УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ ШТИП

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

насока Математика

Штип

Билјана Јованова

НЕКОИ ВРСКИ МЕЃУ МАТЕМАТИКА И МУЗИКА ПРЕНЕСЕНИ ПРЕКУ МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА НА ФРАГМЕНТИ ОД МУЗИЧКИ ДЕЛА

МАГИСТЕРСКИ ТРУД

Штип, декември 2018

Претседател: д-р Марија Митева
Доцент, Факултет за информатика,
Универзитет „Гоце Делчев“- Штип

Член д-р Лимонка Коцева Лазарова
Доцент, Факултет за информатика,
Универзитет „Гоце Делчев“- Штип

Член - ментор д-р Татјана Атанасова-Пачемска
Редовен професор, Факултет за информатика,
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип

**
***
Овој
труд го
посветувам
на моите ќерки Јана и Мима
и сопругот Петре, за големата
***
* поддршка и
* љубов.
* *****
* *****
* *****
* ****
* ***
* ***
* ***
* **
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*
*

*****
*** Голема благодарност ***
***** и до целото мое семејство **
**** за бесценетото почитување ***
************ и помагање. ***********
Сите заедно ја негуваме музиката
**** и ја сакаме математиката. **
****

Објавен труд:

APPLICATION OF MATHEMATICS IN MUSIC COMBINATORICS AND TWELVE-TONE MUSIC

Biljana Jovanova
University “Goce Delcev”, Stip, Republic of Macedonia,
Tatjana Atanasova-Pachemska
University “Goce Delcev”, Stip, Republic of Macedonia

ISTRAŽIVANJE MATEMATIČKOG OBRAZOVANJA
http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm
Vol. X (2018), Broj 19, 11–16

НЕКОИ ВРСКИ МЕЃУ МАТЕМАТИКА И МУЗИКА ПРЕНЕСЕНИ ПРЕКУ МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА НА ФРАГМЕНТИ ОД МУЗИЧКИ ДЕЛА

Апстракт

Математиката е наука која наоѓа примена во нашето секојдневие, во многу други области и науки. Кога се спомнува за корелација на математика и друго, она „другото“ е најчесто физика, архитектура, хемија, технички науки, програмирање, информатика... Секој од нас, секојдневно слуша музика од различен жанр. Кога дискутиравме со мојот ментор - професор Татјана Атанасова Пачемска, се роди заедничка идеја, да се направи истражување за поврзаноста и примената на математиката во музиката. Како математиката влијае, помага и ја менува музиката низ историјата и денес, што е тоа што ги поврзува математиката како наука и музиката како уметност.

Ја избирам апликацијата на математика во музиката, од причина што таа речиси цело време е нејзин придружник, толку незабележително и истото не се истакнува. Во физиката, на пример, се забележителни математичките формули, каде јасно се забележува дека има математичка примена.

Врската меѓу математиката и музиката се јавува многу одамна, уште од пред повеќе од две илјади години и опфаќа различни култури и цивилизации. Примената на математика во музиката, не беше дел од моето математичко образование. Ова ме натера да истражувам за врската меѓу математиката и музиката и нејзината примена.

Најпрво ќе ја презентираме историската поврзаност на математиката и музиката. Потоа, следи делот со Питагора и неговиот придонес во музиката, напуштањето на питагоровата скала и потребата од еднаква темперација. За полесна анализа на музичките тонови и интервали, помогнала модуларната математика. Делот од комбинаторика бил искористен во дванаесет тонскиот систем. Алгебарските групи со нивните својства се структури кои многу често се среќаваат во музичките структури. Симетриите, транслациите и ротациите, се исто така трансформации кои се употребувани во музичките дела.

Преку анализа на фрагменти од музички дела од различни композитори и епохи, ќе се покажат примери во кои се среќааваат симетриите, транслациите и ротациите.

Клучни зборови: транслации, танспозиции, симетрии, квинтен круг, дванаесет тонски систем.

SOME RELATIONS BETWEEN MATHEMATICS AND MUSIC TRANSFERRED THROUGH MATHEMATICAL ANALYSIS OF FRAGMENTS FROM MUSIC COMPOSITIONS

Abstract

Mathematics is a science that finds application in our everyday life, in many other fields and sciences. When referring to the correlation of mathematics and other, the "other" is mostly physics, architecture, chemistry, technical sciences, programming, informatics ... Each of us, every day, listens to music of a different genre. When we had a discussion with my mentor - professor Tatiana Atanasova Pachemska, a common idea was born, to do a research on the connection and application of mathematics in music. How mathematics influences, helps and changes music throughout history and today, what connects mathematics as science and music as art.

I choose the application of mathematics in music, because it has always been its companion, so unremarkable, and it does not stand out. In physics, for example, there are noticeable mathematical formulas, where it is clearly seen that there is a mathematical application.

The relationship between mathematics and music has emerged in distant history since more than two thousand years ago and it covers different cultures and civilizations. The application of mathematics in music was not part of my mathematics education. This made me think about the relationship between mathematics and music and its application.

First, we are going to present the historical connection between mathematics and music. Then the Pythagoras comma follows and its contribution to music, the abandonment of the Pythagoras, and the need for equal temperament. For easier analysis of music tones and intervals, modular mathematics helped. The part of combinatorics was used in the twelve - tone system. Algebraic groups with their properties are structures that are very often encountered in musical structures. Symmetries, translations and rotations are also transformations that are used in musical compositions.

Through the analysis of fragments of musical compositions from various composers and epochs, examples will be shown in which symmetries, translations and rotations are encountered.

Key words: translations, transpositions, symmetries, circle of fifths, twelve - tone systems.

Содржина

Користени дефиниции и теореми

Ќе дефинираме некои математички поими кои ќе ги користиме.

Дефиниција 1: Функцијата $f: R \rightarrow R^+$ зададена со формулата $f(x) = a^x, a > 0$ и $a \neq 1$, се вика **екпоненцијална функција**.

Ако $a > 1$, тогаш функцијата $f(x) = a^x$ монотоно расте, а ако $a < 1$, функцијата монотоно опаѓа.

Дефиниција 2: **Логаритам** на позитивен реален број b, за основа $a \neq 1, a > 0$ е реален број x, со кој треба да се степенува основата a, за да се добие бројот b.

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Ако $a > 0, a \neq 1$, тогаш се точни равенствата:

1^o $log_a a = 1$; 2^o $log_a 1 = 0$; 3^o $log_a a^n = n$; 4^o $log_{a^m} a = \frac{1}{m}$;

5^o $log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}$, $a > 0, a \neq 1$.

Дефиниција 3: Функцијата $f: R^+ \rightarrow R$, зададена со формулата $f(x) = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, се вика **логаритамска функција** со основа a.

Ако $a > 1$, тогаш функцијата $f(x) = log_a x$ монотоно расте, а ако $a < 1$, функцијата монотоно опаѓа.

Теорема 1: (правила за логаритмирање):

1. Логаритамот на производ од два позитивни броја со основа a е еднаков на збирот од нивните логаритми при истата основа, т.е.

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N,\ a > 0, a \neq 1 \text{ и } M, N > 0.$$

2. Логаритамот на количникот од два позитивни броја со основа a е еднаков на разликата од логаритмите на деленикот и делителот, т.е.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N,\ a > 0, a \neq 1 \text{ и } M, N > 0.$$

3. Логаритамот на степен на позитивен број е еднаков на производот од показателот на степенот и логаритамот на неговата основа, т.е.

$$log_a M^n = n \cdot log_a M, \qquad a > 0, a \neq 1, \qquad M > 0, \qquad n \in R.$$

Теорема 2: (врска меѓу логаритмите при различни основи):

$$log_a x = \frac{log_c x}{log_{ca}}, \qquad a > 0, \quad a \neq 1, \ c > 0, c \neq 1, x > 0 .$$

Дефиниција 4: Нека m е природен број и a, b се цели броеви. Ако m е делител на разликата $a - b$, т.е. $m|(a - b)$, тогаш велиме дека бројот a е **конгруентен** со бројот b по модул m, запишуваме $a \equiv b(mod\ m)$.

Дефиниција 5: **Група** $(G,\cdot)$ е множеството G, заедно со операцијата „·", ако се исполнети следниве услови:

i) G е затворено над операцијата „·", т.е. $(a \cdot b \in G), (\forall a, b \in G)$;

ii) Операцијата „·" е асоцијативна, т.е. . $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), (\forall a, b, c \in G)$;

iii) Постои неутрален елемент $e \in G$, т.ш. $e \cdot a = a \cdot e$, $(\forall a \in G)$;

iv) Секој елемент $a \in G$ има инверзен елемент a^{-1}, т.ш. $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$.

Дефиниција 6: **Ред** на група е бројот на елементите во групата.

Дефиниција 7: Групата G се нарекува **циклична**, ако постои $x \in G$, т.ш. за секое $y \in G, y = x^n$, за некое $n \in Z$. Елементот x се нарекува генератор на G.

Дефиниција 8: Групата составена од сите симетрии (осни и ротациони) на еден правилен многуаголник се нарекува **диедрална група**.

Дефиниција 9: Нека n е цел број по модул 12. Функцијата $T_n: Z_{12} \rightarrow Z_{12}$, зададена со $T_n(x) = x + n(mod 12)$ се вика **транспозиција** за n.

Дефиниција 10: Нека n е цел број по модул 12. Функцијата $I_n: Z_{12} \to Z_{12}$, зададена со $I_n(x) = -x + n(mod12)$ се вика **инверзија** за n.

Дефиниција 11: **Ретроградност** R(x) за низата x е низата составена од членовите на x, во обратен редослед.

1. ВОВЕД

Музиката е важен дел од сечиј живот. Таа е пропратен дел во многу ситуации. Додека читаме, додека одмараме, додека патуваме, кога сме среќни, тажни, кога возиме велосипед... Додека сме на базен, спа, фитнес, аеробик...

Многумина од нас се прашуваат, а најверојатно и сакаат да слушнат дали има математика во музиката или музика во математиката. Звучи интересно, нели? Но, не и едноставно. Математиката ја има насекаде, очигледно или не.

Математичките концепти кои се опфатени во музиката вклучуваат цели броеви, рационални и реални броеви, еквивалентни односи, геометриски трансформации, групи, прстени, модуларна аритметика, уникатна факторизација, логаритми, експоненцијални и периодични функции, тригонометриски функции, топологија, Фуриева анализа, броевите на Фибоначи, златен пресек... и уште многу други математички области. Секој од овие поими влегува на сцената бидејќи сите тие се вклучени на еден или друг начин во точката каде што математиката и музиката се спојуваат.

Токму затоа, предизвик ми е, во овој магистерски труд да биде направено истражување за поврзаноста меѓу математиката и музиката. На сите нам, многу добро ни е познато дека математиката има бесконечна примена, насекаде, во физика, хемија, биологија, економија, медицина, астрономија, а исто така и во музиката. Па, која е нејзината примена во музиката и како истата ја произведува, менува и влијае во самиот почеток, развој и усовршување. На овие и некои слични прашања, би се потрудила да одговорам во овој труд.

Во овој магистерски труд ќе посочат некои области од математиката, каде и како истата е поврзана со музиката.

На почетокот, ќе се даде осврт на историската поврзаност на математиката и музиката, каде што ќе се спомнат повеќе познати математички имиња кои се занимавале и со теорија на музика. Потоа, ќе се издвојат некои математички области, кои најчесто и најмногу се среќаваат низ музичките дела, за на крај да се направат анализи за појавата на разните видови на симетрии во фрагметни на музички дела, како важен сегмент на музичкото дело, коресподенција на математичките симетрии и музичките симетрии.

За нас најпознатото именување на нотите е според солмизација: до-ре-ми-фа-сол-ла-си коешто го користиме при пеење на тоновите. Но, во музичката теорија нотите најчесто ги претставуваме со букви од латинската абецеда. Во англиско говорно подрачје, низата од ноти (која започнува со нотата „до“) е C, D, E, F, G, A, B. Ако низата започне со нотата „ла“ т.е. „А“ тоа се првите букви од латинската азбука. Од друга страна, кај нас и во повеќето европски држави, нотата B се бележи со H, а со B се означува снижено B (B♭). Како се појавило ова разидување во однос на бележењето на тие две ноти? Станува збор за музичко „кодирање“ кое го користеле композиторите во чест на Јохан Себастијан Бах (J.S.BACH). Имено, станува збор за низата од ноти кои се карактеристични за некое дело B♭ A C B, што би било B A C H, за не англиско говорно подрачје. Ова е еден од најчестите примери на музички криптограм и се среќава од Шуман и Брамс, па сè до Шонберг. Документирани се повеќе од 400 вакви криптограми, меѓу кои и самиот Бах ги вметнувал во своите дела. Сепак, низ овој материјал ќе се користат ознаките според англиското подрачје каде нотата „СИ“ ќе биде именувана како B наместо H.

2. ВРСКИТЕ МЕЃУ МАТЕМАТИКАТА И МУЗИКАТА НИЗ ИСТОРИЈАТА

Математиката, во некаква форма, се појавува уште многу одамна во старите цивилизации. Инките, Египќаните и Вавилонците ја користеле математиката, но не била изучувана своеволно, сè до Античка Грција (600-300 п.н.е.). Математиката е огромна тема која се приближувала, користела и студирала на различни начини и форми, стотици години од различни култури и цивилизации. [5] Тема која постојано се менувала и така тешко се дефинирала. Во дваесет и првиот век, западниот поглед на математичарите е дека таа е апстрактна наука за обликот, просторот, промената, бројот, структурата и количеството.

Математичарите барале нови модели и нови претпоставки користејќи строги одбивања. Тие користете апстрактно мислење, логика и размислување за решавање на проблемот. Математиката може да се изучува за сопствено задоволство или може да се примени за објаснување на појавите во другите дисциплини [5], [6]. Физичарите, на пример, користат математички јазик за да го опишат природниот свет. За споредба, музиката е уметност или наука за комбинирање на вокални, инструментални или комбинирани звуци, за да создаде складната убавина на музичката форма и хармонија. Како и математиката, така и музиката е дел од историјата на различните култури и цивилизации. Музиката е уметнички начин на изразување и најчесто се користи за прикажување на сопствените идеи и емоции. Различни форми, стилови, жанрови на музика се создаваат, изучуваат, изведуваат и консумираат секојдневно.

Теорија на музика е предмет кој е проучуван илјадници години. Теорија на музиката е дисциплина (наука) за својствата на музиката и за тоа како функционира музиката [5], [6], [7]. Често музичките теоретичари го проучуваат јазикот и нотацијата на музиката. Тие се обидуваат да идентификуваат модели и структури пронајдени во техниките на композиторите, преку или во рамките на различни музички жанрови и низ различни историски периоди.

Тргнувајќи од основните општи дефиниции за математиката и музиката, може да се каже дека тие две се многу различни дисциплини. Математика е наука, полна со цел, точност, прецизност и пресметувања. Од друга страна, музиката се смета за уметничка и експресивна. Истражувањата покажуваат дека иако навидум различни, сепак, овие две диспциплини се поврзани повеќе од две илјади години. Самата музика е навистина многу математичка, а математиката е својствена за многу основни идеи во теоријата на музиката. Музичките теоретичари, како експерти во други дисциплини, користеле математика за да ги развијат, изразат и да ги пренесат своите идеи.

Математиката може да опише многу феномени и концепти во музиката. Математиката објаснува како жиците вибрираат на одредени фреквенции и помага да се опише и разбере природата на звучните бранови. Инструментите, исто така, може да се каже дека се математички, односно се изработени според одредени математички пропорции. Жичаните инструменти имаат специфична форма за да резонираат со нивните жици на различен, но сепак математички начин. Модерната технологија се користи за се да направат снимки на компактен диск (ЦД) или дигитален видео-диск (ДВД), а тоа секако не би било возможно без улогата на математиката. Односот помеѓу математиката и музиката е комплексен и е подложен на постојано проширување.

Броевите се постојани придружници на нотите. На почетокот на секое парче музика, после ознаката со виолинскиот клучот, со дропка се означува видот на тактот во дел од музичкото дело. Најчесто среќавани тактови се $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ и $\frac{6}{8}$. Именителот на дропката ја означува нотната вредност која е основна единица за броење, а броителот го покажува бројот на таквите делови во тактот [4].

