Универзитет “Св. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”во Скопје
Природно-математички факултет
Институт за математика

Елена Карамазова

НОВИ РЕЗУЛТАТИ ЗА НЕКОИ КЛАСИ ПОВЕЌЕЛИСНИ ФУНКЦИИ

– ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА –

Скопје, Октомври 2017

М е н т о р:

д-р Никола Тунески
ред. проф. на Машински факултет - Скопје,
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје

Членови на комисија:

д-р Никита Шекутковски
ред. проф. на Природно-математички факултет,
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје

д-р Никола Тунески
ред. проф. на Машински факултет - Скопје,
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје

д-р Костадин Тренчевски
ред. проф. на Природно-математички факултет,
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје

д-р Весна Манова-Ераковиќ
ред. проф. на Природно-математички факултет,
Универзитет Св. Кирил и Методиј во Скопје

д-р Наим Браха
ред. проф. на Природно-математички факултет,
Универзитет во Приштина

За моето семејство

Благодарност

Најпрво, би сакала да изразам благодарност до мојот ментор Проф. д-р Никола Тунески за неговата одговорна и целосна посветеност при изработка на оваа докторска дисертација. Неговото искуство допринесе да се изберат проблеми за истражување кои дадоа резултати што претставуваат основа на овој докторат.

Потоа, благодарност би сакала да изразам и до Раководителите на Советот на Школата за докторски студии по математички науки Проф. д-р Никита Шекутковски и Проф. д-р Костадин Тренчевски, за нивното најпрофесионално работење засновано на добивањето секогаш навремени и точни информации за сите активности предвидени со Правилникот на Школата за докторски студии по математички науки и примена.

Благодарност сакам да изразам и до колегата д-р Едмонд Алиага за помошта при пишувањето на докторската дисертација во LaTeX.

И на крај огромна благодарност сакам да изразам до моите родители и мојот сопруг за поддршката и мотивацијата за успех во текот на студирањето.

Абстракт

Оваа докторска дисертација е од комплексната анализа, поконкретно, од геометриската теорија на функциите и пред се од теоријата на повеќелисните, а е опфатена и теоријата на еднолисните функции.

Дисертацијата содржи нови оригинални резултати кои се составен дел на четири трудови.

Истражувањата се насочени кон наоѓање на врски помеѓу некои класи на повеќелисни функции изразени преку импликации кои содржат неравенства. Понатаму, тие се насочени кон разгледување на израз за повеќелисни функции проучуван од Silverman за еднолисни.

Дадени се и нови критериуми за ограничено вртење со помош на модулот и реалниот дел на линеарната комбинација на $f'(z)$ и $f(z)/z$, т.е., на

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z}.$$

Дисертацијата е завршена со идеи за понатамошни истражувања.

Math. Subj. Class. [2010]: 30C45, 30C55.

Клучни зборови: диференцијални субординации, аналитички функции, еднолисни функции, повеќелисни функции, повеќелисни ѕвездолики функции од ред α, повеќелисни конвексни функ-

ции од ред α, ограничено вртење, класа дефинирана од Silverman, доволни услови, реален дел, модул.

Abstract

This PhD thesis deals with complex analysis, more precisely with geometric function theory and the theory of multivalent functions. It also involves the theory of univalent functions.

The thesis encompasses new and original results which comprise four papers.

The research is aimed at finding connections between some classes of multivalent functions expressed by implications that contain inequalities. Furthermore, it investigates expression in multivalent functions studied by Silverman for univalent ones.

New criteria for bounded turning using the module and the real part of the linear combination of $f'(z)$ and $f(z)/z$, i.e., of

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z}$$

are given.

The thesis ends with ideas for further study.

Math. Subj. Class. [2010]: 30C45, 30C55.

Keywords: differential subordination, analytic function, univalent functions, multivalent function, multivalent starlike functions of order α, multivalent convex functions of order α, bounded turning, class defined by Silverman, sufficient condition, real part, modulus.

Содржина

Вовед

Научна дисциплина која се појавила кон крајот на деветнаесеттиот и почетокот на дваесеттиот век е геометриската теорија на функциите која ги проучува геометриските својства на аналитичките функции. Основен резултат во таа теорија е теоремата на Риман која вели дека секоја просто сврзана област која не е целата комплексна рамнина може да се пресlика конформно на единечниот диск $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Составен дел на геометриската теорија на функциите се теориите на еднолисните и повеќелисните функции. Оваа докторска дисертација спаѓа пред се во теоријата на повеќелисните функции, а се споменува и теоријата на еднолисните.

За функцијата $f(z)$ велиме дека е еднолисна на област D ако и само ако е аналитичка на D освен најмногу во еден пол, и ако за секои $z_1, z_2 \in D$ е исполнет условот $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$. Првиот познат резултат во теоријата на еднолисни функции бил даден од Koebe во 1907 година. Најголем придонес за нејзин развој има хипотеза на Bieberbach од 1916 година ([4]) која тврди дека за коефициентите од развојот на секоја нормализирана еднолисна функција (функција која е аналитичка и е инјекција на единечниот диск) важи $|a_n| \leq n$. Хипотезата, докажана е за секој природен број n поголем од 1 од L. de

Branges во 1985 година ([11]).

Во теоријата на еднолисните функции главно се испитува класата нормализирани еднолисни функции и нејзините поткласи (класите ѕвездолики, конвексни, блиску-до-конвексни, α-конвексни функции, класата функции со ограничено вртење и други).

Резултатите од теоријата на еднолисните функции наоѓаат примена во тестирањето на еднолисноста на решенијата на диференцијалните равенки, за решавање на некои гранични проблеми и инверзни гранични проблеми, за решавање на практични проблеми од механиката и физиката (аеродинамиката и хидродинамиката), како и при примената на конформните пресликувања.

Природна генерализација на еднолисните се повеќелисните функции. Функцијата $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}_p$ велиме дека е повеќелисна или $p-$лисна во $\mathbb{D}$ ако таа ја добива секоја нејзина вредност најмногу p пати во $\mathbb{D}$ и постои ω_0 такво што $f(z) = \omega_0$ има точно p решенија во $\mathbb{D}$, кога корените се сметаат во согласност со нивните многукратности.

Докторската дисертација се состои од 5 глави и три додатоци (литература, ознаки и индекс).

