МАТЕМАТИЧКИ ОМНИБУС, 6 (2019), 67 – 83
http://im-pmf.weebly.com/matematicki-omnibus-kniga-6.html

ПОИМОТ ФУНКЦИЈА ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

Лимонка Коцева Лазарова [1]

Марија Митева [1]

1. ВОВЕД

Математиката како посебно значајна наука е основна алатка за истражување не само во природните и техничките, туку и во општествените науки. Анализирањето или моделирањето на која било појава или објект што е предмет на истражување е невозможно да се направи без примена на математиката. Основни и понапредни математички операции и постапки овозможуваат истражувања во кои се утврдуваат зависности помеѓу различни природни или општествени појави, се обезбедуваат соодветни математички модели и се предвидуваат исходи на истражувани појави (количина на производство, приход, раст итн.). Во сите тие примени на математиката во останатите науки еден од најчесто користените математички поими е поимот функција. На пример, климатолозите користат функции со една променлива, во кои на секоја година одговара соодветна средна годишна температура од таа година; сметководителите користат функции со една променлива такви што на одредена година ѝ одговара приход што се очекува да се добие под услови на одредена даночна политика; а можат да се најдат и голем број други примери.

Повеќе од 20 години речиси во сите земји во светот, поимот функција, се обработува како задолжителна тема во наставните програми по математика, [9]. И покрај тоа што како тема е присутна уште во основното образование, сепак учениците во основното и понатаму во средното образование се соочуваат со пречки при разбирањето на овој значаен математички поим, [8].

Методиката на изучувањето на поимот функција е тема којашто многу често била и сѐ уште е предмет на истражување. Во [11] е покажано дека менталните слики на учениците за поимот функција се разликуваат од прецизните математички дефиниции. Други истражувања покажуваат дека учениците се многу ограничени во поглед на разбирањето на математичкиот поим функција. Така, во [1] и во [12], е покажано дека за учениците имаат потешкотии и не можат да размислуваат на различни функции чиј график минува низ ист пар точки. Врз основа на моделот разработен во [3], во [4] е покажано дека многу од учениците кои биле дел од истражувањето, се задржувале на поимот функција како правило и тој пристап ги оневозможувал да имаат објективна слика во разбирањето на одредени операции со функции, како што е композиција на функции. Во [7] и во [10] авторите укажале на тоа дека е потребно развивање на способноста на учениците за концептуално разбирање на поимот функција и дека за тоа е потребно подолго време.

Во [3], авторот истражува дали проблемите во разбирањето на поимот функција настануваат поради недоволна посветеност на учениците или, пак, неразбирањето на поимот функција е поврзано со несоодветен пристап во наставата од страна на наставниците. Во [8] е покажано дека задачите коишто се поврзани со поимот функција, најчесто им се поставувани на учениците како задачи во кои учениците добиваат насоки да користат стандардни постапки или шеми на решавање. Во тој поглед, учениците најчесто се прашувани да определат или утврдат одредени својства на функцијата (нули на функцијата, монотоност, дефинициона област, парност на функцијата, итн.) од нејзиниот график преку специфични постапки.

При едно истражување кое било направено од авторите на трудот [11] за тоа како студентите го разбираат поимот функција биле добиени различни одговори. Голем дел од студентите го дефинирале поимот функција како:

– *Кореспонденција*

Функција е кореспонденција помеѓу кои било две множества A и B. За секој елемент од A постои единствен елемент од B.

– *Зависна релација*

Функцијата е релација на зависност помеѓу две променливи.

– *Правило*

Функцијата е правило. Се очекува дека функцијата мора да е дефинирана со одредено правило, коешто не се дефинира со кореспонденцијата, а која може да биде случајна.

– *Операција*

Функцијата е операција. Се оперира со одреден објект, за со користење на алгебарски операции да се добие друг објект.

– *Формула*

Функцијата е формула, алгебарски израз или равенство.

Функциите имаат различни „лица“ и за учениците да се оспособат да ги препознаваат овие „лица“ како еден ист математички поим е навистина голем педагошки предизвик за наставниците по математика.

2. КАКОВ ТРЕБА ДА БИДЕ ПРИСТАПОТ ПРИ ИЗУЧУВАЊЕТО НА ПОИМОТ ФУНКЦИЈА?

