УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ" СКОПЈЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА

ЈАСМИНА ВЕТА БУРАЛИЕВА

АСИМПТОТСКА АНАЛИЗА НА ДИСТРИБУЦИИ СО КОРИСТЕЊЕ ИНТЕГРАЛНИ ТРАНСФОРМАЦИИ И РАМКИ

– докторска дисертација –

Скопје, 2019

Ментор:

Проф. д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева
Факултет за електротехника и информациски технологии
Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје

Членови на комисија:

1. Проф. д-р Никита Шекутковски
   Природно-математички факултет
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје

2. Проф. д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева
   Факултет за електротехника и информациски технологии
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје

3. Проф. д-р Весна Манова-Ераковиќ
   Природно-математички факултет
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје

4. Проф. д-р Билјана Јолевска-Тунеска
   Факултет за електротехника и информациски технологии
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" во Скопје

5. Вонр. проф. д-р Диана Стоева
   Факултет за математика, Универзитет во Виена

Јасмина Вета Буралиева

АСИМПТОТСКА АНАЛИЗА НА ДИСТРИБУЦИИ СО КОРИСТЕЊЕ ИНТЕГРАЛНИ ТРАНСФОРМАЦИИ И РАМКИ

– докторска дисертација –

Апстракт:

Во оваа докторска дисертација направена е карактеризација на некои асимптотски однесувања на одредени дистрибуции преку асимптотиката на насочената кратковремена Фурјеова трансформација и Стоквеловата трансформација. Покрај ова, анализирани се и некои обопштени асимптотики на темперираните дистрибуции во однос на полиномно локализирани рамки.

Докажан е Абелов резултат кој ја поврзува квазиасимптотската ограниченост на темперираните дистрибуции со квазиасимптотската ограниченост на нивната насочена кратковремена Фурјеова трансформација. Исто така, докажани се неколку Абелови и Тауберови теореми кои го карактеризираат квазиасимптотското однесување на темперираните дистрибуции преку нивната насочена кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока.

Анализирана е непрекинатоста на Стоквеловата трансформација и Стоквеловиот оператор на синтеза над просторите од високо временско-фреквенциско локализирани функции над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, соодветно. Направената анализа овозможи да ја прошириме Стоквеловата трансформација над просторот од Лизоркинови дистрибуции, $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, што е важен резултат за нашата асимптотска анализа. Докажани се неколку Абелови и Тауберови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување на Лизоркиновите дистрибуции со асимптотиката на нивната Стоквелова трансформација.

Разгледани се дуалните простори на Фрешеови простори добиени како проективна граница на Банахови простори, специјално, просторот од темперирани дистрибуции и направена е тополошка карактеризација на овие простори преку полиномно локализирани рамки. Овие резултати се применети за докажување Тауберови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување и квазиасимптотската ограниченост на темперираните дистрибуции со асимптотиката на коефициентите од нивните развои во однос на полиномно локализирани рамки. Докажани се и Абелови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување на темперираните дистрибуции во Фурјеов домен со асимптотиката на нивните рамка-коефициенти.

Клучни зборови: дистрибуции, квазиасимптотика, квазиасимптотско однесување, насочена кратковремена Фурјеова трансформација, Стоквелова трансформација, полиномно локализирани рамки.

Jasmina Veta Buralieva

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF DISTRIBUTIONS USING INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND FRAMES

– doctoral dissertation –

Abstract:

In this doctoral dissertation, we characterize the asymptotic behavior of certain distributions in terms of their directional short-time Fourier transform and Stockwell transform. Also, we analyse some generalized asymptotics of tempered distributions via polinomially localized frames.

We prove an Abelian type result that relates the quasiasymptotic boundedness of tempered distributions to the quasiasymptotic boundedness of their directional short-time Fourier transform. We also prove several Abelian and Tauberian theorems that characterize the quasyasimptotic behaviour of tempered distributions in terms of their directional short-time Fourier transform with fixed direction.

We analyse the continuity of the Stockwell transform and the corresponding synthesis operator on the spaces of highly localized test functions over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, respectively. Using the obtained continuity results we extend the Stockwell transform on the space of Lizorkin distributions $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$, which is important result for our asymptotic analysis. We also prove several Abelian and Tauberian theorems that relate the quasiasymptotic behavior of Lizorkin distributions with the asymptotics of their Stockwell transform.

We consider the dual spaces of Fréchet spaces obtained as a projective limit of Banach spaces, in particular, the space of tempered distributions, and provide topological characterization of them via polynomially localized frames. Further, we apply these results to prove Tauberian theorems that characterize the quasiasymptotic behaviour and quasiasymptotic boundedness of tempered distributions via coefficients based on polynomially localized frames. Also, we provide Abelian theorems that relate the quasiasymptotic behaviour of tempered distributions in Fourier domain with the asymptotics of their frame coefficients.

Key words: distributions, quasiasymptotic behavior, quasiasymptotic boundedness, directional short-time Fourier transform, Stockwell transform, polinomially localized frames.

Содржина

Вовед

Теоријата на дистрибуции настанала како резултат на потребата да се најде правилен математички пристап и апарат преку кој ќе се определат математичките решенија на моделите на разни процеси, кои не биле правилно и јасно математички засновани. Истражувањата на математичарите и физичарите во XIX век довеле до заклучок дека функциите и операциите со нив од класичната анализа не се доволни за поставување и решавање математички модели кои опишуваат феномени од природата. На пример, интуитивната примена на добро познатата Диракова делта "функција",

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

вообичаено давала погрешни заклучоци. Од друга страна пак, во инженерството се појавила потреба да се дефинира најшироката класа од функции во кои Лапласовата и Фурјеовата трансформација се добро дефинирани. Како резултат на овие потреби и согледувања, имало многу обиди за обопштување на поимот функција, од кои најзначајно место имаат резултатите на Соболев. Од друга страна пак, Шварц (L. Schwartz) прв публикувал систематизирана теорија за една класа од обопштени функции (дистрибуции), [87].

Постојат неколку пристапи кон теоријата на дистрибуции, но ние ќе го разгледуваме и користиме пристапот на Шварц-Соболев, каде теоријата на дистрибуции е воведена како дел од дуалната теорија на локално конвексни простори. Она што е заедничко за сите пристапи кон теоријата на дистрибуции е фактот дека дистрибуциите немаат вредност во дадена точка, како што е случај со функциите, па поради тоа тие се наречени обопштени функции. Лојашевич (S. Lojasiewicz) [52, 53] е првиот кој дал дефиниција за вредност на дистрибуција во точка. Барањата на модерната математика и математичката физика потикнале да се искористат идеите од класичната асимптотска анализа во теоријата на обопштените функции и обратно.

Во изминатите пет децении, бројни дефиниции за асимптотско однесување на дистрибуции (т.н. обопштени асимптотики) биле елаборирани и применети на конкретни проблеми во применетата математика и математичката физика. Голем дел од овие теории и нивната примена можат да се најдат во [21, 63, 65, 100]. Најискористени обопштени асимптотики се: квазиасимптотиката, Чезаровото однесување и S-асимптотиката. Квазиасимптотиката претставува природно обопштување на поимот вредност на дистрибуција во точка (во смисла на Лојашевич), а Чезаровото однесување претставува специјален случај на квазиасимптотското однесување. Мотивацијата за воведување на поимот квазиасимптотика потекнува од теоретските прашања кои произлегле од теоријата на квантни полиња, каде подоцна бил ефективно применет, [16, 17, 100, 103]. Квазиасимптотската теорија е воведена и развиена од Владимиров, Дрожинов и Завиалов [100], а голем придонес во нејзиниот развој дал и Пилиповиќ и неговите соработници [57, 58, 60, 61, 63, 65, 93, 94, 96], додека S-асимптотиката била воведена од Пилиповиќ и Станковиќ, [59, 60, 61, 63, 65]. Изучувањето на структурните теореми во квазиасимптотската анализа секогаш било од голем интерес, [53, 60, 63, 93, 94, 98, 100]. Владимиров и неговите соработници ги дале првите обопштени структурни теореми [100], додека Пилиповиќ, Станковиќ и Виндас (J. Vindas) [60, 63, 65, 93, 94, 98] дале комплетна структурна карактеризација на квазиасимптотиките на Шварцовите дистрибуции (во една димензија).

Обопштените асимптотики досега се применети во испитување на асимптотското однесување на повеќе интегрални трансформации: Фурјеовата, Лапласовата, Стилтјесовата, Ваерштрасовата, Мелиновата, вејвлет, кратковремената Фурјеова (short-time Fourier transform), ridglet, Радон трансформација. Голем број резултати од Абелов и Тауберов тип за овие видови трансформации може да се најдат во [43, 44, 45, 47, 58, 63, 64, 70, 71, 78, 80, 83, 84, 85, 99]. Во [42] може да се најдат повеќе детали за Абеловата и Тауберовата теорија. Поимот Абелова или директна теорема, вообичаено се однесува на оние резултати кои даваат асимптотски информации по извршувањето на интегралната трансформација на обопштената функција. Додека Тауберова теорема е "обратна" теорема на Абеловата, во која вообичаено е потребна дополнителна претпоставка, таканаречена Тауберова хипотеза. Тауберовите резултати вообичаено се многу потешки за покажување во споредба со Абеловите.

Во оваа докторска дисертација направена е карактеризација на некои асимптотски однесувања на одредени дистрибуции преку асимптотиката на насочената кратковремена Фурјеова трансформација и Стоквеловата трансформација. Покрај ова, анализирани се некои обопштени асимптотики на темперираните дистрибуции во однос на полиномно локализирани рамки.

Во првата глава од докторската дисертација даден е краток преглед на познати резултати од теоријата на дистрибуции, обопштени асимптотики и теоријата на рамки кои се користат во истражувањата во рамки на докторската дисертација. Дефинирани се различни простори од основни (тест) функции и нивните соодветни дуални простори (простори од дистрибуции). Исто така, изложена е дел од теоријата на правилно променливи функции во нула и во бесконечност, кои имаат централна улога во асимптотската анализа на дистрибуции. Освен дефинициите за квазиасимптотско однесување и квазиасимптотска ограниченост дадени се и најважните теореми и тврдења преку кои се опишани особините на овој вид асимптотики на дистрибуции. На крајот, дефинирани се основните поими и теореми од теоријата на рамки кои ги користиме во глава 4, а илустрирана е и идејата за дефинирање на поимот рамка во Хилбертов, Банахов и Фрешеов простор.

Графакос (L. Grafakos) и Сансинг (C. Sansing) во [29] ја даваат идејата за локализација на информацијата не само во време и фреквенција, туку истовремено и во насока, со тоа што дефинираат "чувствителна" варијанта на кратковремената Фурјеова трансформација во однос на насоката, која тие ја нарекуваат насочена кратковремена Фурјеова трансформација (directional short-time Fourier transform или кратко DSTFT). Неколку години подоцна Гив (H. Giv) во [28] дал малку поразлична варијатна на оваа насочена кратковремена Фурјеова трансформација, од која биле инспирирани авторите на [81], проширувајќи ја оваа трансформација над просторот од темперирани дистрибуции $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Од друга страна пак, со цел да се воведе и анализира насочен бранов фронт (directional wave front) за темперирани и експоненцијални дистрибуции, во [4] е дефинирана насочена кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока над просторот од квадратно интеграбилни функции, а разгледано е и нејзиното проширување над просторот од темперирани и експоненцијални дистрибуции.

Во глава 2 од оваа докторска дисертација направена е карактеризација на асимптотските особини на дистрибуциите преку нивната насочена кратковремена Фурјеова трансформација. Притоа, добиен е Абелов резултат кој ја поврзува квазиасимптотската ограниченост на темперираните дистрибуции со квазиасимптотската ограниченост на нивната DSTFT, а докажани се и неколку Абелови и Тауберови теореми преку кои е направена карактеризација на квазиасимптотското однесување на темперираните дистрибуции во однос на нивната DSTFT со фиксна насока.

Во изминативе неколку децении кратковремената Фурјеова трансформација (STFT) и вејвлет трансформацијата биле интензивно истражувани. Литература која најмногу е поврзана со оваа проблематика и која најмногу се цитира се книгите на Грохенинг (K. Gröchening) [31] и Холшнајдер (M. Holshnajder), [36]. Заради тоа што STFT е дефинирана за фиксен прозорец g, се покажало дека оваа трансформација има слабо временско-фреквенциска резолуција. Корекцијата на овој недостаток била идеја за воведување на вејвлет трансформацијата. Временско-фреквенциската репрезентација откриена од страна на Стоквел во [89] претставува хибрид помеѓу STFT и вејвлет трансформацијата која ги комбинира нивните добри особини. Оваа трансформација е наречена Стоквелова или S-трансформација, и истата се смета како фреквенциско зависна STFT или како корекција на фазата на вејвлет трансформацијата.

Во глава 3 од оваа докторска дисертација направена е целосна анализа на Стокевеловата трансформација и Стоквеловиот оператор на синтеза над просторот од високо временско-фреквенциско локализирани функции над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, соодветно. Главните резултати се теоремите за непрекинатост над овие простори кои ѝ овозможија да ја дефинираме Стоквеловата трансформација над просторот од Лизоркинови дистрибуции, т.е. за елементите од просторот $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$. Ова проширување ни овозможи да направиме асимптотска анализа на дистрибуции преку овој вид трансформација. Притоа докажани се неколку Абелови и Тауберови теореми кои го карактеризираат асимптотското однесување на Лизоркиновите дистрибуции во однос на асимптотиката на нивната Стоквелова трансформација. Добиените резултати може да бидат искористени како ефективна локализирачка алатка во електротехниката, геофизиката и многу други области при испитување на структурата на големи множества на податоци собрани преку Стоквелова анализа.

Рамките како обопштување на ортонормираните бази најпрво биле воведени во Хилбертов простор, [18]. Притоа биле направени многу обиди за да се прошири теоријата на рамки и во други простори, па како резултат на тоа многу типови рамки, како на пример

Банахови рамки [23, 24, 30], p-рамки [2], X_d-рамки [9], Фрешеови и обопштени Фрешеови рамки [67, 68, 69], се воведени и проучувани со цел да карактеризираат различни функционални простори.

Грохенинг во [32] го воведува концептот на локализирани рамки во однос на Ризова база. Оваа особина на локализираност на рамката овозможува истата да биде проширена од Хилбертов во соодветниот Банахов простор. Ова е многу важно бидејќи конструкцијата на рамки во Хилбертов простор е многу поедноставна од конструкцијата на Банахова рамка. Главниот резултат на Грохенинг е дека рамка-операторот ја зачувува локализацијата и уште повеќе дека соодветната дуална рамка ги поседува истите особини на локализација како и оригиналната рамка. Интересна алтернатива за дефинирање на локализација на рамка е предложена во [5], каде споредбата со Ризова база не е потребна и овој вид на локализација е наречен вродена или само-локализација на рамка. Трудот [5] содржи интересно истражување на соодветните коорбит простори за локализирани рамки и важни врски меѓу нив.

Во [67, 69] е воведен концептот на пред-Фрешеови рамки и Фрешеови рамки, а исто така конструирани се и репрезентации преку рамка во Фрешеов простор и во неговиот дуален простор, добиени како проективна и индуктивна граница на Банахови простори. Уште повеќе, во [68] се дадени условите за развој во ред во општ Фрешеов простор со користење на соодветна локализирана рамка. Потоа, авторите на [68] овие резултати ги применуваат и добиваат развои во однос на рамка (рамка-развои) во просторот од темперирани дистрибуции и ултрадистрибуции во однос на ермитска база.

Една од целите на истражување на оваа докторска дисертација беше и асимптотската анализа на темперираните дистрибуции преку коефициентите на полиномно локализирани рамки. Со цел да го проучиме квазиасимптотското однесување и квазиасимптотската ограниченост на темперираните дистрибуции, во поглавје 4.2. од оваа докторска дисертација направена е тополошка карактеризација на дуалниот простор на Фрешеов простор (специјално на просторот од темперирани дистрибуции) преку коефициентите од нивните развои во однос на полиномно локализирани рамки. Покажано е дека коефициент-операторот претставува тополошки изоморфизам помеѓу Фрешеовиот простор и неговата слика, како и помеѓу дуалниот простор на Фрешеовиот простор и неговата слика. Исто така, важна техничка алатка во доказите на нашите Тауберови теореми во поглавје 4.4. е и карактеризацијата на ограничени множества и конвергенција на мрежи од темперирани дистрибуции преку коефициентите од нивните развои во однос на полиномно локализирана рамка. Докажани се и Абелови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување на темперираните дистрибуции во однос на коефициентите од нивниот развој преку полиномно локализирани рамки во Фурјеов домен.

Оваа докторска дисертација содржи еден додаток насловен како "Познати резултати од реална и функционална анализа", во кој се дадени основни поими, ознаки, дефиниции и теореми од реална и функционална анализа кои ги користиме во останатите глави од докторската дисертација.

Ознаки

Ω	отворено подмножество од $\mathbb{R}$
$C^m(\mathbb{R})$	простор од комплексно вредносни функции над $\mathbb{R}$ чии изводи до $m-$ти ред се непрекинати, $m \in \mathbb{N}_0$
$C^\infty(\mathbb{R})$	простор од бесконечно диференцијабилни функции над $\mathbb{R}^n$ (глатки функции над $\mathbb{R}$)
$C^m(\Omega)$	простор од комплексно вредносни функции над Ω чии изводи до $m-$ти ред се непрекинати, $m \in \mathbb{N}_0$
$C^\infty(\Omega)$	простор од бесконечно диференцијабилни функции над Ω (глатки функции над Ω)
$C_0^m(\Omega)$	потпростор од $C^m(\Omega)$ чии елементи имаат компактен носач во Ω, $m \in \mathbb{N}_0$
$C_0^\infty(\Omega)$	потпростор од $C^\infty(\Omega)$ чии елементи имаат компактен носач во Ω
$C_0^m(K)$	потпростор од $C^m(\Omega)$ чии елементи имаат носач кој се содржи во компактното множество $K \subset \Omega, m \in \mathbb{N}_0$
$C_0^\infty(K)$	потпростор од $C^\infty(\Omega)$ чии елементи имаат носач кој се содржи во компактното множество $K \subset \Omega, m \in \mathbb{N}_0$
$L^1(\mathbb{R})$	простор од апсолутно интеграбилни функции над $\mathbb{R}$
$L^1_{loc}(\mathbb{R})$	простор од локално интеграбилни функции над $\mathbb{R}$
$L^2(\mathbb{R})$	простор од квадратно интеграбилни функции над $\mathbb{R}$

$D(\Omega)$	локално конвексен простор $C_0^\infty(\Omega)$ (простор од основни или тест функции)
$D'(\Omega)$	простор од непрекинати линеарни функционали над $D(\Omega)$ (простор од дистрибуции)
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	простор од брзо опаѓачки функции над $\mathbb{R}$
$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	простор од темперирани дистрибуции или дистрибуции со спор раст
$\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$	потпростор од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ кој ги содржи оние функции φ за кои $\mathrm{supp}\widehat{\varphi} \subset [0,\infty)$ (простор од прогресивни високо локализирани функции во временски и фреквентен домен
$\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$	потпростор од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ кој ги содржи оние функции φ за кои $\mathrm{supp}\widehat{\varphi} \subset (-\infty,0]$ (простор од регресивни високо локализирани функции во временски и фреквентен домен)
$\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$	простор од Лизоркинови тест функции (простор од високо локализирани функции во временски и фреквентен домен)
$\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$	простор од темперирани дистрибуции со носач кој се содржи во $[0,\infty)$
$\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$	простор од темперирани дистрибуции со носач кој се содржи во $(-\infty,0]$
$\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$	простор од Лизоркинови дистрибуции (дуален простор на просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$)
$\mathcal{H}$	Хилбертов простор
l^2	простор од бесконечни низи од реални (комплексни) броеви $(c_n)_{n=1}^\infty$ така што $\sum_{n=1}^\infty \lvert c_n\rvert^2 < \infty$
l^p_μ	простор од бесконечни низи од реални (комплексни) броеви $(c_n)_{n=1}^\infty$ со тежини μ така што $\sum_{n=1}^\infty \lvert c_n\rvert^p \mu(n)^p < \infty$
$\mathcal{E}$	$= (e_n)_{n=1}^\infty$, рамка за Хилбертов простор $\mathcal{H}$
$C_{\mathcal{E}}$	оператор на анализа (коефициент-оператор) за рамката $\mathcal{E}$

$D_{\mathcal{E}}$	оператор на синтеза за рамката $\mathcal{E}$
$S_{\mathcal{E}}$	рамка-оператор за рамката $\mathcal{E}$
$S_{\mathcal{E}}^{-1}$	инверзен оператор на рамка-операторот $S_{\mathcal{E}}$
$(\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty}$	дуална рамка на рамката $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ за Хилбертов простор $\mathcal{H}$
$(S_{\mathcal{E}}^{-1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$	канонично дуална рамка на рамката $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ за Хилбертов простор $\mathcal{H}$
M_a	оператор на модулација, $M_a f(\cdot) = e^{2\pi i a \cdot} f(\cdot)$ (или $M_a f(\cdot) = e^{ia\cdot} f(\cdot)$)
$D_{\frac{1}{a}}$	оператор на дилатација, $D_{\frac{1}{a}} f(\cdot) = \lvert a\rvert f(a\cdot)$
T_b	оператор на транслација, $T_b f(\cdot) = f(\cdot - b)$
$(f,\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$	скаларен производ помеѓу f и φ во просторот $L^2(\mathbb{R}^n)$, $(f,\varphi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\varphi}(x)dx$
$\langle f,\varphi\rangle$	дуално спарување помеѓу дистрибуцијата f и тест функцијата φ
$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$	Фурјеова трансформација на f
$\mathcal{F}^{-1}(f) = f^{\vee}$	инверзна Фурјеова трансформација на f
$V_g f$	кратковремена Фурјеова трансформација на f во однос на прозорец g
$W_g f$	вејвлет трансформација на f во однос на прозорец g
$DS_g f$	насочена кратковремена Фурјеова трансформација на f во однос на прозорец g
$D_g^* F$	насочен оператор на синтеза на F во однос на прозорец g
$DS_{g,u} f$	насочена кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока u на f во однос на прозорец g

$D^*_{g,u}F$	насочен оператор на синтеза на F со фиксна насока u во однос на прозорец g
$S_g f$	Стоквелова трансформација на f во однос на прозорец g
$S^*_g F$	Стоквелов оператор на синтеза на F во однос на прозорец g
c	правилно променлива функција
L	бавно променлива функција

Глава 1

Основни поими и познати резултати од теорија на дистрибуции и теорија на рамки

Оваа глава е поделена на три поглавја. Првото поглавје е посветено на просторите од дистрибуции. Во него ќе биде дефиниран просторот од основни или тест функции и неговиот дуален простор, т.е. просторот од дистрибуции, а ќе бидат дадени и некои важни особини на овие простори. Понатаму ќе бидат разгледани просторите од дистрибуции во кои работиме: просторот од брзо опаѓачки функции и неговиот дуален простор, т.е. просторот од темперирани дистрибуции, како и просторот од Лизоркинови тест функции и неговиот дуален простор, т.е. просторот од Лизоркинови дистрибуции. Второто поглавје е посветено на асимптотската анализа на дистрибуции (обопштена асимптотска анализа). Во ова поглавје ќе бидат дефинирани квазиасимптотиката (квазиасимптотското однесување) и квазиасимптотската ограниченост на дистрибуции, како и поимите правилно и бавно променливи функции во однос на кои се разгледуваат асимптотските однесувања на дистрибуциите. Во третото поглавје се изложени основните поими и познати резултати од теоријата на рамки, кои ќе ни бидат потребни при асимптотската анализа на темперираните дистрибуции преку полиномно локализирани рамки.

Некои од поимите, ознаките, дефинициите и теоремите од реална и функционална анализа на кои се повикуваме во оваа глава можат да се најдат во додатокот А на докторската дисертација.

1.1. Простор од дистрибуции

Во ова поглавје ќе дадеме краток вовед во теоријата на дистрибуции, поточно ќе се задржиме на оние аспекти кои се значајни за нивната асимптотска анализа. Постојат повеќе пристапи кон теоријата на дистрибуции, но ние ќе го следиме пристапот на Шварц-Соболев, во кој теоријата на дистрибуции е воведена како дел од дуалната теорија на локално конвексните простори или познат како функционален приод. Детална теорија за просторот од дистрибуции може да се најде во [3, 62, 87].

Најпрво ќе биде прикажана тополошката структура на просторот од основни или тест функции.

Нека Ω е отворено непразно подмножество од Евклидскиот простор $\mathbb{R}$, снабден со вообичаената топологија. Ω е потпростор од $\mathbb{R}$ со индуцирана топологија од $\mathbb{R}$ чии отворени множества се истовремено отворени и во $\mathbb{R}$. Секое компактно подмножество од Ω е компактно и во $\mathbb{R}$, бидејќи фамилијата од отворени множества која го покрива просторот Ω е фамилија од отворени множества и во $\mathbb{R}$.

Со $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ или $m = \infty$, го означуваме множеството од комплексно вредносни функции дефинирани над Ω чии изводи до m-ти ред се непрекинати. За $m = 0$ го добиваме множеството $C^0(\Omega)$ од непрекинати функции над Ω, а за $m = \infty$ множеството $C^\infty(\Omega)$ од бесконечно диференцијабилни функции над Ω (глатки функции). Притоа,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(\Omega),$$

и важат следниве инклузии:

$$C^\infty(\Omega) \subset \cdots \subset C^m(\Omega) \subset C^{m-1}(\Omega) \subset \cdots \subset C^0(\Omega).$$

Во множеството $C_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$ или $m = \infty$, припаѓаат оние функции од $C^m(\Omega)$ кои имаат компактен носач во Ω. Од горната забелешка за компактни множества во Ω следува дека $C_0^m(\Omega) \subset C_0^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$ или $m = \infty$. Нека $f \in C_0^m(\Omega)$. Функцијата g ја дефинираме на следниов начин: $g = f$ над Ω и $g = 0$ над $\mathbb{R} \setminus \Omega$. Тогаш $g \in C_0^m(\mathbb{R})$ припаѓа и на множеството $C_0^m(\Omega)$ ако и само ако $\mathrm{supp} f \subset \Omega$.

Со вообичаените операции собирање и множење со комплексен број, множествата $C^m(\Omega)$ и $C_0^m(\Omega)$ $m \in \mathbb{N}_0$ или $m = \infty$, се векторски простори над полето комплексни броеви $\mathbb{C}$.

Нека K е компактно подмножество од Ω. Со $C_0^m(K)$, $m \in \mathbb{N}_0$ или $m = \infty$, го означуваме потпросторот од $C_0^m(\Omega)$ чии елементи имаат носач кој се содржи во K. Тополoгијата на просторот $C_0^\infty(K)$ е дефинирана преку полунормите $\rho_{K,m}(\varphi) = \sum_{\alpha \leq m} \sup_{x \in K} |\varphi^{(\alpha)}(x)|$, $m \in \mathbb{N}_0$, а множествата $V_{K,m} = \{\varphi \in C_0^\infty(K) : \rho_{K,m}(\varphi) < \frac{1}{\nu}\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ формираат една база од околини на нулата. Векторскиот простор $C_0^\infty(K)$ снабден со оваа тополoгија е локално конвексен простор (види теорема А.0.8) кој се означува со $\mathcal{D}(K)$. Локално конвексниот простор $\mathcal{D}(K)$ е Фрешеов и бочваст простор, [62, Теорема 1.3] (за дефиниција на локално конвексен тополошки простор, Фрешеов и бочваст простор види дефиниција А.0.29, А.0.31 и А.0.25 во додатокот, соодветно).

Ако K_1 и K_2 се две компактни множества такви што $K_1 \subset K_2$, тогаш $C_0^\infty(K_1) \subset C_0^\infty(K_2)$, и уште тополoгијата во $\mathcal{D}(K_1)$ се поклопува со тополoгијата која $\mathcal{D}(K_2)$ ја индуцира на $\mathcal{D}(K_1)$. За отвореното непразно подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}$ може да се конструира низа $\{K_j\}_{j=1}^\infty$ од компактни множества за кои важи $K_j \subset K_{j+1}$ и $\cup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$. Ако идентичните сместувања $i_{j+1}^j : C_0^\infty(K_j) \to C_0^\infty(K_{j+1})$ за $\forall j \in \mathbb{N}$ се непрекинати, тогаш низата $\{C_0^\infty(K_j)\}_{j=1}^\infty$ се нарекува индуктивна низа, а просторот

$$C_0^\infty(\Omega) = \cup_{K_j \subset \Omega} C_0^\infty(K_j)$$

е индуктивна граница на низата од локално конвексни простори $(\mathcal{D}(K_j))_{j=1}^\infty$, а ги содржи сите бесконечно диференцијабилни функции над Ω со компактен носач. Векторскиот простор $C_0^\infty(\Omega)$ снабден со најфината тополoгија за која идентичните пресликувања $C_0^\infty(K_j) \to C_0^\infty(\Omega)$ за $\forall j \in \mathbb{N}$ се непрекинати, се означува со $\mathcal{D}(\Omega)$, и е наречен простор од *основни* или *тест функции.*

Во наредната теорема се дадени неколку својства на просторот од тест функции $\mathcal{D}(\Omega)$.

Теорема 1.1.1. [62, Теорема 1.4] Нека Y е локално конвексен простор.

(i) Линеарното пресликување $T : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ е непрекинато ако и само ако пресликувањата $T : \mathcal{D}(K) \to Y$ се непрекинати за секое компактно подмножество $K \subset \Omega$.

(ii) Множеството $A \subset \mathcal{D}(\Omega)$ е ограничено ако и само ако постои компактно подмножество $K \subset \Omega$ така што $A \subset \mathcal{D}(K)$ и A е ограничено во $\mathcal{D}(K)$

(iii) Низата $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ од $\mathcal{D}(\Omega)$ конвергира во $\mathcal{D}(\Omega)$ ако и само ако постои компактно множество $K \subset \Omega$ така што низата $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ припаѓа и конвергира во $\mathcal{D}(K)$.

За карактеризација на ограничено множество од локално конвексен простор види го тврдењето A.0.6 во додатокот.

Во [62, Теорема 1.5] е покажано дека секое затворено и ограничено множество во $\mathcal{D}(\Omega)$ е компактно. Просторот $\mathcal{D}(\Omega)$ е бочваст и Монтелов простор, [62, стр. 27] (Монтелов простор е дефиниран во дефиниција A.0.37 во додатокот).

Непрекинат линеарен функционал над просторот од основни функции, $\mathcal{D}(\Omega)$ се нарекува *дистрибуција.* Просторот од дистрибуции е означен со $\mathcal{D}'(\Omega)$. Всушност, дистрибуцијата f е непрекинато и линеарно пресликување од просторот $\mathcal{D}(\Omega)$ во полето на комплексни броеви $\mathbb{C}$, кое симболички можеме да го запишеме како

$$f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Во наредната теорема е даден потребен и доволен услов за да еден линеарен функционал е дистрибуција.

Теорема 1.1.2. [62, Теорема 2.2] Линеарниот функционал $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ е дистрибуција ако и само ако за секое компактно подмножество $K \subset \Omega$ постои контанта $C > 0$ и $m \in \mathbb{N}_0$ такви што за секое $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ важи

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \rho_{K,m}(\varphi). \tag{1.1.1}$$

Нека за дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ постои најмал број $m \in \mathbb{N}_0$ таков што (1.1.1) важи за секое компактно множество $K \subset \Omega$. Тогаш бројот m се нарекува *ред на дистрибуцијата* f, и дистрибуцијата f е од конечен ред m. Ако дистрибуцијата f не е од конечен ред, тогаш велиме дека f е од бесконечен ред.

Во просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\Omega)$ воведени се: слаба топологија τ_s, јака топологија τ_b и топологија на компактна конвергенција τ_k, [62, стр.34]. *Слабата топологија* е дефинирана со следнава фамилија од полунорми:

$$\rho_{\varphi}(f) = |\langle f, \varphi \rangle|, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega); \tag{1.1.2}$$

топологијата на компактна конвергенција е дефинирана со фамилијата од полунорми:

$$\rho_K(f) = \sup\{|\langle f, \varphi\rangle|,\ \varphi \in K\}, \tag{1.1.3}$$

каде што K е компактно подмножество од $\mathcal{D}(\Omega)$; и *јаката* (*силната*) *топологија* е дефинирана со фамилијата од полунорми:

$$\rho_B(f) = \sup\{|\langle f, \varphi\rangle|,\ \varphi \in B\}; \tag{1.1.4}$$

каде што B е ограничено подмножество од $\mathcal{D}(\Omega)$.

Тврдење 1.1.1. Просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\Omega)$ е локално конвексен простор.

Доказ: Базата од околини на нулата во просторот $\mathcal{D}'(\Omega)$, во однос на слабата топологија е фамилија од множества во облик

$$W_\varepsilon(\varphi_1, ..., \varphi_r) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) | |\langle f, \varphi_j\rangle| \leq \varepsilon,\ j = 1, ..., r\},\ \varepsilon > 0, \tag{1.1.5}$$

каде што $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ е конечно подмножество од $\mathcal{D}(\Omega)$ (види [91, стр. 197]).

Ќе покажеме дека $W_\varepsilon(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ е конвексно множество. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ е произволна тест функција. Најпрво ќе покажеме дека околината на нулата $W_\varepsilon(\varphi) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) | |\langle f, \varphi\rangle| \leq \varepsilon,\ \}, \varepsilon > 0$ е конвексно множество. Нека $f, g \in W_\varepsilon(\varphi)$, т.е.

$$f, g \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ и } |\langle f, \varphi\rangle| \leq \varepsilon, \quad |\langle g, \varphi\rangle| \leq \varepsilon. \tag{1.1.6}$$

Просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\Omega)$ е векторски простор во однос на вообичаените операции: собирање на дистрибуции, т.е. $\langle f, \varphi\rangle + \langle g, \varphi\rangle = \langle f + g, \varphi\rangle$, за $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, и множење со скалар $c \in \mathbb{C}$, т.е. $c\langle f, \varphi\rangle = \langle cf, \varphi\rangle$, (види [62, стр. 30]).

Па, за $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $t \in [0, 1]$ имаме $t\langle f, \varphi\rangle + (1-t)\langle g, \varphi\rangle = \langle tf, \varphi\rangle + \langle (1-t)g, \varphi\rangle = \langle tf + (1-t)g, \varphi\rangle$, т.е. $tf + (1-t)g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и уште

$$\begin{aligned} |\langle tf + (1-t)g, \varphi\rangle| &= |\langle tf, \varphi\rangle + \langle (1-t)g, \varphi\rangle| \\ &= |t\langle f, \varphi\rangle + (1-t)\langle g, \varphi\rangle| \\ &\leq t|\langle f, \varphi\rangle| + (1-t)|\langle g, \varphi\rangle| \\ &\leq t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Односно, $tf + (1-t)g \in W_\varepsilon(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), t \in [0, 1], \varepsilon > 0$, т.е. $W_\varepsilon(\varphi)$ е конвексно множество.

Сега, нека $W_\varepsilon(\varphi_1), W_\varepsilon(\varphi_2), ..., W_\varepsilon(\varphi_r)$ се конвексни множества. Нека $f_1, f_2 \in W_\varepsilon(\varphi_1) \cap W_\varepsilon(\varphi_2)$, кое повлекува дека $f_1, f_2 \in W_\varepsilon(\varphi_1)$ и $f_1, f_2 \in$

$W_\varepsilon(\varphi_2)$. Од конвексноста на $W_\varepsilon(\varphi_1)$ и $W_\varepsilon(\varphi_2)$ имаме дека за $t \in [0,1]$ важи

$$tf_1 + (1-t)f_2 \in W_\varepsilon(\varphi_1)$$

и

$$tf_1 + (1-t)f_2 \in W_\varepsilon(\varphi_2),$$

т.е.

$$tf_1 + (1-t)f_2 \in W_\varepsilon(\varphi_1) \cap W_\varepsilon(\varphi_2), \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), t \in [0,1], \varepsilon > 0,$$

кое повлекува дека $W_\varepsilon(\varphi_1) \cap W_\varepsilon(\varphi_2)$ е конвексно множество. Ако сега ги разгледаме конвексните множества $W_\varepsilon(\varphi_1) \cap W_\varepsilon(\varphi_2)$ и $W_\varepsilon(\varphi_3)$ на сличен начин се добива дека множеството $W_\varepsilon(\varphi_1) \cap W_\varepsilon(\varphi_2) \cap W_\varepsilon(\varphi_3)$ е конвексно. Па, ако продолжиме понатаму на сличен начин се добива дека $W_\varepsilon(\varphi_1, ..., \varphi_r) = \cap_{j=1}^r W_\varepsilon(\varphi_j)$ е конвексно множество. $\square$

Сите овие фамилии од полунорми (1.1.2), (1.1.3) и (1.1.4) разделуваат точки, и индуцираат Хаусдорфови топологии. Од тоа што секое конечно множество е компактно, а секое компактно множество во $\mathcal{D}(\Omega)$ е ограничено следува дека $\tau_s \leq \tau_k \leq \tau_b$. Покрај тоа топологиите τ_k и τ_b во $\mathcal{D}'(\Omega)$ се еднакви, [62, Теорема 2.4].

Тврдење 1.1.2. Нека $(f_n)_{n=1}^\infty$ е низа во $\mathcal{D}'(\Omega)$. Низата $(f_n)_{n=1}^\infty$ *конвергира кон* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *кога* $n \to \infty$ *во однос на слабата топологија во* $\mathcal{D}'(\Omega)$ ако $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, низата од комплексни броеви $(\langle f_n, \varphi \rangle)_{n=1}^\infty$ конвергира кон $\langle f, \varphi \rangle$ во множеството на комплексни броеви $\mathbb{C}$.

Доказ: Слабата топологија во просторот $\mathcal{D}'(\Omega)$ е дефинирана со фамилијата од полунорми (1.1.2), па од тврдењето 1.1.1 просторот $\mathcal{D}'(\Omega)$ е локално конвексен во кој базата од околини на нулата во однос на слабата топологија ги содржи множествата (1.1.5).