3. ПОЗНАТИТЕ МАТЕМАТИЧАРИ НИЗ ИСТОРИЈАТА НА МУЗИЧКАТА ТЕОРИЈА

Многу од античките филозофи придонеле за развивање на филозофијата, биологијата, хемијата, физиката, архитектурата, музиката и многу други дисциплини. Па, така во Античка Грција се појавува и пробудува и почетокот на математиката како наука, која претходно се користела повеќе како вештина и занает. Математиката се изучувала и се користела за решавање на секојдневните проблеми, како на пример, нејзината примена во земјоделието се однесувало на пресметки како да се дојде до поголем придонес и од колкава површина.

Питагора, Платон и Аристотел се едни од најзначајните луѓе во времето кога и започнува историската поврзаност на математиката и музиката [5].

Питагора живеел во класичниот грчки период (околу 600 п.н.е. до 300 п.н.е.) кога Грција била составена од поединечни градови држави. Роден е на островот Самос (околу 525 п.н.е.) кој се наоѓа во малоазиската област на Егејското Море. Во Египет научил геометрија и бил воведен во тајните на египетските верувања. Во Феникија научил за броевите и мерките, а со знаења за астрономија се стекнал во Калдеја, главното средиште на античката астрономија [6]. Во местото Кротон на југот на денешна Италија, основал училиште познато како питагорово братство кое на моменти наликувало на еден вид религија, често нарекувана „култ на математиката“ [6]. Таму, тој со своите ученици и следбеници ги разгледувал и разработувал тогашните знаења низ призмата на своето познато тврдење дека „СÈ Е БРОЈ“, што требало да значи дека математиката е клуч за разбирање на сè во светот, односно дека е темел и основа на секоја наука [5], [6].

Слика 1. Средновековен цртеж во кој се прикажуват истражувањата на Питагора за висинските разлики помеѓу тоновите

Figure 1. Middle Ages – Pytagoras' research about tones pitches

Питагорејците, следбениците на неговата „религија“, верувале дека математичките структури се мистерија. Тие имале ритуали и правила базирани на математички идеи. За нив, броевите 1, 2, 3 и 4 биле божествени и свети. Тие верувале дека реалноста е изградена од овие броеви и тие броеви ја претставуваат основата на животот т.е. сѐ се сведува и гради врз нивна основа [5], [6].

Платон е познат Питагореец кој живеел по златното доба на Античка Грција. Платон верувал дека математиката е суштината на образованието. Тој го основал првиот универзитет во Грција - „Академија“. Математиката била главна во наставната програма [6]. Толку многу се учело математика и ѝ се давало големо значење, што над вратите на универзитетот било напишано: „Нека не влегува оној кој не знае геометрија" [6]. Многу познати грчки математичари учеле на овој универзитет.

Аристотел, учителот на Александар Велики, е еден од познатите студенти на Платон [5], [6]. Аристотел бил голем гениј и основач на свое училиште. Тој се интересирал за различни области и изучувал секаков предмет што можел да се изучува во тоа време. Тој се интересирал за музика, физика, поезија, театар, логика, реторика, политика, етика и зоологија. Заедно со Платон и Сократ (учителот на Платон), Аристотел бил меѓу поважните филозофи во светот на западната филозофија [5], [6].

Овие личности од антиката се толку важни за разбирањето на односот меѓу математиката и музиката, затоа што тие не само што почнале да учат математика и музика, туку сметале дека музиката е дел од математиката [5].

Математичката едукација во Античка Грција била составена од четири дисциплини: теорија на броеви, геометрија, музика и астрономија [5], [6], [10], [11]. Оваа поделба на математиката во четири под-теми е позната како квадриум. Идеите и делата на овие антички Грци биле влијателни и имале траен ефект во текот на целата нивна историја. Ваквата поделба на математиката, каде музиката треба да се изучува како дел од математиката, траела сè до крајот на средниот век (приближно 1500 година) во европската култура.

Ренесансата (што значи преродба), период од околу XIV до XVII век, (среден век) почнала во Фиренца и се проширила низ цела Европа. Ренесансата била културно движење, кое се карактеризирало со заживување на учењето на класични извори и постепено и широко се распространувала образовната реформа. Образованието се насочило кон повторно откривање на антички класични пишани факти за културата и литературата. Музиката веќе не се изучувала како дел од математиката, туку теоријата на музика станала независна дисциплина, но врските со математиката продолжиле [5], [6].

Интересно е да се напомене дека за време на ренесансата и по ренесансата, за музичари се сметале музичките теоретичари, а не изведувачите на музички инструменти [5], [6]. Теоријата на музика повеќе била насочена кон музичките истражувања и учење, а не кон компонирање или изведување на музика.

Во седумнаесеттиот и осумнаесеттиот век, некои од најистакнатите и значајни математичари исто така биле и музички теоретичари.

На пример, Рене Декарт имал многу математички достигнувања во полето на аналитичка геометрија [5], [6]. Но, неговата прва книга, Compendium Musicale (1618) била од областа на теорија на музиката.

Мариен Мерсен, математичар, филозоф и музички теоретичар често се нарекувал и татко на акустика [5], [6], [9]. Автор е на неколку музички дела, вклучувајќи го и *Harmonicorum Libri* (1635) и Traité de l'Harmonie Universelle (1636). Мерсен исто така соработувал и со многу други важни математичари, вклучувајќи ги Декарт, Исак Бикмен и Константин Хајгенс.

Леонар Ојлер е истакнат математичар од XVIII век и еден од најголемите математичари на сите времиња [5], [6]. Освен што има голем допринос во полето на математиката, тој исто така бил и музички теоретичар. Во 1731, Ојлер го објавил Tentamen Novae Theoriae Musicae Excertissimis, Harmoniae Princiliis Dilucide Expositae.

Во 1752 година, Жан Д'Алабер објавил дела за музика, вклучувајќи ги и *Eléments de Musique Théorique et Pratique Suivant les Principes* Principes de M. Rameau и во 1754, Réflexions sur la Musique [5], [6].

Фасцинираноста на математичарите од теоријата на музика, јасно и прецизно се објаснети од Жан Филип Рамо во *Traité de l'Harmonie Réduite à ses Principes Naturels* (1722) [5], [6]. Некои музиколози и академици тврделе дека Рамо бил најголемиот теоретичар на француската музика од XVIII век. Самиот Рамо рекол: „*Музиката е наука која мора да има утврдени правила. Овие правила мора да бидат точно дефинирани, на принципи, кои треба да бидат очигледени, и овие принципи не би можеле да бидат дефинирани без помош на математиката. Морам да признаам дека сите искуства и знаења што ги имам стекнато во музиката, практикувајќи ја прилично долг период, сепак само со помош на математиката, моите идеи се трансформираа и се појавија во поинакво светло на начин за кој не бев свесен пред тоа*“ [21]

Милтон Бабит, композитор, кој исто така предавал математика и теорија на музика на универзитетот Принстон (1896), пишува дека „*музичката теорија треба да биде целина од поврзани множества од аксиоми, дефиниции и теореми, чии докази се изведени од следства за соодветна логика*" [5], [6].

3.1. ПИТАГОРА И МУЗИЧКИТЕ ИНТЕРВАЛИ

Главното тврдење на Питагорејската доктрина е тоа дека сите нешта се броеви или нештата се опкружени со броеви или сите нештата се однесуваат како броеви [5], [6], [10], [11]. Кога човечките уши слушнат звук, тие всушност ја перципираат периодичната секвенца на вибрациите, звукот влегува во нашите уши како звучен бран, кој претставува компресија и декомпресија на воздухот во одреден период. Честотата - фреквенцијата на овој звучен бран е дефинирана од брзината на максимален и минимален притисок на воздушниот притисок во секунда. Звуците, вклучувајќи и тоновите што се интрепетирани од музичките инструменти, не стигнуваат до нашите уши во како чисти, синусоидни звучни бранови, туку како збир од повеќе такви бранови. Наместо тоа, музичкиот тон е комплексен звучен бран, во којшто основниот тон е придружен со неговите хармоници наречени „аликвотни тонови“. [12] Аликвотен тон е нота чија фреквенција е пропорционална на фреквенцијата на основниот тон, односно фреквенциите на аликвотните тонови во однос на фреквенцијата на основниот се однесуваат како 1:2:3:4:5:6:7:8:9 [12].

Античките Грци не биле свесни за присутноста на аликвотните тонови, кои биле откриени дури во 1636 од страна на францускиот математичар Мариен Мерсен [5], [6]. Потоа, во 1702 година, Јозеф Саувер детално ги проучил аликвотните тонови. Во 1878 година, физички својствата на аликвотните тонови биле исцрпно дискутирани од страна на Џон Штрут, Барон Рејли III (1842-1919), во неговата книга *Theory of Sound* (класика во областа на акустиката дури и денес) [10], [11]. Тој открил дека висината на аликвотните тонови допринесува за специфичната боја и квалитетот на звукот произведен од музички инструмент, вклучувајќи го и вокалот [10].

Музички интервал е односот помеѓу фреквенциите на звучните бранови помеѓу два тона, едниот земен за основен тон и вториот тон кој е понизок или повисок од основниот. Овие два тона можат да звучат заедно, или еден по друг.

Наједноставниот музички интервал е прима, каде што основниот тон се повторува, односно се споредува со самиот себе, што подразбира дека односот на овие фреквенции е 1:1.

Следниот интервал (втор по важност) е октава, каде што фреквенцијата на вториот тон е двојно поголема од фреквенцијата на основниот тон. Односот на фреквенциите на овие тонови во интервалот октава е 1:2. Ние го восприемаме како ист тон, но за една октава повисоко. Вториот тон е и првиот од низата аликвотни тонови. Повисокиот тон од интервалот октава сега би можеле да го земеме како нов основен тон. Тогаш, сите тонови поврзани со овој нов основен тон, ќе бидат нови аликвотни тонови на оригиналниот основен тон. По примата, октавата е вториот најконсонантен (пријатен по звучност) интервал бидејќи нашите човечки уши ги слушаат сите звуци генерирани од овие два тона како еден.

Бидејќи во тоа време, Питагорејците се занимавале само со броеви и сѐ претварале и пресметувале со нивна помош, истражувајќи го звукот и неговата звучност, тие ги користеле броевите и нивните односи [8], [9], [11].

После формирање на односите 1:1 и 1:2, следен однос што го користат е 3:2. Овој однос го земаат за добивање на новиот интервал квинта.
Ако на пример, го земаме тонот D за основен тон, следен тон со трипати поголема фрекфенција е тонот А. Затоа односот на овие два тона ќе биде 3:2.
Имајќи ги во предвид овие односи меѓу тоновите, Питагора ќе ја постави основата на музичката теорија и формирањето на низата од музички тонови.

Како Питагора го направил ова откритие пред две илјади години, кога теоријата на музика сѐ уште не била позната? Тој користил експерименти и математика [5], [6], [8], [9]. При прошетка низ улиците, во продавницата на човек кој работи со бронза, Питагора слушнал различни звуци произведени од чекани кои удираат на наковална. Тој ја применил својата идеја за консонанца и дисонанца, фактот дека два тона не секогаш звучат добро заедно. Тој забележал дека висината на музичкиот тон, која била произведена од некој чекан, не зависи само од големината на ударот или местото на наковалната каде ќе биде погодена, туку и од големината, односно тежината на чеканот. Затоа, Питагора спровел серија експерименти, користејќи различни инструменти за потврдување на односот меѓу музичките интервали и нивните односи.

Питагора ги направил најосновните експерименти, како што се: слушањето на звукот произведен од вибрациите на жиците кои имаат иста должина, за да потоа во следниот експеримент ги скратил овие жици од едниот крај или им закачил тежина на другиот крај; тој ги слушал звуците, добиени од стругањето на жиците со различни должини, со различни тежини и дебелени, стремејќи се да добие музички инструмент; тој го слушал звукот произведен од различни видови на цевки, како по должина, така различни и по ширина. Питагора правел и експеримент со повеќе садови, кои ги полнел со различна количина од иста течност. Ги набљудувал „брзината и бавноста на движењата на воздушните вибрации“. Потоа, тој удирал по садовите во парови и ги слушал произведените звуци. На овој начин, тој ги поврзувал броевите соодветно со произведените звуци, па така заклучил дека интервалите кварта, квинта и октавата, одговараат соодветно на односите $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{1}$ во однос на различните количните на нивоа на течност во садовите [5], [6].

Сите овие експерименти се совпаднале со хипотезите на Питагора, во однос на тоа дека музичките интервали соодветствуваат на дефинираните односи на цели броеви на непроменлив начин, без разлика дали се тоа големината или должината на цевки, жици со или без тегови [5], [6], [9]. Овие експерименти спроведени од Питагора имале многу точни резултати, па кога неговите експерименти биле повторени и повторно интерпретирани од акустичарите во седумнаесеттиот век, неговите резултати се потврдиле. Идеите и набљудувањата на Питагора и неговото училиште го воспоставиле односот меѓу музичките интервали и односите на целите броеви.

Откако Питагора го воспоставил односот меѓу октавата и квинтата, ги користел овие односи и едноставни елементи од математиката, како што се операциите со рационални броеви, за да се добијат и другите интервали [5], [6]. Тоа го правел на следниот начин:

Секунда

Интервалот D-A е квинта, а D е основен тон. Кога тонот A е основен, тогаш интервалот A-E е квинта. Со однос $\frac{3}{2}$, тонот E е повисок од тонот A, а тонот A е повисок од оригиналниот основен тон D. Така, за споредување на фреквенциите на тоновите D и E, ја имаме следнава постапка:

Односот на фреквенцииите на E-D е еднаков на (3: 2) × (3: 2)= 9: 4.

Тонот E сега треба да биде транспониран (снижен) за една октава. Бидејќи, фреквентниот сооднос на тонот за една октава пониско од основната е 1: 2, за односот на фреквенциите на D-E имаме (9: 4) × (1: 2)= 9: 8. Секој интервал со соодносот 9: 8 ќе биде секунда.

Секста

Интервалот E-B е квинта, со основен тон E. Со односот 3:2, тонот B е повисок од тонот E. Тогаш, односот помеѓу D-B е добиен на следниот начин:

(D-E)x(E-B)=(9:8)x(3:2)=27:16. Значи, секста е секој интервал со фреквентен однос 27:16.

Кварта

Кога за основен тон ќе се земе тонот G, тогаш тонот D формира квинта со тонот G и односот на тоновите G-D е 3:2, па затоа односот на тоновите D-G ќе биде 2:3. Транспонирајќи го тонот G за октава на горе, односот меѓу тоновите D-G ќе биде (2:3)x(2:1)=4:3. Интервалот со овој фреквентен однос се нарекува кварта.

С**ептима**

Основен тон C и тонот G формират квинта. Односот на C и G е 2:3. G е повисоко од D за 4:3, па затоа, односот меѓу C и D ќе биде (2:3)x(4:3)=8:9. Ваквиот интервал со овој фреквентен однос се вика септима.

Терца

За основен тон се зема тонот F. Тонот F формира квинта со тонот C. Однос на тоновите F и C, кога тонот F е пониско е 2:3. Односот меѓу тоновите F-D е (2:3)x(16:9)=32:27.

Полустепен (мала секунда)

На клавијатурата може да забележеме дека помеѓу тоновите E и F, B и C, растојанието е најмало.

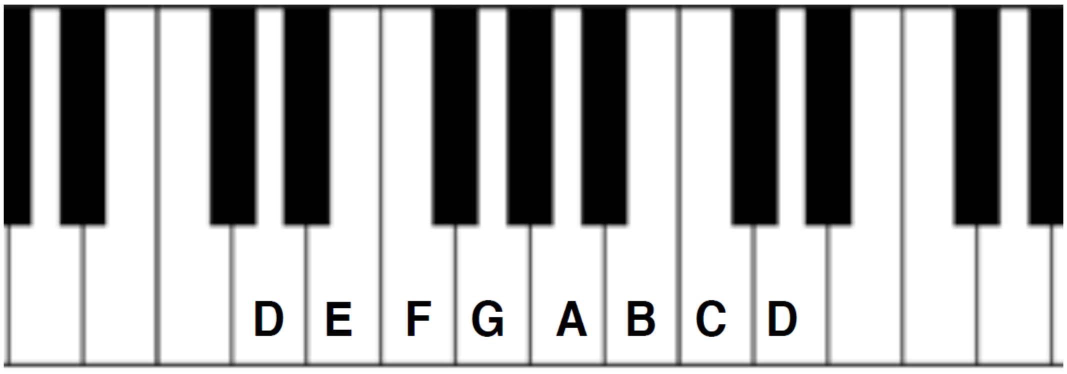
Интервалот D-E е секунда, а D-F е терца. Тогаш, за интервалот E-F ќе имаме (8:9)x(32:27)=256:243.