Во пониските одделенија од основното образование, функциите имаат операционен карактер и најчесто се гледаат како машини, влез-излез, коишто влезните единици ги процесираат во излезни единици. Затоа, во овој период од основното образование треба да обезбедиме создавање и развивање на интуитивна претстава за поимот функција. Ова би можело да се реализира на повеќе начини:

– преку игра;

– преку реални проблемски ситуации;

– со помош на визуелизација;

– со креирање математички модели.

Во периодот од прво до четврто одделение од основното образование, потребно е „интуитивната претстава“ за поимот функција на учениците да им се обезбеди полека, неосетно преку начин којшто учениците од таа возраст најлесно го прифаќаат, а тоа е играта. Функциите би можеле да им се воведат преку листа на влезови и излези (Игра: Погоди го моето правило). Со ваква игра на учениците им се даваат влезни вредности, една по една, како што е покажано на слика 1. Со секој дополнителен влез, на учениците им се поставува барање да најдат правило кое ќе ја трансформира секоја вредност од колоната влез во соодветна вредност во колоната излез.

Влез	Излез
1	2

Влез	Излез
1	2
3	6

Влез	Излез
1	2
3	6
12	24

Слика 1. Игра „Погоди го моето правило“, [2], стр.320.

На учениците поимот функција може да им се објасни како машина во која со внес (input) на одредена суровина се добива одреден производ (output).

Слика 2. Машина влез-излез.

Доколку на овој начин им се објаснува поимот функција:

– Суровината ќе се поврзе со независна променлива *x* (само една суровина доколку се работи за функција со една променлива).
– Работата на машината е функцијата *f*.
– Производот кој се добива од машината е зависната променлива $y = f(x)$.

Оваа активност во која учениците можат да ги разгледуваат функциите како „машини“ кои обезбедуваат специфичен излез за даден влез, [5], би можела да биде дадена подоцна. На пример, задачата дадена на Слика 3, е задача од делот за изучување на функции за ученици од трето одделение.

Слика 3. Задача за трето одделение, [5], стр. 251.

Можат да се искористат голем број на практични примери кои им се секојдневно блиски на учениците. Едно такво практично објаснување е дадено во следниот пример даден во [12]:

Пример 1. Еден апарат работи на патрони. Ако се стави црн патрон прави кафе, ако се стави зелен патрон прави чај, а ако се стави кафеав патрон прави какао.

Множество влезови (влезни променливи) е {ц, з, к} каде што:
ц – црн патрон,

з – зелен патрон,

к – кафеав патрон

Множество излези (излезни променливи) е {кафе, чај, какао}.

Процесот на правење кафе, чај и какао е функција со една променлива.

$$f(\text{ц}) = \text{кафе}$$

$$f(\text{з}) = \text{чај}$$

$$f(\text{к}) = \text{какао}$$

Во овој пример правилното работење на машината би можеле да го поврземе со тоа дека функцијата е добро дефинирана, т.е. дека на една влезна променлива и соодветствува само една излезна променлива!

Во повисоките одделенија функциите се разгледуваат како структури со различни својства, [6]. Тие станувaат математички објекти што можат да бидат претставени на различни начини, класифицирани се според нивните својства и се подложни на процеси од повисок ред, како диференцирање и интегрирање. Преминот од користење на функциите како „пресметковни операции“, во функции како фундаментален поим е особено специфичен и значаен. Овој премин треба да се направи постепено за да се избегнат пречките и да се надминат проблемите со кои учениците се соочуваат кога пристапот во изучувањето на поимот функција се менува од „интуитивна претстава“ во апстракција.

Токму поради ова, ќе се задржиме на неколку начини на кои може да им се објасни поимот функција на учениците, како еден од најзначајните математички поими, за понатаму да се избегнат нејаснотиите, двоумењата и пречките кои се јавуваат во разбирањето и користењето на понапредни математички поими и постапки за кои поимот функција е неопходен.

Поимот функција во повисоките години од основното образование се воведува со строг математички запис на линеарна функција и веднаш потоа се поврзува со поимот права. Токму поради тоа, многу често учениците ги поистоветуваат поимите за функција и права.

Воведувањето на поимот функција не би требало веднаш да биде преку строгиот математички запис и линеарна функција, туку најпрво како однос на две зависни величини. На учениците од повисоките одделенија, воопшто нема да им биде тешко да разберат однос помеѓу две величини, при што едната величина зависи од другата величина.