Првата глава е воведна и самиот нејзин наслов, Основни поими од теориите на еднолисните и повеќелисните функции, навестува дека во неа се дадени основните дефиниции, својства, карактеризации и методи од теориите на еднолисните и повеќелисните функции и од теоријата на диференцијални субординации кои се неопходни за презентирање и докажување на оригиналните резултати добиени при истражувањата. Оваа глава содржи и преглед на поткласите на класите еднолисни и повеќелисни функции. Исто така, наведена е и класата на

Silverman и дадени се некои резултати поврзани со таа класа.

Во втората глава со наслов, Нови релации помеѓу некои класи повеќелисни функции, дадени се нови оригинални резултати изложени во два труда [26] и [27]. Тие се однесуваат на врски помеѓу некои класи повеќелисни функции изразени преку импликации кои содржат неравенства.

Во третата глава насловена како, Резултат на Silverman пренесен од класата еднолисни на класата повеќелисни функции, е проучуван израз за повеќелисни функции кој претставува проширување на изразот од класата еднолисни функции на Silverman воведена 1999 година дефинирана како количник од аналитичката репрезентација на конвексноста и ѕвездоликоста.

Наредната глава со наслов, За ограниченото вртење на аналитичките функции, содржи дефиниција и поважни својства на класата функции со ограничено вртење

$$\mathcal{R} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} f'(z) > 0, z \in \mathbb{D} \right\}.$$

Името на класата доаѓа од таму што условот $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ е еквивалентен со $|\arg f'(z)| \le \pi/2$, а $\arg f'(z)$ го претставува аголот на вртење (ротација) на сликата на полуправа од z што се добива со помош на функцијата f. Оваа класа е интересна за истражување поради тоа што таа е поткласа на класата еднолисни функции, но не е поткласа на класата ѕвездолики функции, ниту пак класата ѕвездолики функции е нејзина поткласа. Во оваа глава дадени се нови критериуми за ограничено вртење во термини на модулот и реалниот дел на линеарната комбинација

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z}$$

и истите се публикувани во трудот [64].

Во последната глава од дисертацијата насловена, Идеи за понатамошна работа, дадени се идеи (насоки) за понатамошни истражувања.

Глава 1

Основни поими од теориите на еднолисните и повеќелисните функции

Во оваа глава најпрво ќе бидат дефинирани основните поими, а потоа ќе бидат дадени и некои значајни резултати од теориите на еднолисните и повеќелисните функции. На крај од оваа глава ќе бидат наведени методите кои ќе бидат користени за добивање на резултатите во оваа докторска дисертација.

1.1. Основни својства на еднолисните и повеќелисните функции. Класични резултати

Една аналитичка функција f велиме дека е **еднолисна** на домен $D \subset \mathbb{C}$, домен D е отворено и сврзано множество, ако пресликувањето од D во $f(D)$ е инјективно. Еднолисноста можеме да ја дефинираме и со:

Дефиниција 1.1.1. *Функцијата $f(z)$ регуларна на доменот D велиме дека е* **еднолисна** *во D ако $w = f(z)$ прима различни вредности w за различни z од D .*

Тоа значи дека равенството $f(z) = w$ има најмногу еден корен во D за секое комплексно w. Според тоа, функцијата $f(z)$ регуларна на доменот $D \subset \mathbb{C}$ велиме дека е еднолисна ако таа никогаш не прима иста вредност два пати.

Ако $f(z)$ е еднолисна на единечниот диск $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, тогаш $f'(z) \neq 0$ во $\mathbb{D}$. Да забележиме дека обратното не е точно.

Како тривиални примери можеме да ги наведеме функциите $f(z) = z$ која е еднолисна на $\mathbb{D}$ и функцијата $f_1(z) = z^2$ која пак не еднолисна на $\mathbb{D}$. Понатаму функцијата $z + z^n/n$ е еднолисна на $\mathbb{D}$ за секој позитивен цел број n, а функцијата $sinz$ е еднолисна на дискот $|z| < \pi/2$.

Во продолжение, ќе објасниме некои важни елементарни својства и теореми за еднолисните функции.

Теоремата на Риман (1851) е една од најзначајните теореми во геометриската теорија на фунциите (во која спаѓа и теоријата на еднолисните функции), која тврди дека за секоја просто сврзана област D, $D \subset \mathbb{C}$, постои единствена еднолисна функција со домен D.

Понатаму, за функцијата $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ која е еднолисна на единечниот диск $\mathbb{D}$ можеме да кажеме дека таква е и функцијата $f(z) - a_0$. f е еднолисна па $f'(0) = a_1 \neq 0$, и затоа можеме да извршиме нормализација на функцијата $f(z)$ на следниот начин

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a_0}{a_1}$$

и добиваме функција $f_1(z)$ од облик $f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a'_n z^n$. Функцијата $f_1(z)$ е еднолисна на $\mathbb{D}$ и затоа од практични причини (за да се елиминираат мноштво параметри во формулацијата и доказите на резултатите) можеме да разгледуваме само функции нормализирани така што $f(0) = 0$ и $f'(0) - 1 = 0$.

Нека со $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ ја означиме класата од сите функции што се аналитички на отворениот единичен диск $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. За $n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{C}$, нека

$$\mathcal{H}[a, n] = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots \right\}.$$

Особено, нека за позитивен цел број p, $\mathcal{A}_p$ е поткласа од $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ која се состои од функции од облик

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n} \tag{1.1.1}$$

и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$, така што $\mathcal{A}$ е класата од функции $f(z)$ кои се аналитички на $\mathbb{D}$ и нормализирани така што $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, т.е.,

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \right\}.$$

Класата пак која се состои од функции кои се еднолисни на отворениот единичен диск $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и нормализирани така што $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, т.е., се состои од функции од облик