Инверзијата на интервалот B-D (секста) помножен со септимата D-C ќе го даде фреквентниот однос за интервалот B-C, (16:27)x(16:9)= 256:243.

нота	D	E	F	G	A	B	C	D
фрек. однос	1	9/8	32/27	4/3	3/2	27/16	16/9	2

Слика 2. Фреквентни односи на тоновите, кога тонот D е земен за основен
Figure 2. The frequency ratios and corresponding notes to make a Pythagorean whole tone scale, with the note D as the fundamental.

Питагора ги користел овие интервали за да создаде дијатонска скала составена од „чисти“ природни соодноси помеѓу сите тонови во скалата [10], [11]. На пијаното, во денешно време (пијаното се појавило во XVI век, далеку подоцна од времето на Питагора) оваа скала ќе биде секоја бела дирка во октавата (слика 3).



Слика 3. Нотите од октава според Питагорова скала од цели степени претставени на пијано
Figure 3. The notes of one octave of the Pythagorean whole tone scale labeled on the piano.

Креирање на Питагоровата скала е итерактивен процес, каде што чистите квинти се суштински изградени една врз друга. Овој процес може да даде бесконечен број ноти, но разумно е да се застане по една октава, која е поделена на седум интервали.

Формирањето на скалата се добива со земање на почетна фреквенција која би била основен тон и со постапката опишана погоре, се добиваат и другите тонови во скалата.

3.2. ПИТАГОРОВА КОМА

Чистите интервали биле толку високо вреднувани, што обезбедиле скала со максимален број на чисти интервали [5], [6], [10], [11]. Сепак, невозможно е да има само чисти интервали. Ова е главниот проблем со Питагоровата скала. Се очекувало дека по низа од 12 квинти, ќе се стигне до истиот тон, како и ако се наредат 7 октави во низа. Со други зборови, математички гледано би требало да се изедначат вредностите на 12 квинти $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$ и 7 октави $\left(\frac{2}{1}\right)^{7}$.

Но, анализирајќи го ова математички, очигледно е дека тие два изрази не даваат еднакви резултати:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq \left(\frac{2}{1}\right)^{7}$$
$$129{,}7463379 \neq 128$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} > \left(\frac{2}{1}\right)^{7}$$
$$129{,}7463379 > 128$$

Разликата меѓу двата интервала се нарекува *Питагорова кома* и истата се пресметува на следниов начин $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{7}} \approx 1{,}013643$.

Питагоровата кома е многу мала разлика и на повеќето инструменти како што е пијаното, не би можела да се забележи. Питагоровата кома ја опишува, на пример, разликата помеѓу нотите G# и A♭. На пијаното, тие ја делат истата црна дирка и би требало да станува збор за ист, односно идентичен тон. Но, всушност во природата и акустички гледано, станува збор за два различни тона. На нетемперираните инструменти како што е виолината, на пример, таа разлика би можела да се забележи. Жицата овозможува поголема прецизност, така што музичарот не може да погреши и да свири G# како A♭.

3.3. ДОПОЛНУВАЊЕ / НАПУШТАЊЕ НА ПИТАГОРОВАТА СКАЛА

Скалата на Питагора е само еден пример на музичка скала од Античка Грција. Таа е создадена со користење на односите помеѓу кварта и квинта, интервали што нејзиниот творец ги сметал за најчисти (најпријатни по звучност). Дефинирањето и создавањето на музичка скала вклучило некои основни математички пресметувања, но исто така, се потпира и на сопствена интуиција, за тоа, за кој интервал се верувало дека е најчистиот [5], [6], [8]. Античките Грци имале повеќе скали. Различни скали се користеле во различни мелодии и за различни видови инструменти. Изборот на скалата го утврдувал карактерот и психолошкиот ефект на музиката врз слушателот. Оваа зависност на едно парче музика и на избраната скала за него, траело сè до појавата на темперирана скала во европската музичка култура.

Предренесансната музика на пример, вклучувала комплицирани системи на скали, слично како оние на класичниот период на Античка Грција. Покрај Питагоровата скала, една таква скала е направена и од Аристоксен (4 п.н.е.) кој бил старогрчки филозоф и студент на Аристотел [5], [6]. Тој пишувал за филозофијата, етиката и музиката. Иако, голем дел од материјалите од неговата работа е изгубен, пронајден е дел од еден музички трактат „Елементи на хармонијата“. Аристоксен создал систематска теорија на скали кои се состојат од тетрахорди. Тетрахорди се скали кои се составени од четири ноти, кои одговараат на поделбите на квартата со различни распореди на цели степени и полустепени. Иако овие биле кратки скали, по потреба, со надоврзување на два или повеќе тетрахорди се формирале подолги скали. Креирањето на скали претставувало аритметички процес, а притоа се користел музичкиот јазик [5], [6]. Многу стари музички композиции се базирале на скали или најчесто на фрагменти од скали или нивни комбинации.

Но, во периодот на ренесансата, западноевропската класична музика почнала да користи помал број на скали. Од XVIII век, постои општо прифаќање на темперирана скала [5], [6], [14]. Постојат два основни вида на темперирана скала: дурска и молска. Темперираната скала е поделена на дванаесет еднакви растојанија. Растојанието помеѓу било кои два соседни тона е полустепен, а два полустепени сочинуваат цел степен. Секоја единица во темперирана скалата е темпериран полустепен со вредност од $\sqrt[12]{2}$. Според ова станува возможно дека секоја дурска или молска скала би можела да биде создадена од било кој почетен тон со едноставни транспозиции на односите помеѓу интервалите.

Дванаесетте растојанија на октавата имаат фреквентни односи:
1, f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7, f^8, f^9, f^{10}, f^{11}, f^{12}, каде што $f^{12} = 2$, односно $f = \sqrt[12]{2}$.

Распоредот на цели степени и полустепени во дурска темперирана скала изгледа вака: 1,1, $\frac{1}{2}$, 1,1,1, $\frac{1}{2}$ (1 означува цел степен и $\frac{1}{2}$ означува полустепен).
Скалата би можела да започне со било кој од дванаесетте тонови.
Аналогно на тоа, распоредот на цели степени и полустепени во природна молска темперирана скала изгледа вака: 1, $\frac{1}{2}$, 1,1, $\frac{1}{2}$, 1,1.
Еднаквата темперација, со која се овозможуват овие транспозиции на сите дурски и молски скали подетално ќе биде објаснета во следното поглавје.

3.4 ЕДНАКВА ТЕМПЕРАЦИЈА (equal temperament)

Системот за штимање кој се покажал дека обезбедува прифатлива хармонска точност и слобода за лесна транспозиција се нарекува еднаква темперација (equal temperament) [16],[20]. Еднаквата темперација се појавила од потребата секој интервал да го зачува односот 3:2 на квинтата, а како систем да биде цикличен, односно да ги задоволува равенките:

$$x*x*x*x*x*x*x=\frac{3}{2}$$

и

$$\boldsymbol{x^{12}=2} \qquad (*)$$

Првата равенка е математичко претставување на скалата како геометриска низа од седум полустепени, која го зачувува односот на чистата квинта. Со други зборови, ние сакаме да добиеме интервал, којшто при транспозиција на тој интервал за седум чекори (седум полустепени), повторно ќе биде чиста квинта и ќе има соодност 3 : 2.

Втората равенка го претставува фактот дека скалата од 12 тонови е геометриска прогресија од 12 полустепени. Скалата од 12 тонови е наречена хроматска скала.
Всушност, скалата {C,C#=D♭,D,D#=E♭,E, F, F#=G♭,G,G#=A♭; A, A#=B♭,B} е позната како западна хроматска скала.

Решенијата на равенките, соодветно се $x = \sqrt[7]{\frac{3}{2}}$ и $x = \sqrt[12]{2}$, кои очигледно не се еднакви. Проблем е да се направат сите транспозиции. Проблемот во питагорејската скала е тоа што, при транспозиција некои тонови ќе одат во веќе дефинираните, а други ќе треба во нови. Овој проблем настанува меѓу тоновите во скалите кои не се дијатонски, односно растојанијата меѓу тоновите не е исто. Како на пример, според питагорејската скала интервалот C-D има фрекфентен однос 9:8, а D-E има 10:9. Очигледно, не се еднакви и уште повеќе не можат да се изразат преку степените на 2 и 3.

Со еднаква темперација, транспозицијата ќе биде возможна, после секое транслатирање на секој тон, се запазува еднаквото растојание и притоа нема да се добие некој нов непознат тон. Наједноставно е кога ова ќе го разгледаме во линеарна форма и со поделување на октавата на 12 еднакви интервали, тогаш растојанието меѓу секои два последователни тонови ќе биде $1 * \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$ и секој нареден интервал ќе биде $\left(\frac{1}{12} + 1\right) : 1 = \frac{13}{12}$. На овој начин, за чиста квинта ќе имаме $\left(\frac{13}{12}\right)^7 \approx 1{,}75$, додека, од скалата на Питагора, овој однос е $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Бидејќи новодобиениот резултат не е доволно приближно до 1,5 ова линеарно дефинирање нема да помогне во поставениот проблем.

Навраќајќи се назад во изразот (*) и логаритмирајќи ја равенката со логаритамска основа 2, експоненцијалната фунција $f(x) = 2^{\frac{x}{12}}$, може да се сведе на линеарна, па за $\forall m, n \in N$, имаме $\frac{log_2 2^{\frac{m}{12}} - log_2 2^{\frac{n}{12}}}{m-n} = \frac{\frac{1}{12}(m-n)}{m-n} = \frac{1}{12}$.

На овој начин, квинтата ќе биде $2^{\frac{7}{12}} \approx 1{,}4983$ со што е доволно приближно до вредноста на квинтата од 1,5. Според тоа, полустепените ќе бидат со должина $12 \cdot log_2 f'$, каде f' е односот на фреквенциите на два соседни тона.

Ирационалност на еднакво темперирани интервали.

Ќе покажеме дека интервалите помеѓу тоновите од еднакво темперирана скала, со исклучок на повторувањето во октавата, се ирационални, односно тие одговараат на односите кои се ирационалните броеви, т.е. не припаѓаат во множеството рационални броеви Q.

Теорема: Нека I е интервал помеѓу два тона во хроматска n-скала. Ако I не се повторува на октави т.е. соодносот што одговара на I не степен со основа 2, тогаш I е ирационален интервал.

Доказ: Нека I има рационална вредност $x \in Q^+$. Модуларен хроматски интервал зададен со I, кој припаѓа во Z_n, има конечен ред, што значи со n повторувања на I, дава к октави, за некој позитивен цел број n и некој цел број к. Оттука, $x^n = 2^k$. Бидејќи x има единствена факторизација $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$, каде $r \geq 0$, $p_1, p_2, \dots p_r$, различни прости броеви и $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r \in Z$, различни од нула.

Така, имаме $x^n = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}\right)^n = p_1^{n\alpha_1} \cdot p_2^{n\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n\alpha_r} = 2^k$.

Единственото вакво претставување покажува дека 2 е единствениот прост број во множествотото од прости броеви $\{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}\}$. Затоа добиваме дека $r = 1$ и $p_1 = 2$. Значи, $x = 2^{\alpha_1}$, што покажува дека интервалот I е ирационален.

3.5.НИЗАТА НА ФИБОНАЧИ ВО ТЕОРИЈА НА МУЗИКА

Леонардо Фибоначи (исто така познат како Леонардо од Пиза, или само Фибоначи) е познат математичар од Пиза, Италија. Во 1201, тој развил математичка теорија која конструира бесконечна низа на цели броеви [5], [6]. Низата на Фибоначи започнува со броевите 1 и вториот истотака е 1. Секој нареден член во низата се добива со собирање на претходните два члена.

Првите неколку члена од низата на Фибоначи се: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

Низата од односите меѓу секои два соседни членови од низата на Фибоначи е:

r(1) = 1/1 = 1

r(2) = 2/1 = 2

r(3) = 3/2 = 1.5

r(4) = 5/3 = 1.67

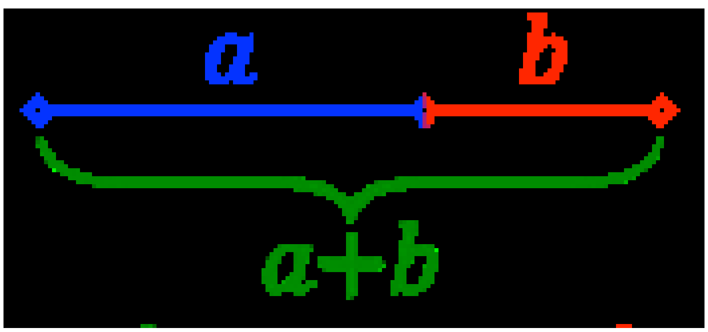
r(5) = 8/5 = 1.6

r(6) = 13/8 = 1.625

r(7) = 21/13 = 1.6125

Се забележува дека тие вредности конвергираат околу вредност, која е наречена златен пресек. Вредноста на златниот пресек е ирационален број ψ =1.61803398… Може да се забележи дека непарните членови во низата од односите на членовите на низата на Фибоначи (првиот, третиот член, ...) се помали од златниот пресек, додека парните членови на низата на Фибоначи (вториот, четвртиот член, ...) се поголеми од вредноста на златниот пресек.

Златниот пресек има голема важност во математиката, а посебно има геометриска интерпретација. Делење на отсечка на два нееднакви делови ја следат геометриската примена на овој пресек, односот на должината на целата отсечка спрема поголемата отсечка е еднаков на односот на должината на поголемата отсечка спрема должината на помалата.



Слика 4. Делење на отсечка со помош на златениот пресек на Фибоначи
Figure 4. Dividing a line into segments according to the Fibonacci ratio

$$(a+b):a=a:b\ .$$

Златниот пресек има својство да ги прави објектите естетски и убави. Се среќава во геометриските форми, како на пример во должината на дијагоналата во однос на должината на страната на правилен петоаголник. Се среќава во изобилство во природата, како на пример во односот на должината на стеблото на дрвото и дијаметарот на дрвото, или во физичкиот изглед на морската ѕвезда, изгледот на боровите шишарки...

Со користење на златниот пресек уметничките дела стануваат поубави. Златен пресек се употребувал и во архитектурата, како на пример во џамии и

Акрополис, во дизајнот на книги, фотографии, слики... Уметниците не секогаш свесно, односно интуитивно го користат златниот пресек, а понекогаш неговата употреба е резултат на изразување на убавината и хармонијата.

Златниот пресек, исто така се наоѓа и во музиката. Често се користи да генерира ритмичка промена, да развие мелодиска линија или се наоѓа во промената на темпото во композициите. На пример, кулминацијата на едно музичко дело често се наоѓа во точката на златен пресек (приближно 61,8% од траењето на целата композиција) [14], [19]. Честопати ова е местото каде што се појавуваат значителни промени во структурата на скалата или промена на нејзиниот тоналитет. На пример, во композиција со 32 такта, златниот пресек (кулминацијата) се очекува да се појави во 20 такт.

Примена на златниот пресек, свесно и со намера, може да се види во *Schillenger System of Musical Composition*. Исто така, може да се види дека се користи и во делата од Бела Барток, *Music for Strings, Percussion and Caleste.* Многу од делата на Шопен (Nocturnes и Études) се засноваат на златниот пресек [5], [44].

Постојат многу дебати за тоа дали Моцарт свесно го користел златниот пресек во својата работа. Но, за него, како познат музички гениј, никој со сигурност не знае како ја создавал својата музика. Дали користел инспирација од секојдневните настани, или пак тој составувал музика од математички равенки? [5], [6], 14], [16], [19], [44]. Неговата сестра изјавила дека „Волфган *не зборува ништо, мисли само на бројки*“ за време на неговите училишни денови [5]. Пронајдени се негови материјали, каде на маргините на некои од неговите композиции, како што се *Fantasia* и *Fugue* во *C* - dur, тој направил забелешки со математички равенки. Биле направени повеќе студии за да се види дали Моцарт навистина го користел златниот пресек [5], [6], [19]. Резултатите покажале дека тој го користел, но само во некои од неговите композиции. Како и да е, Моцарт покрај музиката, уживал да игра и со броевите.