Многу лесно наставниците можат да се најдат голем број на примери кои на ученикот ќе му бидат блиски и ќе му го олеснат сфаќањето на поимот функција.

Во период од основното образование, наместо да се премине директно на апстрактен математички запис на линеарна функција, со што поголемиот дел од просечни ученици ќе се соочат со проблеми, многу е подобро „интуитивно" да им се објаснат преку некои секојдневни примери.

Се возиме со константна брзина, должината на изминатиот пат зависи од времетраењето на возењето; волуменот на коцката зависи од должината на нејзиниот раб; плоштината на квадратот зависи од големината на неговата страна; вкупната цена на купената стока зависи од количината на купена стока; времето потребно да се заврши некоја работа зависи од бројот на работници кои ја завршуваат таа работа, итн.

Тоа е интуитивен пристап во изучувањето на поимот функција со кој постепено се преминува на поимот придружување. Добро би било, доколку учениците сами го воочат правилото за придружување, да го запишаат и сами да пресметаат за неколку зададени вредности.

Но, исто така треба да се истакне дека постојат и величини на кои не им се придружуваат величини по однапред зададено правило, како што се претходно споменатите примери. Така на пример, на секоја држава може да и се придружи по еден главен град, на секој човек може да му се придружи неговата возраст, на секој ученик може да му се придружи неговата оценка по математика итн.

Многу е значајно, наставниците да им даваат различни примери на своите ученици и притоа со примерите да опфатат и такви случаи кај кои на различни независни променливи им се придружува една иста зависна променлива. Така на пример: различни луѓе можат да имаат иста маса, повеќе ученици можат да имаат иста оценка по математика итн. Исто така, многу е важно наставниците да даваат и примери каде што со зададеното правило не се дефинира функција. Во таа смисла, ќе разгледаме неколку примери во следната точка.

Учениците треба да се охрабруваат и сами да смислуваат примери за функции кои ќе бидат дефинирани на двата начини: според одредено правило или без правило (со описно задавање на некој однос).

3. ШТО Е РЕЛАЦИЈА, А ШТО ФУНКЦИЈА?

Кога ќе се спомне однос на две величини наставникот би требало внимателно да се задржи и детално да им објасни на учениците дека постои разлика помеѓу поимот релација и поимот функција, односно пресликување.

За поимот релација во основно образование е невозможно да се даде прецизна математичка дефиниција, но интуитивно може да им се објасни дека релација е врска или однос помеѓу елементите од едно исто множество или елементите од две различни множества.

Од друга страна, поимот функција, односно пресликување, би можел да се објасни и како релација којашто „се однесува добро“, т.е. даден елемент од едно множество A е поврзан (или е во релација со) само еден, т.е. со единствен елемент од друго множество B. (Притоа, множествата A и B може и да се еднакви меѓусебе).

Овие два различни поими на учениците би можеле многу лесно да им се објаснат и да се направи разлика помеѓу нив, преку следниот пример.

Пример 2. На улицата пред зградата, пет дечиња: Петар, Стефан, Давид, Клара и Ива си играат игра во која ја мерат и запишуваат својата висина во cm. Потоа прават подредени парови формирани од нивните имиња и соодветната висина. Подредените парови ги запишале на два начини:

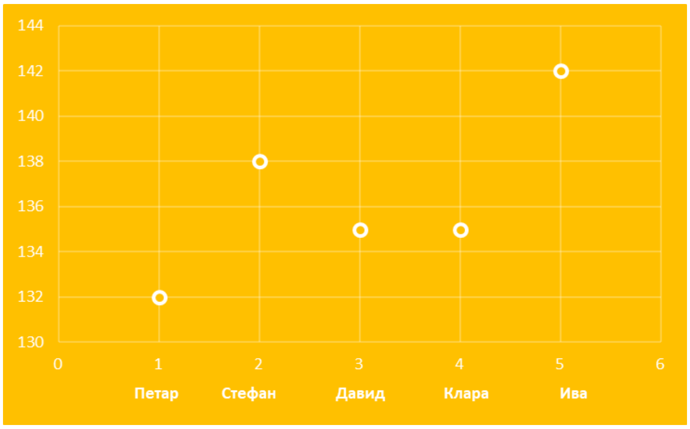
(висина, име на дете) и (име на дете, висина).