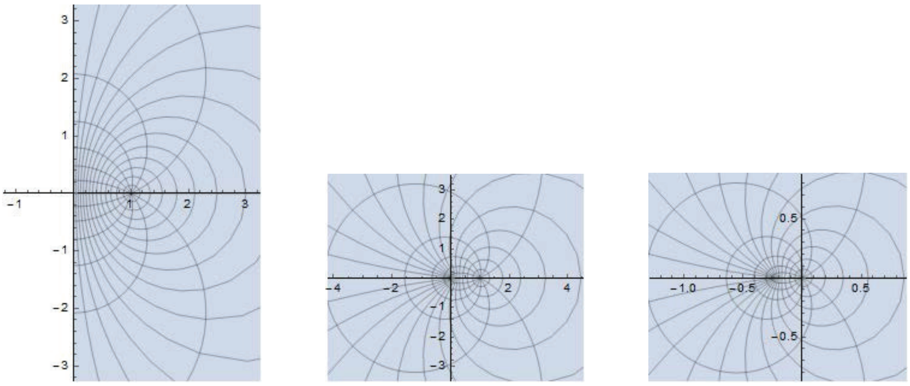
$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

се означува со $\mathcal{S}$. Значаен пример на функција од класата $\mathcal{S}$ е Koebe-овата функција дадена со

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Koebe-овата функција е често екстремална функција за различни резултати поврзани со класата $\mathcal{S}$. Имајќи во предвид дека функцијата $\frac{1-z}{1+z}$ го пресликува единечниот диск еднолисно во десната полурамнина, добиваме (види слика 1.1)

$$k(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4].$$



Слика 1.1 Слика на единечниот диск со функциите $\frac{1+z}{1-z}$, $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ и $\frac{z}{(1-z)^2}$.

Понатаму, ротациите на Koebe-овата функција т.е. функциите

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-\theta z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\theta^{n-1} z^n, \quad |\theta| = 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

исто така припаѓа на класата $\mathcal{S}$.

Првиот значаен резултат од теоријата на еднолисни функции е добиен од Koebe во 1907 година и е даден со следната теорема

Теорема 1.1.1. *[14] Нека* $f(z) \in \mathcal{S}$.

(*i*) *Постои константа* $k > 0$, *така што*

$$k\mathbb{D} = \{\omega : |\omega| < k\} \subseteq f(\mathbb{D}).$$

(*ii*) *Постојат позитивни броеви* $m(r)$ *и* $M(r)$ *кои зависат само од* r, *така што*

$$m(r) \leq |f(z)| \leq M(r),$$

каде $|z| = r$.

(*iii*) *Постои број* $M_1(r)$, *кој зависи само од* r, *така што за* $|z_1| \leq r$ *и* $|z_2| \leq r$ *важи*

$$\frac{1}{M_1(r)} \leq \left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| \leq M_1(r).$$

После овој резултат, од тогаш па до ден денес, значи во период од повеќе од 100 години, теоријата на еднолисни функции се развивала значително. Многу трудови и книги од теоријата на еднолисни функции биле публикувани.

Во 1916, Bieberbach ја докажал следната теорема за функциите од класата $\mathcal{S}$, која дава оценка на вредноста на вториот коефициент a_2 од развојот на функцијата.

Теорема 1.1.2. (*теорема на Bieberbach*) *Ако* $f(z) \in \mathcal{S}$, *тогаш* $|a_2| \leq 2$. *Равенството важи ако и само ако* $f(z)$ *е ротација на Koebe-овата функција.*

Со помош на теоремата на Bieberbach докажани се следните две теореми (доказите може да се најдат во [13]).

Теорема 1.1.3. *(Koebe-овата една четвртина теорема) Сликата на единечниот диск за секоја функција $f(z) \in \mathcal{S}$ го содржи дискот $\{w : |w| < 1/4\}$.*

Koebe-овата функција и нејзините ротации се единствените еднолисни функции од $\mathcal{S}$ кои го содржат отворениот диск со радиус $\frac{1}{4}$, а сите останати функции од $\mathcal{S}$ содржат диск со поголем радиус. Тоа кажува дека во претходната теорема константата $1/4$ не може да се замени со поголема.

Теорема 1.1.4. *За секоја функција $f(z) \in \mathcal{S}$ важи*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}, \quad |z| = r < 1.$$

Од Теорема 1.1.4. се изведува Koebe-овата теорема за деформацијата чиј доказ може да се најде во [13].

Теорема 1.1.5. *Ако $f(z) \in \mathcal{S}$ и $z \in \mathbb{D}$, тогаш*

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1,$$

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1,$$

и

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r < 1.$$

Во горната теорема, за $z \in \mathbb{D}$ и $z \neq 0$, равенство се добива ако и само ако $f(z)$ е погодно избрана ротација на Koebe-овата функција.

Bieberbach во 1916 година ја формулирал познатата **хипотеза на Bieberbach**: за сите функции $f(z) \in \mathcal{S}$ важи $|a_n| \leq n$,

$n = 2, 3, \ldots$. Равенство $|a_n| = n$, за дадено $n \geq 2$ важи ако и само ако f е ротација на Koebe-овата функција. Оваа хипотеза била почетна мотивација за истражувања во теоријата на еднолисни функции и многу методи од оваа теорија биле развиени со цел таа да се докаже. Првиот резултат $|a_2| \leq 2$ бил докажан од Bieberbach во 1916 (Теорема 1.1.2.). Во 1923 година Loewner и во 1955 Garabedian и Schiffer ја докажале хипотезата на Bieberbach за $n = 3$ и $n = 4$ соодветно. Во 1968 година било покажано дека $|a_6| \leq 6$ од страна на Pederson и Ozawa т.е. тие покажале дека хипотезата на Bieberbach е точна за $n = 6$. Малку подоцна во 1972 година Pederson и Schiffer ја докажале хипотезата на Bieberbach за $n = 5$.

Првата оценка за сите коефициенти ја дал Littlewood во 1925 година и таа гласи: $|a_n| < en$. Во продолжение дадени се добиени подобрувања на оваа оценка: Milin (1965) $|a_n| < 1.243n$, Fitzgerald (1971) $|a_n| < \sqrt{7/6}n = 1.081n$, Horowitz (1976) $|a_n| < 1.0657n$.

Во 1985 хипотезата на Bieberbach конечно ја докажал de Branges за сите коефициенти. Доказот може да се најде во [11].

Теорема 1.1.6. *Ако $f(z) \in \mathcal{S}$, тогаш важи $|a_n| \leq n$, $n = 2, 3, \ldots$. Знакот за равенство важи ако и само ако $f(z)$ е Koebe-овата функција или нејзина ротација.*

Природна генерализација на еднолисните функции се повеќелисните. Во продолжение ќе дефинираме повеќелисни функции и ќе приложиме оцена на коефициентите кај повеќелисните функции.