Ќе ја разгледаме конвергенција на низата $(f_n - f)_{n=1}^\infty$ кон 0 во $\mathcal{D}'(\Omega)$ како конвергенција на низа во тополошки простор (види на пример, [104, стр. 41]), т.е. $(f_n - f)_{n=1}^\infty \to 0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ако за секоја околина $W_\varepsilon(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ на нулата постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за секое $n \geq n_0$, $f_n - f \in W_\varepsilon(\varphi_1, ..., \varphi_r)$, т.е. $|\langle f_n - f, \varphi_j \rangle| \leq \varepsilon,\ j = 1, ..., r$. Од овде добиваме дека

$$|\langle f_n, \varphi_j \rangle - \langle f, \varphi_j \rangle| \leq \varepsilon,\ j = 1, ..., r, \tag{1.1.7}$$

односно добиваме конвергеницијa на низите од комплексни броеви $(\langle f_n, \varphi_j \rangle)_{n=1}^\infty$ $j = 1, .., r$, во $\mathbb{C}$. Сега, бидејќи конечното подмножество $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ од $\mathcal{D}(\Omega)$ е произволно избрано можеме да заклучиме дека за секое конечно подмножество од $\mathcal{D}(\Omega)$ важи (1.1.7), кое пак повлекува дека за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ низата од комплексни броеви $(\langle f_n, \varphi\rangle)_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна во $\mathbb{C}$.

$\square$

Тврдењето 1.1.2 често се зема за дефиниција на слаба конвергенција на низа од дистрибуции.

Понатаму ќе дадеме дефиниција за јака конвергенција на низа од дистрибуции.

Дефиниција 1.1.1. Нека $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа во $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Велиме дека низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *конвергира кон f во $\mathcal{D}'(\Omega)$ кога $n \to \infty$ во однос на јаката топологија* во $\mathcal{D}'(\Omega)$ ако

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\varphi\in B} |\langle f_n - f, \varphi\rangle| = 0,\ \forall B \subseteq \mathcal{D}(\Omega),$$

каде што B е ограничено множество. Оваа конвергенција се нарекува *јака конвергенција на низа дистрибуции*, а за низата велиме дека е *јако конвергентна низа од дистрибуции.*

Теорема 1.1.3. [62, Теорема 2.7] Слабата и јаката конвергенција на низа во $\mathcal{D}'(\Omega)$ се еквивалентни.

Поради оваа теорема полесно е да се испитува конвергенцијата на низи во слабата топологија отколку во јаката топологија.

Забелешка 1.1.1. Нека $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ е слабо конвергентна низа од дистрибуции. Од дефиницијата за слаба конвергенција на низа од дистрибуции и условот (1.1.1) следува дека низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ е *ограничена во слабата топологија на просторот $\mathcal{D}'(\Omega)$,* [37, стр. 25].

Забелешка 1.1.2. Ако имаме мрежа од дистрибуции од облик $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ или $\{f_\lambda\}_{1\leq\lambda\leq\infty}$, тогаш конвергенција на мрежа од дистрибуции кога $\varepsilon \to 0$ или $\lambda \to \infty$, соодветно, се разгледува на ист начин како за низа. На пример, слабата конвергенцијата на мрежата $\{f_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ кога $\varepsilon \to 0$ подразбира дека за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и секое $\delta > 0$, постои $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ такво што $|\langle f_\varepsilon - f, \varphi\rangle| < \delta$, кога $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, [37, стр. 21]. Поимот мрежа е дефиниран во дефиниција А.0.19 во додатокот. За конвергенција на низа и мрежа може да се најде и во [3, стр. 45], како и во [48, стр. 10].

Бидејќи $\mathcal{D}(\Omega)$ е бочваст простор тогаш теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема А.0.10) важи и во просторот на дистрибуции.

Теорема 1.1.4. [62, Теорема 2.8]. Нека $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Следниве тврдења се еквивалентни:

(i) $\mathcal{B}$ е ограничено множество во однос на слабата топологија;

(ii) $\mathcal{B}$ е ограничено множество во однос на јаката топологија;

(iii) $\mathcal{B}$ е рамномерно непрекинато подмножество од $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Дистрибуцијата $\widetilde{f}$ дефинирана со локално интеграбилна функција $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ на следниов начин:

$$\langle \widetilde{f}, \varphi \rangle = \int_K f(x)\varphi(x)dx,$$

каде што K е носачот на $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, е наречена *регуларна дистрибуција.*

Пример 1.1.1. Хевисајдовата функција H е пример за регуларна дистрибуција дефинирана со

$$\langle H(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)dx.$$

Ако една дистрибуција не е регуларна тогаш таа се нарекува *сингуларна.*

Пример 1.1.2. Дирак делта дистрибуцијата дефинирана со

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \tag{1.1.8}$$

е сингуларна дистрибуција.

За секоја дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и тест фукција $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ важат:

(i) $\langle f(ax+b), \varphi(x) \rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|}\varphi(\frac{x-b}{a}) \rangle,\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0;$

(ii) $\langle g(x)f(x), \varphi(x) \rangle := \langle f(x), g(x)\varphi(x) \rangle,\ g \in C^\infty(\Omega);$

(iii) $\langle f^{(\alpha)}(x), \varphi(x) \rangle := (-1)^\alpha \langle f(x), \varphi^{(\alpha)}(x) \rangle,\ \alpha \in \mathbb{N}_0.$

Пример 1.1.3. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Од

$$\langle H'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle H(x), \varphi'(x) \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

следува дека изводот на дистрибуцијата дефинирана со Хевисајдовата функција H, дефинирана во пример 1.1.1 е делта дистрибуцијата δ.

Пример 1.1.4. Од дефиницијата на делта дистрибуција и особината за извод на една дистрибуција директно следува дека

$$\langle \delta^{(\alpha)}(x-x_0), \varphi(x)\rangle = (-1)^{\alpha}\langle \delta(x-x_0), \varphi^{(\alpha)}(x)\rangle = (-1)^{\alpha}\varphi^{(\alpha)}(x_0).$$

За една дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ велиме дека е *хомогена со степен на хомогеност* $\alpha \in \mathbb{R}$ ако важи $f(ax) = a^{\alpha} f(x)$, за секое $a > 0$.

Пример 1.1.5. Делта дистрибуцијата $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ е хомогена дистрибуција со степен на хомогеност -1 бидејќи важи

$$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x).$$

Навистина,

$$\langle \delta(ax), \varphi(x)\rangle = \frac{1}{a}\langle \delta(x), \varphi(\frac{x}{a})\rangle = \frac{1}{a}\varphi(0) = \frac{1}{a}\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

1.1.1. Простор од темперирани дистрибуции

Дефиниција 1.1.2. Со $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ се означува просторот од сите брзо опаѓачки глатки функции $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ за кои

$$\rho^1_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)| < \infty, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1.9}$$

Сите тест функции од просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ тежат кон 0 кога $|x| \to \infty$ побрзо од кој било степен на $1/|x|$ и поради тоа се наречени брзо опаѓачки функции. Пример за таква функција е функцијата $e^{-|x|}$. Во однос на вообичаените операциии $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е векторски простор за кој важи:

$$\mathcal{C}^{\infty}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{C}^{\infty}_0(\mathbb{R}) \neq \mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}), \mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Теорема 1.1.5. [62, Теорема 8.1] Ако $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, следниве тврдења се еквивалентни:

(i) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

(ii) за секои $k, n \in \mathbb{N}_0$,

$$\rho^2_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{k/2} |\varphi^{(n)}(x)| < \infty; \tag{1.1.10}$$

(iii) $P(x)\,(Q(d)\varphi(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

(iv) $Q(d)\,(P(x)\varphi(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

каде што $P(x)$ и $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ се полиноми со константни коефициенти, а $Q(d)$ е диференцијален оператор кој се добива кога во полиномот $Q(x)$ наместо x ставиме $\frac{d}{dx}$.

Топологијата во просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ се дефинира преку низата од полунорми (1.1.9). При што од тврдењето (ii) во теоремата 1.1.5 следува дека оваа топологијата се совпаѓа со топологијата која е дефинирана преку низата од полунорми (1.1.10), и уште повеќе овие топологии се совпаѓаат со топологијата дефинирана преку низата од полунорми

$$\rho_p(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, n\leq p} (1+|x|^2)^{p/2}|\varphi^{(n)}(x)| < \infty, \tag{1.1.11}$$

каде што $p \in \mathbb{N}$, [62].

Во [62, Теорема 8.2] и [62, Теорема 8.4] е покажано дека $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е Фрешеов и Монтелов простор, соодветно.

Дефиниција 1.1.3. Дуалниот простор на просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ претставува простор од *темперирани дистрибуции* или *дистрибуции со бавен раст* и се означува со $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Теорема 1.1.6. [62, Теорема 8.6] Просторот од темперирани дистрибуции $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ е потпростор од просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Уште повеќе важи:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{1.1.12}$$

како и $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, [3, стр. 120]

Од фактот дека просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е Монтелов простор и од тврдење А.0.12 следува дека конвергенцијата на низа во просторот од темперирани дистрибуции $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во однос на слабата и јаката топологија на просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ се еквивалентни, што е дадено со наредната теорема.

Теорема 1.1.7. [62, Теорема 8.7] Просторот од темперирани дистрибуции е комплетен во однос на слабата топологија; слабата и јаката конвергенција на низа во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ се еквивалентни; топологијата на компактна конвергенција и јаката топологија во просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ се еквивалентни.

Во наредната теорема е даден потребниот и доволниот услов за да една дистрибуција е темперирана.

Теорема 1.1.8. [62, Теорема 8.10] Линеарниот функционал $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ако и само ако постои константа $C > 0$ и $p \in \mathbb{N}_0$ така што важи

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq C\rho_p(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.1.13}$$

Пример 1.1.6. Ќе покажеме дека $f(x) = e^x \sin e^x$, $x \in \mathbb{R}$, е темперирана дистрибуција. Навистина, имајќи во предвид дека $(\cos e^x)' = -e^x \sin e^x$ за произволно избрана $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имаме

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} e^x \sin e^x \varphi(x)dx\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)(-\cos e^x)'dx\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\cos e^x dx\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|\varphi'(x)|\frac{dx}{1+x^2} \\
&\leq C\rho_1(\varphi).
\end{aligned}$$

Пример 1.1.7. Пример на темперирана дистрибуција е исто така и Дираковата делта дистрибуција, $\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0)$ за $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, како и сите нејзини транслации за $b \in \mathbb{R}$, дадени со

$$\langle \delta(x-b), \varphi(x)\rangle = \varphi(b).$$

Навистина, од

$$|\langle \delta(x-b), \varphi(x)\rangle| = |\varphi(b)| \leq \sup_{b\in\mathbb{R}}(1+|b|^2)^{k/2}|\varphi(b)| = \rho_0(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

следува дека $\delta(x-b)$ е темперирана дистрибуција.

Забелешка 1.1.3. Заради (1.1.12), теоремата 1.1.4 важи и во просторот од темперирани дистрибуции.

Забелешка 1.1.4. Заради (1.1.12), слаба и јака конвергенција на низа од темперирани дистрибуции се дефинира како за низа од дистрибуции во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Притоа, забелешките 1.1.1 и 1.1.2 важат и во просторт $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Во продолжение ќе дадеме некои основни карактеристики на Фурјеовата трансформација над просторите $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и нека нејзината Фурјеова трансформација е дадена со $\mathcal{F}(\varphi(x)) = \widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-2\pi i x\omega}dx$, додека пак инверзната Фурјеова трансформација е $\mathcal{F}^{-1}(\varphi(\omega)) = \varphi^{\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\omega)e^{2\pi i x\omega}d\omega$. Притоа важи следнава теорема.

Теорема 1.1.9. [62, Теорема 11.1] Фурјеовата трансформација е непрекинато линеарно пресликување од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Аналогно тврдење важи и за инверзната Фурјеова трансформација над просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, [62, Теорема 11.2]. Според тоа, Фурјеовата трансформација и инверзната Фурјеова трансформација претставуваат тополошки изоморфизми од просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во истиот, [62, Теорема 11.4]. Поимот тополошки изоморфизам е дефиниран во дефиниција А.0.21 во додатокот. Притоа за произволно $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ важи $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$ и $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = \varphi$, [62, Теорема 11.3].

Во наредната теорема се дадени некои особини на Фурјеовата трансформација за тест функциите од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, при што особината (iii) уште е позната и како Парсевалово равенство.

Теорема 1.1.10. [62, Теорема 11.5] Нека $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогаш важи:

(i) $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(-x),\ x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\widehat{\phi}(x)dx$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\overline{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)\overline{\widehat{\phi}}(x)dx$.

Ќе дадеме дефиниција за Фурјеова трансформација на темперирана дистрибуција.

Дефиниција 1.1.4. [62, Дефиниција 11.2] Нека $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Фурјеовата трансформација на темперираната дистрибуција f е дадена со

$$\langle \widehat{f}(\omega), \varphi(\omega)\rangle := \langle f(x), \widehat{\varphi}(x)\rangle,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.1.14}$$

Во наредната теорема е дадено аналогно тврдење на теоремата 1.1.9, за просторот од темперирани дистрибуции.

Теорема 1.1.11. [62, Теорема 11.8] Фурјеовата трансформација е непрекинато пресликување од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во однос на јаката топологија, како и во однос на слабата топологија.

Аналогно тврдење на тврдењето 1.1.11 важи и за инверзната Фурјеова трансформација над просторот од темперирани дистрибуции, [62, Теорема 11.10]. Фурјеовата трансформација и инверзната Фурјеова трансформација претставуваат изоморфизам од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во однос на слабата и јаката топологија на тој просторот, [62, Теорема 11.11]. Притоа за произволно $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ важи $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = f$ и $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = f$, [62, Теорема 11.10].

Во наредната теорема се дадени некои корисни врски помеѓу Фурјеовата трансформација и изводот на една дистрибуција, како и Фурјеовата трансформација над транслација и дилатација на една дистрибуција.

Теорема 1.1.12. [62, Теорема 11.12] Нека $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ тогаш важи:

(i) $\mathcal{F}(f^{(\alpha)}(x))(\omega) = (i\omega)^\alpha \widehat{f}(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}$;

(ii) $\mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\omega) = \widehat{f}^{(\alpha)}(\omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}$;

(iii) $\mathcal{F}(f(x-k))(\omega) = e^{-2\pi i\omega k}\widehat{f}(\omega)$, $k \in \mathbb{R}$;

(iv) $\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пример 1.1.8. Во пример 1.1.7 видовме дека делта дистрибуцијата е темперирана дистрибуција. Сега ќе покажеме дека Фурјеовата трансформација на делта дистрибуцијата е 1, т.е.

$$\widehat{\delta}(\omega) = 1. \tag{1.1.15}$$

Навистина, од дефиницијата за Фурјеова трансформација на темперирана дистрибуција (1.1.14) имаме

$$\langle\widehat{\delta}(\omega), \varphi(\omega)\rangle = \langle\delta(x), \widehat{\varphi}(x)\rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Користејќи го резултатот (1.1.15) како и особината (i) од теоремата 1.1.12 директно следува

$$\mathcal{F}(\delta^{(\alpha)}(x))(\omega) = (i\omega)^\alpha\widehat{\delta}(\omega) = (i\omega)^\alpha.$$

1.1.2. Простор од Лизоркинови дистрибуции

Просторот од Лизоркинови дистрибуции е од голема важност за нашите оригинални резултати изложени во глава 2 и 3. За да можеме да го дефинираме овој простор потребно е да дадеме дефиниција за прогресивна и регресивна функција, имајќи во предвид дека овие поими се дефинираат за оние функции за кои Фурјеовата трансформација е дефинирана.

Дефиниција 1.1.5. Функцијата $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ е *прогресивна* (*регресивна*) ако и само ако $supp\widehat{\varphi} \subseteq [0, +\infty)$ ($supp\widehat{\varphi} \subseteq (-\infty, 0]$).

Функцијата φ е *полиномно локализирана* ако постои $p > 0$ така што

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^2)^{p/2}|\varphi(x)| < C,$$

за некоја константа $C > 0$. Прогресивната функција φ е *полиномно локализирана во фреквентен* (*Фурјеов*) *домен* ако постојат $p, m > 0$ така што

$$\sup_{\omega\geq 0}\frac{(1 + \omega)^{p+m}}{\omega^p}|\widehat{\varphi}(\omega)| \leq C,$$

за некоја константа $C > 0$.

Лема 1.1.1. [72, Лема 2.2.1] Нека $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ е прогресивна функција. Тогаш следниве услови се еквивалентни:

(i) $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^2)^{p/2}|\varphi(x)| + \sup_{\omega\geq 0}\frac{(1+\omega)^{2p+1}}{\omega^p}|\widehat{\varphi}(\omega)| < \infty,\ \forall p > 0;$

(ii) $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^2)^{p/2}|\varphi(x)| + \sup_{\omega\geq 0}(1 + \omega^2)^{p/2}|\widehat{\varphi}(\omega)| < \infty,\ \forall p > 0.$

Дефиниција 1.1.6. Нека $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ е прогресивна функција. Тогаш $\varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ ако и само ако важи условот (i) или (ii) во лемата 1.1.1.

Ќе ја прикажеме и тополошката структура на просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. За $p > 0$ дефинирани се полунормите

$$\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1 + |x|^2)^{p/2}|\varphi(x)| + \sup_{\omega\geq 0}\frac{(1 + \omega)^{2p+1}}{\omega^p}|\widehat{\varphi}(\omega)|. \qquad (1.1.16)$$

Бидејќи за секое $p > 0$ важи:

$$\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(a\varphi) = a\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) \text{ и } \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi + \psi) \leq \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) + \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\psi),$$

имаме дека полунормите $\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\cdot)$, $p > 0$ се добро дефинирани. Исто така, важи

$$\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) \leq \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),m}(\varphi), \text{ за } p < m.$$

Уште повеќе, заради тоа што од $\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) = 0$ следува дека $\varphi \equiv 0$, за секое $p > 0$ полунормите (1.1.16) се норми. Со помош на овие норми е дефинирана најслабата топологија во просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Базата од околини на нулата ги содржи множествата од облик $\{\varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) : \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) < \varepsilon\},\ \varepsilon, p > 0$. Овие множества се конвексни, па просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ е локално конвексен простор.

Низата $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ тежи кон нула во $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ ако и само ако $\lim_{n\to\infty} \rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),p}(\varphi) = 0$, за секое $p > 0$.

Од лемата 1.1.1 имаме дека топологијата дефинирана со помош на полунормите (1.1.16) е еквивалентна со топологијата дефинирана со помош на полунормите

$$\rho_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\beta/2}|\varphi(x)| + \sup_{\omega\geq 0}(1+\omega^2)^{\beta/2}|\widehat{\varphi}(\omega)|,\ \beta > 0.$$

Од дефиницијата на просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ имаме дека за $\varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ важи $\varphi, x^n\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, па ако φ и $\widehat{\varphi}$ си ги заменат местата во тврдењето А.0.2 се добива дека изводите $\widehat{\varphi}^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$ се непрекинати. Од $supp\widehat{\varphi} \subseteq [0, +\infty)$ следува дека $\lim_{\omega\to 0^-} \widehat{\varphi}^{(n)}(\omega) = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$, кое заедно со непрекинатоста на $\widehat{\varphi}^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$ повлекува дека $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Сега, од тврдењето А.0.3 следува дека

$$\int_{\mathbb{R}} x^n\varphi(x)dx = 0,\ \varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Беселовиот вејвлет (Bessel wavelet) дефиниран преку неговата Фурјеова трансформација

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} e^{-(\omega+\frac{1}{\omega})}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases},$$

заедно со сите негови дилатации и транслации, се примери за прогресивни функции, т.е функции од просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

Сликата на просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ над парниот оператор $\varphi(x) \mapsto \varphi(-x)$ е означена со $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$, т.е.

$$\varphi \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi(-x) \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}).$$

Просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ претставува директна сума од просторите $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$, т.е.

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbb{R}).$$

Просторот $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ (соодветно, $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$) е затворен потпростор од просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [36, Теорема 19.1.3] кој ги содржи сите функции $\varphi \in$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$, чии Фурјеови трансформации имаат носач на позитивниот (соодветно, негативниот) дел од реалната оска.

Просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ можеме да го дефинираме како простор од сите функции од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ чии моменти се нула, т.е $\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ако и само ако

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) dx = 0, \text{ за секое } n \in \mathbb{N}_0,$$

односно $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) = 0$ за секое $n \in \mathbb{N}_0$. Овој простор е наречен *простор од високо временско-фреквенциско локализирани функции* или уште познат како *простор од Лизоркинови тест функции.*

Притоа, операциите множење со полином и диференцирање, т.е. $\varphi \mapsto x^m \varphi, m \in \mathbb{N}$ и $\varphi \mapsto \varphi^{(n)}, n \in \mathbb{Z}$ се непрекинати пресликувања од $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ (види [36, стр. 78]). Просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е затворен потпростор од просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Во [36, Теорема 19.0.1.] покажано е дека $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ е Фрешеов простор, па од дефиницијата на просторите $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ следува дека и тие се Фрешеови простори. Уште повеќе, $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е бочваст простор, [62, стр. 13]. На сличен начин како во [62, стр. 135] се покажува дека $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е Монтелов простор.

Во [36], Холшнајдер го дефинира дуалниот простор на просторот од Лизоркинови тест функции. Согласно дефиницијата на просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, неговиот дуален простор ќе го дефинираме преку дуалните простори на $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$.

Познато е дека постои природно непрекинато сместување на просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \left(f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \right)$$

кое во Фурјеов домен може да се запише како

$$i : \widehat{\varphi} \mapsto \left(\widehat{f} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\widehat{\varphi}(-\omega) d\omega \right).$$

Поради ова, секој ненулти елемент $\varphi \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ дефинира ненулти линеарен функционал над $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ преку сместувањето i. Односно можеме да запишеме дека $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) := \{f | f : \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}\}$ и $\mathcal{S}'_-(\mathbb{R}) := \{f | f : \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}\}$, т.е. просторот $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ претставува просторот од сите линеарни функционали над $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$, додека пак $\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$ претставува просторот од сите линеарни функционали над $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Притоа $i : \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ и $i : \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$ се линеарни сместувања и уште $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ е густ потпростор од $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$, [36, Последица 24.1.10].

Сега ќе ја разгледаме врската меѓу просторите $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Јасно е дека произволна темперирана дистрибуција $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

дефинира дистрибуција со рестрикција на затворениот потпростор $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ при што ова пресликување е сурјективно. Со користење на теоремата на Хан-Банах (теорема А.0.6) секоја дистрибуција од $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ може да се прошири до дистрибуција од просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, на тој начин што ова проширување на $f \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ до $f_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ не е единствено.

Теорема 1.1.13. [36, Теорема 24.0.4] Во однос на природните проекции

$$\pi_+ : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}), \quad (\pi_+ f)(\varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R}),$$

$$\pi_- : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'_-(\mathbb{R}), \quad (\pi_- f)(\varphi) = f(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),$$

важи

$$\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{R})/\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : supp\widehat{f} \subset \mathbb{R}_-\},$$

$$\mathcal{S}'_-(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{R})/\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : supp\widehat{f} \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Па од $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ следува дека неговиот дуален простор е

$$\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$$

кој уште се нарекува простор од Лизоркинови дистрибуции, [36, стр. 103].

Од релацијата $\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x) dx = \widehat{\varphi}^{(n)}(0)$ се добива дека во полот на просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ се оние дистрибуции од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ чии Фурјеови трансформации имаат носач $\{0\}$. Тој простор е просторот од полиноми $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Па, од фактот дека $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е затворен потпростор од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и тврдењето А.0.8 следува

$$\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}'(\mathbb{R})/\mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Пример 1.1.9. За $\alpha \in \mathbb{R}$, се дефинирани функциите

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ и } x_-^\alpha = \begin{cases} (-x)^\alpha, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Ако α не е негативен цел број тогаш x_+^α и x_-^α се примери на Лизоркинови дистрибуции, каде со

$$x_+^\alpha : \varphi \mapsto \int_0^\infty x^\alpha \varphi(x) dx \text{ и } x_-^\alpha : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^0 (-x)^\alpha \varphi(x) dx$$

е означено нивното дејство над тест функцијата $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, [36, стр. 112].

Забелешка 1.1.5. Бидејќи $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ а бочваст простор тогаш теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема А.0.10) важи и во просторот на Лизоркинови дистрибуции.

Забелешка 1.1.6. Слабата и јаката конвергенција на низа од Лизоркинови диструбуции $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ се дефинира како за низа од дистрибуции во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. И во просторот $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ важат забелешките 1.1.1 и 1.1.2.

Аналогно како во еднодимензионален случај се дефинираат и просторите $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Асимптотска анализа на дистрибуции

Ова поглавје е посветено на асимптотската анализа на дистрибуции, или уште позната како обопштена асимптотска анализа. Во оваа докторска дисертација ќе бидат разгледани квазиасимптотско однесување во бесконечност и нула и квазиасимптотската ограниченост. Во поглавје 1.2.1. се дадени дефинициите и особините на правилно променлива и бавно променлива функција во однос на кои во поглавје 1.2.2. и поглавје 1.2.3. е дефинирано квазиасимптотското однесување (квазиасимтотиката) и квазиасимптотската ограниченост, соодветно. Покрај квазиасимптотиката и квазиасимптотската ограниченост постојат и други видови асимптотики на дистрибуции и тоа: S-асимптотика и Чезаровото однесување. S-асимптотиката е воведена од страна на Пилиповиќ и Станковиќ, [59, 60, 61, 63, 65], додека пак Чезаровото однесувањето е дефинирано од страна на Естрада (R. Estrada), и претставува специјален случај на квазиасимптотското однесување, [20].

1.2.1. Правилно променливи и бавно променливи функции

Правилно (регуларно) променливите функции се дефинирани од Карамата (J. Karamata) во 1930 година, [39], како генерализација на степенските функции. Теоријата на правилно променливите функции, како и нивната примена е разработена во монографијата [88]. Примената на оваа класа функции е од особено значење во теоријата на асимптотско однесување на дистрибуции, каде служат како асимптотска скала, во однос на која се дефинира однесувањето на некоја дистрибуција.

Дефиниција 1.2.1. Функцијата $c : (A, \infty) \to \mathbb{R}, A > 0$, се нарекува *правилно променлива во бесконечност* ако таа е позитивна, мерлива и ако постои реален број α таков што за секое $x > 0$ важи

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{c(\lambda x)}{c(\lambda)} = x^{\alpha}.$$

Функцијата $c : (0, A) \to \mathbb{R}$, се нарекува *правилно променлива во нула* ако таа е позитивна, мерлива и ако постои реален број α таков што за секое $x > 0$ важи

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{c(\varepsilon x)}{c(\varepsilon)} = x^{\alpha}.$$

Бројот α се нарекува *индекс* на функцијата c.

Пример 1.2.1. Функциите

$$x^{\alpha}, x^{\alpha} \ln x, x^{\alpha} \ln \ln x, x^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \sin \ln \ln x\right), x^{\alpha}(2 + \sin \sqrt{\ln x}), \alpha \in \mathbb{R},$$

се правилно променливи функции со индекс α.

Дефиниција 1.2.2. Мерлива реално вредносна позитивна функција L дефинирана на интервалот (A, ∞), $A > 0$ (соодветно, $(0, A)$, $A > 0$) се нарекува *бавно променлива функција во бесконечност* (соодветно, *бавно променлива функција во нулата*) ако

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(\lambda)} = 1 \text{ (соодветно, } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{L(\varepsilon x)}{L(\varepsilon)} = 1), \ \forall x > 0.$$

Забележуваме дека бавно променливата функција претставува специјален случај на правилно променлива функција со индекс $\alpha = 0$. Во тврдењето 1.2.1 е дадена врската помеѓу правилно променлива и бавно променлива функција.

Тврдење 1.2.1. [65, Тврдење 2.1.] Позитивна и непрекината функција $c : (A, \infty) \to \mathbb{R}$, $A > 0$, е правилно променлива функција во бесконечност ако и само ако може да се запише во облик

$$c(x) = x^{\alpha} L(x), \ x > A, \tag{1.2.17}$$

за некој реален број α и некоја бавно променлива функција L во бесконечност.

Аналогна врска важи и за правилно променлива функција и бавно променлива функција во нулата.

Ќе дадеме некои особини на бавно променливата функција, кои може да се најдат во [88], а кои заедно со релацијата (1.2.17) го објаснуват односот помеѓу правилно променливите функции и степенските функции.

Нека L е бавно променлива функција во бесконечност. Тогаш за секое $\varepsilon > 0$,

(i) постојат константи $C_1, C_2 > 0$ така што

$$C_1 x^{-\varepsilon} \leq L(x) \leq C_2 x^{\varepsilon};$$

(ii) $\lim_{x\to\infty} x^{\varepsilon} L(x) = +\infty$; $\lim_{x\to\infty} x^{-\varepsilon} L(x) = 0$.

Основен и важен резултат во теоријата на бавно променливите функции е формулата за репрезентација покажана во [88]. Оваа формула прави целосна карактеризација на бавно променливите функции:

L е бавно променлива функција во нула дефинирана на интервалот $(0, A]$, $A > 0$, ако и само ако постојат мерливи функции u и w дефинирани на интервалот $(0, B]$, $B \leq A$, такви што функцијата u е ограничена и $\lim_{x\to 0} u(x) = M < \infty$, додека пак w е непрекината на $[0, B]$ и $\lim_{x\to 0} w(x) = 0$ и за нив важи

$$L(x) = exp\left(u(x) + \int_x^B \frac{w(t)}{t}dt\right),\ x \in (0, B].$$

L е бавно променлива функција во бесконечност дефинирана на интервалот $[A, \infty)$, $A > 0$, ако и само ако постојат мерливи функции u и w дефинирани на интервалот $[B, \infty)$, $B \geq A$, такви што функцијата u е ограничена и $\lim_{x\to\infty} u(x) = M < \infty$, додека пак w е непрекината на $[B, \infty)$ и $\lim_{x\to\infty} w(x) = 0$ и за нив важи

$$L(x) = exp\left(u(x) + \int_B^x \frac{w(t)}{t}dt\right),\ x \in [B, \infty).$$

Ќе наведеме уште некои корисни особини на бавно променливата функција L кои може да се најдат во [88]:

(i) За секое $\alpha > 0$ важи

$$L(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\right),\ \text{кога}\ \varepsilon \to 0^+, \tag{1.2.18}$$

$$L(\lambda) = O\left(\lambda^{\alpha}\right),\ \text{кога}\ \lambda \to \infty, \tag{1.2.19}$$

(ii) За секое $\alpha > 0$ важи

$$\frac{1}{C}\min\{x^{-\alpha}, x^{\alpha}\} < \frac{L(\varepsilon x)}{L(\varepsilon)} < C\max\{x^{-\alpha}, x^{\alpha}\},\ x, \varepsilon \in (0, \infty), \quad (1.2.20)$$

за некоја константа $C > 0$.

1.2.2. Квазиасимптотика на дистрибуции

Квазиасимптотиката (квазиасимптотското однесување) претставува природно обопштување на поимот вредност на дистрибуција во точка (во смисла на Лојашевич). Мотивацијата за воведување на поимот квазиасимптотика потекнува од теоретските прашања кои произлегле од теоријата на квантни полиња, каде подоцна бил ефективно применет [16, 17, 100, 103]. Квазиасимптотската теорија е воведена и развиена од Владимиров, Дрожинов и Завиалов [100], а голем придонес во нејзиниот развој дал Пилиповиќ и неговите соработници [57, 58, 60, 61, 65, 93, 94, 96]. Квазиасимптотиката го опишува локалното однесување на дистрибуциите во околина на точка, односно асимптотското однесување на дистрибуциите во бесконечност.

Во [63, 100] е покажано дека ако дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ има асимптотско однесување

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle f(x_0+\varepsilon x), \varphi(x)\rangle = c(\varepsilon)\langle h(x), \varphi(x)\rangle,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (1.2.21)$$

за некоја позитивна функција c и ненулта дистрибуција $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, тогаш c е правилно променлива функција во нулата, а h е хомогена дистрибуција со степен на хомогеност α, т.е. важи $h(ax) = a^{\alpha}h(x)$ за секое $a > 0$. Овој резултат е идеја за следнава дефиниција.

Дефиниција 1.2.3. Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ и нека L е бавно променлива функција во нулата. Велиме дека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ има *квазиасимптотско однесување (квазиасимптотика) со индекс* $\alpha \in \mathbb{R}$ *во точката* x_0, во однос на L ако граничната вредност

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\langle \frac{f(x_0+\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}, \varphi(x)\right\rangle \quad (1.2.22)$$

постои и е конечна за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Од теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема A.0.10) следува дека ако дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ има квазиасимптотско однесување, тогаш постои дистрибуција $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ така што да важи

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \frac{f(x_0 + \varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x) \right\rangle = \langle h(x), \varphi(x) \rangle \tag{1.2.23}$$

за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Дистрибуцијата h уште се нарекува и *квазиасимптотска граница* на дистрибуцијата f во точката x_0. Во скратена форма се запишува

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) h(x) \ \text{ кога } \varepsilon \to 0^+, \text{ во } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1.2.24}$$

Според претходната дискусија h мора да е хомогена дистрибуција со степен на хомогеност α. Ако $x_0 = 0$ станува збор за квазиасимптотика во нула.

Како што спомнавме, во општ случај дистрибуциите немаат вредност во дадена точка. Велиме дека дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *има вредност γ во точката x_0 во смисла на Лојашевич*, [53] и запишуваме $f(x_0) = \gamma$ ако и само ако важи $\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon x) = \gamma$ во дистрибутивна смисла, т.е. ако и само ако важи

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \langle f(x_0 + \varepsilon x), \varphi(x) \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle f(x), \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\frac{x - x_0}{\varepsilon}) \rangle \\
&= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Ако во дефиницијата 1.2.3 земеме $\alpha = 0$ и $L \equiv 1$ (секоја константна функција е бавно променлива), добиваме вредност на дистрибуцијата f во точката x_0 во смисла на Лојашевич, односно заклучуваме дека квазиасимптотското однесување претставува обопштување на концептот на Лојашевич.

Квазиасимптотиката во бесконечност се дефинира на сличен начин.

Дефиниција 1.2.4. Нека L е бавно променлива функција во бесконечност. Велиме дека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ има *квазиасимптотско однесување* (*квазиасимптотика*) *со индекс $\alpha \in \mathbb{R}$ во бесконечност*, во однос на L ако постои $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ така што за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ важи

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\langle \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha L(\lambda)}, \varphi(x) \right\rangle = \langle h(x), \varphi(x) \rangle. \tag{1.2.25}$$

Во скратена форма се запишува

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{1.2.26}$$

Во продолжение ќе разгледаме некои основни особини на квазиасимптотиката во точка и во бесконечност. Квазиасимптотиката во точка има локална природа, т.е ако дистрибуциите f и f_1 се еднакви во околина на точката x_0 и дистрибуцијата f има квазиасимптотско однесување во околина на точката x_0, тогаш и дистрибуцијата f_1 ќе има исто квазиасимптотско однесување во околина на точката x_0. Наредното тврдење ја потврдува оваа локална природа на квазиасимптотиката во точка.

Тврдење 1.2.2. [65, Тврдење 2.9] Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и нека $f(x_0+\varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$, во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, и нека $f_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ е таква што $f = f_1$ во некоја околина на нулата. Тогаш $f_1(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$, во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Квазиасимптотиката во бесконечност има глобална природа, т.е. дистрибуции кои се еднакви во околина на бесконечност не мора да имаат исто квазиасимптотско однесување во бесконечност (види [65, Тврдење 2.12]).

Во тврдењето 1.2.3 се дадени особините на квазиасимптотиката во произволна точка x_0 во однос на операцијата диференцирање и множење со полином. Аналогно тврдење важи и за квазиасимптотиката во бесконечност (види [65, Тврдење 2.11]).

Тврдење 1.2.3. [65, Тврдење 2.8] Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и нека $f(x_0+\varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$, во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Тогаш:

(i) $f^{(m)}(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha - m} L(\varepsilon) g^{(m)}(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$, во $\mathcal{D}'(\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}$;

(ii) $x^m f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha + m} L(\varepsilon) x^m g(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$, во $\mathcal{D}'(\mathbb{R}), m \in \mathbb{N}$.

Квазиасимптотиката може да се разгледува и во други дистрибутивни простори. Квазиасимптотиката $f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x)$ кога $\lambda \to \infty$ во произволен простор на дистрибуции $\mathcal{A}'(\mathbb{R})$ ни покажува дека (1.2.25) важи за секоја тест функција од соодветниот простор на тест функции, т.е. $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$. Аналогно и за квазиасимптотиката во точка. Дефинициите за квазиасимптотика во бесконечност и точка важат и ако $\mathbb{R}$ се замени со $\mathbb{R}^n$.

1.2.3. Квазиасимптотска ограниченост на дистрибуции

Покрај поимот за квазиасимптотско однесување ќе го користиме и поимот квазиасимптотска ограниченост.

Дефиниција 1.2.5. Велиме дека дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ е *квазиасимптотски ограничена од ред* $\alpha \in \mathbb{R}$ *во точката* x_0 во однос на бавно променливата фунцкија L во нулата ако за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ важи

$$\Big| \Big\langle \frac{f(x_0+\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, \varphi(x) \Big\rangle \Big| = O(1),\ \varepsilon \to 0^+.$$

Во скратена форма се запишува $f(x_0+\varepsilon x) = O(\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon))$ кога $\varepsilon \to 0^+$.

Специјално, ако $x_0 = 0$ имаме квазиасимптотска ограниченост во нулата.