Ја направиле следната табела:

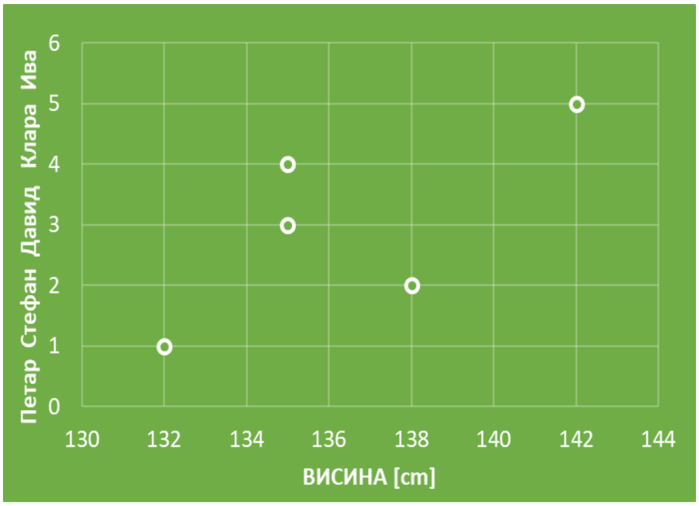
Име	Висина [cm]
Петар = 1	132
Стефан = 2	138
Давид = 3	135
Клара = 4	135
Ива = 5	142

Табела 1. Табела со имиња на децата и нивната висина [cm].

Подредените парови (име на дете, висина) и (висина, име на дете) ги претставиле како точки на слика 4 и слика 5, соодветно.



Слика 4. Графичко претставување на подредените парови (име, висина).



Слика 5. Графичко претставување на подредените парови (висина,име).

На двете слики се претставени релации. Но, точките во координатната рамнина на подредените парови (висина, име) покажуваат дека имаме релација којашто „не се однесува добро“. Што значи изразот „релацијата не се однесува добро“? Учениците треба да се оспособат да ги разликуваат релациите што се однесуваат „добро“ и релациите што „не се однесуваат добро“. Наставникот треба да им објасни дека не може една функција да се смета како релација со „добро“ однесување, ако на еден елемент да му се придружуваат повеќе различни елементи, како што имаме во конкретниот пример.

– Може да има повеќе луѓе коишто имаат иста висина.

– Како ќе знаеме тогаш, таа висина на кое име да ја придружиме?

За една релација меѓу елементите во едно множество или меѓу елементите од две различни множества да биде *функција*, треба да има *само една вредност y која одговара на одредена вредност x*.

Освен тоа што примерот може да помогне во дефинирањето на поимот функција, исто така може да се искористи за објаснување и на други помошни поими поврзани со функцијата како што се: домен, кодомен, множество вредности, итн.

Во конкретниот пример:

Домен = {Петар, Стефан, Давид, Клара, Ива},

Множество вредности = {132, 135, 138, 142} ⊆

⊆ Множеството позитивни реални броеви = Кодомен.

На учениците би требало најправо интуитивно, а потоа и строго математички да им се објаснат овие поими, кои се тесно поврзани со поимот функција и кои детално го објаснуваат.

Множеството вредности на функцијата е множество слики или множество од елементи на кои се придружуваат (пресликуваат) оригиналите. Множеството вредности е секогаш подмножество од кодоменот на функцијата.

Следниот пример даден во [12] е уште еден пример од секојдневието, што може да им помогне на учениците правилно да го разберат поимот функција.

Пример 3. Еден поголем маркет во својата работа вовел достава на производи до дома. На четиричленото семејство Петровски работникот од маркетот ја направил следната достава: сирење, јогурт, колбаси, портокали, јаболка, малини, сок, пиво, чипс, чоколадо, бисквити и кикиритки. По краток договор меѓу членовите од семејството, производите биле распределени на следниот начин.

$$f(\text{сирење}) = \text{мајка}$$
$$f(\text{јогурт}) = \text{ќерка}$$
$$f(\text{колбаси}) = \text{татко}$$
$$f(\text{портокали}) = \text{татко}$$
$$f(\text{јаболка}) = \text{син}$$
$$f(\text{малини}) = \text{син}$$
$$f(\text{сок}) = \text{ќерка}$$
$$f(\text{пиво}) = \text{мајка}$$
$$f(\text{чипс}) = \text{татко}$$
$$f(\text{чоколадо}) = \text{татко}$$
$$f(\text{бисквити}) = \text{ќерка}$$
$$f(\text{кикиритки}) = \text{син}\,,$$

т.е. секој од доставените прехрамбени продукти бил доделен на одреден член од семејството. Во овој пример може да се поставaт прашањата:

– Дали фунцијата би можела да се дефинира обратно (од множеството членови на семејството во множеството одбрани продукти)?