Анализирањата на дела од Бетовен, Дебиси и други музички иноватори во различни музички периоди, покажале присуството на златниот пресек и низата на Фибоначи [5], [6], [19].

Употребата на златниот пресек, исто така, е забележан и во дизајнирањето на различни инструменти, а особено кај жичаните инстументи, посебно кај виолината. Пијаното е дизајнирано со помош на златниот пресек. Мембраните на звучници се дизајнирани со користење на златен пресек [5], [6].

Низата на Фибоначи може да се забележи во музичките скали. Ако се изостави првиот член од низата на Фибоначи, следните шест членови на низата на Фибоначи се: 1, 2, 3, 5, 8, 13.

1-ва нота - основна нота, почетната нота на скалата,

2-ра нота – цел степен, 2 полустепени од основната нота,

3-та и 5-та нота – ја прават основата за создавање акорди,

8 ноти прават скала,

13 – број на ноти (полустепени) низ целата октава вклучувајќи ја и првата нота од следната октава.

Доминантна нота во дурска или молска скала е петтата нота. Оваа е осма нота од сите 13 ноти кои формираат скала, вклучувајќи ја и првата нота од следната скала. Токму таа нота прави златен пресек $\frac{13}{8} \approx \psi$.

Со сето тоа спомнато погоре, се покажува дека е присутен златниот пресек. Тој мистичен ирационален број се појавува низ природата, уметноста, архитектурата, музиката и др. Уметници и музичари го користат свесно или не, за да создадат дело, кое ќе биде колку што може поубаво и поестетско.

4. УШТЕ МАТЕМАТИКА ВО МУЗИКАТА

4.1 КОНГРУЕНЦИЈА И МУЗИЧКИТЕ СКАЛИ

За полесно математичко анализирање на музичките дела, се појавила потреба од „преведување“ на нотите на математички јазик, т.е. кореспонденција меѓу нотите и целите броеви. Направено е следното „изедначување“ на нотите и броевите:

C=0

C#=D♭=1

D=2

D#=E♭=3

E=4

F=5

F#=G♭=6

G=7

G#=A♭=8

A=9

A#=B♭=10

B=11

Ова значи, на пример, кога ќе зборуваме за акордот {C,E,G}, всушност ќе го анализираме множеството {0,4,7}. Овој акорд е дел од главната тема на Симфонија бр. 94 од Јозеф Хајдн. Првиот дел од оваа тема е $\langle C, C, E, E, G, G, E, F, F, D, D, B, B, G \rangle$ или математички запишано со множество броеви е $\langle 0,0,4,4,7,7,4,5,5,2,2,11,11,7 \rangle$. Овие загради честопати се користат во музичките записи, со цел да се потенцира подреденоста на нотите.

Слика 5. Тема од Симфонија бр. 94 од Јозеф Хајдн

Figure 5. Theme from the Surprise Symphony, Joseph Haydn

Конгруеција по модул 12 е сегмент од музичката теорија, каде се користат броевите од 0 до 11 ($12 \equiv 0(mod 12)$. Собирањето на овие елементи ќе биде презентирано со помош на следнава табела:

Табела 1. Табеларно претставување на групата $(Z_{12}, +)$

Table 1. $(Z_{12}, +)$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Од табелата може да се види дека собирањето во ова множество е затворена операција, па множеството со овие елементи и операцијата собирање претставуваат група и тоа абелова група. Оваа група ќе ја обележеме со Z_{12}, 0 е неутрален елемент, инверзен на $i, 0 \leq i \leq 11$ е елементот $12 - i$. Значи, дефинирана е конгруенција по модул 12, т.е

$$\forall\ (a, b \in Z), a \equiv b(mod12) \Leftrightarrow 12/(a-b).$$

4.2 ЗОШТО ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА СО ОСНОВА 2?

Паровите од тонови кои имаат исто растојание, ќе лежат на исто место во координантната рамнина. Да претпоставиме дека меѓу тоновите x и y има исто растојание како и меѓу тоновите x' и y'. Тогаш, ова значи дека односот меѓу фреквенциите ќе биде ист $\frac{x}{y} = \frac{x\prime}{y\prime}$. Со логаритмирање на равенството, имаме

$$log_b \frac{x}{y} = log_b \frac{x\prime}{y\prime}\ .$$

Односно, $log_b x - log_b y = log_b x' - log_b y'$ што ни покажува дека растојанието помеѓу $log_b x$ и $log_b y$ е исто како и растојанието помеѓу $log_b x'$ и $log_b y'$.

Да ги разгледаме тоновите A_2, A_3, A_4 и A_5, соодветно, со нивните фреквенции 110, 220, 440 и 880. Да ги пресметаме разликите помеѓу логаритмите на нивните вредности. Нека, на пример, логаритмираме со основа 10. Тогаш, имаме за тонот A_2 - $lg110 \approx 2{,}041$; A_3 - $lg220 \approx 2{,}342$, A_4 - $lg440 \approx 2{,}643$ и за A_5 - $lg110 \approx 2{,}944$.

Слика 6. Фреквенции на тоновите A_n, n=2,3,4,5
Figure 6. Frequency of pitch classes - A_n, n=2,3,4,5

Но, тоа растојание за да се доближи до 1, тогаш треба да важи $log_b \frac{x}{y} = 1$. Фреквенциите x и y се така избрани што важи $\frac{x}{y} = 2$, каде е претпоставено дека x е поголемата фреквенција. Затоа, имаме $1 = log_b \frac{x}{y} = log_b 2$, од каде се добива дека b=2. Со ова е покажано дека растојанието помеѓу тонови е разликата од логаритамска функција со основа 2 од нивните фреквенции.

4.3 КВИНТЕН КРУГ

Квинтен круг е важен концепт во теоријата на музиката, кој геометриски ги опишува врските помеѓу 12 тонови на хроматската скала и предзнаците во дурски и молски тоналитети [12], [14], [16], [19]. Квинтниот круг е корисна алатка за композиторите, кога создаваат хармонизација во нивните дела, кога креираат мелодии, во формирањето на акорди како и при модулации во различни тоналитети во композициите. Чиста квинта е растојание од пет стапала во некоја скала, концепт кој важи и за дурски и за молски скали.

Нека кругот започнува на врвот со C-dur (A-moll), без предзнаци (повишувалки или снижувалки). Ако се движиме во насоката на движењето на стрелките на часовникот од врвот, нотите се поместуваат за квинти (за пет стапала), додека бројот на повишувалки се зголемува, сѐ додека да се достигне максимумот од 7 предзнаци. Движењето во спротивен правец од движењето на стрелките на часовникот, нотите се поместуваат за кварта (за 4 стапала), а бројот на снижувалки се зголемува сѐ до 7. Најдолу на кругот, шесте повишувалки и шесте снижувалки се преклопуваат, односно станува збор за енхармонска скала. Според тоа, почнувајќи од кој било тон во квинтниот круг, ако се движиме со интервал чиста квинта, според еднаква темперација (equal temperament), ќе поминеме низ сите 12 тонови и пак ќе се вратеме на истата нота.

Да се потсетиме дека, ако се движиме на ист начин, според питагорејскиот систем на чисти квинти, нема да биде возможно пак да се вратиме на истата нота (тонска висина), односно кругот нема да може да се затвори заради вредноста на Питагорината кома. Затоа потребата од темпериран систем се решава со штимањето според еднаква темперација.

Квинтниот круг најчесто се користи во композициите од класичната музика, додека за некои анализи во џез музиката се користи квартниот круг.

Истражувањата на Питагора за цикличната група од ноти да биде затворена во однос на транспозицијата, со записот на нотите како цели броеви, биле неуспешни. Но, ова резултирало со појавувањето на хроматската скала, да се постават врските помеѓу бројот на предзнаци и колку има квинти и кварти [5], [6]. После откривањето на 5 предзнаци за повишување и снижување, во дијатонската скала (C, D, E, F, G, A, B, C), со воведувањето еднаквата темперација, се покажува дека чиста кварта е 5 линеарни чекори во логаритамска скала и чиста квинта е 7 линеарни чекори во логаритамска скала. Овие два броја се особено важни во хроматската скала.

Имено, бројот 5 покажува дека ако C_n се помести за квинта (7 логаритамски чекори) надолу, ќе биде еквивалентно со C_{n-1} поместено за кварта нагоре (5 логаритамски чекори).

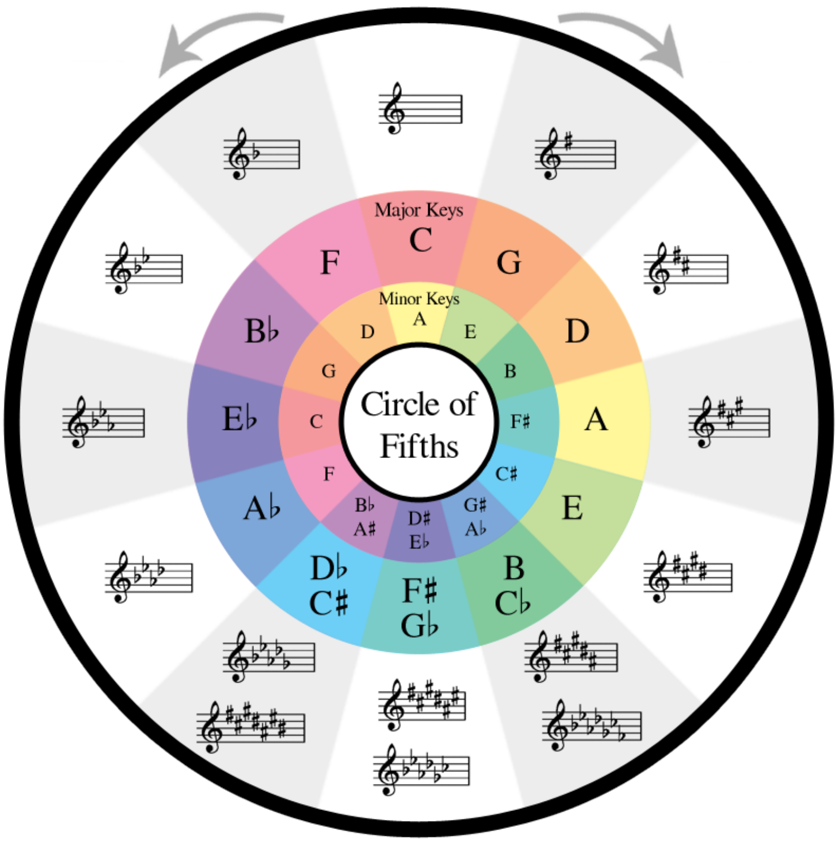
Хроматската скала (заради еднаква темперација) може да биде запишана како {C,C#/D♭, D,D#/E♭, E, F, F#/G♭, G, G#/A♭, A, A#/B♭,B}=$Z_{12} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

Помножена со 7 (поместување за 7 полустепени) е

$\{7к(mod12),\ k = \{0,1,2, \dots 11\}\} = \{0,7,14,21, \dots 77(mod12)\} = \{0,7,2,9,4, \dots 5\}$=

{C, G, D, A, E, B, F#/G♭, C#/D♭, G#/A♭, D#/E♭, A#/B♭, F}.

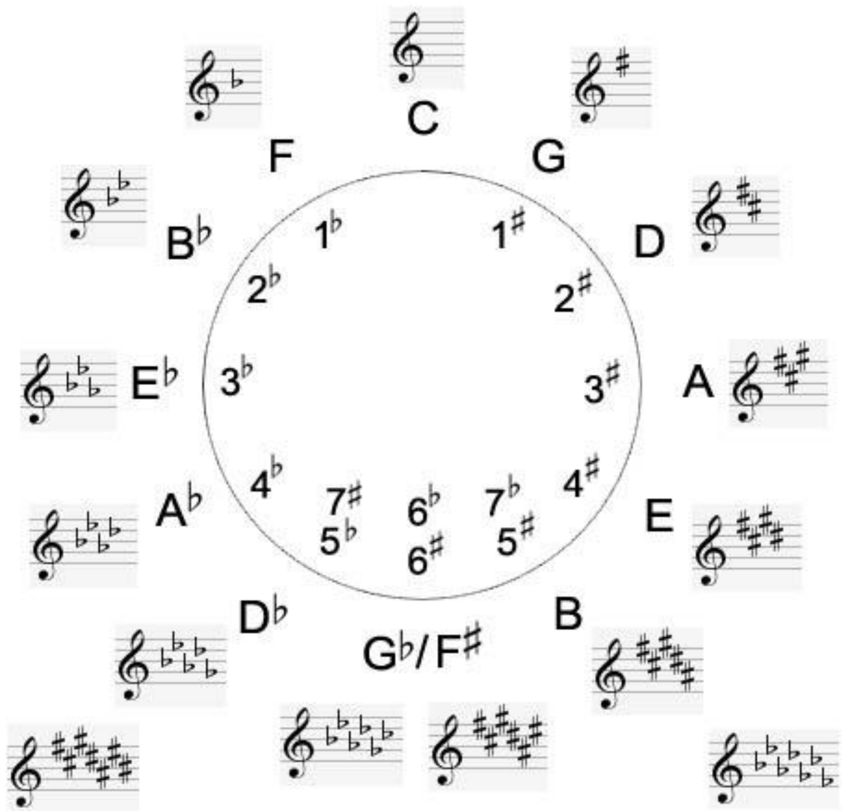
На овој начин е добиено множеството од чисти квинти.



Слика 7а. Квинтен круг

Figure 7a. Circle of fifths

Но, сега ќе ги разгледаме нотите во квинтниот круг, не како ноти од 0 до 11, туку од 0 до 6 на лево и на десно.



Слика 7б. Квинтен круг со означени повишувалки и снижувалки

Figure 7b. Circle of fifths with number of sharps and flats

Бројот каде што стои нотата ќе го покажува бројот на предзнаци во таа скала. Бројот на предзнаци, за произволен к, каде к ја означува нотата од хроматската скала е

$$7k(mod12)\ \text{повишувалки, ако}\ 7k(mod12) \leq 6$$

$$\big(7k(mod12) - 2(7k(mod12) - 6)\big)\text{снижувалки, ако}\ 7k(mod12) > 6.$$

На пример: а) за нотата E, имаме E=4

$7 \cdot 4(mod12) \equiv 4(mod12)$, 4<6, значи, ќе има 4 повишувалки;

б) за нотата F=5, имаме

$7 \cdot 5(mod12) \equiv 11(mod12) > 6,$

(11-2(11-6))=11-10=1 снижувалка.

4.4 КОМБИНАТОРИКА И ДВАНАЕСЕТ ТОНСКА МУЗИКА

На почетокот од дваесетиот век, Арнолд Шоенберг (1874-1951) ја создал дванаесет-тонската техника на компонирање, метод со кој сите 12 тонови од хроматската скала се рамноправни во однос на нивното појавување во композицијата. Овој начин на компонирање музика, по создавањето, во првата половина на XX век е продолжен и од неговите ученици Антон Веберн (1883-1945), Албан Берг (1885-1935), додека во 50-тите години на XX век оваа техника на компонирање станува многу популарна и нашироко употребувана и од Милтон Бабит (1916–2011), Лучијано Берио (1925-2003), Пјер Булез (1925-2016) и други [15], [21], [22], [23]. Во овој метод не постои тонален центар и речиси е напуштена консонанцата во корист на комбинаториката. Ова претставува еден тип на музички серијализам, кој е конструиран од класи од ноти, кои формирајќи тонски серии создаваат уникатни мелодиски и хармонски структури. Композицијата која е направена со овој 12 тонски систем, се прави со помош на табела со 12 редици и 12 колони, каде што тие ги имаат следниве својства: најпрво, секоја редица и секоја колона ги содржат сите 12 ноти само по еднаш, без повторување. Првата редица ќе се нарекува основна редица. Истата е произволно пополнета, значи може да биде било која низа од 12 различни тонови со произволен редослед. Бројот за изборот за основна редица е $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, па така се добиваат големи можности за компонирање.

Првата колона е составена од низата ноти кои се добиени со инверзија на првата редица. Што значи, на втората редица, инверзна и е втора колона, односно, на i-та редица инверзна и е i-та колона, за $0 \leq i \leq 11$. Редиците се добиваат со помош на траспозиција, каде што секоја редица се конструира со помош на двата елементи кои се на позиција (1,1) и (2,1). Од тука ќе се утврди за каква транспозиција станува збор за втората редица, па од (1,1) и (3,1) за транспозицијата од трета редица итн, од (1,1) и (i,1) за i-та редица, за $0 \leq i \leq 11$. Кога табелата е пополнета на овој начин, се забележува дека редиците читани од десно кон лево се ретроградни низи, соодветно на секоја редица, а колоните читани од долу на горе се ретроградна инверзија.