Дефиниција 1.2.6. Велиме дека дистрибуцијата $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ е *квазиасимптотски ограничена од ред* $\alpha \in \mathbb{R}$ *во бесконечност* во однос на бавно променливата функција L во бесконечност ако за секое $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ важи

$$\Big| \Big\langle \frac{f(\lambda x)}{\lambda^{\alpha} L(\lambda)}, \varphi(x) \Big\rangle \Big| = O(1),\ \lambda \to \infty.$$

Во скратена форма се запишува $f(\lambda x) = O(\lambda^{\alpha} L(\lambda))$ кога $\lambda \to \infty$.

Наредната теорема ни покажува дека ако дистрибуцијата f е квазиасимптотски ограничена во бесконечност, тогаш f мора да биде темперирана дистрибуција, што директно следува од особината (1.2.19) на бавно променлива функција.

Теорема 1.2.1. [21, Теорема 6.6.1] Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

(i) f е темперирана дистрибуција, т.е $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$;

(ii) Постои $\alpha \in \mathbb{R}$ такво што

$$f(\lambda x) = O(\lambda^{\alpha}) \text{ кога } \lambda \to \infty \ \text{ во дистрибутивна смисла.}$$

Наредната теорема ни покажува дека квазиасимптотската ограниченост во 0 може да се разгледува и во други простори на дистрибуции.

Теорема 1.2.2. [65, Теорема 2.44] Нека $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ако f е квазиасимптотски ограничена во 0 во однос на бавно променлива функција L во $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, тогаш f е квазиасимптотски ограничена во 0 од ист ред во однос на L во просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Аналогна теорема важи и за квазиасимптотската ограниченост во бесконечност. Дефиницијата за квазиасимптотска ограниченост во бесконечност и произволна точка x_0 важи и ако $\mathbb{R}$ се замени со $\mathbb{R}^n$.

1.3. Теорија на рамки

Во ова поглавје накратко ќе биде илустрирана идејата за дефинирање на поимот рамка во Хилбертов [18], Банахов [23, 24, 30] и Фрешеов [63, 67, 68] простор.

1.3.1. Рамки во Хилбертов простор

Поимот рамка е воведен од страна на Дафин (R. J. Duffin) и Шафер (A. C. Schaffer) во 1952 година во [18]. Но, нивната работа застанала од непознати причини сè до 1986 година кога Добеши (I. Daubechies), Гросман (A. Grossmann) и Мајер (Y. Mayer) [15] забележале дека со помош на рамка, функции од просторот $L^2(\mathbb{R})$ можат да бидат развиени во ред кој е многу сличен со развојот во ред во однос на ортонормирана база. Денес теоријата на рамки претставува клучна алатка во многу области, како на пример во анализата на сигнали и процесирање на слики. Детална теорија за рамки во Хилбертов простор може да се најде во книгите на Грохенинг и Кристенсен [12, 31], а во продолжение ќе дадеме краток преглед на основните поими и факти кои ни беа потребни при нашето истражување.

Нека $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$ е сепарабилен Хилбертов простор. Низата $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ со елементи од Хилбертовиот простор $\mathcal{H}$ се нарекува *Шаудерова база* за просторот $\mathcal{H}$ ако секој елемент $f \in \mathcal{H}$ може да се запише во облик:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \tag{1.3.27}$$

со единствени коефициенти $c_n, n \in \mathbb{N}$. Ако $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е *ортонормирана база* за Хилбертовиот простор $\mathcal{H}$ и $f \in \mathcal{H}$, тогаш единствените коефициенти c_n во (1.3.27) имаат облик $(f, e_n)_{\mathcal{H}}$, т.е. секој елемент $f \in \mathcal{H}$ може да се запише во облик:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} e_n,$$

и уште повеќе важи *Парсеваловото равенство,* т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)_{\mathcal{H}}|^2 = \|f\|^2. \tag{1.3.28}$$

Дефиницијата на рамка претставува обопштување на Парсеваловото равенство (1.3.28).

Дефиниција 1.3.1. [12, Дефиниција 5.1.1] Низата $(e_n)_{n=1}^{\infty}, (e_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N})$ се нарекува (*Хилбертова*) *рамка* за просторот $\mathcal{H}$ ако постојат константи $A > 0$ и $B > 0$ така што

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2,\ f \in \mathcal{H}. \tag{1.3.29}$$

Константите A и B кои го задоволуваат условот (1.3.29) се нарекуваат *граници на рамката.* Ако границите на рамката можат да се изберат еднакви, т.е. можеме да избереме $A = B$ во равенството (1.3.29), тогаш низата $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *тесна рамка.*

Во наредниот пример се дадени примери на низи кои се рамки, како и низи кои не се рамки.

Пример 1.3.1. Нека $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е ортонормирана база за Хилбертовиот простор $\mathcal{H}$. Тогаш низата

- $(e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3 ...)$ е тесна рамка за просторот $\mathcal{H}$ со граници $A = B = 2$;
- $(e_1, e_1, e_2, e_3, e_4 ...)$ е рамка за просторот $\mathcal{H}$ со граници $A = 1,\ B = 2$;
- $(e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}} ...)$ е тесна рамка за просторот $\mathcal{H}$ со граници $A = B = 1$;
- $(e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, ...)$ не е рамка за просторот $\mathcal{H}$ бидејḱи го задоволува само десното неравенство, но не го задоволува левото неравенство на условот (1.3.29);
- $(e_1, 2e_2, 3e_3, ...)$ не е рамка за просторт $\mathcal{H}$ бидејḱи го задоволува само левото неравенство, но не го задоволува десното неравенство на условот (1.3.29).

Овие примери навидум може да не наведат до погрешен заклучок дека сите рамки се добиваат од Шаудерова база со додавање на некои елементи. Но, постојат рамки за Хилбертов простор $\mathcal{H}$ за кои не постои подмножество кое е Шаудерова база, [11]. Една рамка не мора да биде Шаудерова база, но сепак да дозволува елементите од просторот $\mathcal{H}$ да бидат развиени во ред, како што ḱе биде објаснето подоцна.

Пример 1.3.2. Во овој пример се дадени неколку видови рамки.

- Нека $g(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$. Системот $(e^{2\pi imbx} g(x - na))_{m,n\in\mathbb{Z}}$ е рамка која се нарекува *Габор рамка* за просторот $L^2(\mathbb{R})$, каде што a и b се позитивни доволно мали реални броеви.

- Нека $\psi(x) = (1 - x^2) e^{-x^2/2}$. Системот $(2^{j/2} \psi(2^j x - bk))_{j,k\in\mathbb{Z}}$ е рамка која се нарекува *вејвлет рамка* за просторот $L^2(\mathbb{R})$, каде што a и b се позитивни доволно мали реални броеви.

Понатаму терминот *оператор* ќе го користиме за линеарно пресликување.

Нека $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ е рамка за $\mathcal{H}$. *Операторот на анализа* или уште познат како *коефициент-оператор*, се означува со $C_{\mathcal{E}}$, и претставува линеарното пресликување

$$C_{\mathcal{E}} : \mathcal{H} \to \ell^2 \text{ определено со } C_{\mathcal{E}}(f) = ((f, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} \text{ за } f \in \mathcal{H}. \tag{1.3.30}$$

Операторот на анализа е инјективен и ограничен оператор (види [12, Глава 5]).

Операторот на синтеза се означува со $D_{\mathcal{E}}$ и претставува линеарното пресликување

$$D_{\mathcal{E}} : \ell^2 \to \mathcal{H} \text{ определено со } D_{\mathcal{E}}((c_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \text{ за } (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2. \tag{1.3.31}$$

Операторот на синтеза е сурјективен и ограничен оператор (види [12, Глава 5]).

Рамка-операторот се означува со $S_{\mathcal{E}}$ и е дефиниран како $S_{\mathcal{E}} := D_{\mathcal{E}} C_{\mathcal{E}}$, т.е. претставува линеарното пресликување

$$S_{\mathcal{E}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ определено со } S_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} e_n. \tag{1.3.32}$$

Рамка-операторот е ограничен, позитивен, инверзибилен и самоадјунгиран над $\mathcal{H}$, [12, Лема 5.1.6]. Со S^{-1} се означува инверзниот оператот на рамка-операторот S, кој исто така е рамка-оператор за рамката $(S^{-1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$ со граници B^{-1} и A^{-1}.

Теоремата 1.3.1 претставува најважниот резултат во теоријата на рамки. Преку неа се потврдува дискусијата од погоре дека рамките не мора да бидат Шаудерови бази, но сепак тие дозволуваат елементите од просторот $\mathcal{H}$ да бидат развиени во ред.

Теорема 1.3.1. [12, Теорема 5.1.7] Нека $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е рамка за $\mathcal{H}$. За секое $f \in \mathcal{H}$ постојат коефициенти c_n, $n \in \mathbb{N}$, така што (1.3.27) важи.

Уште повеќе, постои рамка $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ за $\mathcal{H}$ така што за секое $f \in \mathcal{H}$ важи

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, e_n)_{\mathcal{H}}\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \phi_n)_{\mathcal{H}}e_n. \tag{1.3.33}$$

Рамката $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *дуална рамка* за рамката $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$, со безусловна конвергенција на редот (1.3.33) за секое $f \in \mathcal{H}$. Специјално, низата $(\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty} := (S_{\mathcal{E}}^{-1}(e_n))_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *канонично дуална рамка* за рамката $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Низата $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ велиме дека е *Ризова база* за $\mathcal{H}$ ако $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е рамка за $\mathcal{H}$ и уште $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е Шаудерова база за $\mathcal{H}$, додека пак низата $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е *надкомплетна рамка* (overcomplete frame) за $\mathcal{H}$, ако е рамка за просторот $\mathcal{H}$ но не е Шаудерова база за $\mathcal{H}$. Она што е специфично е дека Ризовата база има единствена дуална рамка (канонично дуална рамка), додека пак надкомплетната рамка има и други дуални рамки освен канонично дуалната рамка.

1.3.2. Рамки во Банахов простор

Како резултат на зедничката соработка помеѓу Грохенинг и Фајтингер (H. G. Feichtinger) во 1989 година е воведен концептот разложување на атоми, [22, 23, 24]. Овој концепт овозможил секој елемент од некој простор да биде развиен во ред во однос на фиксна низа од елементи од соодветниот простор таканаречени атоми. Неколку години подоцна, т.е. во 1991 година, Грохенинг прави обопштување на поимот рамка за Хилбертов простор разгледувајќи ја како рамка за Банахов простор која ја нарекува Банахова рамка, [30]. Банаховата рамка овозможила реконструкција на елементите од соодветниот простор во однос на ограничен оператор на синтеза. Оваа проблематика била инспирација за различни автори што довело до конструкција и на други типови рамки во Банахов простор покрај Банаховите рамки, како на пример p-рамки [2] и X_d-рамки [9], кои исто така претставуваат проширување на Хилбертовите рамки во Банахови простори. Во оваа докторска дисертација ќе бидат разгледани само Банаховите рамки.

Да забележиме дека неравенството (1.3.29) во дефиницијата за Хилбертова рамка може да се запише во облик

$$\sqrt{A}\|f\|_{\mathcal{H}} \leq |||((f, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty}|||_{l^2} \leq \sqrt{B}\|f\|_{\mathcal{H}}, \ f \in \mathcal{H}. \tag{1.3.34}$$

Според тоа природен начин да се прошири дефиницијата на рамка во Банахов простор е низата $((f, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty}$ да биде разгледана во малку поопшт простор наместо во l^2 простор од низи.

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е Банахов простор, и нека $(X^*, \|\cdot\|^*)$ е неговиот дуален простор, т.е просторот од сите непрекинати линеарни функционали над X; додека пак $(\Theta, |||\cdot|||)$ означува Банахов простор од низи, и $(\Theta^*, |||\cdot|||^*)$ е дуалниот простор на просторот Θ. За просторот од низи Θ велиме дека е *BK-простор* (Banach coordinate space) ако координатните функционали над Θ се непрекинати, кое подразбира дека конвергенцијата на низа имплицира конвергенција на соодветните координати.

Нека со δ_n, $n \in \mathbb{N}$, го означиме n-тиот каноничен вектор за Θ. Ако каноничните вектори формираат Шаудерова база за просторот Θ, тогаш Θ се нарекува *CB-простор,* и тој е исто така и BK-простор. Ако Θ е CB-простор тогаш просторот

$$\Theta^{\overline{*}} := \{(g(\delta_n))_{n=1}^{\infty} : g \in \Theta^*\} \text{ со норма } |||(g(\delta_n))_{n=1}^{\infty}|||^{\overline{*}} := |||g|||^*, \quad (1.3.35)$$

е BK-простор, кој е изометрички изоморфен со Θ^* (види [38, страна 201]).

Грохенинг прв ја дава дефиницијата за Банахова рамка, но истата може да најде и во [9, Дефиниција 1.3], каде се направени дополнителни истражувања за Банаховите рамки и X_d-рамки.

Дефиниција 1.3.2. Нека X е Банахов простор, Θ е BK-простор и $g_n, n \in \mathbb{N}$ се елементи од X^*. Низата $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *Банахова рамка* за X во однос на просторот Θ ако

(i) $(g_n(f))_{n=1}^{\infty} \in \Theta,\ \forall f \in X$;

(ii) постојат константи $A, B \in (0, \infty)$ така што

$$A\|f\|_X \leq |||(g_n(f))_{n=1}^{\infty}|||_{\Theta} \leq B\|f\|_X,\ \forall f \in X;$$

(iii) постои ограничен оператор $Q : \Theta \to X$ така што $Q(((g_n(f))_{n=1}^{\infty}) = f,\ \forall f \in X$.

Ако Θ е CB-простор тогаш непрекинатоста на операторот Q го повлекува следново развивање во ред на $f \in X$ преку Банахови рамки:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(f) Q((\delta_n)_{n=1}^{\infty}). \quad (1.3.36)$$

Во општ случај, ако каноничните вектори $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ не го покриваат просторот Θ, тогаш развивањето во редот (1.3.36) не е возможно дури и за сепарабилни Банахови простори (види [8, стр. 3]).

Специјално, ако низата $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ е Хилбертова рамка за просторот $\mathcal{H}$, тогаш од теоремата 1.3.1 постои дуална рамка $\Phi = (\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ за рамката $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ така што

$$\text{за секое } f \in \mathcal{H},\ f = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(f)\phi_n, \tag{1.3.37}$$

(каде што $g_n(f)$ претставува $(f, g_n)_{\mathcal{H}}$) бидејќи $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ е Хилбертова рамка. Уште повеќе операторот на синтеза за дуалната рамка $\Phi = (\phi_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$D_\Phi : l^2 \to \mathcal{H} \text{ определен со } D_\Phi((c_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \text{ за } (c_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2, \tag{1.3.38}$$

е сурјективен и ограничен. Од (1.3.38) и (1.3.37) имаме дека за Хилбертовата рамка $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ постои ограничен оператор $D_\Phi : l^2 \to \mathcal{H}$ така што $D_\Phi((g_n(f))_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(f)\phi_n = f, \forall f \in \mathcal{H}$. Па особината (iii) во дефиниција 1.3.2 директно е задоволена за Хилбертовата рамка од каде следува дека $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ е Банахова рамка за $\mathcal{H}$ во однос на просторот l^2. Уште повеќе, Хилбертовата рамка директно повлекува развивање во ред од облик (1.3.33).

1.3.3. Рамки во Фрешеов простор

Инспирирани од проширувањето на поимот рамка за Банахов простор, авторите на [66] даваат идеја за конструкција на Фрешеови рамки, при што најпрво разгледуваат Фрешеови простори кои се проективна граница од Банахови простори.

Нека $\{Y_k, |\cdot|_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ е низа од сепарабилни Банахови простори таква што

$$\{0\} \neq \cap_{k\in\mathbb{N}_0} Y_k \subseteq \ldots \subseteq Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq Y_0, \tag{1.3.39}$$

$$|\cdot|_0 \leq |\cdot|_1 \leq |\cdot|_2 \leq \ldots, \tag{1.3.40}$$

$$Y_F := \cap_{k\in\mathbb{N}_0} Y_k \text{ е густо во } Y_k, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3.41}$$

Со условите (1.3.39) – (1.3.41), Y_F е Фрешеов простор со низа од норми $|\cdot|_k, k \in \mathbb{N}_0$, и уште се нарекува *проективна граница* на просторите $Y_k, k \in \mathbb{N}_0$. Притоа се користат два случаи на ваков тип низа:

1. $Y_k = X_k$ со норма $\|\cdot\|_k, k \in \mathbb{N}_0$;

2. $Y_k = \Theta_k$ со норма $|||\cdot|||_k, k \in \mathbb{N}_0$.

За низата $\{Y_k, |\cdot|_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ која ги задоволува условите (1.3.39) – (1.3.41), разгледуваат *индуктивна граница* од Банахови простори, $\{Y_k^*, |\cdot|_k^*\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, каде Y_k^* е дуалниот простор на просторот Y_k. Во [101] покажано е дека се задоволени следниве услови:

$$Y_0^* \subset Y_1^* \subset Y_2^* \subset \ldots \subset \cup_{k\in\mathbb{N}_0} Y_k^*, \tag{1.3.42}$$

$$|\cdot|_0^* \geq |\cdot|_1^* \geq |\cdot|_2^* \geq \ldots, \tag{1.3.43}$$

$$Y_F^* := \cup_{k\in\mathbb{N}_0} Y_k^*, \tag{1.3.44}$$

па двата случаи на таков тип низа кои ги користат се:

1. $Y_k^* = X_k^*$ со норма $||\cdot||_k^*, k \in \mathbb{N}_0$;

2. $Y_k^* = \Theta_k^*$ со норма $|||\cdot|||_k^*, k \in \mathbb{N}_0$.

Уште повеќе од [26, Последица 2] следува дека Y_F^* е регуларна индуктивна граница на просторите Y_k^*, $k \in \mathbb{N}_0$, т.е. едно множество е ограничено во Y_F^* ако и само ако припаѓа и е ограничено во Y_k^* за некое $k \in \mathbb{N}_0$, [6, стр. 46].

Нека $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ и $\{\Theta_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ се низи од Банахови простори, кои ги задоволуваат условите (1.3.39) – (1.3.41). Операторот $G : \Theta_F \to X_F$ се нарекува *F-ограничен* ако за секое $k \in \mathbb{N}_0$, постои константа $C_k > 0$ така што важи $\|G((c_n)_{n=1}^\infty)\|_k \leq C_k|||(c_n)_{n=1}^\infty|||_k$ за сите $(c_n)_{n=1}^\infty \in \Theta_F$. Јасно е дека секој F-ограничен оператор е непрекинат [66], но обратното не мора да важи. На сосема сличен начин можеме да дефинираме F-ограничен оператор $G : X_F \to \Theta_F$ и $G : X_F \to X_F$.

Забелешка 1.3.1. Ако $\{\Theta_k, |||\cdot|||_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ е низа од CB-простори кои ги задоволуваат условите (1.3.39) и (1.3.40), тогаш сите конечни низи припаѓаат во Θ_F и формираат густо подмножество во Θ_k; според тоа условот (1.3.41) директно е задоволен. Во тој случај каноничните вектори δ_n формираат Шаудерова база за Θ_F, што значи дека секоја низа $(c_n)_{n=1}^\infty \in \Theta_F$ може на единствен начин да се запише како $(c_n)_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty c_n\delta_n$ со конвергенција во Θ_k, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, [66, Забелешка 2.1].

Во продолжение е дадена дефиниција за пред-Фрешеова рамка и Фрешеова рамка, која претставува обопштување на дефиницијата 1.3.2 за Банахова рамка.

Дефиниција 1.3.3. [66, Дефиниција 2.3] Нека $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ е низа од Банахови простори и $\{\Theta_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ е низа од ВК-простори, кои ги задоволуваат условите (1.3.39) – (1.3.41). Низата $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ со елементи од X_F^*, се нарекува *пред-Фрешеова рамка* (накратко *пред-F рамка*) за X_F во однос на Θ_F ако за секое $k \in \mathbb{N}_0$ постојат константи $0 < A_k \leq B_k < \infty$ така што

$$(g_n(f))_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F, \ \forall f \in X_F, \tag{1.3.45}$$

$$A_k\|f\|_k \leq |||(g_n(f))_{n=1}^{\infty}|||_k \leq B_k\|f\|_k, \ \forall f \in X_F. \tag{1.3.46}$$

Ако постои F-ограничен оператор $V : \Theta_F \to X_F$ така што $V((g_n(f))_{n=1}^{\infty}) = f$ за сите $f \in X_F$, тогаш пред-F рамката $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *Фрешеова рамка* (накратко *F рамка*) за X_F во однос на Θ_F, а V се нарекува *Фрешеов рамка-оператор* (кратко *F рамка-оператор*) за $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

Специјално, кога $X_k = X$, и $\Theta_k = \Theta$, $k \in \mathbb{N}_0$, тогаш F рамката за X_F во однос на Θ_F е всушност Банахова рамка за X во однос на Θ.

Глава 2

Асимптотска анализа преку насочена кратковремена Фурјеова трансформација

Во оваа глава е разгледана насочената кратковремена Фурјеова трансформација тргнувајќи од идејата за нејзино дефинирање над просторот од интеграбилни функции, [28, 29], па до нејзиното проширување над просторот од дистрибуции, [4, 81]. Мотивирани од ова проширување, направивме карактеризација на некои асимптотски однесувања на дистрибуции преку асимптотиката на нивната насочена кратковремена Фурјеова трансформација. Новите оригинални резултати се дадени во поглавјето 2.4., а се објавени во трудот:

J.V. Buralieva, K. Saneva, S. Atanasova, Directional short-time Fourier transform and quasiasymptotics of distributions, *Functional analysis and its application*, 53(1), 6-15, 2019. (IF=0,712).

2.1. Насочена кратковремена Фурјеова трансформација, дефиниција и особини

Познато е дека *Фурјеовата трансформација*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \omega \cdot x} dx, \ \omega \in \mathbb{R}^n,$$

на функцијата $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ни дава информација за функцијата f во фреквенциски домен, но не и во временски домен, [31, 41, 73].

Со цел да добие фреквенциски спектар на сигналот f во време x, Габор (D. Gabor) во 1946 година ја адаптирал Фурјеовата трансформација, [27]. Тој прави рестрикција на сигналот f на некој мал интервал околу точката b (преку множење на f со глатка cut-off функција g наречена *прозорец* и потоа зема Фурјеова трансформација на таа рестрикција. Неговата трансформација е наречена *Габор трансформација* или *кратковремена Фурјеова трансформација* (short-time Fourier transform) или накратко *STFT*. STFT за функцијата $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ во однос на ненулта прозорец функција $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ е дефинирана со

$$V_g f(b,a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x-b)e^{-2\pi i a\cdot x}dx, \ a,b \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.1}$$

STFT може да се запише преку Фурјеовата транформација на следниов начин

$$V_g f(b,a) = \widehat{f \cdot T_b \overline{g}}(a). \tag{2.1.2}$$

Грохенинг (K. Gröchening) во [31], прави обопштување на оваа трансформација кога $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Инспирирани од ова обопштување, авторите на [80] докажуваат Абелови и Тауберови резултати кои ги поврзуваат асимптотиките на STFT на темперирани дистрибуции и квазиасимптотското однесување на овие дистрибуции. Додека, пак во [45], STFT е проширена над просторот од експоненцијални дистрибуции и дадени се Тауберови теореми кои целосно ја карактеризираат S-асимптотиката на експоненцијални дистрибуции преку STFT.

Графакос (L. Grafakos) и Сансинг (C. Sansing) во [29] ја даваат идејата за локализација на информацијата не само во време и фреквенција, туку истовремено и во насока, со тоа што дефинираат чувствителна варијанта на STFT во однос на насоката, која тие ја нарекуваат *насочена кратковремена Фурјеова трансформација* (directional short-time Fourier transform) или накратко *DSTFT*. За ненулта прозорец функција $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, тие конструираат функции над $\mathbb{R}$, $g^{a,b}(y) = e^{2\pi i a(y-b)}g(y-b)$, за $y,a,b \in \mathbb{R}$, каде што $\widehat{g^{a,b}}(\omega) = \widehat{g}(\omega-b)e^{-2\pi i \omega a}$ се нивните Фурјеови трансформации за $\omega \in \mathbb{R}$. Притоа, функциите

$$g_{a,b,u}(x) = g^{a,b}(u\cdot x), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

каде што $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $a,b \in \mathbb{R}$, се нарекуват *Габор "гребен" функции* (Gabor ridge functions). Со помош на овие Габор "гребен" функции се дефинира насочена кратковремена Фурјеова трансформација,

$$DS_g f(u,b,a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(u\cdot x-b)e^{-2\pi i a(u\cdot x-b)}dx = (f, g_{u,b,a})_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1.3}$$

за $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Имајќи ја оваа трансформација, се поставило прашањето каков вид информација се добива со пресметување на коефициентите $(f, g_{a,b,u})_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ и исто така како може да се искористи оваа информација за да се реконструира сигналот f. Она што е многу важно е дека функциите $g_{a,b,u}$ не припаѓаат во просторот од квадратно интеграбилни функции, $L^2(\mathbb{R}^n)$. Со овие Габор "гребен" функции се добива инверзна формула преку која се добива функција блиску до оригиналната, но не е оригиналната f. Ова ги поттикнало Графакос и Сансинг да ја модифицираат класата на Габор "гребен" функции и да дефинираат нова класа, од таканаречени *тежински Габор "гребен" функции* (weighted Gabor ridge functions),

$$G_{a,b,u}(x) = G^{a,b}(u \cdot x),$$

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{S}^{n-1}$, каде $G^{a,b}(y) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g^{a,b}}(\omega)|\omega|^{\frac{n-1}{2}})(y)$, за $y, a, b \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}^n$. Притоа, инверзната формула добиена со оваа класа на тежински Габор "гребен" функции е

$$f(x) = \frac{1}{2(\psi, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (f, G_{a,b,u})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Psi_{a,b,u}(x) dadbdu$$

за дадена $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ таква што $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, каде g и ψ се прозорец функции кои го задоволуваат условот $(g, \psi)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$, [29, Теорема 3]. Графакос и Сансинг забележале дека за $n = 1$, DSTFT и STFT се совпаѓаат, па поради тоа сите испитувања за оваа трансформација ги спроведуваат за $n \geq 2$, [29, Забелешка 2.3].

Неколку години подоцна Гив (H. Giv) во [28] дал малку поразлична варијанта на трансформацијата (2.1.3), во која параметарот за насока u се појавува само во прозорецот g, но не и во експоненцијалниот израз преку кој е дефинирана модулацијата. Главната цел на Гив му била да воведе чувствителна варијанта на STFT во однос на насоката која се базира на релацијата (2.1.2). Па, за произволна функција $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $(u, b) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, дефинира $g_{u,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ со

$$g_{u,b}(x) = g(u \cdot x - b), \tag{2.1.4}$$

додека пак $g_{u,b,a}(x) = M_a g_{u,b}(x) = e^{2\pi i x \cdot a} g(u \cdot x - b)$. Во последната формула M_a е ознака за операторот на модулација.

Нека $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ е ненулта функција, и нека $\mathbb{Y}^{2n} = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Гив во [28] ја дава следнава дефиниција на насочена кратковремена Фурјеова трансформација на $f \in L^1(\mathbb{R})$ во однос на g,

$$DS_g f(u, b, a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g}_{u,b,a}(x) dx, \tag{2.1.5}$$

која претставува функција над $\mathbb{Y}^{2n}$. Претпоставката $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ повлекува дека за секое $(u,b) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, за функцијата $g_{u,b}$ важи

$$\|g_{u,b}\|_\infty \leq \|g\|_\infty,$$

а ова повлекува дека интегралот во (2.1.5) е апсолутно конвергентен. Притоа, Гив насочената кратковремена Фурјеова трансформација (2.1.5) ја разгледува како оператор DS_g кој функцијата $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ја пресликува во функцијата $DS_g f$ над $\mathbb{Y}^{2n}$.

Тврдење 2.1.1. [28, Тврдење 2.2] Ако $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, тогаш DS_g е ограничен оператор од $L^1(\mathbb{R}^n)$ во $L^\infty(\mathbb{Y}^{2n})$ со оператор норма $\|DS_g\| \leq \|g\|_\infty$.

Наредното тврдење ни покажува дека насочената кратковремена Фурјеова трансформација (2.1.5) може да биде разгледана како еднодимензионална STFT.

Тврдење 2.1.2. [28, Тврдење 2.3]

1. Ако $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, тогаш за секое $(u,b,a) \in \mathbb{Y}^{2n}$ важи

$$DS_g f(u,b,a) = \widehat{f \cdot T_b\overline{g}}_{u,b}(a) = (R_b(M_{-a}f), T_b g)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

2. Нека $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, тогаш $DS_g(u,b,a)$ е кратковремена Фурјеова трансформација на функцијата $R_b\widehat{(M_{-a}f)}$ во однос на прозорецот $\widehat{g}$, во точката $(0,b)$.

Забелешка 2.1.1. Во претходното тврдење ознаката R_b е ознака за Радон транформација. *Радон трансформацијата* на интеграбилна функција, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ е дефинирана како

$$R(f)(u,s) = R_u(f)(s) = \int_{u\cdot t = s} f(t)dm(t),\ u \in \mathbb{S}^{n-1},\ s \in \mathbb{R},$$

каде m е Лебегова мера на хиперрамнината $u \cdot t = s$. Повеќе детали за овој вид трансформација можат да се најдат во [35].

Рангот на операторот DS_g зависи пред сè од неговиот домен и секако од особините на прозорецот g. Ако $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, тогаш DS_g пресликува функции од $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ во функции од $L^2(\mathbb{Y}^{2n})$, кое може да се види од наредната теорема која уште ја дава ортогоналната релација за насочената кратковремена Фурјеова трансформација (2.1.5).

Теорема 2.1.1. [28, Теорема 2.4] Нека $g, \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ и нека $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ако барем еден од прозорците g или ψ припаѓа во просторот $L^1(\mathbb{R})$ тогаш важи следнава ортогонална релација:

$$\int_{\mathbb{Y}^{2n}} DS_g f_1(u,b,a) DS_\psi f_2(u,b,a) dudbda = (f_1, f_2)_{L^2(\mathbb{R}^n)} (\psi, g)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Специјално, ако $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, тогаш $DS_g \in L^2(\mathbb{Y}^{2n})$ и уште

$$\|DS_g f\|_2 = \|g\|_2 \|f\|_2.$$

Забелешка 2.1.2. Од тврдењето 2.1.1 и теоремата 2.1.1 може да се заклучи дека ако $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ тогаш за секое $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, важи $DS_g \in L^2(\mathbb{Y}^{2n}) \cap L^\infty(\mathbb{Y}^{2n})$. Користејќи ги особините на L^p просторите лесно се покажува дека за сите f, g со наведените особини важи $DS_g f \in L^p(\mathbb{Y}^{2n})$, за секое $2 < p < \infty$, [28, Теорема 2.5 и Тврдење 2.6].

Наредното тврдење е директна последица на теоремата 2.1.1, кое ја дава инверзната формула за трансформацијата (2.1.5).

Тврдење 2.1.3. [28, Тврдење 3.1] Нека $g, \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ако барем еден од прозорците g или ψ припаѓа во просторот $L^1(\mathbb{R})$ и $(g, \psi)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$ тогаш

$$f(x) = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{Y}^{2n}} DS_g f(u,b,a) \psi_{u,b,a}(x) dudbda, \tag{2.1.6}$$

што значи дека f е единствен елемент од $L^2(\mathbb{R}^n)$ таков што за секоја функција $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ важи

$$(f, h)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{Y}^{2n}} DS_g f(u,b,a) (\psi_{u,b,a}, h)_{L^2(\mathbb{R}^n)} dudbda.$$

Специјално, ако $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ е ненулта функција, тогаш

$$f(x) = \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_{\mathbb{Y}^{2n}} DS_g f(u,b,a) g_{u,b,a}(x) dudbda.$$

Функцијата g е наречена прозорец за анализа, а функцијата ψ прозорец за синтеза. Во [28] е покажано дека тврдењето 2.1.3 важи и кога $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, така што f и g се непрекинати и $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ (види [28, Теорема 3.6]); исто така, ова тврдење важи и кога f и g се во некое густо подмножество од $L^2(\mathbb{R}^n)$, како на пример, класата на Шварц функции. Понатаму ќе го користиме пристапот и резултатите добиени од Гив за насочената кратковремена Фурјеова трансформација дефинирана со (2.1.5). Во наредното поглавје е разгледано нејзиното проширувањето над просторот од темперирани дистрибуции, [81].

2.2. Насочена кратковремена Фурјеова трансформација над просторот од темперирани дистрибуции

Авторите на [81], забележале дека DSTFT (2.1.5) не е добро дефинирана за $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ бидејќи функциите $g_{u,b,a}$ не припаѓаат во просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Поради тоа, тие ја прошируваат оваа трансформација над просторот од темперирани дистрибуции кога $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ користејќи дуален принцип.

Нека $\mathcal{A}$ е локално конвексен простор од глатки тест функции дефинирани над $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Функцијата $\Phi(u, b, a)$ припаѓа во просторот $\mathcal{A}(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ако е глатка функција по променливата $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ и ги има особините на $\mathcal{A}$ по променливата $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Во [81] е воведен просторот $\mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$, $\mathbb{Y}^{2n} = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ како простор од функции $\Phi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{Y}^{2n})$ кои го задоволуваат следниот услов за опаѓање:

$$\rho^{l,m,k}_{s,r}(\Phi) = \sup_{(u,b,a)\in\mathbb{Y}^{2n}} (1 + |a|^2)^{s/2}(1 + |b|^2)^{r/2} \left| \frac{\partial^l}{\partial a^l} \frac{\partial^m}{\partial b^m} \triangle^k_u \Phi(u, b, a)\right| < \infty \tag{2.2.7}$$

за сите $l, m, k, s, r \in \mathbb{N}_0$, каде $\triangle_u$ е Лаплас-Белтрами (Laplace-Beltrami) операторот над $\mathbb{S}^{n-1}$. Топологијата на просторот $\mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$ е дефинирана со помош на полунормите (2.2.7). Неговиот дуален простор се означува со $\mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$. Локално интеграбилната функција F над $\mathbb{Y}^{2n}$ можеме да ја идентификуваме со дистрибуција над $\mathbb{Y}^{2n}$, имено, ако за F важи

$$|F(u, b, a)| \le C(1 + |b|)^s(1 + |a|)^s, (u, b, a) \in \mathbb{Y}^{2n},$$

за некои константи s, $C > 0$, тогаш таа може да се идентификува со елемент од $\mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$ преку

$$\langle F, \Phi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(u, b, a)\Phi(u, b, a)dudbda,\ \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n}). \tag{2.2.8}$$

Во наредната лема е дадена корисна врска помеѓу насочената кратковремена Фурјеова трансформација (2.1.5) и Фурјеовата трансформација на функцијата f.

Лема 2.2.1. [81, Лема 2.1] За $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ важи

$$DS_g f(u,b,a) = \int_{\mathbb{R}} (T_{-a}\widehat{f}(u\cdot\omega)) M_{-b}\widehat{\overline{g}}(\omega) d\omega,$$

каде што $T_b f(\cdot) = f(\cdot - b)$ и $M_a f(\cdot) = e^{2\pi i a \cdot} f(\cdot)$ се операторот на транслација и модулација, соодветно.

Ако $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е нетривијален прозорец чиј прозорец за синтеза е $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, т.е. $(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$, и ако $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ е таква што $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, тогаш наредната *формула за реконструкција* важи по точки ([28], Теорема 3.6),

$$f(x) = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} DS_g f(u,b,a)\psi_{u,b,a}(x) du db da. \tag{2.2.9}$$

Оваа формула за реконструкција овозможува да се дефинира оператор кој пресликува функции над $\mathbb{Y}^{2n}$ во функции над $\mathbb{R}^n$. Во [81], авторите воведуваат *насочен оператор на синтеза* (directional operator of synthesis),

$$DS_g^*\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(u,b,a) g_{u,b,a}(x) du db da, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.10}$$

за $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Интегралот во (2.2.10) е апсолутно конвергентен кога $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$. Според тоа, формулата за реконструкција (2.2.9) може да се презапише како

$$(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})} f = DS_\psi^* \circ DS_g f. \tag{2.2.11}$$

Користејќи ја теоремата на Фубини (види теорема А.0.3), во [81, Тврдење 2.2] е покажано дека ако $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$, тогаш

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) DS_g^*\Phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} DS_{\overline{g}} f(u,b,a)\Phi(u,b,a) du db da. \tag{2.2.12}$$

Следејќи го условот за регуларни дистрибуции над $\mathbb{Y}^{2n}$ важи (2.2.8), па равенството (2.2.12) може да се запише како

$$\langle f, DS_{\overline{g}}^*\Phi\rangle = \langle DS_g f, \Phi\rangle.$$

Последната релација повлекува дека $DS^*_{\overline{g}}$ е транспониран оператор на DS_g. Во [81], оваа дуална релација е модел за дефинирање на дистрибутивна насочена кратковремена Фурјеова трансформација. Реконструкционата формула (2.2.9) за нетривијален прозорец g, повлекува дека насочената кратковремена Фурјеова трансформација DS_g е инјективно пресликување, додека пак насочениот оператор на синтеза DS^*_g е сурјективно пресликување.

Во наредните две теореми е покажана непрекинатоста на насочената кратковремена Фурјеова трансформација и насочениот оператор на синтеза, над просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и простор $\mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$, соодветно.

Теорема 2.2.1. [81, Теорема 3.1] Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Пресликувањето $DS_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$ е непрекинато.

Теорема 2.2.2. [81, Теорема 3.2] Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Пресликувањето $DS^*_g : \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ е непрекинато.

Овие резултати овозможуваат да се прошири насочената кратковремена Фурјеова трансформација, DS_g и насочениот оператор на синтеза, DS^*_g над просторот од дистрибуции $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$, соодветно.