Дефиниција 1.1.2. *Функцијата $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}_p$ велиме дека е повеќелисна или $p-$лисна во $\mathbb{D}$ ако таа ја добива секоја нејзина вредност најмногу p пати во $\mathbb{D}$ и постои ω_0 такво што $f(z) = \omega_0$*

има точно p решенија во $\mathbb{D}$, кога корените се сметаат во согласност со нивните многукратности.

Понатаму, ќе биде наведена оценка за вредноста на коефициентите на $f(z)$ повеќелисна во единечниот диск $\mathbb{D}$. Претпоставуваме дека p е позитивен цел број и дека $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ е повеќелисна во $\mathbb{D}$, т.е., дека равенката $f(z) = \omega_0$ никогаш нема повеќе од p корени во $\mathbb{D}$. Тогаш за $n > p$ имаме

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!(p-k)!(n-p-1)!(n^2-k^2)} |b_k|. \tag{1.1.2}$$

Во [16] можат да се најдат историски забелешки за оценката (1.1.2) до 1968 година. За $p = 1$ ја добиваме теоремата на de Branges. За $p = 2$ и $p = 3$ оценката (1.1.2) станува

$$|b_3| \leq 5|b_1| + 4|b_2|,$$

неравенство кое е покажано дека е точно ако $f(z)$ е регуларна 2-лисна во $|z| < 1$, ѕвездолика во однос на нулата и ако сите b_i се реални [17].

Повеќе за повеќелисните функции може да се најде во [18].

1.2. Некои специјални класи еднолисни и повеќелисни функции. Резултати кои се однесуваат на тие класи

Класата на повеќелисни функции е една од позначајните во комплексна анализа, па заради тоа била широко проучувана. Така на пример, Patil и Thakare [48], Owa [46] и Aouf [3] ги проучувале поткласите од повеќелисни функции од ред α. Многу автори посветиле голем дел од нивната работа на пронаоѓање доволен услов за блиску-до-конвексност, ѕвездоликост и конвексност на функција $f(z) \in \mathcal{A}_p$ (види [59], [66], [43], [56], [40] и [69]).

Во оваа секција ќе дефинираме неколку поткласи на класите на еднолисни и повеќелисни функции и ќе бидат дадени резултати поврзани со тие поткласи. Нивната аналитичка дефиниција е со помош на едноставни неравенства.

1.2.1. Еднолисни и повеќелисни ѕвездолики функции, ѕвездолики функции од ред α, силно ѕвездолики функции од ред α

Најпрво ќе ги дефинираме класите еднолисни ѕвездолики функции, ѕвездолики функции од ред α и силно ѕвездолики функции од ред α, а потоа ќе бидат наведени и дефинициите за соодветните класи повеќелисни функции.

Дефиниција 1.2.3. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{S}$ е* **ѕвездолика** *на $\mathbb{D}$ ако и само ако областа $f(\mathbb{D})$ е ѕвездолика во однос на нулата, т.е.,*

$$w \in f(\mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad tw \in f(\mathbb{D}) \tag{1.2.3}$$

за секое $t \in [0, 1]$.

Класата на ѕвездолики функции на $\mathbb{D}$ ќе ја означуваме со $\mathcal{S}^*$.

Геометриски гледано, условот (1.2.3) значи дека отсечката што ја поврзува нулата со било која точка од $f(\mathbb{D})$ лежи во $f(\mathbb{D})$, односно зрак (полуправа) со почеток во нулата ако ја сече границата на $f(\mathbb{D})$, тогаш ја сече само еднаш.

Следната теорема, чиј доказ може да се најде во [13], [15], [49] и [53] дава аналитичка карактеризација на ѕвездоликоста.

Теорема 1.2.7. *Ако $f(z) \in \mathcal{A}$, тогаш следните тврдења се еквивалентни:*

(*i*) $f(z) \in \mathcal{S}^*$;

(*ii*) *областа* $F_r = f(|z| < r) = \{f(z) : z \in \mathbb{D}\}$ *е ѕвездолика во однос на нулата за секое* r, $0 < r < 1$;

(*iii*) $\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$, $z \in \mathbb{D}$.

Условот (ii) значи дека функцијата $\arg f\left(re^{i\theta}\right)$ е неопаѓачка по променливата θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (при фиксно r), додека (iii) е аналитичка интерпретација на тој факт. Еквиваленцијата (i) $\Leftrightarrow$ (iii) дава за право како дефиниција на класата ѕвездолики функции да се користи:

Дефиниција 1.2.4. *Класата* **ѕвездолики функции** *е*

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{D} \right\}. \tag{1.2.4}$$

Поимот за ѕвездоликост може да се обопшти на следните начини:

Дефиниција 1.2.5. *Функцијата* $f(z) \in \mathcal{A}$ *е* **ѕвездолика од ред** $\boldsymbol{\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, *ако и само ако*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Дефиниција 1.2.6. *Функцијата* $f(z) \in \mathcal{A}$ *е* **силно ѕвездолика од ред** $\boldsymbol{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, *ако и само ако*

$$\left|\arg\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Класите ѕвездолики функции од ред α и силно ѕвездолики функции од ред α ќе ги означуваме со $\mathcal{S}^*(\alpha)$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, соодветно.

Очигледно $\widetilde{\mathcal{S}}^*(1) = \mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha) \subset \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}^*(\alpha) \subset \mathcal{S}^*$, за $0 < \alpha < 1$.

Дефиниција 1.2.7. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ велиме дека припаѓа на класата* **повеќелисни ѕвездолики функции од ред $\boldsymbol{\alpha}$**, *$0 \leq \alpha < p$, и $p = 1, 2, \dots$ ако*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оваа класа се означува со $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$. За $\alpha = 0$ се добива класата **повеќелисни ѕвездолики функции** $\mathcal{S}_p^*$. За $\alpha = 0$ и $p = 1$ се добива класата ѕвездолики функции $\mathcal{S}^*$.