– Дали може на член од семејството да му се придружи прехрамбен продукт?

Одговорот е негативен бидејќи во тој случај функцијата нема да биде добро дефинирана, т.е. ист оригинал ќе има две различни слики:

$$g(\text{мајка}) = \text{сирење},$$
$$g(\text{мајка}) = \text{пиво}.$$

Овој пример би можел да се искористи и во повисоките одделенија од основното образование кога се дефинира и поимот на инверзна функција.

Овој пример е погоден за објаснување на поимите множество вредности и кодомен. Преку примерот учениците можат да сфатат дека кодоменот може да се проширува, но доколку доменот остане ист и правилото на придружување остане исто, останува почетно дефинираната фунција.

Наставникот може да го постави прашањето:

– Што ако како член на семејството е и бабата?

Продуктите остануваат исти. Распределбата на продуктите е иста. Множество влезови (*домен*) е множеството од доставени прехрамбени продукти: {сирење, јогурт, колбаси, портокали, јаболки, малини, сок, пиво, чипс, чоколадо, бисквити и кикиритки}, множество излези е *множеството вредности*: {мајка, татко, син, ќерка}, додека *кодомен* е множеството: {мајка, татко, син, ќерка, баба}. Очигледно е дека множество излези е подмножество од кодоменот.

Претходно разработените примери јасно покажуваат дека:

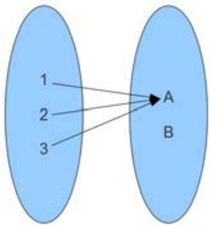
– *Секоја функција е релација.*

– *Не секоја релација е функција.*

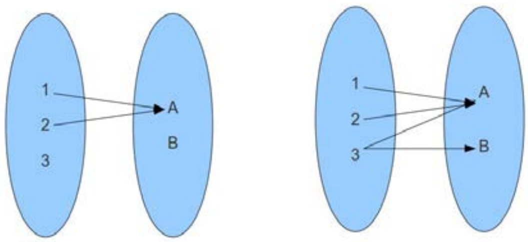
Слични примери во кои јасно се гледа разликата меѓу релација и функција се дадени и во учебниците [13] и [14]. Но, исто така оваа интуитивна претстава за функциите сега лесно може да премине во математичка дефиниција, која учениците лесно ќе можат сами да ја формулираат.

Дефиниција 1. Нека X и Y се две непразни множества. *Функција од* X *во* Y е релација која на секој елемент од X му придружува точно еден елемент од Y.

При објаснувањето на поимот функција преку поимот релација од голема помош на учениците им е визуелното претставување. Од Слика та 6 ученикот многу лесно може да утврди во кој случај е дефинирана функција, а кога не е дефинирана функција. Користејќи ја дефиницијата за поимот функција, на ученикот може да му се укаже дека само во првиот случај е дефинирана функција, но не и во вториот случај (на оригиналот 3 не му е придружена слика, и, A и B се слики на оригиналот 3).



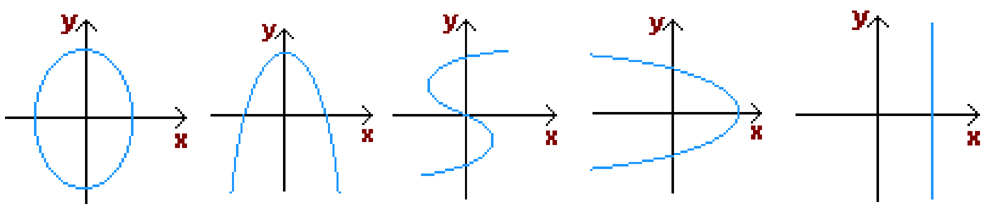
Слика 6. I. Релација што е функција.



