теорема 1: Коефициентот на еластичност на производот на две функции $x_1 = f(p)$ и $x_2 = g(p)$, определени над иста дефиниционa област, е еднаков на збирот на коефициентите на еластичностите на двете функции.

Доказ: Од дефиниција 1 имаме

$$E_{x_1 \cdot x_2} = -\frac{p}{x_1 \cdot x_2}(x_1 \cdot x_2)' = -\frac{p}{x_1 \cdot x_2}\left(x_1' \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2'\right) =$$

$$= -\frac{p}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1' \cdot x_2 - \frac{p}{x_1 \cdot x_2} \cdot x_1 \cdot x_2' = -\frac{p}{x_1} \cdot x_1' - \frac{p}{x_2} \cdot x_2' =$$

$$= E_{x_1} + E_{x_2}$$

Теорема 2: Коефициентот на еластичност на количникот на двете функции $x_1 = f(p)$ и $x_2 = g(p)$, определени над иста дефиниционa област, е еднаков на разликата на коефициентите на еластичностите на двете функции.

Доказ: Од дефиниција 1 имаме

$$E_{x_1 / x_2} = -\frac{p}{\frac{x_1}{x_2}}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)' = -\frac{p \cdot x_2}{x_1}\left(\frac{x_1' \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2'}{x_2^2}\right) =$$

$$= -\frac{p \cdot x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1' \cdot x_2}{x_2^2} + \frac{p \cdot x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1 \cdot x_2'}{x_2^2} = -\frac{p}{x_1} \cdot x_1' + \frac{p}{x_2} \cdot x_2' =$$

$$= E_{x_1} - E_{x_2}$$

Забелешка: Од теоремите 1 и 2 е јасно дека не постои аналогија меѓу наоѓањето извод од производ и количник, со наоѓањето коефициент на еластичност. Меѓутоа последното важи и за збир и разлика на две функции.

Следната теорема покажува дека постои целосна аналогија меѓу наоѓањето на извод од инверзна функција и коефициентот на еластичност од инвезна функција.

Теорема 3: Ако диференцијабилната функција $y = f(x)$ има инверзна функција $x = \varphi(y)$, тогаш $E_{\varphi,y} = \dfrac{1}{E_{f,x}}$.

Доказ: Од дефиницијата за еластичност на побарувачката и извод на инверзна функција имаме

$$E_{\varphi,y} = -\frac{y}{x} \cdot x' = \frac{1}{-\dfrac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{1}{E_{f,x}}.$$

Методичка напомена: И во други случаи, при разгледувањето на различни економски функции на ист или на сличен начин се определуваат соодветните еластичности. На пример: еластичност на увоз и извоз, еластичност на трошоци, еластичност на производство итн. Притоа, ако се дадени емпириски добиени вредности, коефициентот на еластичност се определува преку (7) со соодветни ознаки и значење или ако е позната функционална зависност, се определува според (7) во соодветен функционален облик.

3.2. Еластичност на понуда

Да ја разгледаме функцијата на понуда $y = g(p)$. Нека претпоставиме дека функцијата $y = g(p)$ е диференцијабилна. Како што видовме оваа функција на дефиниционата област за која има економска смисла монотоно расте т.е. $y' = g'(p) \geq 0$, па затоа на ова множество таа има инверзна функција $p = \xi(y)$ која исто така монотоно расте и е диференцијабилна, т.е. постои $\xi'(y) = \dfrac{1}{g'(p)}$ и притоа важи $p' = \xi'(y) \geq 0$. Еластичноста на функциите $y = g(p)$ и $p = \xi(y)$ се $E_{y,p} = \dfrac{p}{y} y'$ и $E_{p,y} = \dfrac{y}{p} p'$ и од теорема 3 добиваме

$$E_{y,p} = \frac{1}{E_{p,y}}, \text{т.е. } E_{y,p} E_{p,y} = 1.$$

Понатаму, од $y' = g'(p) \geq 0$ и $p' = \xi'(y) \geq 0$ следува

$$E_{y,p} = \frac{p}{y} y' \geq 0 \text{ и } E_{p,y} = \frac{y}{p} p' \geq 0.$$

Понудата е еластична ако $\left|E_{y,p}\right|>1$, од што следува $E_{y,p}>1$ или $E_{y,p}<-1$. Меѓутоа, за коефициентот на еластичност на понудата важи $E_{y,p}\geq 0$, па затоа понудата $y=g(p)$ е еластичана ако и само ако $E_{y,p}>1$. Слично се покажува дека понудата $y=g(p)$ е нееластична ако и само ако $0\leq E_{y,p}<1$.