DSTFT на $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ во однос на $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, е елемент $DS_g f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$ чие што дејство над тест функцијата $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$ е дадено со

$$\langle DS_g f, \Phi\rangle := \langle f, DS^*_{\overline{g}}\Phi\rangle, \tag{2.2.13}$$

додека пак насочениот оператор на синтеза DS^*_g на $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$ во однос на g е елементот $DS^*_g F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ дефиниран како

$$\langle DS^*_g F, \varphi\rangle := \langle F, DS_{\overline{g}}\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.2.14}$$

DSTFT (2.2.13) и насочениот оператор на синтеза (2.2.14) се добро дефинирани, заради теоремата 2.2.1 и теоремата 2.2.2, соодветно. Ако за пресликувањата во теоремата 2.2.1 и теоремата 2.2.2 ги разгледаме соодветните транспонирани пресликувања, имајќи ги во предвид особините на транспонирано пресликување на непрекинато пресликување се добива следново тврдење.

Тврдење 2.2.1. [81, Тврдење 3.5] Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Насочената кратковремена Фурјеова трансформација $DS_g : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n})$ и насочениот оператор на синтеза $DS^*_g : \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ се непрекинати линеарни пресликувања.

Пресликувањата од тврдењето 2.2.1 овозможуваат да се обопшти формулата за реконструкција (2.2.9) на дистрибуции [81, Теорема 3.6]. Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е нетривијален прозорец. Ако $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е прозорец на синтеза за g, имено, $(\psi, g)_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$, тогаш

$$\mathrm{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}}(DS^*_\psi \circ DS_g) \tag{2.2.15}$$

2.3. Насочена кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока

Во овој дел ќе ја разгледаме насочената кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока, дефинирана во [4] со цел да се воведе и анализира насочен бранов фронт (directional wave front) за темперирани и експоненцијални дистрибуции.

Нека $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксна насока. DSTFT на интеграбилна функција $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ во однос на $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е дефинирана како

$$DS_{g,u}f(b,a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(u\cdot x - b)e^{-2\pi i x\cdot a}dx, \tag{2.3.16}$$

каде $(b,a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Реконструкционата формула (2.2.9) го добива обликот

$$f(x) = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} DS_{g,u}f(b,a)\psi_{u,b,a}(x)dbda, \tag{2.3.17}$$

каде $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ е прозорец за анализа и $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е прозорец за синтеза и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, додека пак насочениот оператор на синтеза е дефиниран како

$$DS^*_{g,u}\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\Phi(b,a)g_{u,b,a}(x)dbda, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.18}$$

Па, релацијата (2.3.17) може да се запише во облик $(DS^*_{\psi,u}\circ DS_{g,u})f = (g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}f$. Јасно е дека резултатите за непрекинатост на DSTFT и насочениот оператот на синтеза над просторите $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, соодветно, важат и ако го фиксираме параметарот за насока u, имено, двете пресликувања

$$DS_{g,u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad DS^*_{g,u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

се непрекинати, за $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Во [81], насочената кратковремена Фурјеова трансформација е дефинирана над просторот од темперирани дистрибуции преку транспонирано пресликување (види (2.2.13)), што повлекува дека и насочената кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока може да се дефинира над просторот од темперирани дистрибуции преку транспонирано пресликување, т.е.

$$\langle DS_{g,u}f, \Phi\rangle := \langle f, DS^*_{\overline{g},u}\Phi\rangle, \quad \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n}), \tag{2.3.19}$$

и

$$\langle DS^*_{g,u}F, \varphi\rangle := \langle F, DS_{\overline{g},u}\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.20}$$

Од друга страна, во [4] е дадена директна дефиниција на оваа насочена кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока. Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), u \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $b \in \mathbb{R}$. Тогаш од

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni f(x) \mapsto f(x)\overline{g}(x \cdot u - b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

и

$$f(x)\overline{g}(x \cdot u - b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{F}(f(x)\overline{g}(x \cdot u - b)) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

следува директната дефиниција на DSTFT со фиксна насока,

$$DS_{g,u}f(b,a) = \langle f, \overline{g}_{u,b,a}\rangle. \tag{2.3.21}$$

Наредното тврдење покажува дека дефинициите (2.3.19) и (2.3.21) се еквивалентни.

Тврдење 2.3.1. [4, Тврдење 3.4] Директната дефиниција на насочената кратковремена Фурјеова трансформација со фикна насока (2.3.21) и дефиницијата (2.3.19) се еквивалентни.

Во нашите истражувања ќе ја користиме директната дефиниција за дистрибутивната DSTFT со фиксна насока. Притоа обопштувањето на реконструкциона формула (2.3.17) за DSTFT со фиксна насока u за темперирани дистрибуции може да се запише како

$$\mathrm{id}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(g,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}} DS^*_{\psi,u} \circ DS_{g,u}, \tag{2.3.22}$$

каде $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е прозорец за синтеза за нетривијаниот прозорец $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2.4. Абелови и Тауберови теореми

Во овој дел изнесени се нашите оригинални резултати кои се добиени за асимптотиката на насочената кратковремена Фурјеова трансформација и насочената кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока. Добиените резултати се дел од трудот [7].

Во наредното тврдење ја испитуваме асимптотската ограниченост на насочената кратковремена Фурјеова трансформација $DS_g f(u,b,a)$ дефинирана со (2.1.5) за произволен прозорец $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ во однос на променливите b и a, претпоставувајќи дека $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ е квазиасимптотски ограничена во нулата.

Тврдење 2.4.1. Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Ако f е квазиасимптотски ограничена, т.е.

$$f(\varepsilon x) = O(\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{2.4.23}$$

тогаш

$$DS_{g^{1/\varepsilon}} f(u, \varepsilon b, a/\varepsilon) = O(\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n}),$$

каде $g^{\varepsilon}(x) = g(\varepsilon x), \varepsilon > 0$.

Доказ: Нека $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}^{2n})$. Тогаш користејќи ја дефиницијата (2.2.13) имаме

$$\begin{aligned}
&\Big\langle DS_g f^{\varepsilon}(u,b,a), \Phi(u,b,a)\Big\rangle = \Big\langle f^{\varepsilon}(x), DS^*_{\overline{g}}\Phi(x)\Big\rangle \\
= \;& \Big\langle f(\varepsilon x), DS^*_{\overline{g}}\Phi(x)\Big\rangle = \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle f(x), DS^*_{\overline{g}}\Phi(\frac{x}{\varepsilon})\Big\rangle \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(u,b,a)\overline{g}_{u,b,a}(\frac{x}{\varepsilon}) du db da\Big\rangle \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(u,b,a)e^{-2\pi i \frac{x}{\varepsilon}\cdot a}\,\overline{g}(u\cdot\frac{x}{\varepsilon} - b) du db da\Big\rangle \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(u,b,a)e^{-2\pi i x\cdot\frac{a}{\varepsilon}}\,\overline{g}^{1/\varepsilon}(u\cdot x - \varepsilon b) du db da\Big\rangle \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Phi(u,b,a)\overline{g}^{1/\varepsilon}_{u,\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}}(x) du db da\Big\rangle \\
= \;& \frac{1}{\varepsilon^n}\Big\langle DS_{g^{1/\varepsilon}} f(u,\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}), \Phi(u,b,a)\Big\rangle,
\end{aligned}$$

имено ја добиваме релацијата,

$$DS_g f^{\varepsilon}(u,b,a) = \frac{1}{\varepsilon^n} DS_{g^{1/\varepsilon}} f(u,\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}). \tag{2.4.24}$$

Потоа со помош на оваа релација (2.4.24) и користејќи ја квазиасимптотската ограниченост (2.4.23) на дистрибуцијата $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ во нулата го добиваме следниов резултат за квазиасимптотската ограниченост на насочената кратковремена Фурјеова трансформација

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \frac{DS_{g^{1/\varepsilon}} f(u, \varepsilon b, a/\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)}, \Phi(u,b,a) \right\rangle\right| &= \left|\left\langle \frac{DS_g f^{\varepsilon}(u,b,a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, \Phi(u,b,a) \right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, DS^*_{\bar{g}} \Phi(x) \right\rangle\right| \\ &= O(1). \end{aligned}$$

□

На сличен начин се покажува и наредното тврдење 2.4.2 во случај кога f е квазиасимптотски ограничена во бесконечност.

Тврдење 2.4.2. Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Ако f е квазиасимптотски ограничена, т.е.

$$f(\lambda x) = O(\lambda^{\alpha} L(\lambda)) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

тогаш

$$DS_{g^{1/\lambda}} f(u, \lambda b, a/\lambda) = O(\lambda^{\alpha+n} L(\lambda)) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{Y}^{2n}),$$

каде $g^{\lambda}(x) = g(\lambda x), \lambda > 1$.

Во продолжение се дадени неколку нови Абелови и Тауберови резултати кои го карактеризираат асимптотското однесување на дистрибуциите од $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ во однос на нивната DSTFT со фиксна насока.

Наредната лема ни е потребна во доказот на Абеловите и Тауберовите резултати.

Лема 2.4.1. За $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и K компактно подмножество од $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, множеството

$$\{g(u \cdot x - b) e^{2\pi i x \cdot a} : (b,a) \in K\} \tag{2.4.25}$$

е ограничено во $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

Доказ: За да покажеме дека множеството (2.4.25) е ограничено (види тврдење A.0.6), потребно е да покажеме дека за $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $k \in \mathbb{N}_0$ постои константа $C_k > 0$ таква што $\rho_k(g_{u,b,a}) \le C_k(1 + |b|)^k(1+|a|)^k$. Навистина, со користење на Лајбницовото правило, фактот $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, т.е. $|u| = 1$, како и елементарното неравенство $1 + |m+n| \le (1+|m|)(1+|n|)$ за $m, n \in \mathbb{R}$, имаме

$$
\begin{aligned}
& \rho_k(g_{u,b,a}) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le k} (1+|x|)^k \Big| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(g(u\cdot x - b)e^{2\pi i x\cdot a}) \Big| \\
= \;& \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le k} (1+|x|)^k \Big| \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} g^{(\beta)}(u\cdot x - b) P_\beta(u) e^{2\pi i x\cdot a}(2\pi i a)^{\alpha-\beta} \Big| \\
= \;& \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le k} (1+|u\cdot x - b + b|)^k \Big| \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} g^{(\beta)}(u\cdot x - b) \\
& P_\beta(u) e^{2\pi i x\cdot a}(2\pi i a)^{\alpha-\beta} \Big| \\
\le \;& C_1 \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le k} (1+|u\cdot x - b + b|)^k \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Big| g^{(\beta)}(u\cdot x - b) e^{2\pi i x\cdot a} a^{\alpha-\beta} \Big| \\
\le \;& C_2 (1+|b|)^k \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, |\alpha|\le k} \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (1+|u\cdot x - b|)^k |g^{(\beta)}(u\cdot x - b)||a|^{\alpha-\beta} \\
\le \;& C_3 \rho_k(g)(1+|b|)^k(1+|a|)^k \\
\le \;& C(1+|b|)^k(1+|a|)^k.
\end{aligned}
$$

$\square$

Како во тврдењето 2.4.1 и тврдењето 2.4.2, за $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $0 < \varepsilon < 1$ означуваме $g^\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$ и $f^\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ (соодветно за $\lambda > 1$ означуваме $g^\lambda(x) = g(\lambda x)$ и $f^\lambda(x) = f(\lambda x)$).

Во тврдењето 2.4.3 го испитуваме асимптотското однесување на насочената кратковремена Фурјеова трансформација $DS_{g,u}f(b,a)$ за произволен прозорец $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ во однос на двете променливи, претпоставувајќи дека $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ има квазиасимптотско однесување во нулата, додека пак неговото "обратно" тврдење е дадено во тврдењето 2.4.4 (Тауберов резултат).

Тврдење 2.4.3. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Ако

$$f(\varepsilon x) \sim \lambda^\alpha L(\varepsilon) h(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

тогаш за неговата DSTFT во однос на прозорецот $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ важи

$$\frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}) \to DS_{g,u} h(b,a) \quad \text{кога } \varepsilon \to 0^+$$

рамномерно над компактни подмножества од $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Доказ: Јасно е дека релацијата (2.4.24) важи и за насочената кратковремена Фурјеова трансформација со фиксна насока, $DS_{g,u} f$. Тогаш за фиксно $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, користејќи ја квазиасимптотиката на f во нулата имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b,a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\langle f^{\varepsilon}(x), \overline{g}_{u,b,a}(x) \rangle}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \\
&= \langle h(x), \overline{g}_{u,b,a}(x) \rangle \\
&= DS_{g,u} h(b,a).
\end{aligned}$$

Рамномерната конвергенција над компактни множества следува од лемата 2.4.1 и фактот дека слабата и јаката конвергенција на низа во $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ се еквивалентни (види теорема 1.1.7). □

Тврдење 2.4.4. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Следниве два услови:

(i) границите

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f\left(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{C} \tag{2.4.26}$$

постојат за секои $(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и

(ii) постои $C > 0$, $s \geq 0$ и $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ така што

$$\left| \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f\left(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} \right| \leq C\,(1+|b|)^s\,(1+|a|)^s \tag{2.4.27}$$

за секои $(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

се потребен и доволен услов за постоење на хомогена дистрибуција h така што

$$f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) h(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.4.28}$$

Доказ: Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и важат (2.4.26) и (2.4.27). Од реконструкционата формула (2.3.22) и релацијата (2.4.24) имаме

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}, \varphi(x)\right\rangle \\
= &\frac{1}{(g,\psi)_{L^2}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\frac{DS_{g,u}f^{\varepsilon}\,(b,a)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}\langle\psi_{u,b,a}(x),\varphi(x)\rangle dbda \\
= &\frac{1}{(g,\psi)_{L^2}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\frac{DS_{g,u}f^{\varepsilon}\,(b,a)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}\overline{\langle\overline{\psi}_{u,b,a}(x),\overline{\varphi}(x)\rangle} dbda \\
= &\frac{1}{(g,\psi)_{L^2}}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}\frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u}f\left(\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\alpha+n}L(\varepsilon)}\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)dbda.
\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Од условот (ii) следува дека $\exists C'>0, s\geq0$ и $0<\varepsilon_0\leq1$ така што

$$\left|\frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u}f\left(\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\alpha+n}L(\varepsilon)}\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)\right|\leq C'(1+|b|)^s(1+|a|)^s|\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)|,$$

за сите $(b,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$. Бидејќи $\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, можеме да земеме дека

$$|\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)|\leq C''(1+|b|)^{-s-2}(1+|a|)^{-s-2},$$

за некоја константа $C''>0$ и $s\geq0$, од каде следува

$$\begin{aligned}
\left|\frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u}f\left(\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\alpha+n}L(\varepsilon)}\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)\right| &\leq C'(1+|b|)^s(1+|a|)^s\left|\overline{DS_{\psi,u}\overline{\varphi}}(b,a)\right| \\
&\leq \frac{C}{(1+|b|)^2(1+|a|)^2}.
\end{aligned}$$

Според тоа во (2.4.29) можеме да ја примениме Лебеговата теорема за доминантна конвергенција (теорема А.0.2) па добиваме

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}, \varphi(x)\right\rangle$$

постои и е конечна, т.е. (2.4.28) важи.

Ако f има квазиасимптотика од ред α во нулата во однос на бавно променливата функција L, постоењето на границата (2.4.26) директно следува од Абеловиот тип на резултат даден во тврдењето 2.4.3.

Тауберовиот услов (2.4.27) секогаш е задоволен заради слабата конвергенција на мрежата $\{f^{\varepsilon}/\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ во $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; односно слабата конвергенција повлекува дека постои $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ за кое множеството $\{f^{\varepsilon}/\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ е ограничено во слабата топологија на просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (види забелешка 1.1.4). Па, од теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема 1.1.4) која важи и за просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (види забелешка 1.1.3) повлекува дека $\{f^{\varepsilon}/\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ претставува рамномерно непрекинато подмножество од $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, т.е. постојат $k \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ така што

$$\left|\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}, \varphi(x)\right\rangle\right| \leq C\rho_k(\varphi),$$

за сите $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и сите $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Заради врската (2.4.24), дефиницијата на DSTFT со фиксна насока и лемата 2.4.1 следнава оценка

$$\begin{aligned}
\left|\frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u}f\left(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^{\alpha+n}L(\varepsilon)}\right| &= \left|\frac{\varepsilon^n DS_{g,u}f\left(\varepsilon b, a\right)}{\varepsilon^{\alpha+n}L(\varepsilon)}\right| \\
&= \left|\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)}, \overline{g}_{u,b,a}(x)\right\rangle\right| \\
&\leq C\rho_k(\overline{g}_{u,b,a}) \\
&\leq C'(1+|b|)^s(1+|a|)^s
\end{aligned}$$

важи за сите $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и за некоја константа $C' > 0$. □

Слично тврдење како претходното важи за квазиасимптотика во бесконечност.

Тврдење 2.4.5. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Следниве два услови:

(i) границите

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^{\alpha+n}L(\lambda)} DS_{g^{\frac{1}{\lambda}},u}f\left(\lambda b, \frac{a}{\lambda}\right) \in \mathbb{C}$$

постојат за секои $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и

(ii) постои $C > 0$, $s \geq 0$ и $0 < \lambda_0 \leq 1$ така што

$$\left|\frac{DS_{g^{\frac{1}{\lambda}},u}f\left(\lambda b, \frac{a}{\lambda}\right)}{\lambda^{\alpha+n}L(\lambda)}\right| \leq C\left(1+|b|\right)^s\left(1+|a|\right)^s$$

за секои $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\lambda \geq \lambda_0$, се потребен и доволен услов за постоење на хомогена дистрибуција h така што

$$f(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} L(\lambda) h(x) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Во продолжение ќе дадеме уште еден Абелов тип на резултат и соодветен Тауберов резултат за DSTFT со фиксна насока.

Тврдење 2.4.6. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Ако

$$f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) h(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

тогаш за неговата DSTFT во однос на прозорецот $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ важи

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \varepsilon a)}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} = DS_{g,u} h(b,0)$$

за сите $(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Доказ: Нека $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксно, $b \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Ако ставиме смена $x = \varepsilon t$, имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \varepsilon a)}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha+n} L(\varepsilon)} \langle f(x), \overline{g}\left(u \cdot \frac{x}{\varepsilon} - b\right) e^{-2\pi i x \cdot \varepsilon a} \rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \langle f(\varepsilon t), \overline{g}\left(u \cdot t - b\right) e^{-2\pi i t \cdot \varepsilon^2 a} \rangle \\
&= \langle u(t), \overline{g}\left(u \cdot t - b\right) \rangle \\
&= DS_{g,u} h(b,0).
\end{aligned}$$

Притоа, ги користиме квазиасимптотското однесување на f во околина на нулата, лемата 2.4.1 и фактот дека слабата и јаката конвергенција на низа во $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ се еквивалентни (види теорема 1.1.7). $\square$

Тврдење 2.4.7. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Ако

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-n} L(\varepsilon)} DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f\left(\varepsilon b, \varepsilon a\right) \in \mathbb{C} \tag{2.4.30}$$

постојат за секое $(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, и постојат $C > 0$, $s \geq 0$, $p > 1$ и $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ така што

$$\left| \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f\left(\varepsilon b, \varepsilon a\right)}{\varepsilon^{\alpha-n} L(\varepsilon)} \right| \leq C \frac{(1+|b|)^s}{(1+|a|)^p} \tag{2.4.31}$$

за сите $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, тогаш постои хомогена дистрибуција h така што

$$f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) h(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{2.4.32}$$

Доказ: Користејќи ја дефиницијата за DSTFT за фиксно u, лесно се покажува следната релација

$$DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b, \varepsilon^2 a) = \frac{1}{\varepsilon^n} DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \varepsilon a). \tag{2.4.33}$$

Навистина, ако ставиме смена $t = \varepsilon x$

$$\begin{aligned}
DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b, \varepsilon^2 a) &= \langle f^{\varepsilon}(x), \overline{g}_{u,b,\varepsilon^2 a}(x) \rangle \\
&= \langle f(\varepsilon x), \overline{g}(u \cdot x - b) e^{-2\pi i x \cdot \varepsilon^2 a} \rangle \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \langle f(t), \overline{g}(u \cdot \frac{t}{\varepsilon} - b) e^{-2\pi i t \cdot \varepsilon a} \rangle \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} \langle f(t), \overline{g}^{\frac{1}{\varepsilon}}_{u,\varepsilon b,\varepsilon a}(t) \rangle \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n} DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \varepsilon a).
\end{aligned}$$

Нека $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и нека (2.4.30) и (2.4.31) важат. Од инверзната формула (2.3.22), смената $a = \varepsilon^2 a_1$ и релацијата (2.4.33) добиваме

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, \varphi(x) \right\rangle \\
= \ & \frac{1}{(g, \psi)_{L^2}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b, a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \langle \psi_{u,b,a}(x), \varphi(x) \rangle \, dbda \\
= \ & \frac{1}{(g, \psi)_{L^2}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b, \varepsilon^2 a_1)}{\varepsilon^{\alpha - 2n} L(\varepsilon)} \overline{\langle \overline{\psi}_{u,b,\varepsilon^2 a_1}(x), \overline{\varphi}(x) \rangle} dbda_1 \\
= \ & \frac{1}{(g, \psi)_{L^2}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{DS_{g,u} f^{\varepsilon}(b, \varepsilon^2 a_1)}{\varepsilon^{\alpha - 2n} L(\varepsilon)} \overline{DS_{\psi,u} \overline{\varphi}}(b, \varepsilon^2 a_1) dbda_1 \\
= \ & \frac{1}{(g, \psi)_{L^2}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f(\varepsilon b, \varepsilon a_1)}{\varepsilon^{\alpha - n} L(\varepsilon)} \overline{DS_{\psi,u} \overline{\varphi}}(b, \varepsilon^2 a_1) dbda_1.
\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

На сличен начин како во доказот на тврдење 2.4.4 следува дека постои $C > 0, p > 1$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ така што

$$\Big| \frac{DS_{g^{\frac{1}{\varepsilon}},u} f\left(\varepsilon b, \varepsilon a_1\right)}{\varepsilon^{\alpha - n} L(\varepsilon)} \overline{DS_{\psi,u} \overline{\varphi}} \left(b, \varepsilon^2 a_1\right) \Big| \leq \frac{C}{\left(1 + |b|\right)^2 \left(1 + |a_1|\right)^p}$$

за сите $(b, a_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Според тоа, во (2.4.34) можеме да ја примениме Лебеговата теорема за доминантна конвергенција, од каде добиваме дека границата

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \langle f(\varepsilon x), \varphi(x) \rangle$$

постои и е конечна. □

На сосема сличен начин како претходната теорема се покажува следново тврдење кое претставува Тауберов резултат кој ги поврзува квазиасимптотското однесување во бесконечност на темперирана дистрибуција со нејзината DSTFT со фиксна насока.

Тврдење 2.4.8. Нека $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ е фиксен параметар за насока. Ако

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^{\alpha - n} L(\lambda)} DS_{g^{\frac{1}{\lambda}}, u} f\,(\lambda b, \lambda a) \in \mathbb{C}$$

постојат за секое $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, и постојат $C > 0$, $s \geq 0$, $p > 1$ и $0 < \lambda_0 \leq 1$ така што

$$\left| \frac{DS_{g^{\frac{1}{\lambda}}, u} f\,(\lambda b, \lambda a)}{\lambda^{\alpha - n} L(\lambda)} \right| \leq C \frac{(1 + |b|)^s}{(1 + |a|)^p}$$

за сите $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\lambda \geq \lambda_0$, тогаш постои хомогена дистрибуција h така што

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Глава 3

Асимптотска анализа преку Стоквелова трансформација

Во оваа глава е анализирана Стоквеловата трансформација во една димензија со посебен осврт кон нејзиното проширување над просторот од дистрибуции. Најпрво е илустрирана идејата за дефинирање на оваа трансформација, [89], а потоа е анализирана непрекинатоста на Стоквеловата трансформација и Стоквеловиот оператор на синтеза над просторите од високо временско-фреквенциско локализирани функции над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, соодветно. Направената анализа ни овозможи да ја прошириме Стоквеловата трансформација над просторот од Лизоркинови дистрибуции $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Ова проширување пак ни овозможи да направиме карактеризација на асимптотските особини на Лизоркиновите дистрибуции преку Стоквеловата трансформација. Поточно, докажани се Абелови и Тауберови теореми кои го поврзуваат асимптотското однесување на дистрибуциите со асимптотиките на нивната Стоквелова трансформација. Новите оригинални резултати се дадени во поглавјата 3.2., 3.3., 3.4. и 3.5., а се објавени во трудот:

K. H-V. Saneva, S. Atanasova, J. V. Buralieva, Tauberian theorems for the Stockwell transform of Lizorkin distributions, *Applicable Analysis, 2018.* (IF= 1,076). https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1506104.

3.1. Стоквелова трансформација, дефиниција и особини

За разлика од глава 2 во оваа глава ќе ја користиме следнава дефиниција за Фурјеова трансформација на функција $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} f(x)dx,\ \omega \in \mathbb{R}, \tag{3.1.1}$$

каде соодветната *инверзна Фурјеова трансформација* е дадена со

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega} \widehat{f}(\omega)d\omega,\ x \in \mathbb{R},$$

при што важи следнава *Парсевалова формула:*

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R})} = (\widehat{f}, \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3.1.2}$$

за $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

Согласно оваа дефиниција за Фурјеова трансформација и врската помеѓу Фурјеовата трансформација и кратковремената Фурјеова трансформација (2.1.2), STFT за функцијата $f \in L^2(\mathbb{R})$ во однос на $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ е дефинирана со

$$V_g f(b, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x-b)e^{-iax}dx,\ a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.1.3}$$

Заради тоа што STFT е дефинирана за фиксен прозорец g, се покажало дека оваа трансформација има слабо временско-фреквенциска резолуција. Корекцијата на овој недостосток била идеја за воведување на вејвлет трансформацијата.

Функцијата $g \in L^2(\mathbb{R})$ за која

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \tag{3.1.4}$$

се нарекува *вејвлет функција* (често наречена "мајка" вејвлет), а условот (3.1.4) *вејвлет услов за допустливост*. Нека $g \in L^2(\mathbb{R})$ е вејвлет, тогаш за $b \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\{g_{b,a}(x)\}$ претставува *фамилија од вејвлети* дефинирана како

$$g_{b,a}(x) = |a|^{-1/2} g\left(\frac{x-b}{a}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Вејвлет трансформацијата (WT) во една димензија на функцијата $f \in L^2(\mathbb{R})$, во однос на вејвелет $g \in L^2(\mathbb{R})$ е функција над $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ дефинирана како

$$\mathcal{W}_g f(b, a) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}_{b,a}(x)dx,\ b \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.1.5}$$

Детална вејвлет теорија може да се најде во книгите на нејзините создавачи, Мајер (Y. Meyer), [55] и Добеши (I. Daubechies), [14].

Временско-фреквенциската репрезентација дефинирана од Стоквел (R. G. Stockwell) во [89] претставува еден вид хибрид добиен од STFT, (3.1.3) и од вејвлет трансформацијата, (3.1.5) бидејќи ги комбинира нивните добри карактеристики. Оваа нова трансформација која се нарекува *Стоквелова* или S-*трансформација* (ST), се смета како фреквенциско зависна STFT или како корекција на фазата на вејвлет трансформацијата, [19, 34, 74].

Нека $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ е таква што $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$. Стоквеловата трансформација на функцијата $f \in L^2(\mathbb{R})$ во однос на прозорецот g е дефинирана како

$$S_g f(b,a) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixa} f(x) \overline{g}(a(x-b))dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g)_{L^2(\mathbb{R})} \tag{3.1.6}$$

за $b \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, каде $M_a f(\cdot) = e^{ia\cdot} f(\cdot)$ е оператор на модулација, $T_b f(\cdot) = f(\cdot - b)$ е оператор на транслација и $D_{\frac{1}{a}} f(\cdot) = |a| f(a\cdot)$ е оператор на дилатација.

Ако земаме g да биде Гаусовата функција $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, тогаш ја добиваме првата дефиниција на Стоквеловата трансформација, воведена во [89].

Во [89] е дадена следнава основна врска помеѓу Стоквеловата трансформација и вејвлет трансформацијата.

За секое $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$S_g f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iba} |a|^{1/2} \mathcal{W}_{\psi} f(b, \frac{1}{a})$$

за секое $b \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, каде $\psi(x) = e^{ix} g(x)$ за секое $x \in \mathbb{R}$.

Од дефиницијата на Стоквеловата трансформација (3.1.6) може да се забележи дека најзначајната разлика помеѓу ST и WT е корекцијата на фазата која е дадена со фазната функција e^{-ixa}, и оваа фазна функција овозможува локализација на фреквенцијата. Всушност, ST ги мери транслациите и дилатациите на некој сигнал во однос на фазата, дадена со функцијата e^{-ixa}. Повеќе детали за разликите помеѓу ST и WT може да се најдат во [90].

Во [89] е дадена следната врската помеѓу Стоквеловата трансформација и Фурјеовата трансформација од страна на Стоквел за прозорецот $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Нека $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ е таква што

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1.$$

Тогаш за секоја функција $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_g f(b,a)db = \widehat{f}(a), \ a \in \mathbb{R}. \tag{3.1.7}$$

Врската (3.1.7) ја повлекува следнава формула за реконструкција на сигнал f преку Стоквеловата трансформација, која може да се најде во [89], дадена како

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} S_g f(b,a)db\right)(x).$$

Неколку години подоцна изведена е инверзната формула преку оператор, [102].

Од друга страна во [19], е покажано следново Парсевалово равенство за Стоквеловата трансформација:

$$(f(x), h(x))_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_g}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a)\overline{S_g h}(b,a)db\frac{da}{|a|}, \tag{3.1.8}$$

под претпоставка дека $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ и прозорецот $g \in L^2(\mathbb{R})$ го задоволува условот $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 1$, како и условот за допустливост

$$C_g = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\omega - 1)|^2 \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty. \tag{3.1.9}$$

Од Парсеваловото равенство (3.1.8) се добива следнава формула за реконструкција

$$f(x) = \frac{1}{C_g}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x) db \frac{da}{|a|}. \tag{3.1.10}$$

Условот (3.1.9) ни покажува дека Фурјеовата трансформација на функцијата g исчезнува во фреквенцијата -1, т.е. $\hat{g}(-1) = 0$ кога $\hat{g}$ е непрекината во -1. Она што е специфично за Гаусовиот прозорец $g(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, е дека не го задоволува условот за допустливост (3.1.9).

Во следнава лема добивме корисна врска помеѓу Стоквеловата трансформација и Фурјеовата трансформација, која ја користиме во доказите на новите резултати во поглавјата 3.2. и 3.3.

Лема 3.1.1. За $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$S_g f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}} \left(\frac{\omega - a}{a} \right) d\omega. \tag{3.1.11}$$

Доказ: Прво ќе разгледаме Фурјеова трансформација на функцијата $M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x)$, т.е. ќе ја покажеме релацијата

$$\mathcal{F}\left(M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x) \right)(\omega) = |a| T_a M_{-b} D_a \widehat{g}(\omega). \tag{3.1.12}$$

Навистина,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x) \right)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x) dx \\
&= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\omega-a)} g(a(x-b)) dx \\
&= \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\omega-a)} g(a(x-b)) dx, & a > 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\omega-a)} g(a(x-b)) dx, & a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ib(\omega-a)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\frac{\omega-a}{a})} g(t) dt, & a > 0 \\ \frac{-e^{-ib(\omega-a)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-it(\frac{\omega-a}{a})} g(t) dt, & a < 0 \end{cases} \\
&= e^{-ib(\omega-a)} \widehat{g}\left(\frac{\omega-a}{a}\right) = |a| e^{-ib(\omega-a)} D_a \widehat{g}(\omega - a) \\
&= |a| M_{-b} D_a \widehat{g}(\omega-a) = |a| T_a M_{-b} D_a \widehat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

Понатаму, со користење на дефиницијата за Стоквелова трансформација (3.1.6), Парсеваловата формула за Фурјеовата трансформација (3.1.2) и релацијата (3.1.12) ја добиваме формулата (3.1.11), т.е.

$$\begin{aligned}
S_g f(b,a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g))_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\widehat{f}, |a| T_a M_{-b} D_a \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}} \left(\frac{\omega-a}{a} \right) d\omega.
\end{aligned}$$

$\square$

3.2. Обопштување на формулата за реконструкција и Парсеваловото равенство

Во овој дел ќе биде разгледано проширувањето на формулата за реконструкција (3.1.10) за поголеми класи прозорец-функции, која овозможува дефинирање на Стоквелов оператор на синтеза, како и проширување на Парсеваловото равенство за Стоквеловата трансформација (3.1.8), користејќи прозорци кои не мора да го задоволуваат условот на допустливост (3.1.9). Притоа, најпрво ќе дадеме малку поопшт услов за допустливост.

Дефиниција 3.2.1. Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е нетривијален прозорец. Функцијата $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ се нарекува прозорец за реконструкција (прозорец на синтеза) соодветен на прозорецот g ако

$$C_{g,\psi} := \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\omega - 1)\overline{\widehat{g}}(\omega - 1)\frac{d\omega}{|\omega|} < \infty. \tag{3.2.13}$$

Притоа секој прозорец g допушта да се конструира прозорец за реконструкција ψ, само доколку g е нетривијален.

Во наредното тврдење е дадена формула за реконструкција, така што прозорецот g и неговиот прозорец за реконструкција ψ се темперирани тест функции.

Тврдење 3.2.1. (Формула за реконструкција) Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е нетривијален прозорец и нека $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е соодветен прозорец за реконструкција. Ако $f \in L^1(\mathbb{R})$ е таков што $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, тогаш следнава формула за реконструкција важи по точки,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi(x) db \frac{da}{|a|}. \tag{3.2.14}$$

Доказ: Користејќи ја релацијата (3.1.11) и смената $a(x-b) = b_1$, имаме

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi db \frac{da}{|a|} \\
= &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega - a)} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}} \left(\frac{\omega - a}{a} \right) d\omega \right) |a| e^{ixa} \psi(a(x-b)) db \frac{da}{|a|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{ixa}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)da\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\psi(a(x-b))db\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{ixa}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)da\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\psi(a(x-b))db\right)\widehat{f}(\omega)d\omega\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{ixa}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)da\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-\frac{b_1}{a})(\omega-a)}\psi(b_1)\frac{db_1}{-a}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{ixa}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)da\int_{\infty}^{-\infty} e^{i(x-\frac{b_1}{a})(\omega-a)}\psi(b_1)\frac{db_1}{-a}\right)\widehat{f}(\omega)d\omega\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-\frac{b_1}{a})(\omega-a)}\psi(b_1)db_1\right)\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)e^{iax}d\omega\frac{da}{|a|}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix(\omega-a)}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)e^{iax}d\omega\frac{da}{|a|}\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{|a|}\right)d\omega = I_1+I_2
\end{aligned}$$

каде што

$$I_1=\int_{-\infty}^{0} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{|a|}\right)d\omega$$

и

$$I_2=\int_{0}^{\infty} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{|a|}\right)d\omega.$$

Интегралите I_1 и I_2 најпрво ќе ги поделиме на два интеграла во однос на променливата a, па потоа во новодобиените интеграли ќе ставиме смена $\frac{\omega}{a}=\omega_1$ така што $\frac{-da}{a}=\frac{d\omega_1}{\omega_1}$, од каде добиваме

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{0} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{|a|}\right)d\omega\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{-\infty}^{0}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{-a}\right.\\
&\quad\left.+\int_{0}^{\infty}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{a}\right)d\omega\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{0}^{\infty}\widehat{\psi}(\omega_1-1)\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{\omega_1}\right.\\
&\quad\left.+\int_{-\infty}^{0}\widehat{\psi}(\omega_1-1)\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{-\omega_1}\right)d\omega\\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\,(\omega_1-1)\,\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{|\omega_1|}\right)d\omega,
\end{aligned}$$

соодветно

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{|a|}\right)d\omega \\
&= \int_0^\infty e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{-\infty}^0\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{-a}\right. \\
&\quad \left.+\int_0^\infty\widehat{\psi}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\frac{da}{a}\right)d\omega \\
&= \int_0^\infty e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(-\int_0^{-\infty}\widehat{\psi}(\omega_1-1)\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{-\omega_1}\right. \\
&\quad \left.+\int_\infty^0\widehat{\psi}(\omega_1-1)\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{-\omega_1}\right)d\omega \\
&= \int_0^\infty e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\,(\omega_1-1)\,\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{|\omega_1|}\right)d\omega.
\end{aligned}$$

Според тоа имаме

$$I_1+I_2=\int_{\mathbb{R}}e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\,(\omega_1-1)\,\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{|\omega_1|}\right)d\omega,$$

односно

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}S_gf(b,a)M_aT_bD_{\frac{1}{a}}\psi db\frac{da}{|a|} \\
=\ &\int_{\mathbb{R}}e^{ix\omega}\widehat{f}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{\psi}\,(\omega_1-1)\,\overline{\widehat{g}}(\omega_1-1)\frac{d\omega_1}{|\omega_1|}\right)d\omega \\
=\ &\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}f(x).
\end{aligned}$$

□

Во наредното тврдење е докажано Парсеваловото равенство за Стоквеловата трансформација претпоставувајќи дека прозорецот g и соодветниот прозорец за реконстрикција ψ се темперирани тест функции.