Доволен услов функцијата f од облик (1.1.1) да биде во класата $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ е:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p + n - \alpha)|a_{p+n}| \leq p - \alpha. \tag{1.2.5}$$

Понатаму, да забележиме дека овој доволен услов е исто така и потребен за функциите од облик (1.1.1) со позитивни и негативни коефициенти ([46]).

Резултатот $\operatorname{Re}\left[\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}\right] > 0$, $z \in \mathbb{D}$, ако и само ако $\omega(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ го задоволува неравенството $|\omega(z)| < |z|$, се користи за да се добијат горните оценки за коефициентите.

Резултати поврзани со парцијалните суми на функции од облик (1.1.1) се дадени во [1], [2] и [7].

Со $f_k(z)$ ја означуваме низата од парцијални суми на функцијата f дадена со (1.1.1) и при тоа

$$f_k(z) = z^p + \sum_{n=1}^{k} a_{p+n} z^{p+n}.$$

Теорема 1.2.8. *Претпоставуваме дека функцијата f од облик (1.1.1) го задоволува условот (1.2.5) тогаш*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{f_k(z)}\right] \geq \frac{k+1}{k+p+1-\alpha}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

каде со f_k ја означуваме k-тата парцијална сума на f. Резултатот е најдобар можен за секое k, со екстремална функција

$$f(z) = z^p - \frac{p-\alpha}{p+n-\alpha} z^{p+n}.$$

Дефиниција 1.2.8. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ велиме дека припаѓа на класата* **повеќелисни силно ѕвездолики функции од ред α**, *$0 < \alpha \leq p$, и $p = 1, 2, \ldots$ ако*

$$\left|\arg\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оваа класа се означува со $\widetilde{\mathcal{S}_p}^*(\alpha)$.

1.2.2. Еднолисни и повеќелисни конвексни функции, конвексни функции од ред α

Најпрво ќе дефинираме конвексни функции и конвексни функции од ред α, а потоа и повеќелисни конвексни функции од ред α, повеќелисни силно конвексни функции од ред α.

Дефиниција 1.2.9. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{S}$ е* **конвексна** *во $\mathbb{D}$ ако и само ако $f(\mathbb{D})$ е конвексен домен, т.е.,*

$$w_1, w_2 \in f(\mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad tw_1 + (1-t)w_2 \in f(\mathbb{D}) \tag{1.2.6}$$

за секое $t \in [0,1]$.

Класата конвексни функции ќе ја означуваме со $\mathcal{K}$.

Геометриски гледано, условот за конвексност (1.2.6) повлекува дека секоја отсечка која поврзува две точки од $f(\mathbb{D})$ припаѓа на $f(\mathbb{D})$.

Следната теорема, чиј доказ може да се најде во [13], [15], [49] и [53], дава аналитичка карактеризација на конвексноста.

Теорема 1.2.9. *Ако $f(z) \in \mathcal{A}$, тогаш следните тврдења се еквивалентни.*

(*i*) $f(z) \in \mathcal{K}$;

(*ii*) *областа* $F_r = f\left(|z| < r\right) = \{f(z) : z \in \mathbb{D}\}$ *е конвексна за секое* r, $0 < r < 1$;

(*iii*) $\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$, $z \in \mathbb{D}$;

(*iv*) $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$.

Условот (*ii*) значи дека функцијата $\arg \frac{\partial f\left(re^{i\theta}\right)}{\partial \theta}$ е неопаѓачка по променливата θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (при фиксно r), додека аналитичката интерпретација на овој факт е дадена со (*iii*).

Од еквиваленцијата (*i*) $\Leftrightarrow$ (*iii*), класата конвексни функции може да ја дефинираме и со помош на аналитички израз, како што следува.

Дефиниција 1.2.10. *Класата*

$$\mathcal{K} = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0,\ z \in \mathbb{D} \right\} \tag{1.2.7}$$

се нарекува **класа конвексни функции**.

Две важни својства на конвексните функции се дадени во следната теорема докажана од Strohhacker [61] во 1933 година.

Теорема 1.2.10. *Ако $f(z) \in \mathcal{K}$, тогаш* $\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \frac{1}{2}$, $z \in \mathbb{D}$, *и* $\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \frac{1}{2}$, $z \in \mathbb{D}$. *Од овде следува дека* $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^*(1/2)$.

Обопштување на класата конвексни функции имаме во следната дефиниција.

Дефиниција 1.2.11. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}$ е* **конвексна од ред $\boldsymbol{\alpha}$**, $0 \leq \alpha < 1$ *ако и само ако*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оваа класа ќе ја означуваме со $\mathcal{K}(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 1$. Очигледно $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$ и $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{K}$ за $0 < \alpha < 1$.

Дефиниција 1.2.12. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ е* **повеќелисна конвексна од ред $\boldsymbol{\alpha}$**, $0 \leq \alpha < p$ *и* $p = 1, 2, \ldots$ *ако*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Класата повеќелисни конвексни функции од ред α, $0 \leq \alpha < p$ ќе ја означуваме со $\mathcal{K}_p(\alpha)$. За $\alpha = 0$ се добива **класата повеќелисни конвексни функции** $\mathcal{K}_p$. За $\alpha = 0$ и $p = 1$ се добива класата конвексни функции $\mathcal{K}$.

Доволен услов функцијата f од облик (1.1.1) да биде во класата $\mathcal{K}_p(\alpha)$ е

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p+n)(p+n-\alpha)|a_{p+n}| \leq p(p-\alpha). \tag{1.2.8}$$

Овој доволен услов е исто така и потребен за функциите од облик (1.1.1) со позитивни и негативни коефициенти (види [46]). Во продолжение ќе биде даден резултат поврзан со парцијалната сума на функцијата f со облик (1.1.1) која го задоволува условот (1.2.8).

Теорема 1.2.11. *Ако функцијата f од облик (1.1.1) го задоволува условот (1.2.8) тогаш*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{f_k(z)}\right] \geq \frac{(k+1)(2p+k+1-\alpha)}{(p+k+1)(p+k+1-\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Резултатот е најдобар можен за секое k, со екстремална функција

$$f(z) = z^p - \frac{p(p-\alpha)}{(p+n)(p+n-\alpha)} z^{p+n}.$$

Дефиниција 1.2.13. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ е* **повеќелисна силно конвексна од ред $\boldsymbol{\alpha}$**, *$0 < \alpha \leq p$ и $p = 1, 2, \dots$ ако*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оваа класа ќе ја означуваме со $\widetilde{\mathcal{K}_p}(\alpha)$.