На пример, нека низа {C, A, G, D#, E, F, D, B, B♭, G#, C#, F#} е земена за основна низа од тонови. Ја пополнуваме табелата според објаснетото правило.

Табела 2. Табела со тонови добиени користејќи дванаесет тонски систем

Table 2. Table with Twelve - tone system with pitch tone clases

	I^{0}	I^{9}	I^{7}	I^{3}	I^{4}	I^{5}	I^{2}	I^{11}	I^{10}	I^{8}	I^{1}	I^{6}	
T^{0}	C	A	G	D#	E	F	D	B	B♭	G#	C#	F#	R^{0}
T^{3}	D#	C	B♭	F#	G	G#	F	D	C#	B	E	A	R^{3}
T^{5}	F	D	C	G#	A	B♭	G	E	D#	C#	F#	B	R^{5}
T^{9}	A	F#	E	C	C#	D	B	G#	G	F	B♭	D#	R^{9}
T^{8}	G#	F	D#	B	C	C#	B♭	G	F#	E	A	D	R^{8}
T^{7}	G	E	D	B♭	B	C	A	F#	F	D#	G#	C#	R^{7}
T^{10}	B♭	G	F	C#	D	D#	C	A	G#	F#	B	E	R^{10}
T^{1}	C#	B♭	G#	E	F	F#	D#	C	B	A	D	G	R^{1}
T^{2}	D	B	A	F	F#	G	E	C#	C	B♭	D#	G#	R^{2}
T^{4}	E	C#	B	G	G#	A	F#	D#	D	C	F	B♭	R^{4}
T^{11}	B	G#	F#	D	D#	E	C#	B♭	A	G	C	F	R^{11}
T^{6}	F#	D#	C#	A	B♭	B	G#	F	E	D	G	C	R^{6}
	RI^{0}	RI^{9}	RI^{7}	RI^{3}	RI^{4}	RI^{5}	RI^{2}	RI^{11}	RI^{10}	RI^{8}	RI^{1}	RI^{6}	

На основната низа од тонови земена во примерот, еквивалентно множество ѝ е множеството { 0, 9, 7, 3, 4, 5, 2, 11, 10, 8, 1, 6 }.

Оваа низа е прва редица во табелата. Првата колона ја добиваме со нејзината инверзија. На овој начин, елементите од прва колона ќе бидат елементите од следново множество { 0, 3, 5, 9, 8, 7, 10, 1, 2, 4, 11, 6 }.

Од тоа што на позиција (1,1) стои тонот C, а на позиција (2,1) стои тонот D#, добиваме дека втората редица е транспозиција за 3 полустепени бидејќи D#=3, а C=0, имаме 0+n=3(mod12), од каде се добива дека n=3. На овој начин ги редиме и следните членови во втората редица, со транспозиција на секој тон, соодветно.

Слично, од тонот F=5 на позиција (3,1), добиваме дека трета редица е добиена со транслација за 5 полустепени, затоа што од 0+n=5(mod12), добиваме дека n=5. Постапката се повторува по редици сѐ до пополнување на целиот квадрат. После пополнувањето на целата табела, може да се види дека секоја колона е навистина инверзија на соодветната редица, прва колона на прва редица, втора колона е инверзна на втора редица итн. Исто така, се забележува дека ако ги читаме редиците од десно кон лево тие се ретроградни на самите редици и колоните, читајќи ги од долу па нагоре се ретроградни инверзии на соодветните редици.

Аналогно на табелата пополнета со тонови, ја имаме табелата пополнета со броеви, од каде уште појасно ќе се види дека всушност станува збор и за алгебарска група.

Табела 3: Табела со броеви добиени користејќи дванаесет тонски систем

Table 3: Table with Twelve - tone system with integers modulo 12

	I^0	I^9	I^7	I^3	I^4	I^5	I^2	I^{11}	I^{10}	I^8	I^1	I^6	
T^0	0	9	7	3	4	5	2	11	10	8	1	6	R^0
T^3	3	0	10	6	7	8	5	2	1	11	4	9	R^3
T^5	5	2	0	8	9	10	7	4	3	1	6	11	R^5
T^9	9	6	4	0	1	2	11	8	7	5	10	3	R^9
T^8	8	5	3	11	0	1	10	7	6	4	9	2	R^8
T^7	7	4	2	10	11	0	9	6	5	3	8	1	R^7
T^{10}	10	7	5	1	2	3	0	9	8	6	11	4	R^{10}
T^1	1	10	8	4	5	6	3	0	11	9	2	7	R^1
T^2	2	11	9	5	6	7	4	1	0	10	3	8	R^2
T^4	4	1	11	7	8	9	6	3	2	0	5	10	R^4
T^{11}	11	8	6	2	3	4	1	10	9	7	0	5	R^{11}
T^6	6	3	1	9	10	11	8	5	4	2	7	0	R^6
	RI^0	RI^9	RI^7	RI^3	RI^4	RI^5	RI^2	RI^{11}	RI^{10}	RI^8	RI^1	RI^6	

Следи пример на кратка мелодија со комбинација на низа од тонови од неколку редици и колони:

Слика 8. Кратка мелодија, компонирана со основна редица, множеството

{C, A, G, D#, E, F, D, B, B♭, G#, C#, F#}

Figure 8. A short melody, composed with a prime row, the set

{C, A, G, D#, E, F, D, B, B♭, G#, C#, F#}

Во овој пример можеме да видеме дека покрај основната низа на тонови, со која почнува главната мелодија, се употребени уште неколку редици и колони. Значи, покрај T^0, земена е 11-та редица R^{11}, ретроградност на транспозицијата T^{11}, прва колона RI^0 која е ретроградна инверзија на основната (прва) редица, шестата колона RI^5, ретроградната инверзија на шеста редица и четврта колона I^3 инверзија на четврта редица.

5. ТЕОРИЈА НА ГРУПИ ВО МУЗИЧКАТА ТЕОРИЈА

5.1. ГРУПИ И ГЕНЕРАТОРИ

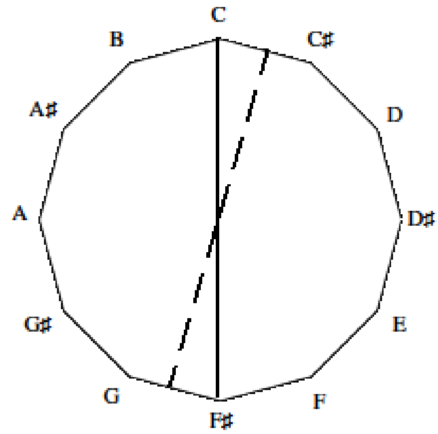
Музичките композиции не секогаш се случајна колекција од звуци. Честопати, една мелодиска линија, хармонска структура, мотив или музичка идеја, повеќе пати се повторуваат во некое музичко дело и може да бидат подложени на разни трансформации како што музиката напредува.

Да го разгледаме следниов пример, извадок од мелодијата од првата дводелна инвенција на Бах за пијано:

Слика 9. извадок од мелодијата од првата дводелна инвенција на Бах за пијано
Figure 9. Excerpt from Bach’s first two-part invention for piano

Ја разгледуваме низата од првите седум ноти, A-G-F-E-G-F-A, како мелодиска единица која се повторува повеќепати во овој извадок, во форма F-E-D-C-E-D-F, а потоа во форма D-C-B-A-C-B-D. Ако погледнеме и слушнеме внимателно, можеме да препознаеме дека и низите E-G-F-A-G-F-E и C-E-D-F-E-D-C во извадокот се истиот модел наназад и обратно. Ние ги добиваме овие повторувања на воведната мелодиска единица со примена на музички симетрии или трансформации, аналогни на геометриските симетрии, како што се транслација и осна симетрија. Соодветно на тоа, можеме да ги разгледаме и да ги разбереме музичките трансформации како го користат математичкиот јазик на групи на симетрии.

Како едноставна симетрична група, ќе го формираме множеството од 12 различни тонови и ќе ги поставеме на темињата од еден правилен дванаесетаголник.



Слика 10. 12-те ноти распоредени на темињата на правилен дванаесетаголник
Figure 10. Twelve distinct pitch classes place on the vertices of a regular dodecagon

Правилен дванаесетаголник има ред на ротациија 12 и 12 оски на симетрија. Ако го ротираме за агол од 30^{o} во насока на движењето на стрелките на часовникот, тонот C се пресликува во C#, C# во D, D во D#, итн. и на овој начин е направена кореспонденција помеѓу музичка транслација или транспозиција за полустепен нагоре. А, ако пак направеме ротација на дванаесетаголник за агол од 30^{o} во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот, тогаш C се пресликува во B, C# во C, D во C# итн., тогаш имаме транспозиција за полустепен надолу.

Може да се направи симетрија и околу оска која ги поврзува тоновите C и F#, тогаш C се пресликува во самото себе, C# во B и обратно, D во A# и обратно... Вакви симетрии можат да се направат и со другите оски на дванаесетаголникот, а вака добиените симетрии се нарекуваат *инверзии* во музиката.

Ќе ги означеме овие траспозиции така што со x се означува транспозицијата за полустепен нагоре и со y се означува транспозицијата за полустепен надолу. Тогаш, $x \cdot x$ ќе означува ротација за 60^{o} во насока на движењето на стрелките на часовникот или (музички) за цел степен. Со $y \cdot x$ C оди во C#, C# во C, B се пресликува во D, D во B, итн. Значи $y \cdot x$ во овој случај е таква симетрија која за оска на симетрија ја има оската на многуаголникот која минува низ средината на C-C# и F#-G. Секоја трансформација која ќе биде спротивна на x, ќе ја бележиме со x^{-1}, односно, транспонирање за полустепен надолу. Тогаш, можеме да забележеме дека $x^{-1}=x^{11}$ и $y^{-1}=y$. Значи, симетријата е рефлексивна и важи $(y\cdot x)^{-1}=y\cdot x$

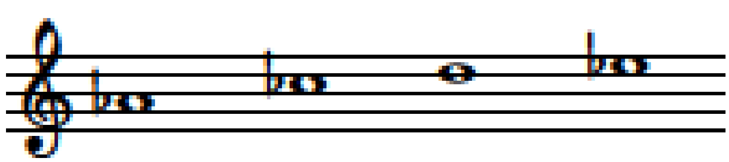
Математички, всушност е конструирана група. Во овој случај, елементи на множеството се сите симетрични трансформации на правилниот дванаесетаголник. Операцијата „·“ е добро дефинирана во ова множество и било која комбинација меѓу два елемента од множеството е исто така елемент на групата. Неутрален елемент ќе биде трансформацијата која го остава дванаесетаголникот на свое место. Постои и инверзен елемент од самата дефинираност на x и y.

Бројот на различни елементи во групата се нарекува ред на групата. Групата од симетрии на правилен дванаесетаголник има ред 24, 12 различни симетрии за агол од 0^{o} (неутрален елемент), за агол од 30^{o}, 60^{o},...330^{o} и 12 околу оските на симетрија. Ваквата група има ред 24, се нарекува диедрална и се бележи со D_{12}.

Уште повеќе, со комбинирање на дефинираните ротации x и y и дефинираната операцијата „·“, истите се и генератори на групата од такви симетрии бидејќи преку нив, можат да се претстават сите елементи на D_{12}. Значи, множеството {x,y} е генератор за D_{12}. Да забележиме дека $x^{12}=1, y^{2}=1$ и $y\cdot x=x^{11}\cdot y$. Имаме, $x^{-1}=x^{-1}\cdot 1=x^{-1}\cdot x^{12}=x^{11}$, $y^{-1}=y^{-1}\cdot 1=y^{-1}\cdot y^{2}=y$, $y\cdot x\cdot y\cdot x=x^{11}\cdot y\cdot y\cdot x=x^{11}\cdot y^{2}\cdot x=x^{11}\cdot x=1$.

Наједноставен пример е групата D_{12} на музичка трансформација, чии елементи се трансформациите на 12 тонска скала. Нека x е транслација за полустепен нагоре, а y е инверзијата околу C. Можеме да ги видеме сите музички интервали добиени со трансформации во таа тонска скала.

На пример, да го погледнеме мотивот на Заубер (zauber - волшебник), кој се повторува во операта Парсифал на Вагнер:



Слика 11. Мотивот на Заубер во операта Парсифал од Ричард Вагнер

Figure 11. Zauber motif of Wagner’s opera Parsifal

Забележуваме дека овој мотив е низа од две молски терци и еден полустепен, а математички, како елементи на групата D_{12}, двапати примена на x^3 и еднаш x трансформацијата. Мотивот започнува од нотата A♭, но се појавува неколку пати низ операта на различни тонски висини. Можеме да ги видиме сите појави на овој мотив исто како низата од елементите на D_{12}, употребени на овие различни почетни позиции.

Гледајќи ги музичките интервали како трансформации на висински класи т.е. тонови, тие би можеле да бидат употребени не само како следни ноти во мелодиската линија, туку исто така и како хармонски прогресии во одредено музичко парче. Во прелудиумот на воведниот чин во истата опера на Вагнер, можеме да го слушнеме следниот извадок:

Слика 12. Фрагмент од операта Парсифал од Вагнер

Figure 12. Segment of Wagner’s opera Parsifal

Овој извадок тонизира, односно има хармонска прогресија, со основа од низата од нотите A♭, C♭, D и E♭. Интервалите помеѓу овие темперирани тонови се истите како во мотивот на Заубер, на кој кореспондира низата x^3, x^3, x во алгебарски групи. Тоа значи дека трансформациите на интервалите од мотивот на Заубер се појавува на самиот почеток на операта, многу порано пред појавата на Заубер мотивот во мелодиска форма.

5.2 СИМЕТРИЈА, ТРАНСПОЗИЦИЈА И ИНВЕРЗИЈА НА МУЗИЧКИ МОТИВИ

Транспозициите и инверзиите се функции дефинирани од $Z_{12} \to Z_{12}$ и $Z_7 \to Z_7$ и истите многу музичари ги користат. Транспозициите и инверзиите многу често се применуваат во музичките дела.

Кога слушаме сегмент од музичко дело, ние всушност ги слушаме интервалите помеѓу поединечните тонови. Односот помеѓу овие интервали ја прави музиката попривлечна за нас. Математички, транспозицијата го доловува она што музичарите го прават често низ мелодијата, повишување и снижување на одредени тонови, при што интервалот не се менува.

Дефиниција 1: Нека n е цел број по модул 12. Функцијата $T_n: Z_{12} \to Z_{12}$, зададена со $T_n(x) = x + n(mod 12)$ се вика **транспозиција** за n.

На пример:

$T_4: Z_{12} \to Z_{12}$

$$T_4(5) = 5 + 4 = 9$$

$$T_4(8) = 8 + 4 = 0$$

$$T_4(10) = 10 + 4 = 2$$

Транспозицијата на акордот $\{0,4,7\}$ за 7 чекори изгледа вака $T_7\{0,4,7\} = \{7,11,2\}$.

Со други зборови, транспозиција на низата x од тонови за n полустепени е низата $T^n(x)$, во која, секој тон од таа низа е поместен за n полустепени. На пример, ако $x = 3\ 0\ 8$, имаме $T^4(x) = 7\ 4\ 0$.

Слика 13. Првите два такта од Етида Оп. 25 Бр. 10, од Фредерик Шопен

Figure 13. The first two bars of Chopin's Etude, Op.25 No.10

На пример, во првите два такта од Етида Оп. 25 Бр. 10, од Ф. Шопен (слика 13), ги имаме следните низи од тонови запишани со броеви:

6–5–6 7–8–9 8–7–8 9–10–11 **|** 10–9–10 11–0–1 0–11–0 1–2–3

отсвирени како триоли, дуплирани во октави во двете раце истовремено. Втората половина од првиот такт е добиена со примена на трансформацијата T^2 на првата половина од тактот. Трансформацијата T^2 се употребува повторно во првата половина на вториот такт, а исто така и во втората половина. Па, ако x е низата 6-5-6-7-8-9, тогаш тие два такта можеме да ги запишеме како

$$x\ T^2(x)\ |\ T^4(x)\ T^6(x).$$

Слика 14. Првите четири такта од Етида Оп. 25 Бр. 10, од Фредерик Шопен

Figure 14. The first four bars of Chopin's Etude, Op.25 No.10

Третиот и четвртиот такт од од истата композиција се (слика 14):

2–3–4 3–4–5 4–5–6 5–6–7 **|** 6–7–8 7–8–9 7–8–9 8–9–10.