Тврдење 3.2.2. (Обопштено Парсевалово равенство) Нека $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е прозорец за реконструкција соодветен на нетривијалниот прозорец $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $f,h\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$. Тогаш

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{h}(x)dx=\frac{1}{C_{g,\psi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}S_gf(b,a)\overline{S_\psi h}(b,a)db\frac{da}{|a|}. \tag{3.2.15}$$

Доказ: Користејќи ја формулата за реконструкција (3.2.14) и теоремата на Фубини (теорема А.0.3) имаме

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{h}(x)dx \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi(x) db \frac{da}{|a|} \right) \bar{h}(x) dx \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) \left(\int_{\mathbb{R}} M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi(x) \bar{h}(x) dx \right) db \frac{da}{|a|} \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\overline{\bar{h}(x) e^{iax} |a| \psi(a(x-b))}} dx \right) db \frac{da}{|a|} \\
=\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{h(x) e^{-iax} |a| \overline{\psi}(a(x-b))} dx \right) db \frac{da}{|a|} \\
=\ & \frac{1}{C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) \overline{S_\psi h(b,a)} db \frac{da}{|a|}.
\end{aligned}$$

□

Нека $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Ќе ја фиксираме $\frac{dbda}{|a|}$ како стандардна мера на $\mathbb{Y}$. Па согласно овој избор, нека $L^2(\mathbb{Y}) = L^2\left(\mathbb{Y}, \frac{dbda}{|a|}\right)$ така што скаларниот производ во овој простор е дефиниран како

$$(F, G)_{L^2(\mathbb{Y})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(b,a) \overline{G(b,a)} db \frac{da}{|a|}.$$

Тогаш, релацијата (3.2.15) го добива обликот

$$(f, h)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_{g,\psi}} (S_g f, S_\psi h)_{L^2(\mathbb{Y})}.$$

Како последица на ова добиваме дека

$$||S_g f||_{L^2(\mathbb{Y})} = \sqrt{C_{g,g}}\, ||f||_{L^2(\mathbb{R})}$$

важи на густ потпростор од просторот $L^2(\mathbb{R})$.

Формулата за реконструкција (3.2.14) ни овозможува да го дефинираме операторот кој ги пресликува функциите над $\mathbb{Y}$ во функции над $\mathbb{R}$. За дадена $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ го воведуваме *Стоквеловиот оператор на синтеза* како

$$S_g^* F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x) db \frac{da}{|a|}. \tag{3.2.16}$$

Интегралот во (3.2.16) е апсолутно конвергентен кога $F \in \mathcal{S}(\mathbb{Y})$. Според тоа, лесно се покажува дека релацијата (3.2.14) може да се запише во облик

$$(S^*_\psi \circ S_g)f = C_{g,\psi} f. \tag{3.2.17}$$

Навистина,

$$(S^*_\psi \circ S_g)f = S^*_\psi(S_g f) = \frac{C_{g,\psi}}{\sqrt{2\pi} C_{g,\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_g f(b,a) M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi(x) db \frac{da}{|a|} = C_{g,\psi} f.$$

3.3. Непрекинатост на Стокеловата трансформација над просторот од тест функции $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$

Во [34, Пример 1] е покажано дека за $g(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, Стоквеловата трансформација не го пресликува просторот $L^2(\mathbb{R})$ во просторот $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, што ни даде идеја да испитаме дали Стоквеловата трансформација го пресликува просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Во [10] Катана (V. Catană) ја користи следнава дефиниција за модифицирана Стоквелова трансформација, која може да се најде во [34],

$$\begin{aligned} S_{s,g} f(b,a) &= \frac{|a|^{1/s}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iax} f(x) \overline{g}(a(x-b)) dx \\ &= \frac{|a|^{1/s-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)} \hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}} \left(\frac{\omega - a}{a} \right) d\omega, \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

каде што $s \geq 1$, $(b,a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дефиницијата на Стоквеловата трансформација (3.1.6) која ние ја користиме се добива кога $s = 1$.

Во доказите на главните резултати во [10], Катана користи факт (кој не е докажан) дека модифицираната Стоквелова трансформација (3.3.18) го пресликува просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, каде што $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ е Шварцовиот простор кој ги содржи сите глатки функции Φ над $\mathbb{R}^2$ кои го задоволуваат следниот услов

$$\rho_r^{l,m}(\Phi) = \sup_{(b,a)\in\mathbb{R}^2} (1 + |b| + |a|)^r \left| \frac{\partial^l}{\partial a^l} \frac{\partial^m}{\partial b^m} \Phi(b,a) \right| < \infty, \ l, m, r \in \mathbb{N}_0. \tag{3.3.19}$$

Ние најдовме пример со кој го побиваме неговото тврдење дека модифицираната Стоквелова трансформација го пресликува просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Пример 3.3.1. Нека $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ е прозорец кој го задоволува условот за допустливост (3.1.9) и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, дадени со $\hat{g}(\omega) = (2\pi)^{-1/2}(\omega + 1)e^{-\omega^2/4}$ и $\hat{f}(\omega) = \omega e^{-\omega^2/4}$. Тогаш од лемата 3.1.1 имаме дека

$$\begin{aligned} S_g f(0,a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega}{a} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2\omega}{a} + 1\right)} \omega e^{-\omega^2/4} d\omega \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{-\frac{1+\omega^2}{4}} d\omega = \frac{C}{a},\ a \to \infty, \end{aligned}$$

каде $C \neq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} \rho_2^{0,0}(S_g f(0,a)) &= \sup_{(0,a)\in\mathbb{R}^2} (1+|a|)^2 |S_g f(0,a)| \\ &\sim C \sup_{(0,a)\in\mathbb{R}^2} \frac{(1+|a|)^2}{|a|},\ a \to \infty, \end{aligned}$$

кое ни покажува дека $\rho_2^{0,0}(S_g f) = \infty$. На сличен начин се добива дека $\rho_r^{0,0}(S_g f) = \infty$ кога $r = 3, 4, ..$, од каде следува дека $S_g f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Аналогно важи и ако ја примениме дефиницијата за модифицирана Стоквелова трансформација (3.3.18) која ја користи Катана,

$$\begin{aligned} S_{s,g} f(0,a) &= \frac{|a|^{1/s-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega}{a} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2\omega}{a} + 1\right)} \omega e^{-\omega^2/4} d\omega \\ &\sim \frac{|a|^{1/s-1}}{2\pi a} \int_{\mathbb{R}} \omega^2 e^{-\frac{1+\omega^2}{4}} d\omega = \frac{C}{a|a|^{1-1/s}},\ a \to \infty, \end{aligned}$$

каде $C \neq 0$, кое покажува дека $\rho_3^{0,0}(S_g f) = \infty$. Според тоа, $S_g f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, па поради ова Тауберовите услови за ограниченост (3.4), (3.7) и (3.9) во трудот [10] не се точни.

Со тоа заклучивме дека системот од полунорми (3.3.19) кој го користи Катана, не го зема во предвид однесувањето на функцијата $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ за мали вредности на a (т.е. изразот $|a|^{-r}$ не се појавува во (3.3.19)), кое има важна улога при конструкцијата на рангот на Стоквеловата трансформација. За $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, во нашиот труд [82] го воведуваме просторот $\mathcal{S}(\mathbb{Y})$ од високо локализирани тест функции над $\mathbb{Y}$ како простор од глатки функции Φ над $\mathbb{Y}$ кои го задоволуваат следниот услов

$$\rho_{s,r}^{l,m}(\Phi) = \sup_{(b,a)\in\mathbb{Y}} \left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s}\right)(1+b^2)^{r/2} \left|\frac{\partial^l}{\partial a^l}\frac{\partial^m}{\partial b^m}\Phi(b,a)\right| < \infty \qquad (3.3.20)$$

за сите $l, m, s, r \in \mathbb{N}_0$. Тополгијата на просторот $\mathcal{S}(\mathbb{Y})$ е дефинирана со помош на полунормите (3.3.20). Неговиот дуален простор ќе го означуваме со $\mathcal{S}'(\mathbb{Y})$, кој игра важна улога во нашата дефиниција на Стоквеловата трансформација на Лизоркинови дистрибуции, бидејќи во него се содржи рангот на оваа трансформација. Локално интеграбилната функција F дефинирана над $\mathbb{Y}$ можеме да ја идентификуваме со дистрибуција дефинирана над $\mathbb{Y}$, имено ако за F важи

$$|F(b,a)| \leq C\left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s}\right)(1+b^2)^{r/2},\ (b,a) \in \mathbb{Y},$$

за некои константи $C, r, s > 0$, тогаш таа може да се идентификува со елемент од просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{Y})$ преку

$$\langle F, \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(b,a)\Phi(b,a)db\frac{da}{|a|},\ \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}).$$

Во [82] ја анализиравме Стоквеловата теорија во рамки на просторот од високо временско-фреквенциско локализирани тест функции над реалната права, $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и неговиот дуален простор, $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, т.е. просторот од Лизоркинови дистрибуции, при што ги докажавме следниве теореми за Стоквеловата трансформација и Стокеловиот оператор на синтеза.

Теорема 3.3.1. Пресликувањето $S_g : \mathcal{S}_0(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{Y})$ е непрекинато.

Доказ: Нека со

$$\rho_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^k|\varphi^{(n)}(x)|,\ k, n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.3.21}$$

ги дефинираме полунормите на просторот $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Ќе покажеме дека за дадени $s, r, m, l \in \mathbb{N}_0$, постојат $\nu, \tau, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ така што

$$\rho^{l,m}_{s,r}(S_g f) \leq C\rho_{\nu,\alpha}(f)\rho_{\tau,\beta}(g),\ f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}). \tag{3.3.22}$$

Чекор 1. Користејќи ја дефиницијата на Стоквелова трансформација (3.1.6) и Лајбницовото правило имаме

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^l}{\partial a^l}\frac{\partial^m}{\partial b^m}S_g f(b,a)\right| = \\ = \ &\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^l}{\partial a^l}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixa}a^{m+1}\overline{g^{(m)}(a(x-b))}dx\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{k_1+k_2+k_3=l} \binom{l}{k_1, k_2, k_3} C_{m,k_1} a^{m+1-k_1} e^{-ixa} (-ix)^{k_2} \right. \\
&\quad \left. \overline{g^{(m+k_3)}(a(x-b))} (x-b)^{k_3} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k_1+k_2+k_3=l} \binom{l}{k_1, k_2, k_3} C_{m,k_1} a^{m+1-k_1-k_3} (-i)^{k_2} \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} x^{k_2} f(x) e^{-ixa} (a(x-b))^{k_3} \overline{g^{(m+k_3)}(a(x-b))} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k_1+k_2+k_3=l} \binom{l}{k_1, k_2, k_3} C_{m,k_1} |a|^{m-k_1-k_3} \\
&\quad \left| \int_{\mathbb{R}} x^{k_2} f(x) \overline{e^{ixa} |a| (a(x-b))^{k_3} g^{(m+k_3)}(a(x-b))} dx \right| \\
&\leq \sum_{k_1+k_2+k_3=l} \binom{l}{k_1, k_2, k_3} C_{m,k_1} \left(|a|^{m-k_1-k_3} + \frac{1}{|a|^{m-k_1-k_3}} \right) \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} x^{k_2} f(x) \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} (x^{k_3} g^{(m+k_3)}(x))} dx \right| .
\end{aligned}
$$

Нека $x^{k_2} f(x) = f_{k_2}(x)$ и $x^{k_3} g^{(m+k_3)}(x) = g_{k_3}(x)$. Бидејќи множењето со x^m и диференцирањето се непрекинати оператори над $S_0(\mathbb{R})$ (види поглавје 1.1.2.) имаме дека

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^l}{\partial a^l} \frac{\partial^m}{\partial b^m} S_g f(b,a) \right| \leq \\
&\sum_{k_1+k_2+k_3=l} \binom{l}{k_1, k_2, k_3} C_{m,k_1} \left(|a|^m + \frac{1}{|a|^m} \right) \left| S_{g_{k_3}} f_{k_2}(b,a) \right| .
\end{aligned}
$$

Последново неравенство ќе го помножиме со $(1+b^2)^{r/2} \left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s} \right)$, и ќе ја користиме оценката

$$
\left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s} \right) \left(|a|^m + \frac{1}{|a|^m} \right) \leq 3 \left(|a|^{s+m} + \frac{1}{|a|^{s+m}} \right),
$$

за $m, s \in \mathbb{N}_0$ и за $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Навистина, ако $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ и $m, s \in \mathbb{N}_0$, тогаш важи

$$
\begin{aligned}
\left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s} \right) \left(|a|^m + \frac{1}{|a|^m} \right) &= |a|^{s+m} + |a|^{m-s} + |a|^{s-m} + \frac{1}{|a|^{s+m}} \\
&\leq 3|a|^{s+m} + \frac{1}{|a|^{s+m}} \leq 3 \left(|a|^{s+m} + \frac{1}{|a|^{s+m}} \right).
\end{aligned}
$$

Ако пак, $-1 < a < 1$, $a \neq 0$ и $m, s \in \mathbb{N}$, тогаш важи

$$\begin{aligned}\left(|a|^s + \frac{1}{|a|^s}\right)\left(|a|^m + \frac{1}{|a|^m}\right) &= |a|^{s+m} + |a|^{m-s} + |a|^{s-m} + \frac{1}{|a|^{s+m}} \\ &\leq |a|^{s+m} + 3\frac{1}{|a|^{s+m}} \leq 3\left(|a|^{s+m} + \frac{1}{|a|^{s+m}}\right).\end{aligned}$$

Според тоа, добиваме дека

$$\rho^{l,m}_{s,r}(S_g f) \leq C \sum_{k_1+k_2+k_3=l} \rho^{0,0}_{s+m,r}(S_{g_{k_3}} f_{k_2}(b,a)).$$

Па, можеме да претпоставиме дека $m = l = 0$.

Чекор 2. Најпрво ќе покажеме дека

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)^{r/2} e^{ib(\omega-a)} = (1+b^2)^{r/2} e^{ib(\omega-a)} \tag{3.3.23}$$

Навистина,

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)^{r/2} e^{ib(\omega-a)} &= \left(\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right) e^{ib(\omega-a)}\right)^{r/2} (e^{ib(\omega-a)})^{1-r/2} \\ &= \left((1-(ib)^2)e^{ib(\omega-a)}\right)^{r/2} (e^{ib(\omega-a)})^{1-r/2} \\ &= \left((1+b^2)e^{ib(\omega-a)}\right)^{r/2} (e^{ib(\omega-a)})^{1-r/2} \\ &= (1+b^2)^{r/2} e^{ib(\omega-a)}\end{aligned}$$

Ако ја употребиме формулата (3.1.11), равенството (3.3.23) и Лајбницовото правило имаме

$$\begin{aligned}&(1+b^2)^{r/2}\,|S_g f(b,a)| = (1+b^2)^{r/2}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\left(1-\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)^{r/2} e^{ib(\omega-a)}\right)\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\left(1-\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\right)^{r/2}\left(\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)\right)d\omega\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\sum_{j\leq r}\binom{r}{j}\widehat{f}^{(r-j)}(\omega)\overline{\widehat{g}}^{(j)}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)a^{-j}d\omega\right| \\ &= \left|\sum_{j\leq r}\binom{r}{j}a^{-j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ib(\omega-a)}\widehat{f}^{(r-j)}(\omega)\overline{\widehat{g}}^{(j)}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j\leq r}\binom{r}{j}|a|^{-j}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{ib(\omega-a)}\widehat{f}^{(r-j)}(\omega)\overline{\widehat{g}}^{(j)}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right|\\
&\leq \sum_{j\leq r}\binom{r}{j}\left(|a|^{j}+\frac{1}{|a|^{j}}\right)\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{ib(\omega-a)}\widehat{f}^{(r-j)}(\omega)\overline{\widehat{g}}^{(j)}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right|\\
&\leq 2\sum_{j\leq r}\binom{r}{j}\left(|a|^{r}+\frac{1}{|a|^{r}}\right)\left|S_{g^{(j)}}f^{(r-j)}(b,a)\right| \qquad (3.3.24)
\end{aligned}
$$

Во последното неравенство користиме дека за $j,r\in\mathbb{N}_0, j\leq r$ важи

$$|a|^{j}+\frac{1}{|a|^{j}}\leq 2\left(|a|^{r}+\frac{1}{|a|^{r}}\right)$$

Навистина, ако $a\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ тогаш важи $|a|^{j}+\frac{1}{|a|^{j}}\leq 2|a|^{r}\leq 2(|a|^{r}+\frac{1}{|a|^{r}})$, додека пак ако $-1<a<1$ тогаш важи $|a|^{j}+\frac{1}{|a|^{j}}\leq\frac{2}{|a|^{r}}\leq 2(|a|^{r}+\frac{1}{|a|^{r}})$.

Ако постапиме на сличен начин како во чекор 1, т.е. неравенството (3.3.24) го помножиме со $(|a|^{s}+\frac{1}{|a|^{s}})$ добиваме

$$\rho^{0,0}_{s,r}(S_g f)\leq C\sum_{j\leq r}\binom{r}{j}\rho^{0,0}_{s+r,0}\left(S_{g^{(j)}}f^{(r-j)}(b,a)\right).$$

Последователно можеме да земеме дека $r=0$.

Чекор 3. Во овој чекор ќе го разгледаме делот кој содржи множење со $|a|^{s}$ во $\rho^{0,0}_{s,0}$. Бидејќи $\hat{g}^{(n)}(0)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$ (види поглавје 1.1.2.), тогаш Тајлоровиот развој за функцијата $\widehat{g}$ е $\widehat{g}(\frac{\omega}{a})=\frac{\widehat{g}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})}{s!}(\frac{\omega}{a})^{s}$ за некое $\frac{\omega_0}{a}\in[0,\frac{\omega}{a}]$. Притоа, важи оценката

$$|\overline{\widehat{g}}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})|\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|x^{s}\overline{g}(x)|dx,$$

за функцијата $\overline{\widehat{g}}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(ix)^{s}e^{ix\frac{\omega_0}{a}}\overline{g}(x)dx$, која претставува s-ти извод на $\widehat{g}(\frac{\omega_0}{a})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\frac{\omega_0}{a}}g(x)dx$. Според тоа, имаме

$$
\begin{aligned}
|a^{s}S_g f(b,a)| &= \left|\frac{a^{s}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)e^{ib(\omega-a)}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right|\\
&= \left|\frac{a^{s}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega+a)e^{ib\omega}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega}{a}\right)d\omega\right|\\
&= \left|\frac{a^{s}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega+a)e^{ib\omega}\frac{\overline{\widehat{g}}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})}{s!}\left(\frac{\omega}{a}\right)^{s}d\omega\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}s!}\int_{\mathbb{R}}\omega^s\widehat{f}(\omega+a)e^{ib\omega}\overline{\widehat{g}}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})d\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}s!}\int_{\mathbb{R}}|\omega^s\widehat{f}(\omega+a)||e^{ib\omega}|\left|\overline{\widehat{g}}^{(s)}(\frac{\omega_0}{a})\right|d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi s!}\int_{\mathbb{R}}|x^s\overline{g}(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}}\left|\omega^s\widehat{f}(\omega+a)\right|d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi s!}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^s\,|\overline{g}(x)|\,dx\int_{\mathbb{R}}(1+|\omega|)^s\left|\widehat{f}(\omega+a)\right|d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi s!}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^{s+2}\,|\overline{g}(x)|\,\frac{dx}{(1+|x|)^2}\int_{\mathbb{R}}(1+|\omega|)^{s+2}\left|\widehat{f}(\omega+a)\right|\frac{d\omega}{(1+|\omega|)^2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi s!}\rho_{s+2,0}(f)\rho_{s+2,0}(g)\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\omega}{1+\omega^2} \\
&\leq C\rho_{s+2,0}(f)\rho_{s+2,0}(g). \qquad (3.3.25)
\end{aligned}
$$

Чекор 4. За множењето со $|a|^{-s}$, на сличен начин како во претходниот чекор наоѓаме Тајлоров развој за функцијата $\widehat{f}$. Бидејќи $\hat{f}^{(n)}(0) = 0$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$, тогаш Тајлоровиот развој за функцијата $\widehat{f}$ е $\widehat{f}(a\omega) = \frac{\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0)}{(s-1)!}(a\omega)^{s-1}$ за некое $a\omega_0\in[0,a\omega]$. Притоа, користејќи ја оценката

$$
|\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}|x^{s-1}f(x)|dx,
$$

за функцијата $\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(ix)^{s-1}e^{ixa\omega_0}f(x)dx$, која претставува $(s-1)$-ви извод на $\widehat{f}(a\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ixa\omega_0}f(x)dx$ имаме

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{a^s}S_gf(b,a)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^s}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)e^{ib(\omega-a)}\overline{\widehat{g}}\left(\frac{\omega-a}{a}\right)d\omega\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^{s-1}}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(a\omega)e^{iba(\omega-1)}\overline{\widehat{g}}(\omega-1)d\omega\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}a^{s-1}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0)}{(s-1)!}(a\omega)^{s-1}e^{iba(\omega-1)}\overline{\widehat{g}}(\omega-1)d\omega\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}(s-1)!}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0)e^{iba(\omega-1)}\omega^{s-1}\overline{\widehat{g}}(\omega-1)d\omega\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}(s-1)!}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}^{(s-1)}(a\omega_0)||e^{iba(\omega-1)}|\left|\omega^{s-1}\overline{\widehat{g}}(\omega-1)\right|d\omega \\
&\leq \frac{1}{2\pi(s-1)!}\int_{\mathbb{R}}\left|x^{s-1}f(x)\right|dx\int_{\mathbb{R}}\left|\omega^{s-1}\overline{\widehat{g}}(\omega-1)\right|d\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi(s-1)!}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^{s-1}|f(x)|dx\int_{\mathbb{R}}(1+|\omega|)^{s-1}\left|\overline{\widehat{g}}(\omega-1)\right|d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi(s-1)!}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^{s+1}|f(x)|\frac{dx}{(1+|x|)^2}\\
&\quad \int_{\mathbb{R}}(1+|\omega|)^{s+1}\left|\overline{\widehat{g}}(\omega-1)\right|\frac{d\omega}{(1+|\omega|)^2}\\
&\leq \frac{1}{2\pi(s-1)!}\rho_{s+1,0}(f)\rho_{s+1,0}(g)\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\omega}{1+\omega^2}\\
&\leq C\rho_{s+1,0}(f)\rho_{s+1,0}(g).
\end{aligned}
\tag{3.3.26}
$$

Сега комбинирајќи ги (3.3.25) и (3.3.26) ќе имаме

$$\rho^{0,0}_{s,0}(S_gf)\leq C\rho_{s+2,0}(f)\rho_{s+2,0}(g).$$

Па (3.3.22) важи за $\nu=\tau=s+m+l+r+2$ и $\alpha=\beta=0$. □

Аналогна теорема докажуваме и за Стоквеловиот оператор на синтеза.

Теорема 3.3.2. Пресликувањето $S^*_g:\mathcal{S}(\mathbb{Y})\times\mathcal{S}_0(\mathbb{R})\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е непрекинато.

Доказ: Ќе претпоставиме дека $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и $F(b,a)\in\mathcal{S}(\mathbb{Y})$. Најпрво сакаме да покажеме дека $S^*_gF\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Ако ставиме смена $a(x-b)=t$, и притоа ја примениме биномната формула, како и Тајлоровиот ред за експоненцијалната функција, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, бидејќи $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, за $m\in\mathbb{N}_0$ имаме

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}x^me^{iax}g(a(x-b))dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{t}{a}+b\right)^m e^{ia\left(\frac{t}{a}+b\right)}g(t)\frac{dt}{a}\\
&= \sum_{k\leq m}\begin{pmatrix} m\\ k\end{pmatrix}a^{k-m-1}b^ke^{iba}\int_{\mathbb{R}}t^{m-k}e^{it}g(t)dt\\
&= \sum_{k\leq m}\begin{pmatrix} m\\ k\end{pmatrix}a^{k-m-1}b^ke^{iba}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int_{\mathbb{R}}t^{n+m-k}g(t)dt=0.
\end{aligned}
$$

Од тоа што $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и $F(b,a)\in\mathcal{S}(\mathbb{Y})$ можеме да ја примениме теоремата на Фубини (теорема А.0.3), па добиваме дека

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}x^mS^*_gF(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^m\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}F(b,a)M_aT_bD_{\frac{1}{a}}g(x)db\frac{da}{|a|}\right)dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}F(b,a)\left(\int_{\mathbb{R}}x^me^{iax}g(a(x-b))dx\right)dbda=0,
\end{aligned}
$$

од каде следува дека $S_g^*F \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$.

Понатаму ќе покажеме дека S_g^* е непрекинат оператор, т.е. ќе покажеме дека за дадени $k, n \in \mathbb{N}_0$ постојат $C > 0$ и $\alpha, \beta, s, r, l, m \in \mathbb{N}$ така што

$$\rho_{k,n}\left(S_g^*F\right) \leq C\rho_{\alpha,\beta}(g)\rho_{s,r}^{l,m}(F). \tag{3.3.27}$$

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)^{k/2}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}S_g^*F(x)\right| \\
=\;& (1+x^2)^{k/2}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(b,a)M_aT_bD_{\frac{1}{a}}g(x)db\frac{da}{|a|}\right| \\
=\;& (1+x^2)^{k/2}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} -F(x-b_1,a)e^{ixa}g(ab_1)db_1da\right| \qquad (3.3.28) \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+x^2)^{k/2}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}\frac{\partial^m}{\partial x^m}F(x-b_1,a)e^{ixa}(ia)^{n-m}\right. \\
& \left. g(ab_1)db_1da\right|
\end{aligned}$$

Горниве равенства се добиени најпрво со смената $x - b = b_1$ во интегралот, потоа фактот дека $F(b,a) \in \mathcal{S}(\mathbb{Y})$ и $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ни овозможува во равенството (3.3.28) со изводот да влеземе во интегралот, па на крај го применуваме Лајбницовото правило. Понатаму, користејќи дека $\partial_b^\gamma f(ax+b) = \frac{1}{a^\gamma}\partial_u^\gamma f(au+b)$ за $(b,a) \in \mathbb{R}^2, \gamma \in \mathbb{N}_0$ и $x \in \mathbb{R}$, Парсеваловата формула (3.1.2) и релацијата (3.3.23), имаме

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)^{k/2}\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n}S_g^*F(x)\right| \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+x^2)^{k/2}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}\frac{\partial^m}{\partial b_1^m}\left(F(x-b_1,a)\right)e^{ixa}(ia)^{n-m}g(ab_1)db_1da\right| \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1+x^2)^{k/2}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}\varepsilon^m\widehat{F}(-\varepsilon,a)e^{-ix\varepsilon}e^{ixa}(ia)^{n-m}\widehat{g}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\frac{d\varepsilon}{a}da\right| \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}\varepsilon^m\widehat{F}(-\varepsilon,a)(1-\Delta_\varepsilon)^{k/2}(e^{-ix\varepsilon})e^{ixa}(ia)^{n-m}\widehat{g}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)d\varepsilon\frac{da}{a}\right| \\
\leq\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}|a|^{n-m-1}\left|(1-\Delta_\varepsilon)^{k/2}\left(\varepsilon^m\widehat{F}(-\varepsilon,a)\widehat{g}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)\right|d\varepsilon da \\
=\;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{m\leq n}\binom{n}{m}|a|^{n-m-1}\left|\sum_{k_1+k_2+k_3=k}\binom{k}{k_1,k_2,k_3}C_{k_1}\varepsilon^{m-k_1}\right. \\
& \left.\frac{\partial^{k_2}}{\partial\varepsilon^{k_2}}\widehat{F}(-\varepsilon,a)\frac{1}{a^{k_3}}\widehat{g}^{(k_3)}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)\right|d\varepsilon da
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1,k_2,k_3} C_{k_1} |a|^{n-m-k_3-1} |\varepsilon|^{m-k_1} \\
& \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial \varepsilon^{k_2}} \widehat{F}(-\varepsilon,a) \right| \left| \widehat{g}^{(k_3)}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) \right| d\varepsilon da.
\end{aligned}
$$

Бидејќи $\hat{g}^{(n)}(0)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$, тогаш Тајлоровиот развој (теорема A.0.2) за функцијата $\widehat{g}^{(k_3)}$ е $\widehat{g}^{(k_3)}(\frac{\varepsilon}{a}) = \frac{\widehat{g}^{(k_3+k)}(\frac{\varepsilon_0}{a})}{k!}(\frac{\varepsilon}{a})^k$ за некое $\frac{\varepsilon_0}{a}\in[0,\frac{\varepsilon}{a}]$. Притоа, користејќи ја оценката

$$
|\widehat{g}^{(k_3+k)}(\frac{\varepsilon_0}{a})| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x^{k_3+k} g(x)| dx,
$$

за функцијата $\widehat{g}^{(k_3+k)}(\frac{\varepsilon_0}{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (ix)^{k_3+k} e^{ix\frac{\varepsilon_0}{a}} g(x)dx$, која претставува (k_3+k)-ти извод на $\widehat{g}(\frac{\varepsilon_0}{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\frac{\varepsilon_0}{a}} g(x)dx$ имаме

$$
\begin{aligned}
& (1+|x|^2)^{k/2} \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} S_g^* F(x) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1,k_2,k_3} C_{k_1} \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a|^{n-m-k_3-1} |\varepsilon|^{m-k_1} \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial \varepsilon^{k_2}} \widehat{F}(-\varepsilon,a) \right| \left| \frac{\widehat{g}^{(k_3+k)}\left(\frac{\varepsilon_0}{a}\right)}{k!} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k \right| d\varepsilon da \\
\leq\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}k!} \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1,k_2,k_3} C_{k_1} \int_{\mathbb{R}} \left| x^{k_3+k} g(x) dx \right| \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|^{k_3+k+m-n+1}} |\varepsilon|^{m+k-k_1} \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial \varepsilon^{k_2}} \widehat{F}(-\varepsilon,a) \right| d\varepsilon da \\
\leq\ & C_1 \rho_{2k+2,0}(g) \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1,k_2,k_3} (1+|\varepsilon|)^{m+k-k_1+2} \\
& \left(|a|^{k_3+k+m-n+3} + \frac{1}{|a|^{k_3+k+m-n+3}} \right) \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial \varepsilon^{k_2}} \widehat{F}(-\varepsilon,a) \right| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\varepsilon^2} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{a^4+1} da \\
\leq\ & C_1 \rho_{2k+2,0}(g) \sum_{m\leq n} \binom{n}{m} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1,k_2,k_3} (1+|\varepsilon|)^{m+k-k_1+2} \\
& \left(|a|^{k_3+k+3} + \frac{1}{|a|^{k_3+k+3}} \right) \left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial \varepsilon^{k_2}} \widehat{F}(-\varepsilon,a) \right| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\varepsilon^2} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2}{a^4+1} da \\
\leq\ & C \rho_{2k+2,0}(g) \rho^{0,k}_{2k+3,n+k+2}(F).
\end{aligned}
$$

Па, (3.3.27) важи за $\alpha=2k+2$, $\beta=0$, $s=2k+3$, $r=n+k+2$, $l=0$ и $m=k$. $\square$

3.4. Стоквелова трансформација над просторот од Лизоркинови дистрибуции $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$

Резултатите за непрекинатост во претходното поглавје ни овозможуваат да ја дефинираме Стоквеловата трансформација на дистрибуцијата $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ во однос на $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$.

Дефиниција 3.4.1. Стоквелова трансформација на $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ во однос на $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е елемент $S_g f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Y})$ чие дејство над тест функциите е дадено со

$$\langle S_g f, \Phi\rangle := \langle f, S^*_{\overline{g}}\Phi\rangle,\ \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{Y}). \tag{3.4.29}$$

Оправданоста на оваа дефиниција следува од теоремата 3.3.2. Користејќи ги истите аргументи, имаме дека Стоквеловата трансформација е исто така добро дефинирана со

$$S_g f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g}\rangle. \tag{3.4.30}$$

Уште повеќе, двете дефиниции (3.4.29) и (3.4.30) се еквивалентни.

На сличен начин, непрекинатоста на $S_g : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{Y})$ ни овозможува да го дефинираме Стоквеловиот оператор на синтеза за $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{Y})$.

Дефиниција 3.4.2. Стоквеловиот оператор на синтеза $S^*_g : \mathcal{S}'(\mathbb{Y}) \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ во однос на $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ се дефинира како

$$\langle S^*_g F, \varphi\rangle := \langle F, S_{\overline{g}}\varphi\rangle,\ F \in \mathcal{S}'(\mathbb{Y}),\ \varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}).$$

Ако за пресликувањата од теоремите 3.3.1 и 3.3.2, ги разгледаме соодветните транспонирани пресликувања, имајќи ги во предвид особините на транспонирано пресликување на непрекинато пресликување, се добива следново тврдење.

Тврдење 3.4.1. Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Стоквеловата трансформација $S_g : \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Y})$ и Стоквеловиот оператор на синтеза $S^*_g : \mathcal{S}'(\mathbb{Y}) \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ се непрекинати линеарни пресликувања.

Тврдењето 3.4.1 овозможува да се обопшти формулата за реконструкција (3.2.14) на дистрибуции, која е дадена со наредната теорема.

Теорема 3.4.1. (Инверзна формула) Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е нетривијален прозорец. Ако $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ е прозорец за реконструкција соодветен на g, имено, $C_{g,\psi} < \infty$, тогаш

$$\mathrm{id}_{\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_{g,\psi}}(S^*_\psi \circ S_g). \tag{3.4.31}$$

3.5. Абелови и Тауберови теореми

Во овој дел се докажани Абелови и Тауберови теореми за Стоквеловата трансформација, преку кои е направена карактеризација на квазиасимптотското однесување на дистрибуциите од просторот $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$.

Најпрво ќе ја покажеме следнава лема која е од голема важност за доказот на Абеловите и Тауберовите резултати.

Лема 3.5.1. Нека $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и $K \subset \mathbb{Y}$ компактно множество. Множеството

$$\{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g : (b,a) \in K\} \tag{3.5.32}$$

е ограничено во $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Доказ: За да покажеме дека множеството (3.5.32) е ограничено потребно е да покажеме дека за $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и $k, n \in \mathbb{N}$, постои $C > 0$ така што

$$\rho_{k,n}(M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g) \leq C \left(|a|^n + \frac{1}{|a|^n} \right) (1 + b^2)^{k/2}.$$

Најпрво ќе покажеме дека

$$\begin{aligned} x^k (M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g)^{(n)}(x) &= \sum_{m \leq n} \sum_{s \leq k} \binom{n}{m} \binom{k}{s} i^m a^{n+s-k} b^s \\ & \quad M_a T_b D_{\frac{1}{a}} (u^{k-s} g^{(n-m)}(u))(x) \end{aligned}$$

важи за $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}), k, n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}$.

Навистина, со користење на Лајбницовото правило имаме

$$x^k (M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g)^{(n)}(x) = x^k \left(\sum_{m \leq n} \binom{n}{m} i^m a^m e^{ixa} |a| a^{n-m} g^{(n-m)}(a(x-b)) \right)$$

$$= \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} i^m a^n \frac{1}{a^k} \left(a(x-b) + ba\right)^k e^{ixa} |a| g^{(n-m)}(a(x-b))$$

$$= \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} i^m a^n \frac{1}{a^k} \sum_{s \leq k} \binom{k}{s} (ab)^s \left(a(x-b)\right)^{k-s} e^{ixa} |a| g^{(n-m)}(a(x-b))$$

$$= \sum_{m \leq n} \sum_{s \leq k} \binom{n}{m} \binom{k}{s} i^m a^{n+s-k} b^s M_a T_b D_{\frac{1}{a}} (u^{k-s} g^{(n-m)}(u))(x).$$

Користејќи еквиваленција на полунормата (3.3.21) со полунормата

$$\rho_{k,n}(g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |g^{(n)}(x)|,\ k,n \in \mathbb{N}_0,$$

во $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ имаме дека

$$\begin{aligned}
&\rho_{k,n}(M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k (M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g)^{(n)}(x) \right| \\
\leq\ & \sum_{m\leq n} \sum_{s\leq k} \binom{n}{m} \binom{k}{s} |a|^{n+s-k} |b|^s \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| M_a T_b D_{\frac{1}{a}} (u^{k-s} g^{(n-m)}(u))(x) \right| \\
\leq\ & C_1 \rho_{k,n}(g) \sum_{m\leq n} \sum_{s\leq k} \binom{n}{m} \binom{k}{s} |a|^{n+s-k} |b|^s \\
\leq\ & C_2 \left(|a|^n + \frac{1}{|a|^n} \right) (1+b^2)^{k/2} \rho_{k,n}(g).
\end{aligned}$$

$\square$

За $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ и $0 < \varepsilon < 1$ означуваме $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$ и $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$ (соодветно за $\lambda > 1$ означуваме $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$ и $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$).

Во тврдењето 3.5.1 даден е резултат за асимптотското однесување на Стоквеловата трансформација за произволен прозорец $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, во однос на двете променливи, претпоставувајќи дека $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ има квазиасимптотика во нулата.

Тврдење 3.5.1. Нека L е бавно променлива функција во нулата, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Ако $f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) h(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, тогаш за неговата Стоквелова трансформација во однос на прозорецот $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ важи

$$S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) S_g h(b,a) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \tag{3.5.33}$$

рамномерно над компактни подмножества од $\mathbb{Y}$.

Доказ: Најпрво ќе ја покажеме релацијата

$$S_g f_\varepsilon(b,a) = S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}). \tag{3.5.34}$$

Навистина, ако ставиме смена $\varepsilon x = t$ имаме

$$\begin{aligned} S_g f_\varepsilon(b,a) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f_\varepsilon(x), \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(x)} \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(\varepsilon x), e^{-ixa} |a| \overline{g}(a(x-b)) \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(t), e^{-it\frac{a}{\varepsilon}} \frac{|a|}{\varepsilon} \overline{g}(\frac{a}{\varepsilon}(t-\varepsilon b)) \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(t), \overline{M_{\frac{a}{\varepsilon}} T_{\varepsilon b} D_{\frac{1}{\frac{a}{\varepsilon}}} g(t)} \rangle \\ &= S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Сега од релацијата (3.5.34) и од квазиасимптотиката на f во нулата имаме

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{S_g f_\varepsilon(b,a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle \frac{f(\varepsilon t)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(t)} \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle h(t), \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} g(t)} \rangle \\ &= S_g h(b,a). \end{aligned}$$

Рамномерната конвергенцијата над компактни подмножества од $\mathbb{Y}$ следува од лемата 3.5.1 и од фактот дека слабата и јаката топологија во просторот од Лизоркинови дистрибуции $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ се еквивалентни. $\square$

Следново тврдење претставува Тауберов резултат, односно инверзен резултат на резултатот добиен во тврдењето 3.5.1.