1.2.3. Блиску-до-конвексни функции, блиск-до-конвексни функции од ред α. Повеќелисни блиску-до-конвексни функции од ред α

Дефиниција 1.2.14. *Функцијата $f(z)$ аналитичка на единечниот диск $\mathbb{D}$ е* **блиску-до-конвексна** *ако постои конвексна функција $g(z)$ така што*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Класата блиску-до-конвексни функции ќе ја означиме со $\mathcal{C}$.

Класата блиску-до-конвексни функции е воведена од страна на Kaplan во 1952 година, [24].

Да забележиме дека, секоја ѕвездолика функција е блиску-до-конвексна. Навистина, секоја $f \in \mathcal{S}^*$ има облик $f(z) = zg'(z)$ за $g \in \mathcal{K}$, и

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0.$$

Дефиниција 1.2.15. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}$ велиме дека е* **блиску-до-конвексна од ред $\boldsymbol{\alpha}$** *за секое $z \in \mathbb{D}$, ако постои функција $g(z) \in \mathcal{S}^*$ така што*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right] > \alpha, \quad (0 \le \alpha < 1).$$

Класата блиску-до-конвексни функции од ред α ќе ја означиме со $\mathcal{C}(\alpha)$. Во продолжение ќе направиме генерализација на класата блиску-до-конвексни функции од ред α со воведување на класата повеќелисни блиску-до-конвексни функции од ред α која ќе ја означиме со $\mathcal{C}_p(\alpha)$.

Дефиниција 1.2.16. *Функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ велиме дека припаѓа на класата* **повеќелисни блиски-до-конвексни функции од ред $\boldsymbol{\alpha}$**, *која ќе ја означуваме со $\mathcal{C}_p(\alpha)$, ако постои функција $g(z) \in \mathcal{S}_p^*(\alpha)$ таква што*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right] > \alpha, \quad (0 \le \alpha < p, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad z \in \mathbb{D}).$$

Од $g(z) = z^p$ припаѓа на класата $\mathcal{S}_p^*$ добиваме дека функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ за која важи

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right] > \alpha, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad 0 \le \alpha < p, \quad p = 1, 2, \ldots)$$

припаѓа на класата $\mathcal{C}_p(\alpha)$.

За повеќелисните блиску-до-конвексни функции повеќе може да се најде во [29] и [30].

1.3. Класата функции дефинирана од Silverman

Аналитичките репрезентации на класите на ѕвездолики и конвексни функции биле проучувани од повеќе математичари кои работат комплексна анализа. На пример Mocanu во [37] ја проучувал линеарната комбинација од аналитичката репрезентација на класите конвексни и ѕвездолики функции. Тој во [35] покажал дека ако важи:

$$\mathrm{Re}\left[\alpha\left(1+zf''(z)/f'(z)\right)+(1-\alpha)zf'(z)/f(z)\right]>0$$

за $z\in\mathbb{D}$, тогаш f е ѕвездолика за α реално, и конвексна за $\alpha\geq 1$. Silverman пак ги истражувал својствата на функциите кои се дефинирани како количник од аналитичката репрезентација на конвексни и ѕвездолики функции, $\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}$. Попрецизно, тој ја разгледувал класата

$$\mathcal{G}_b=\left\{f\in\mathcal{A}:\left|\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}-1\right|<b,\quad z\in\mathbb{D}\right\},$$

$0<b\leq 1$. Оваа класа била проучувана во ([56, 41, 66, 67]). Резултати кои се добиени од Silverman, а се однесуваат на оваа класа се:

Теорема 1.3.12. *Ако* $0<b\leq 1$ *тогаш* $\mathcal{G}_b\subset\mathcal{S}^*\left(2/(1+\sqrt{1+8b})\right)$. *Резултатот е најдобар можен за секое* b.

Оваа теорема може да се запише и во следната еквивалентна форма:

Теорема 1.3.13. *Ставаме* $b=(1-\alpha)/2\alpha^2,\quad 1/2\leq\alpha<1$. *Тогаш* $\mathcal{G}_b\subset\mathcal{S}^*(\alpha)$, *со екстремалната функција* $z/(1-z)^{2(1-\alpha)}$.

Забелешка 1.3.1. Во оваа теорема резултатот не е најдобриот можен. Имено, за функцијата $f(z) = z/(1-z)^{2(1-\alpha)}$ имаме $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$, но $f \in \mathcal{G}_b$ за $b = \frac{1}{2(1-\alpha)} > \frac{(1-\alpha)}{2\alpha^2}$ $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$. Понатаму, најдобар можен резултат и други поврзани резултати со овие ќе бидат дадени во Теорема 3.2.2., Теорема 3.2.3. и Теорема 3.2.4..

Последица 1.3.1. $G_1 \subset \mathcal{S}^*(1/2)$.

Последица 1.3.2. *Ако* $\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)/f(z)}{1+zf''(z)/f'(z)}\right] > 1/2$ *за* $z \in \mathbb{D}$, *тогаш* $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$.

Теорема 1.3.14. *Ако* $f \in \mathcal{S}^*(1/2)$, *тогаш* $\left|\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} - 1\right| < 1$ *за* $|z| < (2\sqrt{3}-3)^{1/2} = 0.68\ldots$. *Резултатот е најдобриот можен.*

Теорема 1.3.15. $\mathcal{G}_b \subset \mathcal{K}$ *за* $b \leq \sqrt{2}/2$.

Во следната последица од Теорема 1.3.15. имаме дека функциите од $\mathcal{G}_1$ се конвексни на дискот $|z| < \sqrt{2}/2$.

Последица 1.3.3. *Ако* $f \in \mathcal{G}_b, \sqrt{2}/2 \leq b \leq 1$, *тогаш* f *е конвексна на дискот* $|z| < \sqrt{2}/2b$.