Слика 6. II. Релации што не се функции.

На учениците од средно училиште, преку визуелни примери може да им се објасни на кој начин можат да утврдат дали дадено множеството точки од рамнината е график на функција или пак не. Наставникот уште во основно образование може да им го објасни таканаречениот тест со вертикална права, според кој:

Множество точки од xy-рамнината е график на функција $y = f(x)$, ако и само ако секоја вертикална права го сече графикот најмногу во една точка.



Слика 7. Втората слика е график на функција, но првата, третата, четвртата и петтата слика не претставуваат график на функција.

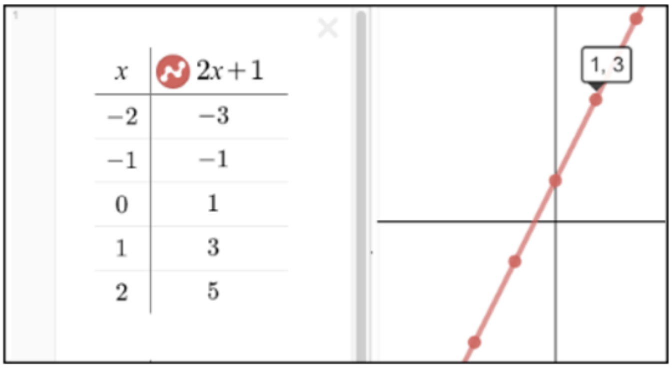
На учениците од пониските одделенија за претставување на функциите наставниците би требало да користат начини кои им се блиски на учениците од таа возраст:

– Вербално претставување со зборови.

– Нумеричко претставување, т.е. со табела.

Веќе во повисоките одделенија од основното образование, претставувањето постепено би требало да премине во:

– Визуелно, т.е. со график – множества точки (подредени парови) од координатната рамнина.



Слика 8. График на линеарната функција $y = 2x + 1$.

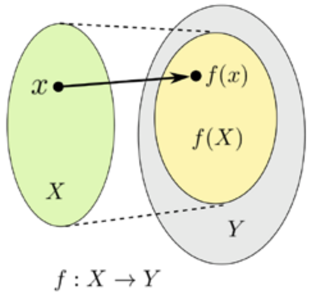
– Алгебарски, т.е. со експлицитна формула – формула со која треба да се одреди вредноста на зависната променлива y за дадена вредност на x, како на пр., на Слика 8, $y = 2x + 1$.

Веќе во повисоките одделенија од основното образование кога учениците ќе започнат да користат и построг математички запис на функциите, поимите на домен и кодомен на функција би можеле да се објаснат попрецизно:

Да претпоставиме дека е дадена функција f од X во Y. На секој елемент x од X му е придружен точно еден елемент $y = f(x)$ во Y. Овој елемент $y = f(x)$ во Y го викаме *слика* на оригиналот x.

Домен на функцијата е множеството X. Тоа е множество од сите можни вредности на x за кои вредноста на функцијата е еднозначно определена.

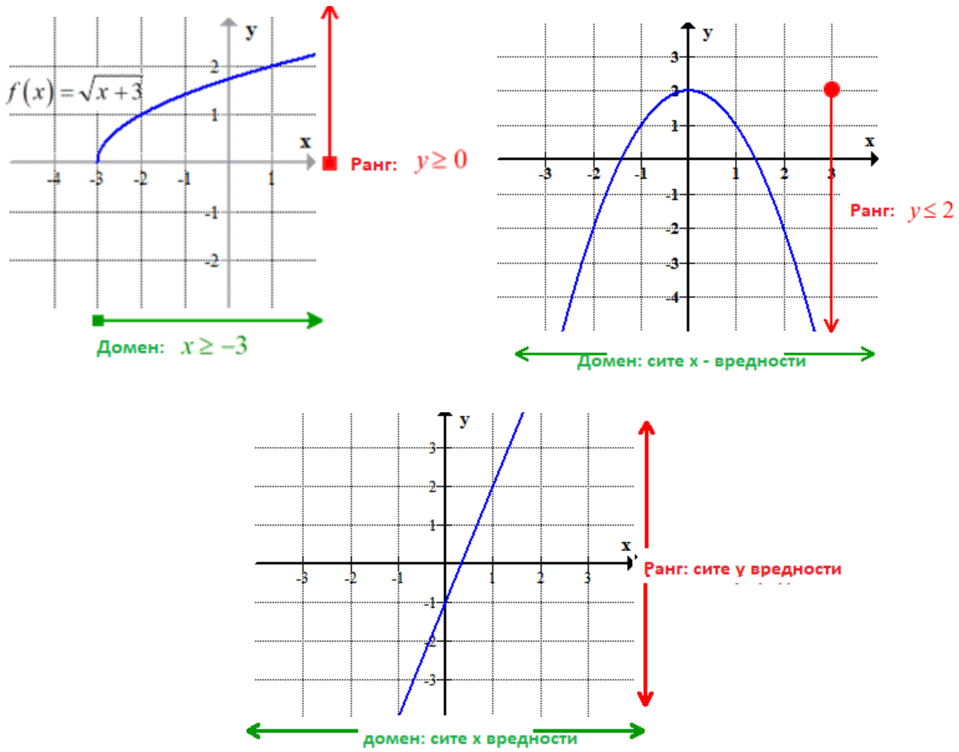
Ранг на функција (*множество вредности*) е множеството од сите слики на оригиналите од доменот.