Тврдење 3.5.2. Нека L е бавно променлива функција во нулата, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ и $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Следниве два услова:

(i) границите
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} S_g f\left(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{C}$$
постојат за секое $(b,a) \in \mathbb{Y}$,

(ii) постојат $C > 0$ и $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ така што
$$\frac{\left|S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})\right|}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \leq C \left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)^s (1+|b|)^r,$$
за сите $(b,a) \in \mathbb{Y}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

се потребни и доволни услови за постоење на дистрибуцијата h така што $f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) h(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$ во $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$.

Доказ: Нека $\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Од релациите (3.4.31) и (3.5.34) имаме

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, \varphi(x)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_{\varepsilon}(b,a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \langle M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi(x), \varphi(x)\rangle db \frac{da}{|a|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_{\varepsilon}(b,a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \overline{\langle \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}} \psi}(x), \overline{\varphi}(x)\rangle} db \frac{da}{|a|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_{\varepsilon}(b,a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) db \frac{da}{|a|} \\
&= \frac{1}{C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) db \frac{da}{|a|},
\end{aligned} \tag{3.5.35}$$

каде ψ е прозорец за реконструкција соодветен на g.

Користејќи го условот (ii) следува дека постои $C' > 0$ и $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ така што

$$\left| \frac{S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) \right| \leq C' \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right)^s (1+|b|)^r \left| \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) \right|$$

за сите $(b,a) \in \mathbb{Y}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Од теоремата 3.3.1 следува дека $\overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) \in \mathcal{S}(\mathbb{Y})$, т.е. важи

$$|\overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a)| \leq \frac{C''}{(1+|b|^2)^{r+2} (|a| + \frac{1}{|a|})^{s+2}},$$

за некоја константа $C'' > 0$ и $r, s > 0$, од каде следува

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S_g f(\varepsilon b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) \right| &\leq C' \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right)^s (1+|b|)^r \left| \overline{S_{\psi} \overline{\varphi}}(b,a) \right| \\
&\leq \frac{C'''}{(1+|b|^2)^2 (|a| + \frac{1}{|a|})^2}.
\end{aligned}$$

Според тоа во (3.5.35) можеме да ја примениме Лебеговата теорема за доминантна конвергенција (теорема A.0.2), па добиваме дека границата

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}, \varphi(x)\rangle$$

постои и е конечна.

Обратно, (i) директно го имаме од Абеловиот тип на резултат кој е даден во тврдењето 3.5.1. Тауберовиот услов (ii) секогаш е задоволен заради слабата конвергенција на мрежата $\{f_\varepsilon/\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$; односно слабата конвергенција повлекува дека постои $0<\varepsilon_0\leq 1$ за кое множеството $\{f_\varepsilon/\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ е ограничено во слабата топологија на просторот $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ (види забелешка 1.1.6). Додека пак теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема А.0.10), која важи и за просторот $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ (види забелешка 1.1.5) ни повлекува дека $\{f_\varepsilon/\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)\}_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ претставува рамномерно непрекинато подмножество од $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, т.е. постојат $k,n\in\mathbb{N}$ и $C>0$ така што

$$\left|\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)},\varphi(x)\right\rangle\right|\leq C\rho_{k,n}(\varphi)$$

за сите $\varphi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ и за сите $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$. Заради последново неравенство, релацијата (3.5.34), дефиницијата на Стоквелова трансформација и лемата 3.5.1 следнава оценка важи за сите $(b,a)\in\mathbb{Y}$ и $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S_g f\left(\varepsilon b,\frac{a}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}\right| &= \left|\frac{S_g f(b,a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\langle\frac{f(x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)},\overline{M_aT_bD_{\frac{1}{a}}g}(x)\right\rangle\right| \\
&\leq C\rho_{k,n}(\overline{M_aT_bD_{\frac{1}{a}}g}(x)) \\
&\leq C'\left(|a|^s+\frac{1}{|a|^s}\right)(1+b^2)^{r/2} \\
&\leq C'\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^s(1+b^2)^{r/2}.
\end{aligned}$$

□

Во тврдењето 3.5.3 е даден резултат за асимптотското однесување на Стоквеловата трансформација во бесконечност, кој се покажува на сличен начин како претходното тврдење.

Тврдење 3.5.3. Нека L е бавно променлива функција во бесконечност, $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ и $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. Следниве два услова:

(i) границите

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda^\alpha L(\lambda)}S_g f\left(\lambda b,\frac{a}{\lambda}\right)\in\mathbb{C}$$

постојат за секое $(b,a)\in\mathbb{Y}$,

(ii) постојат $C > 0$ и $r, s \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda_0 \leq 1$ така што

$$\frac{\left|S_g f(\lambda b, \frac{a}{\lambda})\right|}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \leq C\left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)^s (1+|b|)^r, \text{ за сите } (b,a) \in \mathbb{Y} \text{ и } \lambda \geq \lambda_0,$$

се потребни и доволни услови за постоење на дистрибуцијата h така што $f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x)$ кога $\lambda \to \infty$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$.

На сличен начин како релација (3.5.34) се покажува и следнава релација

$$S_g f_\varepsilon(\varepsilon b, a) = S_g f(\varepsilon^2 b, \frac{a}{\varepsilon}). \tag{3.5.36}$$

Навистина, ако ставиме смена $\varepsilon x = t$ имаме

$$\begin{aligned} S_g f_\varepsilon(\varepsilon b, a) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f_\varepsilon(x), \overline{M_a T_{\varepsilon b} D_{\frac{1}{a}} g(x)} \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(\varepsilon x), e^{-ixa} |a| \overline{g}(a(x - \varepsilon b)) \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(t), e^{-it\frac{a}{\varepsilon}} \frac{|a|}{\varepsilon} \overline{g}(\frac{a}{\varepsilon}(t - \varepsilon^2 b)) \rangle \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \langle f(t), \overline{M_{\frac{a}{\varepsilon}} T_{\varepsilon^2 b} D_{\frac{1}{\frac{a}{\varepsilon}}} g(t)} \rangle \\ &= S_g f(\varepsilon^2 b, \frac{a}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Ќе дадеме уште еден Абелов резултат и негов инверзен, Тауберов резултат за асимптотското однесување на Стоквеловата трансформација.

Тврдење 3.5.4. Нека L е бавно променлива функција во нулата, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Ако $f(\varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) h(x)$ кога $\varepsilon \to 0^+$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, тогаш за неговата Стоквелова трансформација во однос на прозорец $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ важи

$$S_g f(\varepsilon^2 b, \frac{a}{\varepsilon}) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) S_g h(0, a) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \tag{3.5.37}$$

рамномерно над компактни подмножества од $\mathbb{Y}$.

Доказ: Нека $(b, a) \in \mathbb{Y}$ е фиксно, тогаш од (3.5.36) имаме дека

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{S_g f(\varepsilon^2 b, \frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{S_g f_\varepsilon(\varepsilon b, a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \langle f(\varepsilon t), \overline{M_a T_{\varepsilon b} D_{\frac{1}{a}} g(t)} \rangle \\ &= \lim_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0^+, 0^+)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)} \langle f(\varepsilon_1 t), \overline{M_a T_{\varepsilon_2 b} D_{\frac{1}{a}} g(t)} \rangle \end{aligned}$$

постои ако последната граница постои. Од фактот дека слабата и јаката топологија во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ се еквивалентни, користејќи ја лемата 3.5.1 и квазиасимптотското однесување на f во нулата имаме дека

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle h(t),\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle,$$

рамномерно за $\varepsilon_2\in[0,1]$. Уште повеќе, за секое $0<\varepsilon_1\leq 1$, имаме

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aD_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle,$$

бидејќи $\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\to\overline{M_aD_{\frac{1}{a}}g(t)}$ кога $\varepsilon_2\to 0^+$ во $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Од теорема A.0.5 имаме

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{S_gf(\varepsilon^2 b,\frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} &= \lim_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to(0^+,0^+)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle\\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aT_{\varepsilon_2 b}D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle\\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon_1^\alpha L(\varepsilon_1)}\langle f(\varepsilon_1 t),\overline{M_aD_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle h(t),\overline{M_aT_0D_{\frac{1}{a}}g(t)}\rangle\\ &= S_gh(0,a).\end{aligned}$$

□

Следново тврдење претставува инверзен резултат, т.е. Тауберов резултат на тврдењето 3.5.4.

Тврдење 3.5.5. Нека L е слабо променлива функција во нулата, $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ и $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. Ако за сите $(b,a)\in\mathbb{Y}$, границите

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}L(\varepsilon)}S_gf\left(\varepsilon^2 b,\frac{a}{\varepsilon}\right)\in\mathbb{C} \tag{3.5.38}$$

постојат и постојат $C>0,p>1$, $s\in\mathbb{N}$ и $0<\varepsilon_0\leq 1$ така што

$$\frac{\left|S_gf(\varepsilon^2 b,\frac{a}{\varepsilon})\right|}{\varepsilon^{\alpha-1}L(\varepsilon)}\leq C\frac{\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^s}{(1+|b|)^p} \tag{3.5.39}$$

за сите $(b,a)\in\mathbb{Y}$ и $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$, тогаш постои хомогена дистрибуција h така што $f(\varepsilon x)\sim\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)h(x)$ кога $\varepsilon\to 0^+$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$.

Доказ: Нека $\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Од инверзната формула (3.4.31), смената $b = \varepsilon b_1$ и релацијата (3.5.36) добиваме

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x)\rangle \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_\varepsilon(b,a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \langle M_a T_b D_{\frac{1}{a}}\psi(x), \varphi(x)\rangle db \frac{da}{|a|} \\
= \;& \frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_\varepsilon(b,a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \overline{\langle \overline{M_a T_b D_{\frac{1}{a}}\psi}(x), \overline{\varphi}(x)\rangle} db \frac{da}{|a|} \\
= \;& \frac{1}{C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f_\varepsilon(\varepsilon b_1,a)}{\varepsilon^{\alpha-1} L(\varepsilon)} \overline{S_\psi\overline{\varphi}}(\varepsilon b_1, a) db_1 \frac{da}{|a|} \\
= \;& \frac{1}{C_{g,\psi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{S_g f(\varepsilon^2 b_1,\frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha-1} L(\varepsilon)} \overline{S_\psi\overline{\varphi}(\varepsilon b_1, a)} db_1 \frac{da}{|a|},
\end{aligned}
\tag{3.5.40}
$$

каде ψ е прозорецот за реконструкција соодветен на g.

На сличен начин како во доказот на теоремата 3.5.2, фактот дека $\overline{S_\psi\overline{\varphi}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Y})$ (види теорема 3.3.1) и оценката (3.5.39) повлекуваат дека постојат $C' > 0$, $p > 1$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ така што

$$
\left| \frac{S_g f(\varepsilon^2 b_1,\frac{a}{\varepsilon})}{\varepsilon^{\alpha-1} L(\varepsilon)} \overline{S_\psi\overline{\varphi}(\varepsilon b_1, a)} \right| \leq \frac{C'}{\left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)^2 (1+|b_1|)^p}
$$

за сите $(b,a) \in \mathbb{Y}$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Според тоа можеме да ја искористиме Лебеговата теорема за доминантна конвергенција (теорема A.0.2) во (3.5.40), од каде добиваме дека границата $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x)\rangle$ постои и е конечна. $\square$

На сличен начин може да се покажат следниот Абелов и Тауберов тип на резултат за асимптотското однесување на Стоквеловата трансформација во бесконечност во однос на втората променлива.

Тврдење 3.5.6. Нека L е слабо променлива функција во бесконечност, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Ако $f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x)$ кога $\lambda \to \infty$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, тогаш за неговата Стоквелова трансформација во однос на прозорот $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ важи

$$
S_g f(b, \frac{a}{\lambda}) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) S_g h(0,a) \text{ кога } \lambda \to \infty
$$

рамномерно над компактни подмножества од $\mathbb{Y}$.

Тврдење 3.5.7. Нека L е слабо променлива функција во бесконечност, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ и $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Ако за сите $(b,a) \in \mathbb{Y}$, границите

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^{\alpha+1} L(\lambda)} S_g f\left(b, \frac{a}{\lambda}\right) \in \mathbb{C}$$

постојат и постојат $C > 0, p > 1$, $s \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda_0 \leq 1$ така што

$$\frac{\left|S_g f(b, \frac{a}{\lambda})\right|}{\lambda^{\alpha+1} L(\lambda)} \leq C \frac{\left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)^s}{(1+|b|)^p}$$

за сите $(b,a) \in \mathbb{Y}$ и $\lambda \geq \lambda_0$, тогаш постои хомогена дистрибуција h така што $f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) h(x)$ кога $\lambda \to \infty$ во $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$.

Глава 4

Асимптотска анализа преку полиномно локализирани рамки

Оваа глава е посветена на асимптотската анализа на темперираните дистрибуции преку полиномно локализирана рамка. Најпрво е илустрирана идејата за дефинирање на специјален тип рамки таканаречени полиномно локализирани рамки во Хилбертов и Банахов простор [32], и Фрешеов простор [68]. Познатите резултати за полиномно локализирани рамки во Фрешеови простори ни̂ овозможија да направиме тополошка карактеризација на дуалниот простор на Фрешеов простор (кој е проективна граница на Банахови простори) преку коефициентите од развоите во однос на полиномно локализирана рамка. Со тоа добивме и тополошка карактеризација на просторот од темперирани дистрибуции како специјален случај, кое пак ни̂ овозможи да направиме асимптотска анализа на темперираните дистрибуции преку полиномно локализирани рамки. Поточно, докажани се Тауберови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување и квазиасимптотската ограниченост на темперираните дистрибуции со асимптотското однесување на коефициентите од нивните развои во однос на полиномно локализирани рамки. Докажани се и Абелови теореми кои го поврзуваат квазиасимптотското однесување на темперираните дистрибуции во Фурјеов домен со асимптотиката на нивните рамка-коефициенти. Новите оригинални резултати се дадени во поглавјата 4.2., 4.3., 4.4. и 4.5.

4.1. Полиномно локализирани рамки во Хилбертов, Банахов и Фрешеов простор

Со цел да определи кои особини ја прават рамката корисна, Грохенинг (K. Gröchening) во [32] го воведува концептот за локализација на рамки. Истражувањето кое го спроведува тој е во две насоки: конструкција и карактеризација на сите типови рамки со дадена структура, како на пример Габор рамки и вејвлет рамки (види пример 1.3.2), додека пак, втората насока била да ги открие особините кои ја прават рамката корисна. Притоа, комбинацијата на идеите од апстрактната теорија на функционални простори, и од теоријата на рамки овозможила да се разбере точно кои особини на функциите можат да бидат детектирани и добиени од коефициентите од соодветниот развој во однос на дадена рамка.

Најпрво ќе дефинираме некои поими кои биле клучни при истражувањето на Грохенинг.

Позитивна непрекината функција μ на $\mathbb{R}$ се нарекува *k-умерена тежина* ($k \geq 0$) ако постои константа $C > 0$ така што $\mu(t+x) \leq C(1+|t|)^k \mu(x)$, $t, x \in \mathbb{R}$. Ако $x = 0$ тогаш k-умерената тежина μ расте полиномно, т.е. важи $\mu(t) \leq C(1+|t|)^k$, па поради тоа уште е наречена и тежина од полиномен тип.

Со l^p_μ, $1 \leq p < \infty$ ќе го означиме *Банаховиот простор l^p со тежини μ* во кој нормата е дефинирана како

$$|||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_{l^p_\mu} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^p \mu(n)^p \right)^{1/p} \tag{4.1.1}$$

за секоја низа $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p_\mu$. Ако $p = \infty$ тогаш нормата во просторот l^∞_μ е дефинирана како $|||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_{l^\infty_\mu} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n| \mu(n)$.

Нека $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}})$ е сепарабилен Хилбертов простор. Нека $\mathcal{R} = (r_k)_{k=1}^{\infty}$ е Ризова база за просторот $\mathcal{H}$ со канонично дуална рамка $(\widetilde{r}_k)_{k=1}^{\infty}$ (види поглавје 1.3.) и нека μ е k-умерена тежина.

Дефиниција 4.1.1. [32, Дефиниција 4] Нека $l^p_\mu \subseteq l^2$, $1 \leq p < \infty$. Тогаш $\mathcal{H}^p_\mu$ е Банахов простор дефиниран како

$$\mathcal{H}^p_\mu = \{ f \in \mathcal{H} : f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n \text{ за } \ (c_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p_\mu \ \} \tag{4.1.2}$$

со норма $\|f\|_{\mathcal{H}^p_\mu} = |||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_{l^p_\mu}$ при што коефициентите c_n се на единствен начин определени, т.е. $c_n = (f, \widetilde{r}_n)_{\mathcal{H}^p_\mu}$.

Бидејќи $l^p_\mu \subseteq l^2$, $1 \leq p < \infty$ тогаш H^p_μ е густ потпростор од $\mathcal{H}$.

Дефиниција 4.1.2. [32, Дефиниција 7] Рамката $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^\infty$ се нарекува *полиномно локализирана рамка* во однос на Ризовата база $\mathcal{R} = (r_k)_{k=1}^\infty$ со степен на опаѓање $s > 0$ ако постои константа $C_s > 0$ така што

$$|(e_n, r_k)_\mathcal{H}| \leq C_s(1 + |n-k|)^{-s} \tag{4.1.3}$$

и

$$|(e_n, \widetilde{r}_k)_\mathcal{H}| \leq C_s(1 + |n-k|)^{-s} \tag{4.1.4}$$

за сите $n, k \in \mathbb{N}$, каде $(\widetilde{r}_k)_{k=1}^\infty$ е канонично дуална рамка за $(r_k)_{k=1}^\infty$.

Локализацијата на рамката $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^\infty$ зависи од дадената Ризова база. Двата услова, (4.1.3) и (4.1.4) се совпаѓаат ако работиме со ортонормирана база. Наредната теорема ни покажува дека рамка-операторот за локализирана рамка е добро дефиниран над Банаховите простори $\mathcal{H}^p_\mu$.

Тврдење 4.1.1. [32, Тврдење 8] Нека $1 \leq p \leq \infty$ и $k \geq 0$ така што μ е k-умерена тежина. Нека $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^\infty$ е полиномно локализирана рамка со степен на опаѓање $s > 0$. Тогаш

(i) Коефициент-операторот дефиниран како

$$C_\mathcal{E} f = ((f, e_n)_{\mathcal{H}^p_\mu})_{n=1}^\infty$$

е ограничен од $\mathcal{H}^p_\mu$ во l^p_μ;

(ii) Операторот на синтеза дефиниран над конечни низи како

$$D_\mathcal{E}((c_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n$$

е проширен како непрекинато пресликување од l^p_μ во $\mathcal{H}^p_\mu$;

(iii) Рамка-операторот дефиниран како

$$S_\mathcal{E} = D_\mathcal{E} C_\mathcal{E} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f, e_n)_{\mathcal{H}^p_\mu} e_n \tag{4.1.5}$$

пресликува од $\mathcal{H}^p_\mu$ во $\mathcal{H}^p_\mu$, каде што редот во (4.1.5) конвергира безусловно за $1 \leq p < \infty$.

Еден од главните резултати на Грохенинг е дека канонично дуалната рамка $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ на полиномно локализирана рамка $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ ги поседува истите особини на локализиција како и оригиналната рамка, и тој е даден во тврдењето 4.1.2, својството (ii).

Тврдење 4.1.2. [32, Теорема 10] Нека $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ е полиномно локализирана рамка со степен на опаѓање $s > 0$ во однос на Ризовата база $\mathcal{R} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогаш

(i) Рамка-операторот е инверзибилен над секој Банахов простор $\mathcal{H}_{\mu}^{p}$, каде $1 \leq p \leq \infty$ и μ е k-умерена тежина;

(ii) Канонично дуалната рамка $\widetilde{\mathcal{E}} = \{(\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty} = (S^{-1}(e_n))_{n=1}^{\infty}\}$ е полиномно локализирана со ист степен на опаѓање $s > 0$;

(iii) Рамка развоите

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f, e_n)_{\mathcal{H}_{\mu}^{p}} \widetilde{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f, \widetilde{e}_n)_{\mathcal{H}_{\mu}^{p}} e_n$$

конвергираат безусловно во $\mathcal{H}_{\mu}^{p}$ за $1 \leq p < \infty$;

(iv) Важи следнава еквиваленција на норми

$$\|f\|_{\mathcal{H}_{\mu}^{p}} \asymp \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(f, e_n)_{\mathcal{H}_{\mu}^{p}}|^p \mu^p \right)^{1/p} \asymp \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |(f, \widetilde{e}_n)_{\mathcal{H}_{\mu}^{p}}|^p \mu^p \right)^{1/p}. \quad (4.1.6)$$

Како што имаме спомнато во поглавје 1.3.2., Банаховите рамки претставуваат обопштување на рамките во Хилбертов простор, па во теоремата 4.1.1 е дадена врската помеѓу полиномно локализирана рамка за Хилбертов простор $\mathcal{H}$ со Банахова рамка за Банаховиот простор $\mathcal{H}_{\mu}^{p}$.

Теорема 4.1.1. [32, Теорема 13] Нека $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ е полиномно локализирана рамка со степен на опаѓање $s > 0$ за Хилбертовиот простор $\mathcal{H}$. Тогаш таа е Банахова рамка за секој Банахов простор $\mathcal{H}_{\mu}^{p}$, $1 \leq p \leq \infty$ и за сите k-умерени тежини.

Забелешка 4.1.1. Во [32] освен полиномно локализирана рамка, Грохенинг разгледува и експоненцијално локализирана рамка. Низата $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ се нарекува *експоненцијално локализирана рамка* во однос на Ризовата база $\mathcal{R} = (r_k)_{k=1}^{\infty}$ ако за некое $\alpha > 0$ важи

$$|(e_n, r_k)_{\mathcal{H}}| \leq C_{\alpha} e^{-\alpha|n-k|} \text{ и } |(e_n, \widetilde{r}_k)_{\mathcal{H}}| \leq C_{\alpha} e^{-\alpha|n-k|},$$

каде што $(\widetilde{r_k})_{k=1}^{\infty}$ е дуална рамка на Ризовата база $\mathcal{R} = (r_k)_{k=1}^{\infty}$. Тој покажува дека целата оваа теорија за полиномно локализирани рамки важи и за експоненцијално локализирани рамки, т.е. тврдењата 4.1.1 и 4.1.2 и теоремата 4.1.1 важат за експоненцијална рамка, имајќи во предвид дека тежината во просторот l^p_μ и просторот $\mathcal{H}^p_\mu$ е субекспоненцијална. Притоа, за една тежина μ велиме дека е *субекспоненцијална* (sub-exponential) ако постојат константи $C, \gamma > 0$ и $0 \leq \beta < 0$ така што $\mu(t + x) \leq Ce^{\gamma|t|^\beta}\mu(x)$ за секое $t, x \in \mathbb{R}$.

Инспирирани од резултатите на Грохенинг, авторите на [68] направиле проширување на концептот за локализирана рамка во Фрешеов простор и неговиот дуален простор. Најпрво тие даваат општ резултат кој се базира на рамки локализирани во однос на Ризова база и даваат развој во однос на рамка во соодветниот Фрешеов простор, при што рамка-коефициентите припаѓаат во соодветниот Фрешеов простор од низи. На крај овој резултат го применуваат со цел да добијат развој на темперираните дистрибуции во однос на локализирана рамка, како и развој на елементите од соодветниот простор на тест функции.

Нека, X_F и Θ_F се проективна граница на Банаховите простори X_k и Θ_k, соодветно (дефинирани во поглавје 1.3.3.). За даден BK-простор Θ_k и Ризова база $\mathcal{R} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$ за $\mathcal{H}$, на просторот Θ_k му е придружен следниот Банахов простор

$$\mathcal{H}^{\Theta_k}_{\mathcal{R}} = \{f \in \mathcal{H} : f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n \text{ за } (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \Theta_k\} \tag{4.1.7}$$

со норма $\|f\|^{\Theta_k}_{\mathcal{R}} := |||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_{\Theta_k}$.

Во наредната теорема се дадени резултатите кои авторите на [68] ги имаат добиени за ова проширување, а кои се од голема значајност за нашата понатамошна работа.

Теорема 4.1.2. [68, Лема 2.2 и Теорема 4.1] Нека $\mathcal{R} = (r_n)_{n=1}^{\infty}$ е Ризова база за $\mathcal{H}$. За $k \in \mathbb{N}_0$, нека μ_k се k-умерени тежини такви што $1 = \mu_0(x) \leq \mu_1(x) \leq \mu_2(x) \leq ...$, за секое $x \in \mathbb{R}$. Тогаш $\{\Theta_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \{\ell^2_{\mu_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ е низа од CB-простори која ги задоволува условите (1.3.39) и (1.3.40) (види поглавје 1.3.3.) и просторите $X_k := \mathcal{H}^{\Theta_k}_{\mathcal{R}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, ги задоволуваат истите условите (1.3.39) и (1.3.40).

Ако $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ е рамка за просторот $\mathcal{H}$ со елементи од просторот X_F кои се полиномно локализирани во однос на $\mathcal{R}$ со степен на опаѓање s, за секое $s \in \mathbb{N}$, тогаш следниве тврдења важат:

(i) $\widetilde{e}_n \in X_F$ за секое $n \in \mathbb{N}$;

(ii) За секое $f \in X_F$,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{e}_n)_{\mathcal{H}} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} \widetilde{e}_n \text{ (со конвергенција во } X_F) \tag{4.1.8}$$

со $((f, \widetilde{e}_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F$ и $((f, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F$;

(iii) Коефициент-операторот $C_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од X_F во Θ_F; синтеза операторот $D_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од Θ_F во X_F; рамка-операторот $S_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од X_F во X_F со безусловна конвергенција на редот $S_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} e_n$;

(iv) Ако X_F и Θ_F ја поседуваат следнава особина во однос на $(r_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$\mathcal{P}_{(r_n)} : \text{За } f \in \mathcal{H} \text{ важи дека } f \in X_F \text{ ако и само ако } ((f, r_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F,$$

тогаш тие исто така ги поседуваат особините $\mathcal{P}_{(e_n)}$ и $\mathcal{P}_{(\widetilde{e}_n)}$;

(v) Двете низи $(\mathbf{e_n})_{n=1}^{\infty}$ и $(\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n})_{n=1}^{\infty}$ се Фрешеови рамки за X_F во однос на Θ_F;

(vi) За секое $g \in X_F^*$,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g(e_n)\, \widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n} = \sum_{n=1}^{\infty} g(\widetilde{e}_n)\, \mathbf{e_n} \text{ (со конвергенција во } X_F^*) \tag{4.1.9}$$

каде што $(g(e_n))_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F^*$ и $(g(\widetilde{e}_n))_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F^*$;

(vii) Ако $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F^*$, тогаш $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{e_n}$ (соодветно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n}$) конвергира во X_F^*, т.е. пресликувањето $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} a_n$ (соодветно $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{e}_n)_{\mathcal{H}} a_n$) определува непрекинат линеарен функционал над X_F.

Да забележиме дека, кога рамка-елементот $e_n \in X_F (\subset \mathcal{H} \subset X_F^*)$ го разгледуваме како функционал од X_F^*, тогаш ознаката на тој елемент е $\mathbf{e_n}$.

Забелешка 4.1.2. Бидејќи канонично дуалната рамка $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ поседува иста локализација како и оригиналната рамка $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$, резултатот (iii) од теоремата 4.1.2 за непрекинатост важи кога $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ ќе се замени со $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Забелешка 4.1.3. Во [68] е покажано дека тврдењата во теоремата 4.1.2 важат ако наместо k-умерена тежина, користиме субекспоненцијална тежина на која и одговара експоненцијална локализирана рамка воведена од страна на Грохенинг (види забелешка 4.1.1).

4.2. Тополошка карактеризација на просторот X_F^*

Во овој дел ќе биде направена тополошка карактеризација на дуалниот простор X_F^* на Фрешеов простор X_F преку коефициентите од развоите во однос на полиномно локализирани рамки. Врз основа на теоремата 4.1.2 (vi) и (vii) коефициент-операторот, операторот на синтеза и рамка-операторот се добро дефинирани над дуалните простори на Фрешеовите простори кои ги разгледуваме, или поточно може да ги разгледаме следниве оператори:

- оператор на анализа (коефициент-оператор) $\mathbf{C}_{\mathcal{E}} : X_F^* \to \Theta_F^*$ определен преку
$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g) := (g(e_n))_{n=1}^{\infty} \text{ за } g \in X_F^*,$$
- оператор на синтеза $\mathbf{D}_{\mathcal{E}} : \Theta_F^* \to X_F^*$ определен преку
$$\mathbf{D}_{\mathcal{E}}((d_n)_{n=1}^{\infty}) := \sum_n d_n \mathbf{e_n} \text{ за } (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F^*,$$
- рамка-оператор $\mathbf{S}_{\mathcal{E}} : X_F^* \to X_F^*$ со $\mathbf{S}_{\mathcal{E}} := \mathbf{D}_{\mathcal{E}} \mathbf{C}_{\mathcal{E}}$.

Во наредното тврдење покажавме непрекинатост на погоре дефинираните оператори на анализа, синтеза и рамка-операторот.

Тврдење 4.2.1. Нека претпоставките и ознаките од теоремата 4.1.2 важат и нека X_F и Θ_F се Монтелови простори. Тогаш важат следниве тврдења:

(i) Коефициент-операторот, $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е непрекинат оператор од X_F^* во Θ_F^*;

(ii) Операторот на синтеза, $\mathbf{D}_{\mathcal{E}}$ е непрекинат оператор од Θ_F^* во X_F^*, и исто така е адјунгиран оператор на операторот $C_{\mathcal{E}}|_{X_F}$;

(iii) Рамка-операторот, $\mathbf{S}_{\mathcal{E}}$ е непрекинат од X_F^* во X_F^*.

Доказ: (i) Од теоремата А.0.11, (iii) имаме дека операторот $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е непрекинат од X_F^* во Θ_F^* ако и само ако е непрекинат од X_k^* во Θ_F^* за секое $k \in \mathbb{N}_0$. Нека $k \in \mathbb{N}_0$ е фиксно, но произволно избрано, и нека $g \in X_k^*$, т.е. $g : X_k \to \mathbb{C}$. Бидејќи $D_{\mathcal{E}}$ е ограничен оператор од просторот Θ_k во просторот X_k, (види тврдење 4.1.1) имаме дека $g \circ D_{\mathcal{E}} : \Theta_k \to \mathbb{C}$, т.е. $g \circ D_{\mathcal{E}} \in \Theta_k^*$. Па, од условот на теоремата имаме дека Θ_k се CB-простори, што овозможува за просторот Θ_k^* да се конструира изометрички изоморфен простор $\Theta_k^{\bar{*}}$. Тогаш $(g(e_n))_{n=1}^{\infty} = (g(D_{\mathcal{E}}(\delta_n)))_{n=1}^{\infty} \in \Theta_k^{\bar{*}}$ и уште повеќе,

$$\begin{aligned} |||\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g)|||_k^{\bar{*}} &= |||(g(e_n))_{n=1}^{\infty}|||_k^{\bar{*}} = |||(g(D_{\mathcal{E}}(\delta_n)))_{n=1}^{\infty}|||_k^{\bar{*}} \\ &= |||g \circ D_{\mathcal{E}}|||_k^{*} \leq \|g\|_k^* \cdot \|D_{\mathcal{E}}\|_{\Theta_k \to X_k}. \end{aligned}$$

Ако сега земеме низа $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ која конвергира кон 0 во X_k^*, тогаш

$$|||\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n)|||_k^{\bar{*}} \leq \|g_n\|_{X_k^*} \cdot \|D_{\mathcal{E}}\|_{\Theta_k \to X_k} \to 0 \text{ кога } n \to \infty,$$

т.е. $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n) \to 0$ во Θ_k^*, повлекува дека $(\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n))(c) \to 0$ за секое $c \in \Theta_F$ па според тоа $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n) \to 0$ во Θ_F^*. Монтел особината на просторот Θ_F ни обезбедува дека слабата и јаката конвергенција во неговиот дуален простор Θ_F^* се еквивалентини (види тврдење А.0.12), па имаме дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}} : X_k^* \to \Theta_F^*$ е непрекинато за секое $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Да забележиме дека $C_{\mathcal{E}}|_{X_F}$ е непрекинат оператор од X_F во Θ_F (види теорема 4.1.2, (iii)). Ќе го разгледаме неговиот адјунгиран оператор $(C_{\mathcal{E}}|_{X_F})^*$, кој е непрекинат од просторот Θ_F^* во просторот X_F^* (види тврдење А.0.9). Нека g е произволно избран елемент од Θ_F^* и за него ќе го разгледаме соодветниот елемент $(g(\delta_n))_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F^{\bar{*}}$. Заради конструкцијата на просторот Θ_F (види поглавје 1.3.3.) имаме дека $((f, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} \delta_n$ за секое $f \in X_F$, од каде добиваме

$$(C_{\mathcal{E}}|_{X_F})^*(g)(f) = g(C_{\mathcal{E}}|_{X_F}(f)) = g\left(\sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} \delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{\mathcal{H}} g(\delta_n).$$

Од друга страна,

$$\mathbf{D}_{\mathcal{E}}((g(\delta_n))_{n=1}^{\infty})(f) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} g(\delta_n) \mathbf{e_n}\right)(f) = \sum_{n=1}^{\infty} g(\delta_n)(f, e_n)_{\mathcal{H}}.$$

Како резултат на тоа добиваме дека $\mathbf{D}_{\mathcal{E}}$ е адјунгиран оператор на $C_{\mathcal{E}}$.

(iii) Непрекинатоста на рамка-операторот директно следува од непрекинатоста на операторот на анализа и операторот на синтеза, т.е. од (i) и (ii).

□

Забелешка 4.2.1. Тврдењата (i)-(iii) во претходната теорема важат и ако рамката $\mathcal{E} = (e_n)_{n=1}^{\infty}$ се замени со нејзината канонично дуална рамка $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{e}_n)_{n=1}^{\infty}$ (види забелешка 4.1.2).

Забелешка 4.2.2. Претпоставката дека просторите X_F и Θ_F се Монтелови простори не е толку ограничувачка, бидејќи многу познати Фрешеови простори ја имаат оваа особина (види [91, Тврдење 34.4]).

Главниот резултат во овој дел е тополошката карактеризација на просторот X_F^* преку коефициент-операторот на полиномно локализирани рамки.

Теорема 4.2.1. Нека се задоволени условите на тврдењето 4.2.1. Коефициент-операторите $C_{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ се изоморфни пресликувања од тополошко векторските простори X_F и X_F^* во нивните слики $C_{\mathcal{E}}(X_F)$ и $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(X_F^*)$, соодветно.

Доказ: Непрекинатоста на коефициент-операторите над X_F и X_F^* следува директно од теоремата 4.1.2(iii) и тврдењето 4.2.1(i), соодветно.

Од тоа што коефициент-операторот над Хилберовиот простор $\mathcal{H}$ е инјекција, директно следува дека коефициент-операторот над X_F е инјекција. Но, ова може и да се покаже. Нека $f_1,\ f_2 \in X_F$ се такви што $C_{\mathcal{E}}(f_1) = C_{\mathcal{E}}(f_2)$. Тогаш од дефиницијата на коефициент-операторот имаме дека $((f_1, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty} = ((f_2, e_n)_{\mathcal{H}})_{n=1}^{\infty}$ ако и само ако $(f_1, e_n)_{\mathcal{H}} = (f_2, e_n)_{\mathcal{H}},\ \forall n \in \mathbb{N}$ односно $(f_1 - f_2, e_n)_{\mathcal{H}} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогаш од конвергенцијата на редот во (4.1.8) имаме $\sum_{n=1}^{\infty}(f_1 - f_2, e_n)_{\mathcal{H}}\widetilde{e}_n = 0$ од каде добиваме дека $f_1 = f_2$.

На сличен начин од теоремата 4.1.2 (vi) се покажува дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е инјекција. Навистина, нека $g_1,\ g_2 \in X_F^*$ се такви што $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_1) = \mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_2)$, т.е. $(g_1 - g_2)(e_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогаш од конвергенцијата на редот (4.1.9), се добива дека $g_1 = g_2$.

Јасно е дека операторите се сурјективни, бидејки кодоменот е соодветната слика. Покажавме дека коефициент-операторите $C_{\mathcal{E}} : X_F \to C_{\mathcal{E}}(X_F)$ и $\mathbf{C}_{\mathcal{E}} : X_F^* \to \mathbf{C}_{\mathcal{E}}(X_F^*)$ се непрекинати биективни пресликувања. Останува да покажеме дека инверзните оператори се непрекинати.

Нека $C_{\mathcal{E}}^{-1} : C_{\mathcal{E}}(X_F) \to X_F$ е инверзен оператор на операторот $C_{\mathcal{E}}$. Ќе земеме низа $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in X_F$ таква што $C_{\mathcal{E}}(f_n)$ конвергира кон 0 во Θ_F кога $n \to \infty$. Од забелешката 4.1.2, имаме дека $D_{\widetilde{\mathcal{E}}} : \Theta_F \to X_F$ е непрекинат оператор и според тоа $D_{\widetilde{\mathcal{E}}}(C_{\mathcal{E}}(f_n)) \to 0$ во X_F. Од теоремата 4.1.2 (ii) имаме дека $D_{\widetilde{\mathcal{E}}} C_{\mathcal{E}}|_{X_F} = \mathrm{Id}_{X_F}$, па добиваме дека $f_n \to 0$ во X_F кое повлекува дека $C_{\mathcal{E}}^{-1}$ е непрекинато пресликување од $C_{\mathcal{E}}(X_F)$ во X_F.

На сличен начин се покажува дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{-1} : \mathbf{C}_{\mathcal{E}}(X_F^*) \to X_F^*$ е непрекинат оператор. Ќе земеме низа $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in X_F^*$ таква што $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n)$ конвергира кон 0 во Θ_F^* кога $n \to \infty$. Од тврдењето 4.2.1 и забелешката 4.2.1, имаме дека $\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}} : \Theta_F^* \to X_F^*$ е непрекинат оператор и според тоа $\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g_n)) \to 0$ во X_F^*. Од теоремата 4.1.2 (vi) имаме дека $\mathbf{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}} \mathbf{C}_{\mathcal{E}}|_{X_F^*} = \mathrm{Id}_{X_F^*}$, па добиваме дека $g_n \to 0$ во X_F^* кое повлекува дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{-1}$ е непрекинато пресликување од $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(X_F^*)$ во X_F^*.