Означувајќи ја со y низата од тоновите 2 3 4, ќе забележиме дека во вториот такт, последната група од ноти (1-2-3) е всушност $T^{-1}(y)$, додека пак 3 и 4 такт можат да бидат запишани како:

$$y\ \ T(y)\ \ T^2(y)\ \ T^3(y)\ |\ T^4(y)\ \ T^5(y)\ \ T^5(y)\ \ T^6(y).$$

Дефиниција 2: Нека n е цел број по модул 12. Функцијата $I_n: Z_{12} \to Z_{12}$, зададена со $I_n(x) = -x + n(mod12)$ се вика **инверзија** за n.

На пример: Нека $I_5: Z_{12} \to Z_{12}$

$$I_5(4) = -4 + 5 = 1$$

$$I_5(8) = -8 + 5 = -3 = 9$$

$$I_5(10) = -10 + 5 = -5 = 7.$$

Ако пак сакаме да ја определиме инверзијата на темата од Симфонијата бр. 94 (Surprise Symphony) од Ј. Хајдн (слика 5) за 0, таа би била: $I_0\{0,0,4,4,7,7,4,5,5,2,2,11,11,7\} = \{0,0,8,8,5,5,7,7,10,10,1,1,5\}$.

Всушност, инверзијата I(x) на низата x ја трансформира во низа, во која секој член се пресликува во 12-n. На пример, за x = 3 0 8, I(x) = 9 0 4.
И низата $T^nI(x)$ се смета за инверзија на x. За x = 3 0 8, имаме $T^6I(x)$ = 3 6 10.

Дефиниција 3: Ретроградност R(x) за низата x е низата составена од членовите на x, во обратен редослед.

На пример, за низата x = 3 0 8, ретроградна е низата R(x) = 8 0 3.

За операторите T, I and R важат следниве релации:

$$T^{12} = e,\ T^nR = RT^n,\ T^nI = IT^{-n},\ RI = IR,$$

каде *e* е идентичен оператор, не го менува тонот или T^0.

Во теорија на групи, операцијата T^n $(0 \le n \le 11)$ ја формира цикличната група Z_{12}. Операцијата R, заедно со идентичниот оператор, ја формираат цикличната група Z_2. Операциите T и R се комутативни.

Значи, можеме да кажеме дека постојат 4 форми на тонската низа. Основна форма е оригиналната форма на низата од тонови, транспозиција $T^n(x)$, инверзија $T^nI(x)$ и ретроградна форма $T^nR(x)$. На крај, овде може да се додаде и ретроградна инверзија $T^nRI(x)$.

Всушност, кога се зборува математички, транслацијата ќе ја објаснува музичката транспозицијата; осна симетрија со хоризонтална оска, која може да минува низ некој тон или линија на петолинието, ќе ја покажува музичката инверзија; музичката ретроградност ќе биде аналогна на осна симетрија со вертикална оска на симетрија.

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1: Анализа на Фуга бр. 6 од Добро Темперирано Пијано, Книга 1 од J. C. Бах

Јохан Себастијан Бах (1685-1750) на фугата ѝ дава една нова димензија. Фуга (*fuga* на латински значи бегство) е композициски принцип во музиката, што се постигнува со нижење на музички имитации. Тој ги компонирал двете книги *Das Wohltemperirte Clavier* / *Well-Tempered Clavier Book I* и *Well-Tempered Clavier Book II*, (Добро Темперирано Пијано, Книга 1 и Книга 2) кадешто, секоја од нив содржи по 24 прелудиуми и фуги. Фугата, најчесто започнува со изложување на главната темата наречена субјект. Субјектот (темата) се повторува повеќе пати, но во различни гласови. При тоа, се забележуваат транспозиции и инверзии.

Нашата анализа ќе биде насочена кон наоѓање неколку транспозиции и инверзии бидејќи истите ги разгледуваме како математички структури, без да се дадат детални анализи од музички аспект.

Во овој дел ќе ја разгледаме главната тема од фугата 6 во D-moll од *Well-Tempered Clavier Book I*.

Субјектот (темата) на фугата е подреденото множество $\langle D, E, F, G, E, F, D, C\#, D, B\flat, \mathrm{G}, \mathrm{A}\rangle$=$\langle 2,4,5,7,4,5,2,1,2,10,7,9\rangle$, кое започнува со првиот такт и трае сè до третиот такт. Нека ова множество е означено со P. Се забележува дека се користени сите 12 ноти. Во третиот такт, другиот глас ја има следнава мелодија $\langle A, B, C, D, B, C, A, G\#, A, F, D, E\rangle = \langle 9,11,0,2,11,0,9,8,9,5,2,4\rangle$ и нека ова множество го обележиме со Q.

Слика 15. Фуга бр. 6 од Ј. С. Бах

Figure 15. Fugue No. 6, J. S. Bach

Да ја забележиме врската меѓу овие две множества: Q=T_7P. Сите ноти од првиот такт се поместени за 7 чекори и се добиени нотите од третиот такт. Во шестиот такт, субјектот се враќа во истата форма како во воведот, но октава пониско. Во осмиот такт, $\langle E, F, G, A, F, B\flat, G, F\#, G, E\flat, \mathrm{C}\#, \mathrm{D}\rangle = \langle 4,5,7,9,5,10,7,6,7,3,1,2\rangle$, првите 5 ноти се добиени со T_2, но следните 5 ноти со T_5, 11-та нота нема поврзување, а 12-та е добиена со T_5. Во 13-от такт, имаме $\langle A, B, C\#, D, B, C\#, A, G\#, A, F, D, E\rangle = \langle 9,11,1,2,11,1,9,8,9,5,2,4\rangle$. Ова е исто така T_7P на третиот такт, освен за тонот **1**. И во 17-от, 18-от и 21-от такт:

$$\langle A, B, C, D, B, C\#, A, G\#, A, F, D, E\rangle = \langle 9,11,0,2,11,\mathbf{1},9,8,9,5,2,4\rangle$$

$$\langle A, B, C\#, D, B, C, A, G\#, A, F, D, E\rangle = \langle 9,11,\mathbf{1},2,11,0,9,8,9,5,2,4,\rangle$$

$$\langle A, B, C\#, D, B, C\#, A, G\#, A, F, D, E\rangle = \langle 9,11,\mathbf{1},2,11,\mathbf{1},9,8,9,5,2,4\rangle$$

сите се добиени со T_7, освен елементот **1**. Да се потсетиме дека интервалот од 7 чекори е многу важен во западната музика, познат како совршена, односно чиста квинта. Овде можеме да забележиме транспозиции за квинта кои се појавуваат најмалку 4 пати во првата половина од делото. Во многу случаи, фугите го имаат ова својство. Значи, транспозицијата игра голема улога во фугите.

Да ја анализираме инверзијата која се среќава. Ги разгледуваме 14-от и 22-от такт:

$$\langle E, D, C\#, B, D, C\#, E, F, E, A, C, B\flat\rangle = \langle 4,2,1,11,2,1,4,5,4,9,0,10\rangle$$

$$\langle E, D, C\#, B, D, C\#, E, F, E, G, B\flat, \mathrm{A}\rangle = \langle 4,2,1,11,2,1,4,5,4,7,10,9\rangle$$

Овие два такта се приближно идентични, освен последните три ноти. Првите два елементи се исти со елементите од множеството P, но во обратен ред. Трите последни ноти од 22-от такт се трите последни ноти од P, но по друг редослед. Ако разгледаме I_6P, инверзија на P за 6, добиваме $\langle 4,2,1,11,2,1,4,5,4,8,11,9\rangle$ што речиси е чиста квинта како во 14-от и 22-от такт, освен последните три ноти.

Со помош на ваквата анализа на фугата, се појаснува нејзината форма и истата станува поразбирлива за слушање. Математичарот, кој претходно ги увидел транспозицијата и инверзијата во фугата, на јасен и прецизен начин ја препознава и ја слуша истата.

Пример 2: Анализа на „Огномет“ (Feux d’artifice) од Клод Дебиси

Ќе го разгледаме делото „Огномет“, последниот од 24 прелудиуми за пијано од К. Дебиси.

Воведниот такт на „Огномет“, веднаш започнува со инверзна трансформација, слушаме повторување на низата ноти F-G-A-B♭-A♭-G♭, каде последните три ноти се инверзија на првите три. Користејќи ја аналогијата со дванаесетаголникот, инверзијата е всушност направена околу оската на симетрија помеѓу G-A♭ или еквивалентно, помеѓу D♭-D. Инверзијата ја пресликува F во B♭, G во A♭, A во G♭. Нека инверзијата биде обележана со I. Забележуваме дека првите три ноти F-G-A се инверзно симетрични околу G, а последните три B♭-A♭-G♭ симетрично инверзни околу A♭. Нека со J е означена инверзијата околу G или еквивалентно околу D♭, а со K инверзијата околу A♭, односно околу D. Ќе забележиме дека овие три инверзии се појавуваат низ целото парче музика.

Означувајќи го транспонирањето за половина чекор нагоре со T, добиваме дека $I \cdot K = J \cdot I = T$. Ова е трансформација на секоја нота со I инверзија, проследена со K инверзија, која ја транспонира нотата за полустепен нагоре и J инверзијата проследена од I инверзија исто така ја траспонира за полустепен нагоре. Слично, $K \cdot I = I \cdot J = T^{-1}$. Па, оттука може да ги изведеме и релациите $K = I \cdot T$ и $J = T \cdot I$.

Се забележува дека во текот на прелудиумот се применуваат повеќе пати и инверзиите и траспозициите. Исто така и дека множеството ноти $\{F, G, A\}$ е инверзно на себе со инверзија J. Слично, $\{B\flat, A\flat, G\flat\}$ е инверзно со инверзија K. Ако S е било кое е J инваријантно, тогаш I се применува на S, исто како $J \cdot I$, како што T применува на S или $I \cdot K$ се применува на S.

Така, I инверзијата е истото множество од ноти, кое може да се добие и со транспозицијата T на S. $\{B\flat, A\flat, G\flat\}$ се I инверзни и T транспонирани на $\{F, G, A\}$ или тоа е дека се K инваријантни. Во контекст на овие инверзии, D и A♭ звучат специфично во тактовите од 3-ти до 14-ти и како центар на инверзијата K.

Слика 16. Фрагмент од „Огномет“ од Дебиси

Figure 16. Segment of Feux d’artifice, Debussy

Во тактовите од 7-ми до 10-ти, на D му е додадена и дополнителна нота C, којашто звучи заедно со низата F-G-A. Множеството од петте ноти $\{\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{A}\}$ формира пентатонска скала, звук кој најчесто е употребуван во композициите на Дебиси и тие се J инваријантни. Црните дирки во 17-от такт ги содржи нотите $\{D\flat, E\flat, G\flat,\ A\flat, B\flat,\}$ кои добиени со T транспозиција и I инверзија на $\{\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{A}\}$ кое исто така е и K инваријантно.

Тактовите од 25 - 46 содржат три варијанти од кои може да се направи основниот „мелодиски“ мотив на прелудиумот, како што е претставено на сликата:

Слика 17. Фрагмент од „Огномет“ од К. Дебиси
Figure 17. Excerpt from Feux d'artifice од A. C. Debussy

Ги слушаме односите на Т-транспозиција во овие варијанти, на пример од {C, A, G} до {C#, A#, G#} и до {D, B, A} во првата варијанта, и {F, E♭} до {G♭, F♭} и {B♭, G♭, F♭} до {B, G, F} во третата варијанта. Исто така, можеме да ја слушнеме и промената од {F, D♭, C♭} до {G, E♭, D♭} во втората варијанта како композиција на две Т-транспозиции. Хармонијата на првата варијанта, тактовите 25-34, се состојат главно од нотите {E, D, C, B♭, G}, што повторно е Ј-инваријантно множество. Ова множество содржи G, еден од центрите на Ј-инверзија и се проширува за да го вклучи C#, другиот центар на Ј-инверзијата, во тактовите 33 и 34. Нотите на хармонијата се подложени на две Т-транспозиции во 30-от такт, за да се совпадне Т-транспозиции на мелодичниот мотив. Хармонијата на втората варијанта, тактовите 35-38, се состојат од нотите {G, D♭, E♭, F, C♭}, кои имаат препознатлив звук од цели степени и може да се смета за преод кон тактот 39. Хармонијата на тактовите 39 и 40 се состои од нотите {F, E♭, D♭, C♭, B♭, A♭, G♭}, што е K-инваријанто множество, а симетријата K-инверзија е означена со A♭ нотата во басот, кои се центар на оваа симетрија. Ова преминува во хармонија која се состои од нотите во D♭-dur дијатонска скала во тактовите 41-43, што всушност е инваријантно под нова симетрија околу нотите A и E♭. Ова е хармонијата на третата варијанта од мелодискиот мотив.

Следниот дел од тактот 46 до тактот 64 покажува бројни симетрии. Повторувачки множества од ноти {B, A, F#, D#, C#} во тактовите 46-48 е транспозиција на T^{-1} на J-инваријантното множество {E, D, C, B♭, G} од тактот 25, додека {C#, B, G#, E#, D#} и {A, G, E, C#, B} во тактовите 47 и 48 се T и T^{-2} транспозиција. Нотите од тактовите 53-56 го сочинуваат целосното множество {A♭, B♭, C, D, E, F#}, кое со шест подеднакво распоредени ноти од хроматската скала е инваријантно во сите инверзии. T, T^{2}, T^{-1} и T^{-2} транспозициите се слушаат во мелодиската линијата C# -B# -C# -D-F# -E-F# -G# во тактовите 57-60.

Овој Feux d'Artifice прелудиум е пример за атонална композиција каде што не постои јасен концепт на клуч, односно тоналитет. Наместо тоа, акордите и односите помеѓу нотите се воспоставени врз основа на инверзни симетрии I, J и K кои се користат постојано низ целата композиција.

6. МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА НА ФРАГМЕНТИ ОД МУЗИЧКИ ДЕЛА

Во продолжение се презентираат примери во кои се дадени фрагменти од познати музички дела и композитори. Ќе дадеме нивна анализа, да видиме како разните видови на симетрии се употребуваат во музичките дела.

Понекогаш е доволен само еден мал музички мотив, кој со помош на „игра“ на симетрии, може да се состави едно прекрасно музичко дело.

Разгледуваме неколку видови на симетрии во музиката, на кои им правиме коренсподенција со симетриите во математиката.

Имено, кога зборуваме за математичка **транслација** на еден мотив или тема, ако истата се појавува хоризонтално, односно, поместување на десно, тогаш музички станува збор за повторување на тој мотив или тема. Кога ќе се појавува една низа од тонови, поместени нагоре или надолу за неколку полустепени (степени), тогаш ова е во корелација во вертикална транслација.

Кога станува збор за **осна симетрија**, со хоризонтална или вертикална оска на симетрија, математички кажано, ова во музичкото дело се гледа како инверзија (музички) ако имаме хоризонтална симетрија околу оска која ќе минува низ некој тон или линија од петолинието или ретроградност (музички), ако имаме вертикална симетрија, со оска која минува точно низ тактовата црта или низ некој тон. Овде, низата од тонови кои ги имаме од левата страна се пресликуваат од десната страна на оската, така што низата од тонови е во обратен редослед од онаа основната. На овој начин, оригиналот и сликата формираат палиндром, кој како форма се среќава често низ музичките пасажи.

Ротација за 180º ќе биде воочена низ музичко дело преку ретроградна инверзија, делото од својот почеток кон крајот е исто како кога се гледа од крајот кон почеток. Ваквиот тип на музички дела се познати како рачји (crab) канон.

Најпрво, ќе разгледаме примери со **транслација** (математички) што во музичкото дело ќе претставува само повторување на некој музички ритам, мелодија или некоја друга форма од некое музичко дело.

Во музиката, ова е применето за некој ритам, мелодија или друг модел.