Слика 9. Графичко претставување на домен, кодомен и множество вредности на функцијата $y = f(x)$.

Од сликата може убаво да се види дека множеството вредности на функцијата (жолтиот Венов дијаграм) е подмножество од кодоменот на функцијата (сивиот Венов дијаграм). Домен на функцијата е зелениот Венов дијаграм.

На следната слика имаме неколку графици на функции на кои е покажано како учениците од графикот на функцијата можат да утврдат што е домен, а што множество вредности на функцијата.



Слика 9. Графици на функции со соодветно означен домен и множество вредности на функцијата.

Наставникот треба да посвети внимание и преку повеќе примери да им укаже на учениците дека доменот на функцијата го читаат на x-оската, а кодоменот на y-оската. Овој начин на читање од графикот на дадена функција е од особено значење, бидејќи на овој начин учениците ќе се оспособат за толкување на графици на функции и во други наставни предмети, како физика, хемија, биологија итн.

Следниот пример е пример со кој учениците се среќаваат многу често, уште од почетните одделенија од основното образование. Исто така, ова е добар пример и насока за наставниците во поглед на тоа кои букви ќе ги користат за означувањето на функциите во експлицитен облик. Имено, имајќи предвид дека учениците многу често меморираат формули и постапки, добро би било наставникот не секогаш да користи ознака x за независна променлива и ознака y за зависна променлива. На овој начин учениците ќе се научат да препознаваат функции и во физиката и во хемијата. Многу често учениците знаат да нацртаат график на линеарна функција на час по математика, а не знаат да нацртаат график на линеарна функција на изминат пат во зависност од времето, кога се работи за рамномерно праволиниско движење, на час по физика.

Пример 4. Изучување квадратна функција.

Знаејќи ја формулата за пресметување плоштина на круг, можеме да дефинираме функција во која независна променлива е радиусот r на кругот, а зависна променлива е плоштината на кругот $A(r)$:

$$A(r) = \pi r^2$$

Прашањата кои би можеле да се поставаат на учениците во врска со овој пример се:

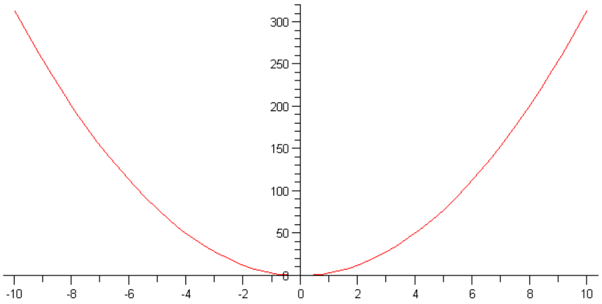
– Каква е оваа функција?

Учениците би требало да забележат дека функцијата е квадратна.

Доколку наставникот побара од учениците да го нацртаат графикот на функцијата, тогаш во најголемиот број случаи учениците ќе нацртаат график како на Слика 10.