□

Сега, со помош на тврдењето 4.2.1 и теоремата 4.2.1 можеме да направиме карактеризација на ограничени подмножества од X_F^* и да разгледаме конвергенција во просторот X_F^* преку коефициент-операторот на полиномно локализирани рамки.

Тврдење 4.2.2. Нека условите од тврдењето 4.2.1 се задоволени и нека $\mathfrak{B}$ е подмножество од X_F^*. Тогаш следниве две тврдења се еквивалентни:

(i) $\mathfrak{B}$ е ограничено подмножество од X_F^*;

(ii) постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што

$$\sup_{g \in \mathfrak{B}} |||(g(e_n))_{n=1}^{\infty}|||_k^* < \infty. \tag{4.2.10}$$

Доказ: Просторот X_F (соодветно, просторот Θ_F) како Фрешеов простор е локално конвексен простор (види дефиниција A.0.31), а од [91, Глава 19, стр. 196] имаме дека дуалниот на локално конвексен простор е исто така локално конвексен простор, т.е. X_F^* (соодветно, Θ_F^*) е локално конвексен простор. Јасно е дека секој локално конвексен простор е тополошки векторски простор (види дефиниција A.0.29).

Нека важи (i), т.е. $\mathfrak{B}$ е ограничено подмножество од X_F^*. Од претходната дискусија и од фактот дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е непрекинат оператор од X_F^* во Θ_F^* (даден во тврдењето 4.2.1, (i)), може да се примени тврдењето A.0.5, од каде се добива дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$ е ограничено во Θ_F^*. Бидејќи Θ_F^* е регуларна индуктивна граница од Банахови простори, имаме дека множеството $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$ лежи и е ограничено во Θ_k^* за некое $k \in \mathbb{N}_0$ (види поглавје 1.3.3.), што е еквивалентно со неравенството (4.2.10).

Обратно, нека важи (ii). Најпрво ќе покажеме дека

$$(D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F})^* = \mathbf{C}_{\mathcal{E}}, \tag{4.2.11}$$

т.е. $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е адјунгиран оператор на операторот $D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F}$. Да забележиме дека $D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F}$ е непрекинат оператор од Θ_F во X_F (види теорема 4.1.2 (iii)). Ќе го разгледаме неговиот адјунгиран оператор $(D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F})^*$, кој е непрекинат од X_F^* во Θ_F^* во однос на слабата топологија, како и во однос на јаката топологија заради Монтеловата особина.

Нека $g \in X_F^*$ е произволно избран елемент, тогаш за секоја низа $c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \Theta_F$ имаме

$$(D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F})^*(g)(c) = g(D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F}(c)) = g\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(e_n).$$

Од друга страна, пак,

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(g)(c) = (g(e_n))_{n=1}^{\infty}(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(e_n)$$

Според тоа, $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$ е адјунгиран оператор на операторот $D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F}$.

Од теоремата 4.1.2 (iii) и (ii) следува дека $D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F} : \Theta_F \to X_F$ е непрекинат и сурјективен оператор, соодветно. Од теорема 4.2.1 знаеме дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{-1} : \mathbf{C}_{\mathcal{E}}(X_F^*) \to X_F^*$ е непрекинат.

Од (ii), следува дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$ е ограничено во Θ_k^*, за некое $k \in \mathbb{N}$. Тогаш, бидејќи Θ_F^* е регуларна индуктивна граница од Банахови простори (види поглавје 1.3.3.), имаме дека $\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})$ е ограничено во Θ_F^*. Сега од критериумот за сурјекција даден во тврдењето А.0.10, се добива дека

$$((D_{\mathcal{E}}|_{\Theta_F})^*)^{-1}(\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})) = \mathbf{C}_{\mathcal{E}}^{-1}(\mathbf{C}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}$$

е ограничено подмножество од X_F^*.

□

За нашата асимптотска анализа во поглавјето 4.4., потребно е да разгледаме конвергенција на мрежа од фунционали преку рамка-коефициентите. За оператор кој пресликува Банахов простор во тополошки простор, непрекинатоста по мрежа и непрекинатоста по низи се еквивалентни (види забелешка А.0.1 и теорема А.0.7).

Тврдење 4.2.3. Нека условите од тврдењето 4.2.1 се задоволени. Мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ од функционали конвергира во X_F^* кога $\lambda \to \infty$ ако и само ако за секое $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(e_n) = a_n < \infty, \tag{4.2.12}$$

и постои $k \in \mathbb{N}_0$ и $\lambda_0 > 0$ така што

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_0} |||(g_\lambda(e_n))_{n=1}^\infty|||_k^* < \infty. \tag{4.2.13}$$

Во тој случај за граничниот функционал, $\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda = g$ важи $a_n = g(e_n)$.

Доказ: Најпрво, нека мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ конвергира во X_F^* кога $\lambda \to \infty$. Од дефиницијата за слаба конвергенција на мрежа од функционали (види дефиниција А.0.35) имаме дека за $\forall n \in \mathbb{N}$ границите

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(e_n)$$

постојат и се конечни, од каде следува дека важи равенството (4.2.12).

Конвергенцијата на мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ во X_F^* повлекува дека $\exists\lambda_0$ така што множеството $\{g_\lambda|\lambda \geq \lambda_0\}$ е ограничено во X_F^*. Од тврдењето 4.2.2, следува дека $\sup_{\lambda\geq\lambda_0} |||(g_\lambda(e_n))_{n=1}^\infty|||_k^* < \infty$, за некое $k \in \mathbb{N}_0$.

Обратно, нека важат (4.2.12) и (4.2.13). Од релацијата (4.2.13) и тврдењето 4.2.2 имаме дека множеството $\{g_\lambda|\lambda \geq \lambda_0\}$ е ограничено во X_F^*. Сега, од теоремата на Банах-Штајнхаус (теорема А.0.10) имаме дека $\{g_\lambda|\lambda \geq \lambda_0\}$ претставува рамномерно непрекинато подмножество од X_F^*.

Од друга страна, од (4.2.12) имаме дека мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\geq\lambda_0}$ конвергира по точки над линеарната обвивка од $\{e_n\}$, кое е густо подмножество во X_F (види теорема 4.1.2 (ii)). Сега, од тврдењето А.0.11 имаме дека конвергенцијата по точки на мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\geq\lambda_0}$ над густо подмножество од X_F, може да се прошири над целиот простор X_F. Со тоа добивме дека мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\geq\lambda_0}$ конвергира во слабата топологија на просторот X_F^*, која е еквивалентна со јаката конвергенција заради Монteловата особина на просторот X_F.

Нека, $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ конвергира во X_F^* кога $\lambda \to \infty$, т.е. $(\exists g \in X_F^*)$ така што $\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda = g$ во X_F^*. Тогаш $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(e_n) = g(e_n), \tag{4.2.14}$$

а од (4.2.12) имаме дека $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(e_n) = a_n. \tag{4.2.15}$$

Односно, од (4.2.14) и (4.2.15) се добива дека $a_n = g(e_n)$.

$\square$

4.3. Тополошка карактеризација на просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Во ова поглавје ќе бидат применети резултатите добиени во тврдењата 4.2.2 и 4.2.3 за да се добие карактеризација на ограничени множества и конвергенција на мрежи во просторот од темперирани дистрибуции преку нивните рамка-коефициенти во однос на полиномно локализирани рамки.

Ако $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ е Коте матрица, каде што $a_{n,k} = n^k$ и $p = 2$ (види дефиниција А.0.41), тогаш се добива Коте просторот од низи

$$\lambda^2(A) = \{(c_n)_{n=1}^{\infty} \ : \ c_n \in \mathbb{C} \text{ и } |||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_k^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n n^k|^2 < \infty, \ \forall k \in \mathbb{N}_0\}, \tag{4.3.16}$$

кој уште е наречен простор од полиномно брзо опаѓачки низи. Поради аналогијата со просторот од брзо опаѓачки функции $\mathcal{S}$, понатаму овој простор ќе го означуваме со $\mathbf{s}$.

Тврдење 4.3.1. Коте просторот од низи $\mathbf{s}$ е Монтелов простор.

Доказ: За да покажеме дека Коте просторот од низи $\mathbf{s}$ е Монтелов доволно е да покажеме дека важи барем едно тврдење од теоремата А.0.12. Од дефиницијата (4.3.16) на просторот $\mathbf{s}$, јасно е дека условот (v) на теоремата А.0.12 е задоволен, т.е. за секое $n \in \mathbb{N}$ и секое $m \in \mathbb{N}$ постои $k \in \mathbb{N}$ така што $\inf_{n\in\mathbb{N}} n^m n^{-k} = 0$. $\square$

Во [101, стр. 27] е дадена следнава конструкција на овој простор

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \{(c_n)_{n=1}^{\infty} \ : \ c_n \in \mathbb{C} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n n^k|^2 < \infty, \ \forall k \in \mathbb{N}_0\} \\
&= \{(c_n)_{n=1}^{\infty} \ : \ c_n \in \mathbb{C} \text{ и } \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n| n^k < \infty, \ \forall k \in \mathbb{N}_0\}.
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Од дефиницијата (4.3.17) на просторот $\mathbf{s}$, јасно е дека просторот $\mathbf{s}$ е Фреше-Шварцов простор, бидејќи за секое $k \in \mathbb{N}_0$ постои

$m \geq k$ така што $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^m} = 0$, т.е. задоволен е условот (iii) во тврдењето A.0.13. Неговиот дуален е дуален Фреше-Шварцов простор (DFS),

$$\mathbf{s}' = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \ : \ a_n \in \mathbb{C} \text{ и } \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| n^{-k} < \infty, \text{ за некое } k \in \mathbb{N}_0\}. \quad (4.3.18)$$

Ако разгледаме специјален случај на полиномна тежина $\mu_k(x) = (1+|x|)^k$, $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$, тогаш просторите $\Theta_k := \ell^2_{\mu_k}, k \in \mathbb{N}_0$ (во теорема 4.1.2) се CB-простори кои ги задоволуваат условите (1.3.39) $-$(1.3.41) дадени во поглавје 1.3.3. Притоа, нивната проективна граница Θ_F е Коте просторот од низи $\mathbf{s}$.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е Шварцовиот простор од брзо опаѓачки глатки функции, кој е изоморфен со Коте просторот од низи $\mathbf{s}$ [54, Пример 29.5(2)].

Во [68] ја применуваат теоремата 4.1.2 за да добијат развој во ред на елементите од просторите $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ преку полиномно локализирана рамка во однос на ермитска ортонормална база и коефициенти во соодветниот простор од низи.

Да се потсетиме, ермитската ортонормална база $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ за $L^2(\mathbb{R})$ е дефинирана како $h_n = \mathrm{h}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, каде

$$\mathrm{h}_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2}),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 4.3.1. [68, Теорема 4.2] Нека $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од елементи од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ која е рамка за $L^2(\mathbb{R})$ и која е полиномно локализирана во однос на ермитската база $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ со степен на опаѓање s за секое $s \in \mathbb{N}$. Нека $(r_n)_{n=1}^{\infty} := (h_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогаш заклучоците на теоремата 4.1.2 важат кога X_F е заменет со $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и Θ_F е заменет со $\mathbf{s}$, т.е. важат следниве тврдења:

(i) $\widetilde{e}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ за секое $n \in \mathbb{N}$;

(ii) За секое $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{e}_n)_{L^2(\mathbb{R})} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{L^2(\mathbb{R})} \widetilde{e}_n \text{ (со конвергенција во } \mathcal{S}(\mathbb{R})) \quad (4.3.19)$$

каде што $((f, \widetilde{e}_n)_{L^2(\mathbb{R})})_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}$ и $((f, e_n)_{L^2(\mathbb{R})})_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}$;

(iii) Коефициент-операторот $C_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во $\mathbf{s}$; Синтеза операторот $D_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од $\mathbf{s}$ во $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; рамка-операторот $S_{\mathcal{E}}$ е F-ограничен од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ со безусловна конвергенција на редот $S_{\mathcal{E}}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)_{L^2(\mathbb{R})} e_n$;

(iv) Ако $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{s}$ ја поседуваат следнива особина во однос на $(h_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$\mathcal{P}_{(r_n)} : \text{За } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ важи дека } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ ако и само ако } ((f, h_n)_{L^2(\mathbb{R})})_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s},$$

тогаш тие исто така ги поседуваат особините $\mathcal{P}_{(e_n)}$ и $\mathcal{P}_{(\widetilde{e}_n)}$;

(v) Двете низи $(\mathbf{e_n})_{n=1}^{\infty}$ и $(\widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n})_{n=1}^{\infty}$ се Фрешеови рамки за $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ во однос на $\mathbf{s}$;

(vi) За секое $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g(e_n)\, \widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n} = \sum_{n=1}^{\infty} g(\widetilde{e}_n)\, \mathbf{e_n} \text{ (со конвергенција во } \mathcal{S}'(\mathbb{R})) \tag{4.3.20}$$

каде што $(g(e_n))_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}'$ и $(g(\widetilde{e}_n))_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}'$;

(vii) Ако $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{s}'$, тогаш $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{e_n}$ (соодветно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{\mathbf{e}}_\mathbf{n}$) конвергира во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, т.е. пресликувањето $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}(f, e_n)_{L^2(\mathbb{R})} a_n$ (соодветно $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{e}_n)_{L^2(\mathbb{R})} a_n$) определува непрекинат линеарен функционал над $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Оваа теорема ни овозможува да ги примениме тврдењата од претходното поглавје за специјален случај на простори, т.е. за $\mathcal{S}$ и $\mathbf{s}$. Како што порано имавме спомнато, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{s}$ се Монтелови простори, па од теоремата 4.3.1 добиваме дека тврдењето 4.2.1, теоремата 4.2.1 и тврдењата 4.2.2 и 4.2.3 важат, кога X_F и Θ_F ги замениме со $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathbf{s}$, соодветно.

Тврдење 4.3.2. Нека претпоставките и ознаките од теоремата 4.3.1 важат. Тогаш важат следниве тврдења:

(i) Коефициент-операторот, $\mathbf{C}_\mathcal{E}$ е непрекинат оператор од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во $\mathbf{s}'$;

(ii) Операторот на синтеза, $\mathbf{D}_\mathcal{E}$ е непрекинат оператор од $\mathbf{s}'$ во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, и исто така е адјунгиран оператор на операторот $C_\mathcal{E}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$;

(iii) Рамка-операторот, $\mathbf{S}_\mathcal{E}$ е непрекинат од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Теорема 4.3.2. Нека се задоволени условите од теоремата 4.3.1. Коефициент-операторите $C_\mathcal{E}, \mathbf{C}_\mathcal{E}$ се изоморфни пресликувања од $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ во нивните слики $C_\mathcal{E}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ и $\mathbf{C}_\mathcal{E}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$, соодветно.

Сега, доаѓаме до главниот резултат за нашата асимптотска анализа, т.е. тополошката карактеризација на просторот $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ преку рамка-коефициентите во однос на полиномно локализирани рамки.

Тврдење 4.3.3. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат и нека $\mathfrak{B}$ е подмножество од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Тогаш следниве две тврдења се еквивалентни:

(i) $\mathfrak{B}$ е ограничено подмножество од $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$;

(ii) постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што

$$\sup_{g\in\mathfrak{B}} \sup_{n\in\mathbb{N}} (|g(e_n)|n^{-k}) < \infty. \tag{4.3.21}$$

Исто како ограничено подмножество, така и конвергенција на мрежа од темперирани дистрибуции може да биде карактеризирана преку коефицинтите од нивните развои во однос на полиномно локализирани рамки.

Тврдење 4.3.4. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат. Мрежата $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ од темперирани дистрибуции конвергира во $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ кога $\lambda \to \infty$ ако и само ако за секое $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(e_n) = a_n < \infty, \ , \tag{4.3.22}$$

и постојат $k \in \mathbb{N}_0$ и $\lambda_0 > 0$ така што

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} (|g_\lambda(e_n)|n^{-k}) < \infty.$$

Во тој случај за граничниот функционал, $\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda = g$ важи $a_n = g(e_n)$.

4.4. Асимптотска анализа на темперирани дистрибуции

Во оваа поглавје ќе бидат применети резултатите добиени во поглавјето 4.3. за анализа на квазиасимптотското однесување и квазиасимптотската ограниченост на темперирани дистрибуции, преку коефициентите од нивните развои во однос на полиномно локализирани рамки. За $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и $\varepsilon \in (0,1]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (соодветно $\lambda \in [1,\infty)$), ќе ја користиме ознаката g_{ε,x_0} (соодветно, g_λ) за $g(\varepsilon\cdot+x_0)$

(соодветно, $g(\lambda\cdot)$), а за дуалното спарување помеѓу $g(\varepsilon\cdot+x_0)$ (соодветно, $g(\lambda\cdot)$) и тест функцијата $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ја користиме ознаката $g_{\varepsilon,x_0}(\varphi)$ (соодветно, $g_\lambda(\varphi)$). Рамка-коефициентите за $g(\varepsilon x+x_0)$ (соодветно, $g(\lambda x)$) ќе ги означуваме $g_{\varepsilon,x_0}(e_n)$ (соодветно, $g_\lambda(e_n)$).

Теорема 4.4.1. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат, и нека L е бавно променлива функција во нула, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$. За $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, следниве два услова:

(i) границите
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{g_{\varepsilon,x_0}(e_n)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \tag{4.4.23}$$
постојат за секое $n \in \mathbb{N}$, и

(ii) постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\, g_{\varepsilon,x_0}(e_n)|}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon) n^k} < \infty,\ 0 < \varepsilon \le 1,$$

се потребни и доволни за постоење на дистрибуција h така што
$$g(\varepsilon x + x_0) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) h(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0^+ \quad \text{во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Доказ: Директно следува од тврдењето 4.3.4 ако ја земаме мрежата
$$t_\lambda := \frac{\lambda^\alpha g_{\frac{1}{\lambda},x_0}}{L(\frac{1}{\lambda})},\ \lambda \in [1,\infty).$$
□

Слично тврдење важи и за квазиасимптотиката во бесконечност.

Теорема 4.4.2. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат и нека L е бавно променлива функција во бесконечност и $\alpha \in \mathbb{R}$. За $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, следниве два услова:

(i) границите
$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{g_\lambda(e_n)}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \tag{4.4.24}$$
постојат за секое $n \in \mathbb{N}$, и

(ii) постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\, g_\lambda(e_n)|}{\lambda^\alpha L(\lambda) n^k} < \infty,\ \lambda \ge 1,$$

се потребни и доволни за постоење на дистрибуција h така што

$$g(\lambda x) \sim \lambda^{\alpha} L(\lambda) h(x) \text{ кога } \lambda \to \infty \text{ во } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Доказ: Директно следува од тврдењето 4.3.4 ако ја земеме мрежата

$$t_{\lambda} := \frac{g_{\lambda}}{\lambda^{\alpha} L(\lambda)},\ \lambda \in [1, \infty).$$

□

Забелешка 4.4.1. Во теоремите 4.4.1 и 4.4.2, рамка-коефицинетите на дистрибуцијата h се дадени преку границите (4.4.23) и (4.4.24), соодветно (види тврдењето 4.3.4).

Тврдење 4.4.1. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат, и нека L е бавно променлива функција во нулата. Темперирата дистрибуција $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ е квазиасимптотски ограничена од ред $\alpha \in \mathbb{R}$ во $x_0 \in \mathbb{R}$ ако и само ако постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\, g_{\varepsilon, x_0}(e_n)|}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) n^k} < \infty,\ 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Доказ: Директно следува од тврдењето 4.3.3 ако го разгледуваме множеството

$$\left\{ \frac{g_{\varepsilon, x_0}}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} |\ 0 < \varepsilon \leq 1 \right\}.$$

□

Слично тврдење важи и за квазиасимптотската ограниченост во бесконечност.

Тврдење 4.4.2. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат, и нека L е бавно променлива функција во бесконечност. Темперираната дистрибуција $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ е квазиасимптотски ограничена од ред $\alpha \in \mathbb{R}$ во бесконечност ако и само ако постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\, g_{\lambda}(e_n)|}{\lambda^{\alpha} L(\lambda) n^k} < \infty,\ \lambda \geq 1.$$

Доказ: Директно следува од тврдењето 4.3.3 ако го разгледуваме множеството

$$\left\{ \frac{g_{\lambda}}{\lambda^{\alpha} L(\lambda)} |\ \lambda \in [1, \infty) \right\}.$$

□

4.5. Асимптотска анализа на темперирани дистрибуции во Фурјеов домен

Во оваа поглавје ќе бидат изнесени некои асимптотски разултати кои ги добивме во Фурјеов домен. Заради тоа што Фурјеовата трансформација е добро дефинирана над просторот од темперирани дистрибуции (види теорема 1.1.1.), и бидејќи елементите на локализираната рамка $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ припаѓаат во просторот $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, дојдовме до идеја да разгледаме асимптотско однесување на темперирани дистрибуции во Фурјеов домен во однос на коефициентите од нивниот развој преку полиномно локализирани рамки. Во овој дел ја користиме дефиницијата за Фурјеова трансформација (3.1.1) дадена во глава 3.

Тврдење 4.5.1. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат. Нека $g \in L^2(\mathbb{R})$ дефинира регуларна темперирана дистрибуција и нека за нејзината Фурјеова трансформација важи

$$\widehat{g}(\varepsilon\omega) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)\widehat{h}(\omega),\ \varepsilon \to 0^{+}, \tag{4.5.25}$$

каде што $\alpha \in \mathbb{R}$, L е бавно променлива функција во нулата и $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $h \neq 0$. Тогаш

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda^{\alpha+1} g_{\lambda}(e_n)}{L_1(\lambda)} = h(e_n),$$

каде што $L_1(\cdot) = L\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ е бавно променлива функција во бесконечност.

Доказ: Од квазиасимптотското однесување на темперираната дистрибуција во Фурјеов домен (4.5.25), Парсеваловото равенство и смената $\frac{1}{\lambda} = \varepsilon$ имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda^{\alpha+1} g_{\lambda}(e_n)}{L_1(\lambda)} &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\langle g_{\lambda}(x), e_n(x)\rangle}{(\frac{1}{\lambda})^{\alpha+1} L_1(\lambda)} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\langle g(\lambda x), e_n(x)\rangle}{(\frac{1}{\lambda})^{\alpha+1} L_1(\lambda)} \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\langle \frac{1}{\lambda}\widehat{g}(\frac{\omega}{\lambda}), \widehat{e_n}(\omega)\rangle}{(\frac{1}{\lambda})^{\alpha+1} L_1(\lambda)} = \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \frac{\langle \varepsilon\widehat{g}(\varepsilon\omega), \widehat{e_n}(\omega)\rangle}{\varepsilon^{\alpha+1} L_1(\frac{1}{\varepsilon})} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^{+}} \frac{\langle \widehat{g}(\varepsilon\omega), \widehat{e_n}(\omega)\rangle}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} = \langle \widehat{h}(\omega), \widehat{e_n}(\omega)\rangle \\
&= \langle h(x), e_n(x)\rangle = h(e_n).
\end{aligned}$$

Во горниве изведувања, користевме и добро позната релација за Фурјеова трансформација на дилатација на една функција, односно дистрибуција, $\mathcal{F}(g(\lambda x))(\omega) = \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(g)(\frac{\omega}{\lambda})$ (види теорема 1.1.12 (iv)). $\square$

Наредниот резултат е специјален случај на резултатот добиен во тврдењето 4.5.1 кога $L(\varepsilon) \equiv 1$ и $\widehat{h} = \beta$, $\beta \neq 0$. Тогаш $h = \beta\delta$.

Последица 4.5.1. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат. Нека $g \in L^2(\mathbb{R})$ дефинира регуларна темперирана дистрибуција и нека за нејзината Фурјеова трансформација важи

$$\widehat{g}(\varepsilon\omega) \sim \beta\varepsilon^{\alpha},\ \varepsilon \to 0^+,$$

каде што $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \neq 0$. Тогаш

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{\alpha+1} g_\lambda(e_n) = \beta e_n(0).$$

Тврдење 4.5.2. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат. Нека $g \in L^2(\mathbb{R})$ дефинира регуларна темперирана дистрибуција и нека за нејзината Фурјеова трансформација важи

$$e^{ib\omega}\widehat{g}(\lambda\omega) \sim \lambda^{\alpha} L(\lambda)\widehat{h}(\omega),\ \lambda \to \infty, \tag{4.5.26}$$

каде што $\alpha, b \in \mathbb{R}$, L е бавно променлива функција во бесконечност и $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $h \neq 0$. Тогаш

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon^{\alpha+1} T_{-b} g_\varepsilon(e_n)}{L_1(\varepsilon)} = h(e_n),$$

каде што $L_1(\cdot) = L\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ е бавно променлива функција во нулата.

Доказ: Најпрво ќе ја покажеме релацијата

$$\mathcal{F}(g(\varepsilon(x+b)))(\omega) = e^{ib\omega}\frac{1}{\varepsilon}\widehat{g}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right). \tag{4.5.27}$$

Навистина, ако ја користиме дефиницијата за Фурјеова трансформација (3.1.1) и смената $\varepsilon(x+b) = t$ имаме

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(\varepsilon(x+b)))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} g(\varepsilon(x+b))dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\left(\frac{t}{\varepsilon}-b\right)\omega} g(t)\frac{dt}{\varepsilon} \\
&= \frac{e^{ib\omega}}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\frac{\omega}{\varepsilon}} g(t)dt \\
&= \frac{e^{ib\omega}}{\varepsilon}\widehat{g}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}$$

Од квазиасимптотското однесување на темперираната дистрибуција g (4.5.26), релацијата (4.5.27) и Парсеваловото равенство имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon^{\alpha+1}T_{-b}g_\varepsilon(e_n)}{L_1(\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\langle T_{-b}g_\varepsilon(x), e_n(x)\rangle}{(\frac{1}{\varepsilon})^{\alpha+1}L_1(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\langle g(\varepsilon(x+b)), e_n(x)\rangle}{(\frac{1}{\varepsilon})^{\alpha+1}L_1(\varepsilon)}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\langle \mathcal{F}(g(\varepsilon(x+b)))(\omega), \mathcal{F}(e_n(x))(\omega)\rangle}{(\frac{1}{\varepsilon})^{\alpha+1}L_1(\varepsilon)}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\langle \frac{e^{ib\omega}}{\varepsilon}\widehat{g}(\frac{\omega}{\varepsilon}), \widehat{e_n}(\omega)\rangle}{(\frac{1}{\varepsilon})^{\alpha+1}L_1(\varepsilon)}\\
&= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\langle e^{ib\omega}\widehat{g}(\lambda\omega), \widehat{e_n}(\omega)\rangle}{\lambda^\alpha L(\lambda)}\\
&= \langle \widehat{h}(\omega), \widehat{e_n}(\omega)\rangle\\
&= \langle h(x), e_n(x)\rangle = h(e_n).
\end{aligned}$$

□

Наредниот резултатот е специјален случај на резултатот добиен во тврдењето 4.5.2 кога $L(\lambda)\equiv 1$ и $\widehat{h}=\beta,\ \beta\neq 0$. Тогаш $h=\beta\delta$.

Последица 4.5.2. Нека условите од теоремата 4.3.1 важат. Нека $g\in L^2(\mathbb{R})$ дефинира регуларна темперирана дистрибуција и нека за нејзината Фурјеова трансформација важи

$$e^{ib\omega}\widehat{g}(\lambda\omega)\sim\beta\lambda^\alpha,\ \lambda\to\infty,$$

каде што $\alpha\in\mathbb{R},\beta\neq 0$. Тогаш

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{\alpha+1}T_{-b}g_\varepsilon(e_n)=\beta e_n(0).$$

Додаток А

Познати резултати од реална и функционална анализа

Во овој додаток се изнесени некои основни поими, дефиниции и теореми од реална и функционална анализа на кои се повикуваме во претходните глави од оваа докторска дисертација.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, и $\mathbb{C}$ е множеството од природни, цели, реални и комплексни броеви, соодветно. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. Додека пак, $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{R}^n$, и $\mathbb{C}^n$ претставува множеството од сите подредени $n-$торки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, каде што $x_i, i = \overline{1,n}$ се елементи од $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, и $\mathbb{C}$, соодветно.

За $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и за $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, ќе користиме

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \quad \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j, \ \forall j = \overline{1,n},$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n, \quad |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Тврдење А.0.1. (*Лајбницово правило*) Нека реалните функции f и g се $n-$пати диференцијабилни функции над $\mathbb{R}$. Тогаш и нивниот производ е $n-$пати диференцијабилна функција над $\mathbb{R}$ и притоа важи

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{A.0.1}$$

Теорема А.0.1. [75, Теорема 5.15] (Тајлорова теорема) Нека реалната функција f има непрекинати изводи до ред $(n+1)$ на отворен реален интервал кој ја содржи точката x_0. Тогаш за секое x кое припаѓа во некоја околина на точката x_0 важи

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_{n+1}, \tag{A.0.2}$$

каде што

$$R_{n+1} = \frac{(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}, \tag{A.0.3}$$

$x^* \in [x_0, x]$, се нарекува остаток, а формулата (A.0.2) се нарекува *Тајлоров развој* на функцијата $f(x)$ во точка x_0. Ако $x_0 = 0$, тогаш (A.0.2) се нарекува *Маклоренов развој*.

Тврдење A.0.2. [36, Лема 6.0.1] Ако $\widehat{f}(\omega), \omega^n \widehat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ тогаш f е n-пати непрекинато диференцијабилна функција, а изводите се:

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\omega)^m \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega,\ m = 0, 1, ..., n.$$

Сите изводи се ограничени и опаѓаат во бесконечност, т.е.

$$\lim_{|x| \to \infty} f^{(m)}(x) = 0,\ m = 0, 1, 2, ..., n.$$

Од друга страна пак, нека $f \in L^1(\mathbb{R})$ и е n-пати диференцијабилна функција со сите изводи во $L^1(\mathbb{R})$ и нека

$$\lim_{|x| \to \infty} f^{(m)}(x) = 0,\ m = 0, 1, 2, ..., n - 1,$$

тогаш

$$\lim_{|x| \to \infty} \omega^m \widehat{f}(\omega) = 0,\ m = 0, 1, 2, ..., n.$$

Тврдење A.0.3. [36, Лема 6.0.4] Ако $f(x), x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ тогаш следниве услови се еквивалентни:

(i) $\int_{\mathbb{R}} x^m f(x) = 0,\ m = 0, 1, 2, ..., n;$

(ii) $\widehat{f}(\omega) = o(\omega^n),\ \omega \to 0.$

Дефиниција A.0.1. Фамилијата $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$, каде што $\mathcal{P}(X)$ е партитивното множество на X, се нарекува *σ-алгебра* на X ако важи:

(i) $X \in \mathcal{M}$;

(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$;

(iv) $A_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Со $(X, \mathcal{M})$ ќе го означуваме просторот X за кој е дефинирана σ-алгебра.

Дефиниција A.0.2. Нека $(X, \mathcal{M})$ е простор со σ-алгебра. *Мера* на σ-алгебрата $\mathcal{M}$ е пресликувањето $\eta : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, така што ако X е дисјунктна унија на множествата $X_n \in X,\ n \in \mathbb{N}$ тогаш $\eta(\cup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(X_n)$. За просторот X велиме дека е *мерлив,* а притоа ја користиме ознаката $(X, \mathcal{M}, \eta)$. Елементите од σ-алгебрата се нарекуваат *мерливи множества.*

Дефиниција A.0.3. Нека $(X, \mathcal{M}_X, \eta_X)$ и $(Y, \mathcal{M}_Y, \eta_Y)$ се мерливи простори. Пресликувањето $f : X \to Y$ се нарекува *мерлива функција* ако $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_X$, за секое $A \in \mathcal{M}_Y$. За функциите f и g велиме дека се *еднакви скоро секаде* ако се разликуваат најмногу на множество со мера нула.

Теорема A.0.2. [76, Теорема 1.34] (*Лебегова теорема за доминантна конвергенција*) Нека $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е низа од интеграбилни функции кои конвергираат кон функцијата f скоро секаде на $\mathbb{R}$. Ако постои позитивна интеграбилна функција g таква што $|f_n(x)| \leq g(x)$ за секое $n \in \mathbb{N}$ и за секое $x \in \mathbb{R}$, тогаш f е интеграбилна функција и важи

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

Теорема A.0.3. [75, Теорема 8.8] (*Теорема на Фубини*) Формулата

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dx$$

важи ако е исполнет еден од следниве услови:

(i) f е позитивна и мерлива функција на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$;

(ii) f е интеграбилна функција на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Теорема A.0.4. [62, стр. 15] Нека f е непрекината функција над $X \times I$, каде што $X \subset \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ е конечен реален интервал, за која постои $\frac{\partial}{\partial t} f(x, \cdot)$ над I за секое $x \in X$. Ако се задоволени условите:

(i) $f(\cdot, t)$ е интеграбилна функција над X за секое $t \in I$;

(ii) $\frac{\partial}{\partial t}f(x,\cdot)$ е интеграбилна функција над I за секое $x \in X$;

(iii) $\int_I \left(\int_X \left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| dx\right) dt < \infty$,

тогаш $F(t) = \int_X f(x,t)dx$ е непрекината функција над I и има извод

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx. \tag{A.0.4}$$

Во продолжение ќе дадеме дефиниција за ознаките "големо" O и "мало" o, воведени од страна на германските математичари Бахман (P. Bachman) и Ландау (E. Landau), поради што се познати како *Бахман-Ландау ознаки* или *асимптотски ознаки*, [50].

Дефиниција A.0.4. Нека f и g се реални функции дефинирани во околина на точката $x_0 \in \mathbb{R}$. Велиме дека f е *големо* O од g, а запишуваме

$$f(x) = O(g(x)) \text{ кога } x \to x_0$$

ако постои околина на точката x_0, V_{x_0} и константа M така што

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \; x \in V_{x_0},$$

односно важи

$$\limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty.$$

Дефиниција A.0.5. Нека f и g се реални функции дефинирани во околина на точката $x_0 \in \mathbb{R}$. Велиме дека f е *мало* o од g, а запишуваме

$$f(x) = o(g(x)) \text{ кога } x \to x_0$$

ако за секое $\varepsilon > 0$ постои околина на точката x_0, V_{x_0} така што

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|, \; x \in V_{x_0},$$

односно важи

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

На сличен начин се дефинира "големо" O и "мало" o кога $x \to \infty$. Кога $x_0 \in \mathbb{R}$, со овие дефиниции е опишано локалното однесување на функцијата $f(x)$ во однос на функцијата $g(x)$, додека пак кога $x \to \infty$ е опишано глобалното однесување на функцијата $f(x)$ во однос на функцијата $g(x)$. Ќе наведеме некои особини на "мало" o :

1. Ако за функцијата f важи $f(x) = o(1)$ кога $x \to x_0\,(x \to \infty)$ тогаш $f(x) = o(C)$ за произволна константа $C \neq 0$ кога $x \to x_0\,(x \to \infty)$.

2. Ако за функциите f, g и h важи $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$ кога $x \to x_0\,(x \to \infty)$ тогаш $f(x) = o(h(x))$ кога $x \to x_0\,(x \to \infty)$.

За реалните функции f и g велиме дека се *асимптотски еднакви* или f *асимптотски се однесува како* g кога $x \to x_0$ (соодветно, $x \to \infty$) ако
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ \left(\text{соодветно, } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\right),$$
а запишуваме $f \sim g$.

Ќе наведеме и некои основи поими и теореми од теоријата на метрички, нормирани и тополошки векторски простори. Повеќе детали за оваа теорија можат да се најдат во [3, 48, 54, 91].

Дефиниција A.0.6. Нека X е непразно множество. Функцијата $d : X \times X \to \mathbb{R}$ која ги задоволува условите:

(i) $0 \leq d(x, y) < \infty$;

(ii) $d(x, y) = 0$ ако и само ако $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

се нарекува *метрика*, а парот (X, d) *метрички простор*.

Дефиниција A.0.7. Метричкиот простор (X, d) е *комплетен* ако секоја Кошиева низа е конвергентна.

Теорема A.0.5. [40, Теорема 1] Нека $f : A \times B \to Y$, каде што Y е комплетен метрички простор, A и B се подмножества од метричките простори X_1 и X_2, соодветно и нека $x_0 \in A_1 \setminus A, b_0 \in B_1 \setminus B$, каде што A_1 и B_1 се множества од точки на акумулација на множеството A и множеството B, соодветно. Ако

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \psi(y)$ постои за секое $y \in B$;

(ii) $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$ постои рамномерно за $x \in A$;

тогаш трите лимеси

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \quad \text{и} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

постојат и се еднакви.

Дефиниција A.0.8. Нека X е векторски простор над полето од комплексни броеви $\mathbb{C}$ (соодветно, над полето од реални броеви $\mathbb{R}$). *Скаларен производ* во X е пресликувањето $X \times X \mapsto \mathbb{C}$ (соодветно, $X \times X \mapsto \mathbb{R}$), со ознака $(\cdot,\cdot)_X$ со следниве својства:

(i) $(y,x)_X = \overline{(x,y)}_X,\ \forall x,y \in X,$
(соодветно, $(y,x)_X = (x,y)_X,\ \forall x,y \in X$);

(ii) $(\lambda x,y)_X = \lambda(x,y)_X,\ \forall x,y \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (соодветно, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$);

(iii) $(x_1+x_2,y)_X = (x_1,y)_X + (x_2,y)_X,\ \forall x_1,x_2,y \in X$;

(iv) $(x,x)_X \geq 0,$ и $(x,x)_X = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Векторски простор X со скаларен производ се нарекува *унитарен простор.*

Дефиниција A.0.9. Нека X е векторски простор над $\mathbb{R}$. Реалната функција $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ се нарекува *полунорма* на просторот X ако

(i) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ за секое $x,y \in X$;

(ii) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ за секое $x \in X$ и за сите $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ако ρ е полунорма и уште ако $\rho(x) = 0$ повлекува дека $x = 0$, тогаш ρ е *норма* на просторот X. Парот (X,ρ) се нарекува *нормиран векторски простор.*

Дефиниција A.0.10. Нека X е векторски простор над $\mathbb{R}$. Полунормата $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ е ограничена на множеството $A \subset X$ ако $\sup_{x\in A} \rho(x) < \infty$.