Пример 1: Почеток на делото Месечева Соната Оп. 27 Бр. 2 од Л. В. Бетовен

Слика 18. Месечева Соната Оп. 27 Бр. 2 од Л. В. Бетовен

Figure 18. Moonlight Sonata, Op. 27 No. 2 L. V. Beethoven

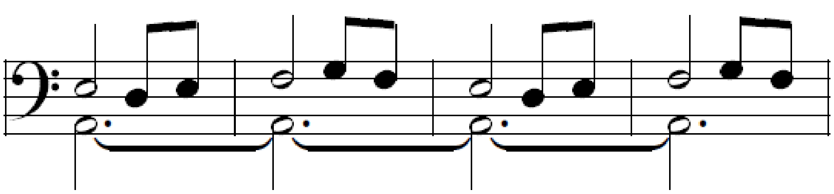
Се забележува дека има само повторување на воведната тема, математички имаме хоризонтална транслација.

Пример 2: Извадок од Токата и фуга во D-moll, BWV 565 за оргуљи од Ј. С. Бах

Слика 19. Извадок од Токата и фуга во D-moll, BWV 565 за оргуљи од Ј. С. Бах
Figure 19. Segment from Toccata and Fugue in D-minor, BWV 565 for organ J. S. Bach

Во овој пример имаме и хоризонтална и вертикална транслација. Прво забележуваме само идентично повторување на трите тона од одреден акорд што претставува хоризонтална транслација. Потоа, истото парче се повторува за по еден степен пониско што претставува вертикална транслација. Исто така, воочливо е дека поместувањето на овие групи на триоли не е секогаш за цел или полустепен, со цел да се задржи хармонската структура.

Пример 3: Извадок од делото Валцер, Оп. 34 бр. 2 од Ф. Шопен



Слика 20. Извадок од делото Валцер, Оп. 34 бр. 2 од Ф. Шопен
Figure 20. Segment from Waltz, Op. 34 No. 2, F. Chopin

Овде се забележува хоризонтална транслација, имаме повторување на првите два такта.

Пример 4: Фрагмент од Гудачки квартет бр. 4, А. Шенберг

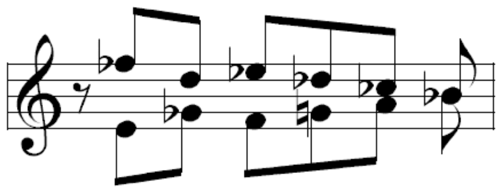
Се забележува дека помеѓу првиот и вториот ред имаме транспозиција за 6 полустепени нагоре. Низата од тонови во првиот ред е {D, C#, A, A, A, B♭, A, E♭…}, односно множеството {2,1, 9, 9, 9, 9, 10, 3, …}, кое со транспозиција за 6 полустепени се пресликува во T^6{2, 1, 9, 9, 9, 9, 10, 3, …}={8, 7, 3, 3, 3, 4, 3, 9, …} или како што е во примерот, се добива следнава низа од тонови {A♭, G, E♭, E♭, E♭, E, E♭, A}.

Слика 21. Фрагмент од Гудачки квартет бр. 4, А. Шенберг
Figure 21. Segment from String Quartet No. 4, A. Schoenberg

Осна симетрија во музиката се среќава како форма на инверзија на фрагмент или фраза. Оската на симетрија може да биде права која минува низ некој тон или низ линија од петолинието.

Пример 5: Во фрагмент од Гудачки квартет бр. 5 од Б. Барток, имаме осна симетрија со оска на симетрија - линијата на која лежи тонот B♭.

Во горниот ред го имаме множеството од тонови {E, D, E♭,D♭,B,B♭} или запишано со множество броеви {4,2,5,1,11,10}. Според дефиницијата за инверзија околу елементот 10, го добиваме инверзното множеството {4,6,5,8,9,10}.



Слика 22. Фрагмент од Гудачки квартет бр. 5 од Б. Барток

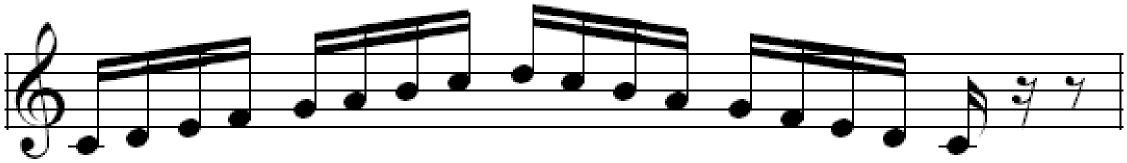
Figure 22. Segment from Fifth string quartet, Béla Bartók

Бидејќи инверзијата е околу елементот 10, $10+10 \equiv 8(mod12)$, збирот на сите елементи од првото множество со нивните инверзни елементи, соодветно, е еднаков на 8, а инверзното множество запишано со ноти е {E,G♭,F,G#,A,B♭}.
Оваа група е циклична со ред 2, бидејќи ако направеме инверзија на инверзијата, ќе го добиеме почетното множество.

Важноста на симетријата во музиката, произлегува од тоа што фразите се движат очекувано, слушателот може да претпостави што е следно. Но, исто така е и битно тоа повторување да се прекине во одредено време, за делото да не стане досадно. Добрата музика содржи само вистински баланс на предвидливост и изненадувања.

Осна симетрија со вертикална оска на симетрија. Во ваквите фрагменти, нотите формираат палиндром. И во овој случај имаме циклична група со ред 2.

Пример 6: Во овој пример имаме вертикална симетрија, со оска на симетрија низ тонот D. Забележуваме дека низата од тонови C, D, E, F, G, A, B, C, D, потоа продолжува со истите тонови но во обратен редослед D, C, B, A, G, F, E, D, C. Музички имаме ретроградна инверзија во овој пример, а математички е направена аналогија со вертикална симетрија со осна низ тонот D.



Слика 23. Фрагмент од музичко дело со вертикална симетрија
Figure 23. Segment form music piece with reflection symmetry

Пример 7: Фрагмент од „Музичка жртва“ од Ј. С. Бах

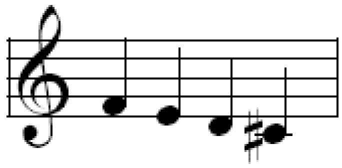
Слика 24. Фрагмент од „Музичка жртва“ од Ј. С. Бах
Figure 24. Segment from Musical Offering, J. S. Bach

Во овој пример е разгледан првиот канон од „Музичка жртва“ од Ј. С. Бах (Musical Offering, BWV 1079). Овој канон е ретрограден канон составен од 18 такта, отсвирени симултано од почеток кон крај и обратно.

Ротационата симетрија, исто така може да се сретне во музиката.

Во пример 8, таа симетрија е со центар во нотата D#. Во делото Шпанска рапсодија (1908) оваа фраза од 4 ноти се појавува повеќе пати. Ова е пример за бесконечна диедрална група.

Пример 8: Фрагмент од Шпанска рапсодија од М. Равел



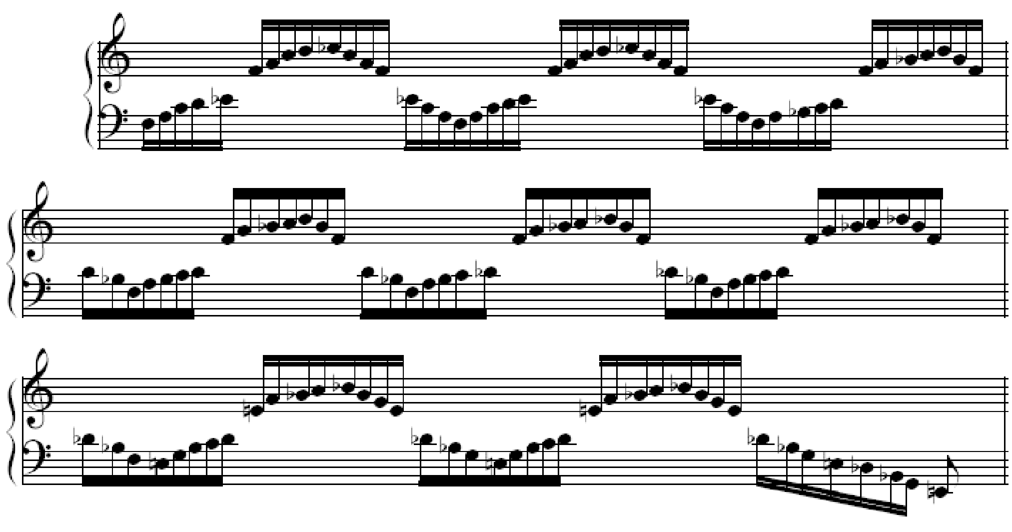
Слика 25. Фрагмент од Шпанска рапсодија, М. Равел

Figure 25. Segment from Rhapsodie Espagnole, M. Ravel

Пример 9: Анализа на делото Капричо, K. 395 f за пијано од Моцарт

Во овој пример од средината на Капричо за пијано од Моцарт, може да забележиме приближна симетрија. Лесно е да се забележат малите менувања на одредени тонови со цел да се разбие монотоното повторување на една иста фраза, но сепак во основа станува збор за вертикална симетрија.

Ваквите хоризонтални повторување на модели се познати како „frieze patterns“.



Слика 26. Извадок од Капричо, K. 395 f за пијано од Моцарт

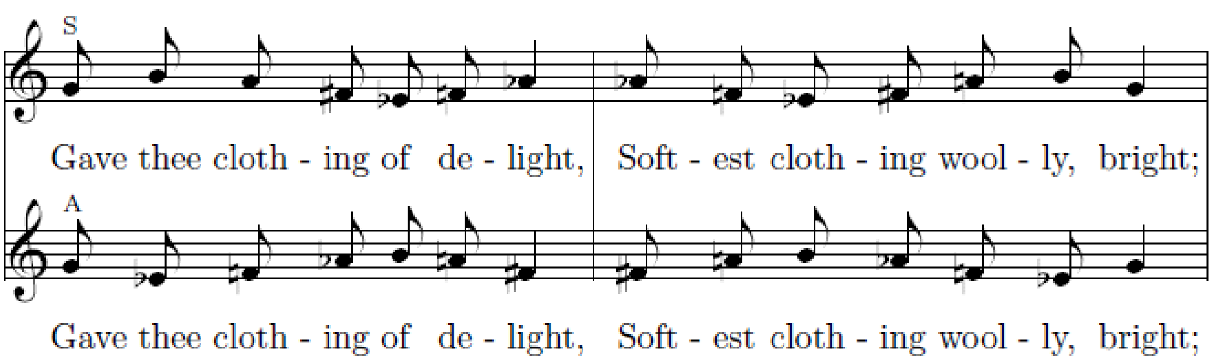
Figure 26. Segment from Capriccio K.395 f for piano, W. A. Mozart

Пример 10: Извадок од Музика за гудачи, удиралки и челеста од Б. Барток

Слика 27. Извадок од Музика за гудачи, удиралки и челеста од Б. Барток
Figure 27. Segment from Music for strings, percussion and celesta од Béla Bartók

Во овој пример имаме хоризонтална симетрија со оска на симетрија низ тонот А. Горниот ред е низата од тонови {A, B♭,C# ,D, E♭, C, B, B♭}, односно { 9, 10, 1, 2, 3, 0, 9, 10}, која со хоризонтална симетрија ќе се преслика во {9, 8, 5, 4, 3, 6, 7, 8}, каде збировите на соодветните елементи, оригинал и неговиот инверзен е $18 \equiv 6(mod12)$. На овој начин е добиена низата од тонови { A, G#, F, E, E♭, F#, G, G#}, како што е и во самиот пример.

Пример 11: Извадок од „Јагне“ од Џ. Тавенер



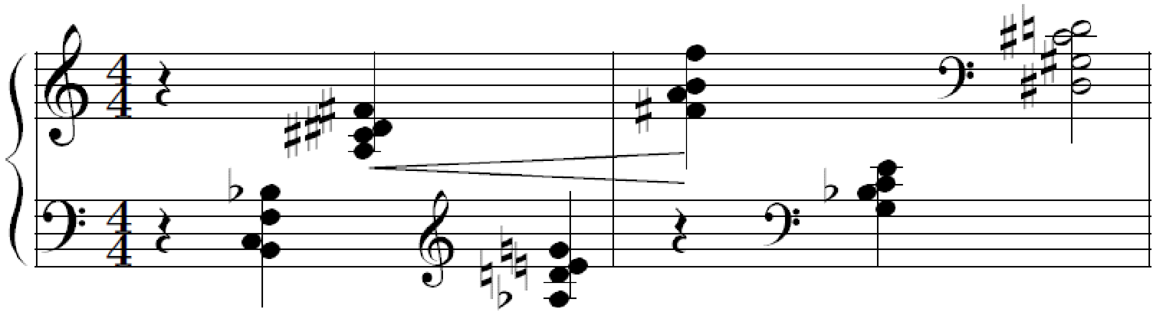
Слика 28. Извадок од „Јагне“ од Џ. Тавенер
Figure 28. Segment from “The lamb”, John Tavener

Во овој пример се забележува симетрија со вертикална оска која минува точно низ тактовата линија.

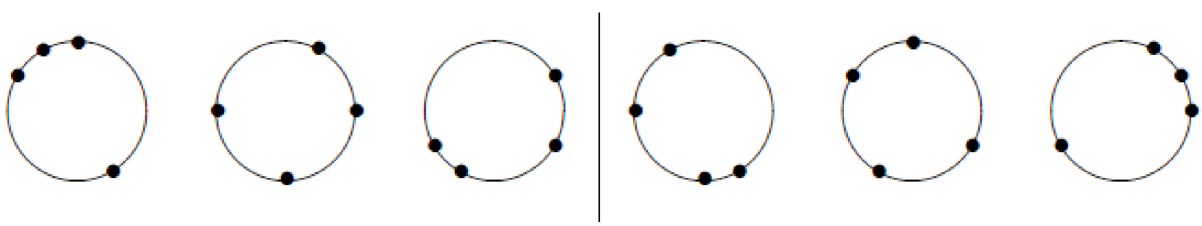
Низата од првиот такт {G, B, A, F#, E♭, F, A♭}={7, 11, 9, 6, 3, 5, 8} се пресликува во вториот такт {8, 5, 6, 9, 11, 7}={ A♭, F, E♭, F#, A, B, G}. Музички се забележува ретроградност.

Во овој пример има и хоризонтална симетрија, со оска на симетрија која минува низ тонот G, во виолински клуч. Композицијата од овие две симетрии е ротациона симетрија околу средината на ова парче музика.

Пример 12: Првите два такта од Парче за пијано Оп. 33а на А. Шоенберг



Слика 29. Првите два такта од Парче за пијано Оп. 33а на А. Шоенберг
Figure 29. First two bars of Schoenberg's Klavierstück Op. 33a



Слика 30. Кругови со акордите од Парче за пијано Оп. 33а на А. Шоенберг
Figure 30. The chords on a circle of Schoenberg's Klavierstück Op. 33a

Второто множество од три акорди е добиено со вертикална симетрија, чија оска минува помеѓу C и C# и помеѓу F# и G и со поместување, односно транслација.

Пример 13: Извадок од познатата Петтата симфонија од Бетовен

Слика 31. Почетокот на Петтата симфонија од Бетовен

Figure 31. Beginning of Beethoven’s Fifth symphony

Ова е воведниот дел (првите два реда) од делото, каде доволно јасно можеме да забележиме дека всушност делото почнува да се гради на материјал од почетниот мотив којшто понатаму е транспониран за различни тонски висини.

Пример 14: Вовед од Адаџо за гудачи од Самуел Барбер

На почеток, воведната мелодија започнува со низата од тонови {A,B♭,C}={9,10,0} се повторува еднаш, значи имаме една хоризонтална транслација, а потоа следи низата од тонови { B♭,C,D}={10, 0, 2}, од каде може да се види дека на почетната низа и е направено транспозиција за еден степен, односно за два полустепени.

Слика 32. Адаџо за гудачи од Самуел Барбер

Figure 32. Adagio for Strings од Samuel Barber

Пример 15: Првите 20 такта од Соната за пијано во A dur, Јозеф Хајдн

Слика 33. Соната за пијано во A dur, Јозеф Хајдн,

Figure 33. Piano sonata in A Major, Joseph Haydn – “Minuet in Reverse”

Јасно се гледа дека имаме вертикална симетрија со оска која минува низ тактовата линија на крајот од 10-от такт. Од 11-от такт па до крајот, тоновите се редат во обратен правец, како да ги следиме од 10-от такт кон првиот. Гледајќи го како целина, се гледа формата на палиндром. Музички, се работи за ретроградност.