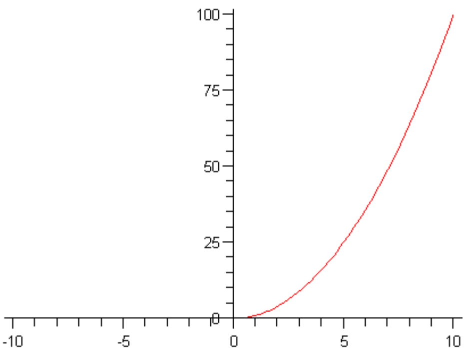
Понатаму би можел да им постави дополнителни прашања од типот:

1. Дали ова е правилно цртање на графикот на функцијата за плоштина на круг?
2. Дали доменот што може да се прочита од графикот е точен?



Слика 10. График на функцијата $A(r) = \pi r^2$.

Дел од учениците сигурно ќе забележат дека не е точен бидејќи радиусот на кругот не може да биде негативен или еднаков на 0. Кругот не може да има плоштина еднаква на 0. Доменот на функцијата мора да се состои од само позитивни броеви, $(0,\infty)$. Кодоменот повторно е истиот интервал $(0,\infty)$. Оттука учениците треба да заклучат дека графикот на фунцијата изгледа како на Слика 11.



Слика 11. График на функцијата $A(r) = \pi r^2$ која се однесува на пресметување на плоштина на круг.

Се надеваме дека преку овие примери за изучување на поимот функција во основното образование ќе бидат од голема корист и за наставниците и за учениците. Целта е да се покаже дека поимот функција не е апстрактен математички поим кој е тешко разбирлив, туку напротив, тој е многу практичен и применлив во секојдневниот живот. Кога на учениците ќе им се покаже дека тоа што го изучуваат се применува во секојдневието и во другите науки и дека е неопходно за нивно усовршување, тие ќе сакаат да го совладаат. Изучувањето на математичките поими преку задачи од реалноста и практични примери остава потрајни знаења кои секогаш се применуваат правилно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Bloch, *Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?*, Educational Studies in Mathematics, 52 (1), (2003) 3 – 28.

[2] D. Huinker, *Calculators as Learning Tools for Young Children's Explorations of Number*, Teaching Children Mathematics 8 (February), (2002) 316 – 321.

[3] C. Kieran, *The learning and teaching of school algebra.* In A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics New York, NY, England: Macmillan Publishing Co. (1992) 390 – 419.

[4] D. Meel, *Honors students' calculus understandings: Comparing Calculus&Mathematica and traditional calculus students*, In Shoenfeld, A., J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education 7: Research in Collegiate Mathematics Education III, (1998) 163 – 215.

[5] C. Reeves, *Putting Fun into Functions*, Teaching Children Mathematics *12* (December 2005/January 2006) 250 – 259.

[6] A. Sfard, *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22, (1991) 1 – 36.

[7] A. Sierpinska, *On understanding the notion of function*. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 25,* 23 – 58. Education, *5*, (1992) 533–556.

[8] M. Skaja, *A secondary school students' understanding of the concept of function – a case study*, Educational Studies in Mathematics, 53, (2003) 229–254.

[9] M. Steele, A. Hillen, & M. Smith, *Developing mathematical knowledge for teaching in a methods course: the case of function*, Journal of Mathematics Teacher Education, 16, (2013) 451 – 482.

[10] M. C. Oehrtman, M. P. Carlson, P. W. Thompson, *Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function,* In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics Washington DC: Mathematical Association of America. (2008) 27–42.

[11] S. Vinner, T. Dreyfuss, *Images and definitions for the concept of function,* Journal for Research in Mathematics Education, 20 (4), (1989) 356–366.

[12] V. Zupanovic, K.Soric, *Prirucnik Primijenjena Matematika Podrzana Racunalom,* STEM Genijalci, Diozit doo, Gimnazija Matija Mesić, Slavonski Brod, 2016.

[13] Б. Јанева, *Вовед во теоријата на множествата и математичката логика*, Скопје, 1996.

[14] Ѓ. Чупона, *Алгебарски структури и реални броеви*, Просветно дело, Скопје, 1976.

[1] Факултет за информатика, Универзитет „Гоце Делчев"
ул. Крсте Мисирков бр.10-А, 2000 Штип, Р. Македонија
e-mail: limonka.lazarova@ugd.edu.mk
marija.miteva@ugd.edu.mk

Примен: 1.02.2019
Поправен: 19.03.2019
Одобрен: 25.03.2019
Објавен на интернет: 28.03.2019