За дискретен случај кога имаме емпириски резултати за понудата, зборуваме за коефициент на еластичност на понудата $E_{y,p}=\frac{p}{y}y'$ покажува колку проценти понудата расте ако цената се зголеми за 1%, а коефициентот на еластичност на цената во однос на понудата $E_{p,y}=\frac{y}{p}p'$, покажува колку проценти се променила цената ако понудата се променила за 1%.

Забелешка: Во претходните разгледувања побарувачката и понудата на даден производ ги разгледувавме само како функции од цената на производот. Меѓутоа, во практиката побарувачката најчесто зависи од повеќе фактори, како што се цената на производот p, цената на конкурентскиот производ p_1, примањата на потрошувачите d и слично. Во овој случај функциите на побарувачка и понуда се функции од повеќе променливи т.е. $x=f(p,p_1,d,...)$ и $y=g(p,p_1,d,...)$. Како и во случајот кога понудата и побарувачката се функции од една променлива и овде наведените фактори влијаат на понудата и побарувачката. Влијанието на секој од овие фактори врз понудата и побарувачката го мериме со парцијалните коефициенти на еластичност кои ги пресметуваме според формулите:

$$E_{x,p}=\frac{p}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p},\quad E_{x,p_1}=\frac{p_1}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p_1},\quad E_{x,d}=\frac{d}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial d},\ldots \text{ и}$$

$$E_{y,p}=\frac{p}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p},\quad E_{y,p_1}=\frac{p_1}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p_1},\quad E_{y,d}=\frac{d}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial d},\ldots.$$

Овде да забележиме дека меѓу парцијалните еластичности на побарувачката само за парцијалниот извод на побарувачката во однос на цената задолжително мора да важи $E_{x,p}=\frac{p}{x}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}\leq 0$. Аналогно само за парцијалниот извод на понудата во однос на цената задолжително мора да важи $E_{y,p}=\frac{p}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\geq 0$.

дува $E_{y,p} > 1$ или
на понудата важи
ı ако и само ако
нееластична ако и

тати за понудата,
на понудата
е ако цената се
ната во однос на
ленила цената ако

ачката и понудата
ции од цената на
јчесто зависи од
г p, цената на
ните d и слично.
ункции од повеќе
ако и во случајот
ономенлива и овде
та. Влијанието на
а го мериме со
метуваме според

..и

....

еластичности на
ката во однос на

аналогно само за

ижително мора да

Резиме: Со овој труд се обидовме да дадеме мал допринос во поврзувањето на математичките знаења од теоријата на реални функции и економската анализа. Ова треба да оди во прилог на потребата од продлабочени математички знаења во стручните економски училишта и на универзитетите, а особено од аспект на соодветноста на наставниот кадар кој ја обработува оваа „економска“ проблематика.

Литература:

[1] Математика, *Т.Атанасова-Пачемска, Б.Златановска, Л.Лазарова, Универзитетски учебник, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип*, 2009;
[2] Математичка анализа, *Н.Шекутковски, Универзитетски учебник, Просветно дело, 2008*
[3] Математика за бизнис, *Р.Малчевски, С.Малчевски, Универзитет ФОН, 2008*
[4] Учебници по математика за средните економски училишта

Универзитет „Гоце Делчев“, Факултет за информатика,
Штип, Република Македонија

email: tatjana.pacemska@ugd.edu.mk biljana.zlatanovska@ugd.edu.mk limonka.lazarova@ugd.edu.mk