Пример 16: Во пример од Алелуја од Ф. Хендел, се забележува ретроградност бидејќи имаме вертикална симетрија со оска која минува низ тонот G.

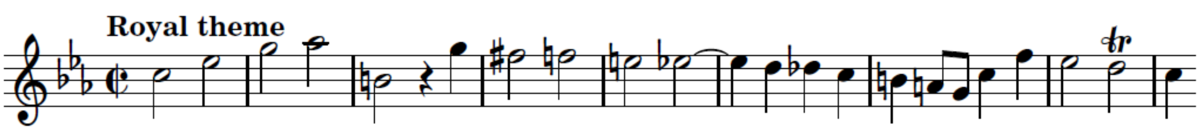
$$R\{2, 4, 5, 7\}=\{7, 5, 4, 2\}$$

Слика 34. Алелуја од Ф. Хендел

Figure 34. F. Handel, Massiah, Hallelujah chorus

Пример 17: Овој фрагмент е доста значаен во историјата на музиката.

Станува збор за троделна фуга од Ј. С. Бах, основана на „Кралската тема“ (Royal theme), напишана три години пред својата смрт, за кралот Фредерик на Прусија. Откако Бах ја посетил кралската палата, бил предизвикан од кралот да напише троделна и шестделна фуга на кралската тема. Тој успешно ја направил таа троделна фуга, која после ќе се користи во многу канони и сонати во делото „Музичка жртва“ (Das Musikalische Opfer), кое и само по себе е симетрично организирано бидејќи започнува со шестделната фуга (наречена ричеркар), па потоа следат 5 канони, па трио соната и следи навраќање, повторно 5 канони и завршува со ричеркар.



Слика 35. Кралската тема од Ј. С. Бах

Figure 35. Royal theme, J. S. Bach

Слика 36. Оригиналниот запис на Рачји канон од „Музичка жртва“ од Ј. С. Бах

Figure 36. Original manuscript from Crab canon from “Musical Offering” од J. S. Bach

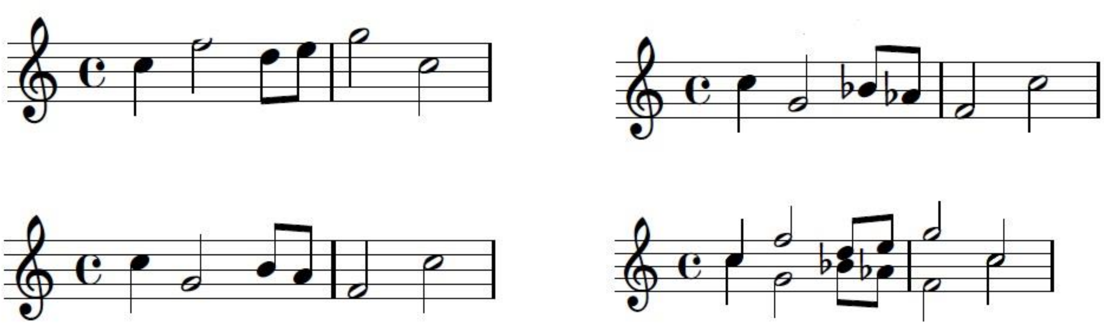
Рачји канон од “Musical Offering” од Bach. Со ротација од 180^{o}, пак се добива истиот канон. Значи, имаме ретроградна инверзија. Изведувајќи ја композицијата симултано, од почетокот и од крајот, ќе звучат исто.

Слика 37. Рачји канон од „Музичка жртва“ од Ј. С. Бах

Figure 37. Crab canon from “Musical Offering” од J. S. Bach

Пример 18: Во овој пример е избран многу едноставен мотив, со цел да објасниме хоризонтална симетрија во корелација со инверзија во музички дела. Инверзијата се среќава во два типа: тонална и егзактна. Тоналната инверзија е онаа во која, секој тон останува во истиот музички клуч, а реална инверзија, сите интервали ги пресликува точно.

оригинална мелодија реална инверзија



тонална инверзија мелодиска и реална инверзија

Слика 38. Различни видови на инверзија

Figure 38. Different types of inversions

Табела 4. Низа од интервали од извадоцита во горната слика (слика 38)

Table 4. Interval sequences for excerpts in the above figure (figure 38)

Извадок	Низа од интервали				
Оригинална мелодија	↑P4	↓m3	↑ цел степен	↑m3	↓ P5
Реална инверзија	↓P4	↑m3	↓ цел степен	↓m3	↑ P5
Тонална инверзија	↓P4	↑ M3	↓ цел степен	↓ M3	↑ P5

Во оригиналната мелодија, редењето на тоновите е по следниот редослед:
Од тонот C имаме чиста кварта нагоре до следниот тон во тактот F, па потоа за мала терца (3 полустепени) надолу е следниот тон D, следи цел степен нагоре и

тонот Е, па повторно мала терца нагоре и следниот тон G, па за чиста квинта надолу е последниот тон С од овој извадок.

Во реална инверзија, се запазува прецизно математички хоризонтална симетрија за оска која минува низ тонот С во однос на растојанијата помеѓу тоновите, се запазуваат степените и полустепените. Тоа се гледа од тоа што помеѓу првите два тона имаме чиста квинта надолу, па следи мала терца нагоре, па цел степен надолу, па мала терца надолу и чиста квинта нагоре.

Во тоналната инверзија, се прави прецизно пресликување на стапалата на тоновите околу оската низ С, односно вториот тон кој се наоѓа на втората линија над С во оригиналната мелодија, со хоризонталната симетрија ќе биде пресликан во тон кој се наоѓа на втората линија под оската низ С.
Мелодиска или реална инверзија ќе имаме како што е покажано на слика 38.

Пример 19: Извадок од Микрокосмос, бр. 141 од Бела Барток

Слика 39. Фрагмент од Микрокосмос, бр. 141 од Бела Барток

Figure 39. Segment of Mikrokosmos, No. 141 од Béla Bartók

Во овој пример се гледа реална инверзија со оска на симетрија низ тонот B♭.

Пример 20: Почеток на Громот од Џон Филип Соуса.

Тонална инверзија, движењето на десна рака во однос на движењето на лева рака.

Слика 40. Фрагмент од Громот од Џон Филип Соуса

Figure 40. Segment form The Thunderer од John Philip Sousa

Пример 21: Фуга бр. 8 во D# мол од Добро Темперирано Пијано, книга 1, Ј. С. Бах

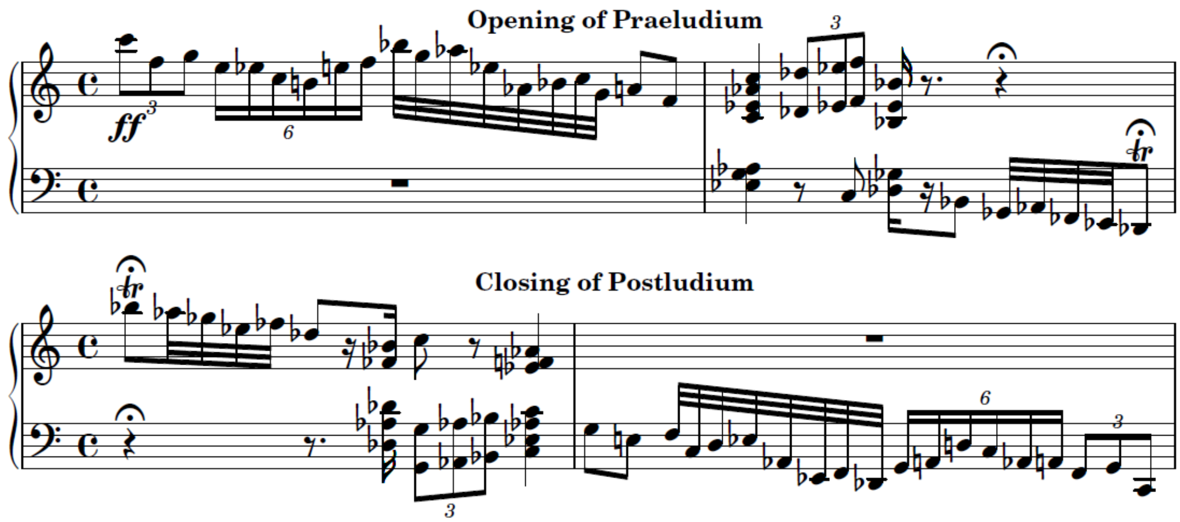
Субјектот (темата) од првиот ред со осна симетрија околу оската која минува низ F, е пресликан во вториот ред, со реална инвезија.

Слика 41. Фуга бр. 8 во D# мол од Добро Темперирано Пијано, книга 1, Ј. С. Бах

Figure 41. Fugue No. 8 in D# minor from Well-Tempered Clavier, vol. I, J. S. Bach

Пример 22: Лудус Тоналис („Тонална Игра“), Пол Хиндемит

Во примерот се дадени почетокот и крајот од делото. Се забележува дека за ротација за 180° на првиот ред, се добива последниот ред, односно, музички е употребена ретроградна реална инверзија.



Слика 42. Лудус Тоналис („Тонална Игра“), Пол Хиндемит

Figure 42. Ludus Tonalis (“Tonal Game”), Paul Hindemith

Пример 23: Огледало, дует, В. А. Моцарт

Слика 43. Огледало, дует, В. А. Моцарт

Figure 43. Der Spiegel, duet, W. A. Mozart

Овде станува збор за композиција која е изградена со ретроградна инверзија, односно со ротирање за 180° ја добиваме истата композиција.

7. ЗАКЛУЧОК

Со целото мое истражување што беше направено во изминатиов период, со читање на музичка литература, за да се запознаам најпрво со основните музички поими, а потоа и подлабоко да навлезам во теоријата на музика, со пребарување различна литература која обработува и се занимава со истражувања поврзани со математика и музика, успеав да научам да го слушам делото, да ги препознавам главните теми и нивните разработки низ музичкото дело.

Познатите музичари не правеле случајна музика. Сите тие биле добри познавачи на музичката теорија, а во повеќето случаи биле и одлични познавачи на математиката и нејзините закони, принципи и правила. Најчесто, сè се сведувало на тоа, откако ќе се создаде музичката тема, истата низ делото би можела да се сретне во најразлични облици, како што се транспозиција, инверзија, ретроградност или било која комбинација од нив.

Од анализата на неколку фрагменти од различни музички дела од различни композитори и музички епохи, од математичка гледна точка и со целовкупното истражување кое беше направено, можеме да заклучиме дека навистина постои примена на математика во музиката.

Се покажа дека неколкуте типови на симетрија играат важна улога во создавањето на една музичка композиција, која на делото му дава убавина, звучност, тек...

Со анализирањето се покажа дека делата не се случајни низи од тонови, сепак постојат и се користат одредени правила и принципи, коишто најчесто во голема мера се потпираат на математички правила и принципи.

Се поставува прашање дали е потребно учениците од средните музички училишта и факултетите за музичка уметност во Македонија да го изучуваат предметот Математика, кој ќе им биде во прилог и ќе им помогне во изучување и полесно разбирање на некои теми и делови од музичката теорија.

Би било добро да се запознаат со теми кои ќе ги обработат експоненцијалните и логаритамските функции, тригонометриските функции, симетрии, алгебарски структури.

Кога би се стекнале со овие математички знаења, надополнети со музичките способности и надареност, вистински ќе се постигнат и поголеми резултати при совладувањата на музичките предмети кои ја изучуваат музичката теорија.

Ова истражување нека поттикне и отвори ново прашање, т.е. во кои земји од светот, учениците кои се стекнале со музичко образование, за време на образованието го изучувале предметот Математика.

8. КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

[1] Brow Andrew R., An introduction to Music Analysis with Computer. Music Education and Computers: Amplifying Musicality. New York: Routledge. 2007

[2] Petersen Mark R., Musical Analysis and Synthesis in Matlab Vol.35, No.5. The college mathematics journal, 2004

[3] Hed Sigalit, Gjerdingen Robert O., Levin David, Mathematical and Computational Approaches to Music Theory, Analysis, Composition and Performance, 2012

[4] Тајчевић Марко, Основна теорија музике, треће издање, 1962

[5] Shah Saloni, An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music, 2010

[6] Fauvel John, Flood Raymond, Wilson Robin; Music and Mathematics, From Pytagoras to Factal, 2006

[7] Des - Cartes Renati, Musicae Cimpendium

[8] Fan Zhou, Seminar Notes, The Mathematics of Music, 2010

[9] Harkleroad David Leon, The Math Behind the Music, Cambridge University, Press, 2007.

[10] Pierce, John R., The science of musical sound. 3rd ed. New York: W H Freeman and Company1992

[11] Hall Rachel Wells, The Sound of Numbers, A Tour of Mathematical Music Theory, 2011

[12] Petrović Tihomir, Osnove teorije glazbe, treće, promenijeno I dopunjeno izdanje, 2010

[13] Olson, Harry F., 1967. Music, physics and engineering. New York: Dover Publications Inc.

[14] Benson David J., Music: A Mathematical Offering, Cambridge University Press, 2007

[15] Wrigh David t, Mathematics and Music, 2009

[16] Hornbeck David, Mathematics, Music, and the Guitar, 2013

[17] Townsend Adam, Maths and Music Theory, 2011

[18] Fiore Thomas M., Music and Mathematics, 2009

[19] Hall Rachel W., Josić Krešimir, The Mathematics of Musical Instruments, 2001
[20] Бужаровски Димитрије, Речник на технички термини од областа на обработката на звукот, 2000
[21] Papadopoulos, A., Mathematics and music theory: from Pythagorass to Rameau. The Mathematical Intelligencer. Vol 24 (No 1), 2002
[22] Duffin, R. W., How equal temperament ruined harmony: and why you should care. New York: W.W. Norton & Co., 2008
[23] Boivin, J., Messiaen's teaching at the Paris Conservatoire: a humanist's legacy. In: S. Bruhn. Messiaen's language of mystical love. New York: Garland Publishing Inc.., 1998
[24] G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodriguez, Mathematics and Music. Springer Verlag, New York, 2002.
[25] Smith Derrick, Linear Algebra and Music 2014
[26] Sanchez-Behar Alexander, Symmetry in the music of John Adams, 2014
[27] Gareth E. Roberts, Math, Music and Identity, 2015
[28] Arthur Daniel, The Math and Geometry of music
[29] Román Dan, Twelve – Tone Technique
[30] Shafer Jennifer, The Two-Part and Three-Part Inventions of Bach: A Mathematical Analysis, 2010
[31] Mathes, James. The Analysis of Musical Form. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2007
[32] Morris Robert, Mathematics and the Twelve-Tone System: Past, Present, and Future, 2007
[33] Matid Dragan, Genetički algoritmi i muzika, 2009
[34] Adrian P. Childs, Moving Beyond Neo-Riemannian Triads: Exploring a Transformational Model for Seventh Chords" *Journal of Music Theory"* 1998
[35] Clampitt David, Alternative Interpretations of Some Measures From Parsifal " Journal of Music Theory" 1998
[36] Clough John, A Rudimentary Geometric Model for Contextual Transposition and Inversion. " Journal of Music Theory", 1998

[37] Douthett Jack, Steinbach Peter, Parsimonious Graphs: A Study in Parsimony, Contex-tual Transformations, and Modes of Limited Transposition." *Journal of Music Theory"* 42/2

[38] Thomas M. Fiore and Ramon Satyendra, Generalized Contextual Groups " To appear in *Music Theory Online*"

[39] Hook Julian, *Uniform Triadic Transformations*. Ph.D. diss., Indiana University, 2002

[40] Klumpenhouwer Henry, Some Remarks on the Use of Riemann Transformations " *Music Theory Online "*, 1994

[41] Lewin David, *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays*, New Haven: Yale University Press, 1993

[42] Doerfler Monika, Applied Mathematics in Music Processing, 2012

[43] Hernandez Maria, Math and Music, An interdisciplinary Approach to transformations of Functions, Math Conference, 2015

[44] May, M., Did Mozart use the golden section? American Scientist [online] Available at: http://www.americanscientist.org/issues/pub/did-mozart-use-the-goldensection, 2010

[45] Jovanova B., Pachemska T. A., Aplication of mathematics in music: Combinatorics and twelve-tone music. Istrazivanje matematickog obrazovanja Vol. X (2018), Broj 19, 11–16. http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo2.htm