1.4. Некои методи од теоријата на еднолисните функции

Основните методи во геометриската теорија на функциите од една комплексна променлива се принципот на плоштина и контурна интеграција, параметарскиот метод, методот на интегрални претставувања, методот на субординација, и т.н.. Тие се применуваат и во теоријата на еднолисните функции и водат до значајни резултати. Во поновите истражувања во теоријата на еднолисни функции важно место завзема методот на диференцијални субординации и методот на диференцијални неравенки. Овие методи изобилуваат со голем број можности, и некои од нив се користени и во оваа докторска дисетација. За теоријата на диференцијални субординации значајни референци се [5] и [33].

Од тие два метода постар е методот на диференцијални неравенки. Еден од најзначајните резултати кои се користат во овој метод е лемата на Clunie-Jack.

Лема 1.4.1. *[21]* (лема на Clunie-Jack) *Нека функцијата $\omega(z)$ е аналитичка и различна од константа на $\mathbb{D}$, и нека $\omega(0) = 0$. Ако $|\omega(z)|$ го постигнува својот максимум на кружницата $|z| = r < 1$ во точката z_0, тогаш имаме дека*

$$z_0\omega'(z_0)/\omega(z_0) = k \geq 1.$$

Во продолжение ќе биде воведен методот на субординации и диференцијални субординации.

Дефиниција 1.4.17. *Ако $f(z)$ и $g(z)$ се аналитички на $\mathbb{D}$, тогаш велиме дека $f(z)$* **е субординирана на** *$g(z)$, и пишуваме*

$$f(z) \prec g(z), \tag{1.4.9}$$

ако постои функција $\omega(z)$ аналитичка на $\mathbb{D}$ така што $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$, и $f(z) = g(\omega(z))$. Ако $g(z)$ е еднолисна на $\mathbb{D}$, тогаш $f(z) \prec g(z)$ ако и само ако $f(0) = g(0)$ и $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$.

Аналитичките изрази на ѕвездоликоста (1.2.4) и конвексноста (1.2.7) може да се запишат во следната еквивалентна форма со помош на субординации:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

и

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+z}{1-z}$$

соодветно.

Ако $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ е комплексната рамнина) е аналитичка функција со домен $D \subset \mathbb{C}^2$, ако $h(z)$ е еднолисна на $\mathbb{D}$ и $p(z)$ е аналитичка на $\mathbb{D}$ со $(p(z), zp'(z)) \in D$ кога $z \in \mathbb{D}$, тогаш велиме дека $p(z)$ задоволува **диференцијална субординација од прв ред** ако

$$\phi(p(z), zp'(z)) \prec h(z). \tag{1.4.10}$$

Еднолисната функција $q(z)$ се нарекува **доминанта** на диференцијалната субординација (1.4.10) ако $p(z) \prec q(z)$ за сите $p(z)$ за кои важи (1.4.10). Ако $\widetilde{q}(z)$ е доминанта на (1.4.10) и $\widetilde{q}(z) \prec q(z)$ за сите доминанти на (1.4.10), тогаш велиме дека $\widetilde{q}(z)$ е **најдобра доминанта** на диференцијалната субординација (1.4.10). Теоријата на диференцијални субординации, како и теоријата на диференцијални субординации од прв ред била воведена од S.S. Miller и P.T. Mocanu во ([32]) и [34].

На крај, со следната теорема, дадени се основните својства на поимот субординација.

Теорема 1.4.16. *Нека $f(z)$ е аналитичка на $\mathbb{D}$, $g(z)$ еднолисна на $\mathbb{D}$, и нека $f(z) \prec g(z)$. Тогаш*

(i) $|f'(0)| \leq |g'(0)|$*;*

(ii) $f(|z| < r) \subseteq g(|z| < r)$*, за секое* r*,* $0 < r < 1$*;*

(iii) $\max\limits_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max\limits_{|z| \leq r} |g(z)|$.

Глава 2

Нови релации помеѓу некои класи повеќелисни функции

Оваа глава содржи нови оригинални резултати дадени во [26] и [27]. Тие резултати се однесуваат на добиени релации помеѓу повеќелисни функции изразени со помош на импликации во кои се вклучени неравенства, т.е., тие резултати даваат врски помеѓу некои класи повеќелисни функции.

2.1. Познати резултати за релации помеѓу некои класи повеќелисни функции

Во оваа секција ќе бидат наведени веќе постоечки резултати кои даваат врски помеѓу некои класи еднолисни и повеќелисни функции.

Во [12] е даден доволен услов функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ да биде повеќелисна блиску-до-конвексна. Тој резултат е даден со следната теорема:

Теорема 2.1.1. *[12] Нека p е природен број, $0 \leq \alpha < p$ и нека функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ го задоволува неравенството*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \frac{(2p-1)(p+\alpha)+2\alpha}{2(p+\alpha)}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Тогаш,

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f'(z)}{z^{p-1}}\right] > \frac{p+\alpha}{2}, \quad (z \in \mathbb{D})$$

или еквивалентно, $f(z) \in \mathcal{C}_p\left(\frac{p+\alpha}{2}\right)$.

Во истиот труд може да се најде и следниот резултат врз основа на кој бил добиен критериум функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ да биде повеќелисна блиску-до-конвексна функција:

Теорема 2.1.2. *[12] Нека p е природен број, $0 \leq \alpha < p$ и нека функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ го задоволува неравенството*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] < \frac{p(2p+\alpha+1)+\alpha}{2p+\alpha}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Тогаш,

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p\right| < p+\alpha, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

За $\alpha = 0$ во претходната теорема се добива следната последица:

Последица 2.1.1. *[12] Нека p е природен број, $0 \leq \alpha < p$ и нека функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$ го задоволува неравенството*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] < \frac{2p+1}{2}, \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Тогаш,

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p\right| < p, \quad (z \in \mathbb{D}),$$

или еквивалентно $f(z) \in \mathcal{C}_p$.