Бидејќи секој унитарен простор е нормиран, а секој нормиран простор е метрички простор следува дека секој унитарен простор е метрички простор.

Дефиниција A.0.11. Комплетен унитарен простор се нарекува *Хилбертов простор,* додека пак комплетен нормиран простор се нарекува *Банахов простор.*

Нека X и Y се векторски простори. За линеарната функција $f : X \to Y$ ќе го користиме терминот *оператор*, додека пак ако $Y = \mathbb{C}$ (или $Y = \mathbb{R}$), тогаш за линеарната функција $f : X \to Y$ ќе го користиме терминот *линеарен функционал*.

Теорема A.0.6. [91, Теорема 18.1] (*Теорема на Хан-Банах*) Нека ρ е полунорма на векторскиот простор X и A е потпростор од X. Ако f е линеарен функционал над A за кој важи

$$|f(x)| \leq C\rho(x) \text{ за сите } x \in A,$$

тогаш постои линеарен функционал $\overline{f}$ над X, кој претставува проширување на f, при што важи

$$\overline{f}(x) = f(x) \text{ за секое } x \in A,$$

и уште повеќе,

$$|\overline{f}(x)| \leq C\rho(x) \quad \text{за сите } x \in X.$$

Дефиниција A.0.12. Фамилијата τ од подмножества од непразното множество X се нарекува *топологија* на X ако и само ако ги исполнува следниве услови

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $A_1 \cap A_2 \in \tau$ за $A_1, A_2 \in \tau$

(iii) $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$, за $A_i \in \tau,\ i \in I$, каде I е множество од индекси.

Елементите на фамилијата τ се нарекуваат *отворени множества*, а подредената двојка (X, τ) се нарекува *тополошки простор*. Подмножеството A од тополошкиот простор X се нарекува *затворено* ако неговиот комплемент е отворено множество.

Дефиниција A.0.13. Нека (X, τ) е тополошки простор. Множеството $U \subset X$ е *околина на точката* $x \in X$ ако и само ако постои отворено множество $O \in \tau$ така што $x \in O \subset U$. Фамилијата $\mathcal{B}(x)$ е *база од околини* или *локална база на точката* $x \in X$ ако и само ако се исполнети следниве услови:

(i) Елементите на фамилијата $\mathcal{B}$ се околини на точката x;

(ii) За секоја околина U на точката x, постои $B \in \mathcal{B}(x)$ така што $B \subset U$.

Дефиниција A.0.14. Тополошкиот простор X се нарекува *Хаусдорфов* ако за секои две различни точки $x, y \in X$ постојат дисјунктни отворени множества U_x и U_y така што $x \in U_x$ и $y \in U_y$.

Дефиниција A.0.15. Тополошкиот простор X се нарекува *сепарабилен* ако содржи преброиво секаде густо подмножество.

Дефиниција A.0.16. Ако A е подмножество од тополошкиот простор X тогаш топологијата τ на просторот X индуцира топологија на A која е наречена *индуцирана топологија* во која $A \cap O$ се отворени множества во A каде што O е отворено множество во X.

Дефиниција A.0.17. Ако τ_1 и τ_2 се две топологии за множеството X и ако $\tau_1 \subset \tau_2$, тогаш τ_2 е *пофина топологија* во однос на топологијата τ_1, односно τ_1 е *погруба топологија* за множеството X.

Дефиниција A.0.18. Тополошкиот простор X во кој топологијата е индуцирана со метрика се нарекува *метризиабилен простор.*

Дефиниција A.0.19. Нека X е тополошки простор. Парцијално подреденото множество $(I, \leq)$ се нарекува *насочено* (directed set) ако за секој пар елементи α, β од I постои γ така што $\alpha \leq \gamma$ и $\beta \leq \gamma$. *Мрежа* (*обопштена низа, хиперниза*) во X е фамилијата $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ од елементи x_α од X каде што множеството од индекси I е насочено множество.

Дефиниција A.0.20. За една мрежа $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ во тополошкиот простор X велиме дека *конвергира* кон $x \in X$, ако за секоја околина U на x постои $\alpha_U \in I$ така што $x_\alpha \in U$ за сите $\alpha \in I$ такви што $\alpha \geq \alpha_U$. Елементот x е еднозначно определен и се нарекува *гранична вредност* (*граница*) на мрежата $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и означуваме $\lim_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ или $x_\alpha \to x$.

Тврдење A.0.4. [48, стр. 11] Нека X и Y се тополошки простори. Пресликувањето $f : X \to Y$ е непрекинато ако и само ако секоја мрежа $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ во X која конвергира кон $x \in X$, мрежата $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ конвергира кон $f(x)$.

Дефиниција A.0.21. Нека X и Y се тополошки простори. Пресликувањето $f : X \to Y$ се нарекува *изоморфизам* од X во Y ако f е непрекината биекција чие инверзно пресликување е непрекинато. За тополошките простори X и Y велиме дека се *изоморфни* ако постои изоморфизам $f : X \to Y$ и притоа означуваме $X \simeq Y$.

Дефиниција A.0.22. Нека X и Y се тополошки простори. Ако $f : X \to f(X)$ е изоморфизам тогаш f се нарекува *сместување* (embedding) на X во Y и притоа се користи ознаката $X \hookrightarrow Y$.

Дефиниција A.0.23. Векторскиот простор X над полето $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), снабден со топологијата τ се нарекува *тополошки векторски простор* ако следниве пресликувања:

$$(x, y) \mapsto x + y \;\text{ и } (\alpha, a) \mapsto \alpha x \; x, y \in X, \; \alpha \in \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C})$$

се непрекинати.

Дефиниција A.0.24. Нека X е векторски простор. Множеството $A \subset X$ е *конвексно* ако за секои $x, y \in A$ и $0 \leq \lambda \leq 1$ важи

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Нека X е тополошки векторски простор. Множеството $A \subset X$ е *ограничено* ако за секоја околина U на нулата постои $\lambda > 0$ така што

$$A \subset \lambda U.$$

Множеството $A \subset X$ е *урамнотежено* (*балансирано*) ако

$$\lambda A \subset A \text{ за секое } |\lambda| \leq 1.$$

Множеството $A \subset X$ е *апсорбирачко* ако за секое $x \in X$ постои $\lambda > 0$ така што

$$x \in \lambda A.$$

Множеството $A \subset X$ е *компактно* ако секоја фамилија од отворени множества од X чија унија го содржи множеството A има конечна подфамилија од множества чија унија го содржи множеството A. Подмножеството A од тополошки векторски простор X се нарекува *бочва* ако A е апсорбирачко, конвексно, урамнотежено и затворено множество.

Дефиниција A.0.25. Тополошкиот векторски простор X се нарекува *бочваст* ако секоја бочва во X е околина на нулата во X.

Дефиниција A.0.26. Нека A и X се тополошки векторски простори такви што $A \subset X$. Множеството $x + A = \{y | y = x + a, a \in A\}$ се нарекува класа на еквиваленција по модул A на елементот $x \in X$. Множеството од сите класи на еквиваленција се нарекува *фактор* *простор* и се означува со X/A. Фактор просторот X/A е тополошки простор со најјаката топологија во однос на која пресликувањата

$$f : X \to X/A,\ x \mapsto x + A,$$

се непрекинати, т.е. отворените множества се во облик $U + A$, каде што U е отворено множество во топологијата на просторот X.

Тврдење A.0.5. [91, Тврдење 14.2] Нека X и Y се тополошки векторски простори. Сликата на ограничено множество во X со непрекинато линеарно пресликување $f : X \to Y$ е ограничено множество во Y.

Дефиниција A.0.27. Тополошкиот простор X се нарекува *1-преброив простор* (first countable space) ако ја задоволува следнава аксиома позната како *прва аксиома на преброивост* (first axiom of countability): За секоја точка $x \in X$ постои преброива класа $\{B_1, B_2, B_3, ...\}$ од отворени множества кои ја содржат точката x така што за секоја отворена околина O на x постои B_n, т.ш. $B_n \subset O$.

Забелешка A.0.1. Секој метризиабилен простор е 1-преброив простор, (види, на пример [104, стр. 40]). Секој Банахов простор е 1-преброив простор.

Теорема A.0.7. [51, Теорема 9.1]Функцијата f дефинирана над 1-преброив простор X е непрекината во точката $x \in X$ ако и само ако е непрекината по низи во точката x, т.е. за секоја низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ која конвергира кон x, низата $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира кон $f(x)$.

Дефиниција A.0.28. Нека X е тополошки векторски простор, а I е множество од индекси и нека $x_i \in X$ за секое $i \in I$. Редот $\sum_{i\in I} x_i$ *безусловно конвергира* кон $x \in X$ ако множеството од индекси $I_0 = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ е преброиво и ако за секоја пермутација p_i на I_0 важи $\sum_{p_i} x_i = x$.

Дефиниција A.0.29. *Локално конвексен тополошки векторски простор* е тополошки векторски простор во кој нулата има локална база од конвексни множества.

Дефиниција A.0.30. Нека ρ е полунорма на векторскиот простор X. Множеството $B_\varepsilon(x) = \{x : \rho(x) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, е околина на нулата во X. Нека $\mathcal{E} = \{B_\varepsilon(x) | \varepsilon > 0, x \in X\}$ е фамилија од околини на нулата. Топологијата на просторот X генерирана од фамилијата $\mathcal{E}$ се нарекува топологија дефинирана преку полунормата ρ.

Теорема А.0.8. [3, Теорема 1.4] Потребен и доволен услов за тополошкиот векторски простор X да биде локално конвексен простор е неговата топологија да е дефинирана преку фамилија од полунорми $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$, каде што I е множество од индекси.

Теорема А.0.9. [3, Теорема 1.5] Локално конвексниот простор X е метризиабилен ако и само ако е Хаусдорфов и има преброива локална база на нулата.

Последица А.0.1. [3, Последица, стр. 15] Преброива сепарабилна фамилија од полунорми на векторскиот простор X генерира локално конвексна, метризиабилна топологија на X.

Тврдење А.0.6. [91, Тврдење 14.5] Нека X е локално конвексен простор. Подмножеството A од X е ограничено ако и само ако секоја полунорма од фамилијата од полунорми на X е ограничена на A.

Дефиниција А.0.31. Тополошкиот векторски простор се нарекува *Фрешеов простор* ако е локално конвексен, метризиабилен и комплетен.

Последица А.0.2. [91, Глава 33, Последица 1] Секој Фрешеов простор е бочваст.

Дефиниција А.0.32. Локално конвексен векторски простор X се нарекува *борнолошки простор* ако секој урамнотежен конвексен потпростор $A \subset X$, кој ги апсорбира сите ограничени множества во X е околина на нулата.

Тврдење А.0.7. [91, Тврдење 7.7] Нека X и Y се локално конвексни простори. Линеарното пресликување $f : X \to Y$ е непрекинато ако и само ако за секоја полунорма ρ_Y на просторот Y постои полунорма ρ_X на просторот X и константа $C > 0$ така што за сите $x \in X$ важи

$$\rho_Y(f(x)) \leq C\rho_X(x).$$

Дефиниција А.0.33. Нека X е локално конвексен тополошки векторски простор. Просторот X' кој ги содржи сите непрекинати линеарни функционали $f : X \to \mathbb{C}$ се нарекува *дуален простор* на X.

Дефиниција А.0.34. Нека X е локално конвексен простор и нека $A \subset X$. Множеството кое ги содржи сите елементи $f \in X'$ за кои важи

$$|f(\varphi)| \leq 1, \ \forall \varphi \in A,$$

се нарекува *пол* на множеството A, и се означува со A^0. Ако A е потпростор од X, тогаш A^0 е затворен потпростор од X' кој ги содржи сите елементи $f \in X'$ за кои

$$|f(\varphi)| = 0, \ \forall \varphi \in A.$$

Дефиниција A.0.35. Во дуалниот простор X' на локално конвексниот простор X се дефинирани следниве топологии:

(i) *Слаба топологија* или уште позната како *топологија на точкаста конвергенција* над X е топологијата во однос на која низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ со елементи од X' конвергира кон 0 ако низата $(f_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0 над X (т.е. за секое $\varphi \in X$);

(ii) *Јака топологија* или уште позната како *топологија на конвергенција над ограничени множества* е топологијата во однос на која низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0 ако низата $(f_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0 над секое ограничено подмножество од X;

(iii) *Топологија на компактна конвергенција* или уште позната како *топологија на конвергенција над компактни множества* е топологијата во однос на која низата $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0 ако низата $(f_n(\varphi))_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0 над секое компактно подмножество од X.

Тврдење A.0.8. [91, Тврдење 35.6] Нека A е потпростор од локално конвексниот простор X, снабден со индуцирана топологија. Следниве тврдења се еквивалентни:

(i) $A' \simeq X'/A^0$;

(ii) A е затворен потпростор од X.

(X' е снабден со слабата топологија.)

Тврдење A.0.9. [91, Тврдење 19.5] Нека X и Y се тополошки векторски простори. Ако $f : X \to Y$ е непрекинато линеарно пресликување тогаш неговиот адјунгиран оператор $f^* : Y' \to X'$ е непрекинато линеарно пресликување во однос на слабата топологија на дуалните простори.

Тврдење A.0.10. [54, Глава 26] Непрекинато линеарно пресликување $f : X \to Y$ меѓу Фрешеовите простори X и Y е сурјективно ако и само ако за секое ограничено множество B во X', множеството $(f^*)^{-1}(B)$ е ограничено во Y'.

Забелешка А.0.2. Од теоремата на Хан-Банах (теорема А.0.6) следува дека еден потпростор A од локално конвексен Хаусдорфов простор X е густ потпростор ако и само ако секој непрекинат линеарен функционал кој прима вредност нула за елементите од потпросторот A, прима вредност нула и за секој елемент од просторот X, [91, стр. 223].

Дефиниција А.0.36. Нека X и Y се тополошки векторски простори. Множеството H од линеарни пресликувања од X во Y велиме дека е *рамномерно непрекинато множество* (equicontinuous set) ако за секоја околина V на нулата во Y постои околина на нулата U во X така што за сите пресликувања $f \in H$ од $x \in U$ следува дека $f(x) \in V$.

Тврдење А.0.11. [91, Тврдење 32.5] Нека H е рамномерно непрекинато множество од линеарни пресликувања од тополошко векторскиот простор X во тополошко векторскиот простор Y. Тогаш следниве топологии се совпаѓаат:

(i) топологијата на точкаста конвергенција над густо подмножество A од X;

(ii) топологијата на точкаста конвергенција над X;

(iii) топологијата на конвергенција над компактни множества.

Теорема А.0.10. [91, Теорема 33.1] (*Теорема на Банах-Штајнхаус*) Нека X е бочваст тополошки векторски простор и Y е локално конвексен простор. Следниве особини на подмножеството H од просторот од сите непрекинати линеарни пресликувања од X во Y се еквивалентни:

(i) H е ограничено во топологијата на точкаста конвергенција (слаба топологија);

(ii) H е ограничено во топологијата на ограничена конвергенција (јака топологија);

(iii) H е рамномерно непрекинато подмножество.

Дефиниција А.0.37. Локално конвексен простор кој е Хаусдорфов и бочваст, и во кој секое затворено и ограничено множество е компактно се нарекува *Монтелов простор*.

Тврдење А.0.12. [91, Последица 1] Во дуалниот простор X' на Монтелов простор X, секоја низа која конвергира во слабата топологија на просторот X' конвергира и во однос на јаката топологијата на тој простор.

Дефиниција А.0.38. Нека X_j, $j \in \mathbb{N}$, се локално конвексни простори со топологии τ_j за кои важи: X_{j+1} е потпростор од X_j и топологијата τ_{j+1} на просторот X_{j+1} е пофина топологија од индуцираната топологија од τ_j на X_{j+1} како потпростор од X_j за секое $j \in \mathbb{N}$. Ако идентичните сместувања $i_j^{j+1} : X_{j+1} \to X_j$ за секое $j \in \mathbb{N}$ се непрекинати, тогаш низата $((X_j, \tau_j))_{j\in\mathbb{N}}$ се нарекува *проективна низа*, а просторот $X = \cap_{j\in\mathbb{N}} X_j$ *тополошка проективна граница* на низата $((X_j, \tau_j))_{j\in\mathbb{N}}$ во кој топологијата има база чии елементи се околини на нулата, а претставуваат конечен пресек од околини на нулата во просторите (X_j, τ_j). Означуваме $X = \operatorname{proj}\lim_{j\to\infty} X_j$.

Дефиниција А.0.39. Нека X_j, $j \in \mathbb{N}$, се локално конвексни простори со топологии τ_j за кои важи: X_j е потпростор од X_{j+1} така што топологијата τ_j на просторот X_j се поклопува со топологијата која X_{j+1} ја индуцира на X_j за секое $j \in \mathbb{N}$. Ако идентичните сместувања $i_{j+1}^{j} : X_j \to X_{j+1}$ за секое $j \in \mathbb{N}$ се непрекинати, тогаш низата $((X_j, \tau_j))_{j\in\mathbb{N}}$ се нарекува *индуктивна низа,*а просторот $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ *тополошка индуктивна граница* на низата $((X_j, \tau_j))_{j\in\mathbb{N}}$. Означуваме $X = \operatorname{ind}\lim_{j\to\infty} X_j$.

Индуктивната граница $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ на низата $((X_j, \tau_j))_{j\in\mathbb{N}}$ е *регуларна* ако за секое τ-ограничено множество $A \subset X$ постои $k \in \mathbb{N}_0$ така што $A \subset X$ и A е τ_k-ограничено.

Дефиниција А.0.40. Проективна (соодветно, индуктивна) низа од локално конвексни простори со непрекинати линеарни пресликувања:

$$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \ldots \leftarrow X_j \leftarrow \ldots$$

$$(\text{соодветно, } X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_j \to \ldots),$$

велиме дека е *компактна* ако сите пресликувања се компактни. Притоа, $\operatorname{proj}\lim_{j\to\infty} X_j = \cap_j X_j$ (соодветно, $\operatorname{ind}\lim_{j\to\infty} X_j = \cup_j X_j$) од компактно проективна (соодветно, индуктивна) низа се нарекува *Фреше-Шварцов* или накратко FS простор (соодветно, *дуален Фреше-Шварцов простор* или накратко DFS простор).

FS и DFS просторите се сепарабилни и Монтелови. Уште повеќе, затворен потпростор, фактор простор и проективна граница на низа од FS (DFS) простори се FS (DFS) простори. Дуалниот простор на FS просторот со јаката топологија е DFS простор, и обратно. Поточно ги имаме следниве изоморфизми:

$$\left(\text{proj} \lim_{j\to\infty} X_j\right)' \simeq \text{ind} \lim_{j\to\infty} X_j' \text{ и } \left(\text{ind} \lim_{j\to\infty} X_j\right)' \simeq \text{proj} \lim_{j\to\infty} X_j'.$$

Теорема A.0.11. [33, Теорема Б.18] Нека $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ е индуктивна граница од Фрешеови простори. Тогаш важи:

(i) Множеството A е ограничено во X ако и само ако постои $j_0 \in \mathbb{N}$ така што A лежи во X_{j_0} и е ограничено во X_{j_0} .

(ii) Ако низата $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е Кошиева низа во X, тогаш постои $j_0 \in \mathbb{N}$ така што $x_n \in X_{j_0}$ за сите n, и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е конвергентна во X_{j_0} и во X.

(iii) Нека Y е локално конвексен тополошки векторски простор. Линеарното пресликување T од X во Y е непрекинато ако и само ако $T : X_j \to Y$ е непрекинато за секое $j \in \mathbb{N}$.

Дефиниција A.0.41. Матрицата $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ од ненегативни реални броеви се нарекува *Коте матрица* (Köthe matrix) ако ги задоволува следниве услови:

(i) За секое $n \in \mathbb{N}$ постои $k \in \mathbb{N}$ така што $a_{n,k} > 0$;

(ii) $a_{n,k} \le a_{n,k+1}$ за сите $n, k \in \mathbb{N}$.

За $1 \le p < \infty$ дефинираме

$$\lambda^p(A) := \{(c_n)_{n=1}^{\infty}, c_n \in \mathbb{C} : |||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_k := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n a_{n,k}|^p\right)^{1/p} < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}\} \tag{A.0.5}$$

и за $p = \infty$

$$\lambda^{\infty}(A) := \{(c_n)_{n=1}^{\infty}, c_n \in \mathbb{C} : |||(c_n)_{n=1}^{\infty}|||_k := \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n| a_{n,k} < \infty,\ \forall k \in \mathbb{N}\}. \tag{A.0.6}$$

Просторите (A.0.5) и (A.0.6) се наречени *Коте простори.*

Лема A.0.1. [54, Лема 27.1] За секоја Коте матрица $A = (a_{n,k})_{n,k\in N}$ просторите (A.0.5) и (A.0.6) се Фрешеови простори.

Теорема A.0.12. [54, Теорема 27.9] (Dieudonné-Gomes theorem) Следниве услови се еквивалентни за секоја Коте матрица A :

(i) Постои $p \in [1, \infty]$ така што $\lambda^p(A)$ е Монтелов простор;

(ii) За секое $p \in [1, \infty]$, $\lambda^p(A)$ е Монтелов простор;

(iii) $\lambda^1(A)$ е рефлексивен простор;

(iv) За секое $p \in [1, \infty]$ постои конечно димензионален нормиран простор $\lambda^p(A)$;

(v) За секое бесконечно подмножество I од $\mathbb{N}$ и секое $n \in \mathbb{N}$ постои $k \in \mathbb{N}$, така што $\inf_{n \in I} a_{n,m} a_{n,k}^{-1} = 0$.

Тврдење A.0.13. [54, Тврдење 27.10] Следниве услови се еквивалентни за секоја Коте матрицата A :

(i) Постои $p \in [1, \infty]$ така што $\lambda^p(A)$ е Шварцов простор;

(ii) За секое $p \in [1, \infty]$, $\lambda^p(A)$ е Шварцов простор;

(iii) За секое k постои $m \geq k$такво што

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n,k}}{a_{n,m}} = 0.$$

Литература

[1] Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover Publications, 1970.

[2] Aldroubi A., Sun Q., Tang W., p-frames and shift-invariant subspaces of L^p spaces, *J. Fourier Anal. Appl.*, 7(1), 2001, 1–21.

[3] Al-Gwaiz M.A., *Theory of Distributions*, New York: Marcel Dekker, 1992.

[4] Atanasova S., Pilipović S., Saneva K., Directional short-time Fourier transform and directional regularity, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2017. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0594-5.

[5] Balazs P., Gröchenig K., A Guide to Localized Frames and Applications to Galerkin-like Representations of Operators, In: *Novel methods in harmonic analysis with applications to numerical analysis and data processing,* Pesenson I., Mhaskar H., Mayeli A., et al., editors. Birkhäuser, Springer, 2017.

[6] Bierstedt K.D., An introduction to locally convex inductive limits, *Funct. Anal. Its Appl.*, 1988, 35–133.

[7] Buralieva J.V., Saneva K., Atanasova S., Directional short-time Fourier transform and quasiasymptotics of distributions, *Funct. Anal. Its Appl.*, 53(1), 2019, 6–15. https://doi.org/10.1007/s10688-019-0244-9

[8] Carando D., Lassalle S., Schmidberg P., The reconstruction formula for Banach frames and duality, *J. Approx. Theory,* 163(5), 2011, 640–651.

[9] Casazza P., Christensen O., Stoeva D., Frame expansions in separable Banach spaces, *J. Math Anal. Appl.*, 307, 2005, 710–723.

[10] Catană V., Abelian and Tauberian results for the one-dimensional modified Stockwell transforms, *Appl. Anal.*, 96(6), 2017, 1047–1057.

[11] Casazza P.G., Christensen O., Frames and Schauder bases, *In Approximation Theory. In: Memory of Varma A.K.,* Govil N.K., Mohapatra R.N., Nashed Z., et al., editors. Marcel Dekker, 1998.

[12] Christensen O., *An Introduction to Frames and Riesz Bases,* Series: Applied and Numerical Harmonic Analysis, Boston: Birkhäuser, 2003.

[13] Conway J.B., *A Course in functional analysis*, New York: Springer-Verlag, 1990.

[14] Daubechies I., *Ten Lectures on Wavelets*, Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and applied Mathematics (SIAM), 1992.

[15] Daubechies I., Grossmann A., Mayer Y., Painless nonorhogonal expansions. *J. Math Phys.* 27, 1986, 1271–1283.

[16] Drozinov Y.N., Zavialov B.I., Asymptotically homogeneous generalized functions and boundary properties of functions holomorphic in tubular cones, *Izv. Math.*, 70, 2006, 1117–1164.

[17] Drozinov Y.N., Zavialov B.I., Tauberian theorems for generalized functions with values in Banach spaces, *Izvestiya RAN: Ser. Mat.*, 66(4), 2002, 47–118.

[18] Duffin R.J., Schaeffer A.C., A class of nongharmonic Fourier series, *Trans. Am. Math. Soc.*, 72, 1952, 341–366.

[19] Du J., Wong M.W., Zhu H., Continuous and discrete inversion formulas for the Stockwell transform, *Integr. Transf. Spec. F.*, 50, 2007, 537–543.

[20] Estrada R., Abel summability and angular convergence, *Scientia 9,* 2003, 45?-51.

[21] Estrada R., Kanwal R.P., *A distributional approach to Asymptotics: Theory and Application*, Boston: Birkhäuser Advanced Texts, 2002.

[22] Feichtinger H., Atomic characterizations of modulation spaces through Gabor-type representations, *Rocky Mountain J. Math.,* 19, 1989, 113–126.

[23] Feichtinger H., Gröchenig K., Banach Spaces Related to Integrable Group of Representations and Their Atomic Decomposition, *I. J. Funct. Anal.*, 86(2), 1989, 307–340.

[24] Feichtinger H., Gröchenig K., Banach Spaces Related to Integrable Group of Representations and Their Atomic Decomposition, *II. Monatsh. Math.*, 108(2-3), 1989, 129–148.

[25] Feichtinger H., Gröchenig K., Gabor frames and time-frequency analysis of distributions, *J. Funct. Anal.*, 146, 1997, 464–495.

[26] Floret K., On bounded sets in inductive limits of normed spaces, *Proc. Am. Math. Soc.,* 75(2), 1979, 221–225.

[27] Gabor D., Theory of Communication, Part 1, *J. Inst. of Elect. Eng. Part III, Radio and Communication*, 93, 1946, 429–441.

[28] Giv H.H., Directional short-time Fourier transform, *J. Math. Anal. Appl.*, 399, 2013, 100–107.

[29] Grafakos L., Sansing C., Gabor frames and directional time-frequency analysis, *Appl. Comp. Harm. Anal.*, 25, 2008, 47–67.

[30] Gröchenig K., Describing functions: Atomic decomposition versus frames, *Monatsh Math.*, 112(1), 1991, 1–42.

[31] Gröchenig K., *Foundations of time-frequency analysis.* Boston (MA): App. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser, 2001.

[32] Gröchenig K., Localization of frames, Banach frames, and the invertibility of the Frame Operator, *J. Fourier Anal. Appl.*, 10(2), 2004, 105–132.

[33] Grubb G., *Distrubutions and Operators*, New York: Springer-Verlag, 2009.

[34] Guo Q., Molahajloo S., Wong M.W., Modified Stockwell transforms and time-frequency analysis, *New Developments in Pseudo-Differential Operators, Operator Theory: Advances and Applications*, 189, 2009, 275–285.

[35] Helgason S., *The Radon Transform*, second ed., Boston: Birkhäuser, 1999.

[36] Holschneider M., *Wavelets. An analysis tool*, New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1995.

[37] Hormann G., Steibauer R., Theory of distributions (Lecture notes), University of Wien, 2009.

[38] Kantorovich L.V., Akilov G.P., *Functional Analysis in Normed Spaces,* Pergamon Press, 1964.

[39] Karamata J., Sur une mode de croissance régulier des fonctions, *Mathematica, Cluj*, 4, 1930, 38–53.

[40] Kadelburg Z., Marjanovic M.M., Interchanging two limits, The teaching of mathematics, Vol. VIII(1), 2005.

[41] Katznelson Y., *An introduction to harmonic analysis*, New York: John Wiley and Sons, 1968.

[42] Korevaar J., *Tauberian Theory*, Berlin: A Century of developments, Springer-Verlag, 2004.

[43] Kostadinova S., Pilipović S., Saneva K., Vindas J., The ridgelet transform of distributions, *Integr. Transf. Spec. F.*, 25(25), 2014, 344–358.

[44] Kostadinova S., Pilipović S., Saneva K., Vindas J., The ridgelet transform and quasiasymptotic behaviour of distributions, *Oper. Theory Adv. Appl.*, 245, 2015, 183–195.

[45] Kostadinova S., Pilipović S., Saneva K., Vindas J., The short-time Fourier transform of distributions of exponential type and Tauberian theorems for shift-asymptotics, *Filomat*, 30(11), 2016, 3047–3061.

[46] Kostadinova S., Saneva K., Vindas J., Gabor frames and asymptotic behavior of Schwartz distributions, *Appl. Anal. Discrete Math.*, 10(2), 2016, 292–307.

[47] Kostadinova S., Vindas J., Multiresolution Expansions of Distributions: Pointwise Convergence and Quasiasymptotic Behavior, *Acta Appl. Math.*, 138(1), 2015, 115–134.

[48] Kothe G., *Topological Vector Space I*, New York: Springer-Verlang, 1969.

[49] Kurepa S., *Funkcionalna analiza-Elementi teorije operatora*, Zagreb, 1990.

[50] Landau P., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin: Drück und Verlag von B.G. Teubner, 1909.

[51] Lipschutz S., *Theory and problems of General Topology*, New York: Schaum Publishing Co., 1965.

[52] Lojasiewicz S., Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point, *Studia Math.*, 16, 1957, 1–36.

[53] Lojasiewicz S., Sur la fixation des variables dans une distribution, *Studia Math.*, 17, 1958, 1–64.

[54] Meise R., Vogt D., *Introduction to Functional Analysis*, Oxvord: Claredon press, 1997.

[55] Meyer Y., *Wavelets*, Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and applied Mathematics (SIAM), 1993.

[56] Pilipović S., On the quasiasymptotic of Schwartz distributions, *Math. Nachr.*, 137, 1988, 19–25.

[57] Pilipović S., Quasiasymptotics and S-asymptotics in $\mathcal{S}'$ and $\mathcal{D}'$, Part 2, *Publ. de l' Inst. Math.*, 58(72), 1995, 13–20.

[58] Pilipović S., Quasiasymptotic Expansion and the Laplace Transformation, *Appl. Anal.,* 35, 1996, 243–261.

[59] Pilipović S., Stanković B., S-asymptotic of a distribution, *Pliska Stud. Math. Bulgar.*, 10, 1989, 147–156.

[60] Pilipović S., Stanković B., Structural theorems for the S-asymptotic and quasiasymptotic of distributions, *Math. Pannon.*, 4, 1993, 23–35.

[61] Pilipović S., Stanković B., Wiener Tauberian theorems for distributions, *J. London Math. Soc.,* 47(2), 1993, 507–515.

[62] Pilipović S., Stanković B., *Prostori distribucija*, Novi Sad: Srpska akademija nauka i umetnosti, 2000.

[63] Pilipović S., Stanković B., Takaci A., *Asymptotic Behaviour and Stieltjes Transformation of Distribution*, Liebzig: Taubner-Texte zur Mathematik-Band, 1990.

[64] Pilipović S., Vindas J., Multidimensional Tauberian theorems for vector valued distributions, *Publ. Inst. Math.* (*Beograd*), 95(109), 2014, 1–28.

[65] Pilipović S., Stanković B., Vindas J., *Asymptotic behavior of generalized functions*, Series on Analysis, Applications and Computation, New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, 2012.

[66] Pilipović S., Stoeva D., Series expansions in Fréchet spaces and their duals, construction of Fréchet frames, *J. Approx. Theory*, 163, 2011, 1729–1747.

[67] Pilipović S., Stoeva D., Fréchet frames, general definition and expanions, *Anal. Appl.*, 12(2), 2014, 195–208.

[68] Pilipović S., Stoeva D., Frame expansions of test functions, tempered distributions, and ultradistributions, In: *Analysis, Probability, Applications, and Computation, Trends in Mathematics,* Lindahl K., Lindstrom T., Rodino L.G., et al., editors. Basel: Birkhäuser, 2019.

[69] Pilipović S., Stoeva D., Teofanov N., Frames for Fréchet spaces, *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math*, 32, 2007, 69–84.

[70] Pilipović S., Takaci A., Teofanov N., Wavelets and quasiasymptotics at a point, *J. Approx. Theory*, 97, 1999, 40–52.

[71] Pilipović S., Teofanov N., Multiresolution expansion, approximation order and quasiasymptotic behavior of tempered distributions, *J. Math. Anal. Appl.*, 331, 2007, 455–471.

[72] Rakic D., Malotalasna transformacija u prostorima distribucija i ultradistribucija i teoreme Abelovog i Tauberovog tipa [PhD Disertation]. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, 2010.

[73] Reed M., Simon B., *Methods of modem mathematical physics*, second ed., New York: I. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1980.

[74] Riba L., Multi-Dimensional Stockwell Transforms and Applications [PhD Dissertation]. Torino: Universitá degli Studii di Torino, 2014.

[75] Rudin W., *Principles of mathematical analysis*, United States of America: McGraw-Hill Education, 1976.

[76] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, New York: McGraw-Hill, 1986.

[77] Saneva K., Asymptotic behaviour of wavelet coeficients, *Integr. Transf. Spec. F.*, 20 (3-4), 2009, 333–339.

[78] Saneva K., Application of the quasiasymptotic boundednes of distributions on wavelet transform, *Public. De 'Institut mathematique, Nuovelle serie*, 86(100), 2009, 115–122.

[79] Saneva K., Aceska R., Kostadinova S., Asymptotic behavior of distributions and the short-time Fourier transform, *Analele Universitatii Eftimie Mugru Resita*, XVIII(2), 2011, 13–24.

[80] Saneva K., Aceska R., Kostadinova S., Some Abelian and Tauberian results for the short-time Fourier transform, *Novi Sad J. Math.*, 43, 2013, 81–89.

[81] Saneva K., Atanasova S., Directional short-time Fourier transform of distributions, *J. Inequal. Appl.*, 124 (1), 2016, 1–10.

[82] Saneva H-V.K., Atanasova S., Buralieva V.J., Tauberian theorems for the Stockwell transform of Lizorkin distributions, *Appl. Anal.,*2018. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1506104.

[83] Saneva K., Buckovska A., Asymptotic behaviour of the distributional wavelet transform at 0, *Math. Balkanica* (*N.S.*), 18, 2004, 437–441.

[84] Saneva K., Buckovska A., Asymptotic expansion of distributional wavelet transform, *Integr. Transf. Spec. F.*, 17, 2006, 85–91.

[85] Saneva K., Buckovska A., Tauberian theorems for distributional wavelet transform, *Integr. Transf. Spec. F.*, 18, 2007, 359–368.

[86] Saneva K., Vindas J., Wavelet expansions and asymptotic behavior of distributions, *J. Math Anal. Appl.* 370, 2010, 543–554.

[87] Schwartz L., *Theory des Distributions*, Paris: I., second ed. Hermann, 1957.

[88] Seneta E., *Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Mathematics*, Berlin: Springer Verlag, 1976.

[89] Stockwell R.G., Mansinha L., Lowe R.P., Localization of the complex sectrum: the S transform, *IEEE Trans. Signal Process.*, 44, 1996, 998–1001.

[90] Stockwell R.G. Why use the S transform?, *Pseudo-Dfferential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis*, 52, 2007, 279–309.

[91] Treves F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, New York: Academic press, 1967.

[92] Vernaeve H., Vindas J., Weiermann A., Asymptotic distribution of integers with certain prime factorizations, *J. Number Theory*, 136, 2014, 87–99.

[93] Vindas J., Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at Infinity, *Pub. Inst. Math. Beograd, N.S.*, 84(98), 2008, 159–174.

[94] Vindas J., Local behavior of distributions and applications, [Ph. D. thesis], Louisiana State University, Baton Rouge, 2009.

[95] Vindas J., On the relation between Lebesgue summability and some other summation methods, *J. Math Anal. Appl.*, 411, 2014, 75–82.

[96] Vindas J., Estrada R., Distributional point values and convergence of Fourier series and integrals, *J. Fourier Anal. Appl.*, 13, 2007, 551–576.

[97] Vindas J., Estrada R., On the support of tempered distributions, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 53(2), 2010, 255–270.

[98] Vindas J., Prilipović S., Structural theorems for quasiasymptotics of distributions at the origin, *Math. Nachr.*, 282, 2009, 1584–1599.

[99] Vindas J., Prilipović S., Rakic D., Tauberian theorems for the wavelet transform, *J. Fourier Anal. Appl.*, 17, 2011, 65–95.

[100] Vladimirov V.S., Drozhinov Yu.N., Zavialov B.I., *Tauberian theorems for generalized functions*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1988.

[101] Vogt D., Lectures on Fréchet spaces, Bergische Universitat Wuppertal Sommersemester 2000.

[102] Wong M.W., Zhu H., A characterization of Stockwell spectra, *Modern Trends in Pseudo-Differential Operators,* Birkhäuser, 2007, 251–257.

[103] Zavialov B.I., Asymptotic properties of functions that are holomorphic in tubular cones, *Mat. Sb.* (*N.S.*), 136(178), 1988, 97–114.

[104] Шекутковски Н., *Топологија*, Природно-математички факултет, Скопје, 2002.