Класичен резултат од Marx и Strohhčker [31, 61] е дека конвексните функции имаат ред на ѕвездоликост $\frac{1}{2}$, т.е., за $f \in \mathcal{A}$

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.1.1}$$

Функцијата $f(z) = \frac{z}{1-z}$ покажува дека тој резултат е најдобриот можен, т.е., дека бројот $\frac{1}{2}$ не може да се замени со поголем. Овој резултат во [38] е именуван како Marx-Strohhčker резултат од тип I. Во [39] е покажано дека импликацијата (2.1.1) не е точна за повеќелисни функции. Имено, е покажано дека, ако $p = 2, 3, \ldots$, тогаш постои $f \in \mathcal{K}_p$ така што $f \in \mathcal{S}_p^*$, но $f \notin \mathcal{S}_p^*(\alpha)$ за сите $\alpha > 0$, т.е., постои $f \in \mathcal{A}_p$ така што

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

и

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}),$$

но

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha \quad (z_0 \in \mathbb{D})$$

не важи за секое $\alpha > 0$. Во [38] е дадено проширување за $0 \leq \alpha < \frac{p-1}{2}$ на резултатот на Srivastava и другите [60] за $\frac{p-1}{2} \leq \alpha < p$ во однос на прашањето: ако $f(z)$ е повеќелисна конвексна функција од ред α во $\mathbb{D}$, $p = 2, 3, \ldots, 0 \leq \alpha < p$, кој е редот β на повеќелисна ѕвездоликост на функцијата $f(z)$? Ова проширување во [38] не е покажано дека е најдобро можно. Аналоген проблем за класата еднолисни функции е поставен од Jack во [22]: Кој е најголемиот број $\beta = \beta(\alpha)$ таков што $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{S}^*(\beta(\alpha))$. Конечно, во [38] е дадена и генерализација на класичниот Marx-Strohhčker резултат ([31, 61]):

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.1.2}$$

од класата еднолисни кон класата повеќелисни функции. Овој резултат во [38] е наречен Marx-Strohhčker резултат од тип II.

Најпрво ќе биде наведен Marx-Strohhčker резултат од тип I.

Теорема 2.1.3. *Нека $p \in \mathbb{N}$ и $0 \leq \beta < p$. Исто така нека*

$$\alpha \equiv \alpha(\beta, p) = \begin{cases} \beta - \frac{1}{2}\binom{\frac{\beta}{p-\beta}}{} & (0 \leq \beta < \frac{p}{2}) \\ \beta - \frac{1}{2}\binom{\frac{p-\beta}{\beta}}{} & (\frac{p}{2} \leq \beta < p) \end{cases}. \tag{2.1.3}$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$ и

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{2.1.4}$$

или, еквивалентно,

$$\mathcal{K}_p(\alpha(\beta, p)) \subset \mathcal{S}_p^*(\beta),$$

т.е., повеќелисните конвексни функции од ред $\alpha(\beta, p)$ во $\mathbb{D}$, имаат β ред на повеќелисна ѕвездоликост во $\mathbb{D}$.

Забелешка 2.1.1. Секоја од следните забелешки вреди да се наведи.

(i) Вредноста на $\alpha(\beta, p)$ е добро дефинирана, т.е., $0 \le \alpha(\beta, p) < p$. Кога $p = 1$, тоа може директно да се провери. Кога $p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, следува од фактот дека $\alpha(\beta, p)$ е строго растечка функција по β на интервалот $[0, p)$ (е покажано во доказот на Теорема 2.1.4. дадена подоле). Затоа, имаме

$$0 = \alpha(0, p) \le \alpha(\beta, p) < \lim_{\beta \to p} \alpha(\beta, p) = \beta < p.$$

(ii) За $p = 1$ и $\beta = \frac{1}{2}$ во Теорема 2.1.3., се добива $\alpha = 0$, т.е., се добива Marx-Strohhčker резултатот како во импликацијата (2.1.1).

Теорема 2.1.3. може да се запише во следната еквивалентна форма, која го дава Marx-Strohhčker резултатот од тип I за повеќелисни функции за секое $\alpha \in [0, p)$.

Теорема 2.1.4. *Нека $p \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha < p$ и*

$$\beta \equiv \beta(\alpha, p) = \begin{cases} \frac{2(\alpha+p)-1-\sqrt{[2(\alpha+p)-1]^2-16\alpha p}}{4} & (0 \le \alpha < \frac{p-1}{2}) \\ \frac{2\alpha-1+\sqrt{(2\alpha-1)^2+8p}}{4} & (\frac{p-1}{2} \le \alpha < p) \end{cases}. \tag{2.1.5}$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$ и

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{2.1.6}$$

или, еквивалентно,

$$\mathcal{K}_p(\alpha) \subset \mathcal{S}_p^*(\beta(\alpha, p)),$$

т.е., повеќелисните конвексни функции од ред α имаат $\beta(\alpha, p)$ ред на повеќелисна ѕвездоликост.

Забелешка 2.1.2. Теорема 2.1.4. е проширување на најдобриот можен резултат добиен од Srivastava и другите [60] кога $0 \leq \alpha < \frac{p-1}{2}$. Авторите на [38] не успеале да покажат дека ова проширување е најдоброто можно. Па, проблемот за добивање на најдобра можна верзија останува отворен проблем.

Најдобриот можен Marx-Strohhčker's резултат кога $\frac{p-1}{2} \leq \alpha < p$ е даден со $\mathcal{K}_p(\alpha) \subset \mathcal{S}_p^*(\widehat{\beta}_1(\alpha, p))$, за

$$\widehat{\beta}_1(\alpha, p) = \frac{p}{{}_2F_1(1, 2(p-\alpha); p+1; \frac{1}{2})}; \tag{2.1.7}$$

кога $p = 1$ и $0 \leq \alpha < 1$, е даден за

$$\widehat{\beta}_2(\alpha) = \begin{cases} \frac{1-2\alpha}{2^{2(1-\alpha)}-2} & \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\ln 2} & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.1.8}$$

добиено од Wilken и Feng. Со споредување на вредностите на $\beta(\alpha, p)$ дадено со (2.1.5), $\widehat{\beta}_1(\alpha, p)$ дадено со (2.1.7), и $\widehat{\beta}_2(\alpha)$ дадено со (2.1.8), кога $\frac{p-1}{2} \leq \alpha < p$ се добиени следните последици:

(*i*) Ако $p = 1$ и $\alpha = 0$, тогаш

$$\widehat{\beta}_1(0, 1) = \widehat{\beta}_2(0) = \beta(0, 2) = \frac{1}{2},$$

што е Marx-Strohhčker's резултатот (2.1.1);

(*ii*) Ако $p = 1$ и $0 < \alpha < 1$, тогаш

$$\widehat{\beta}_1(\alpha, 1) = \widehat{\beta}_2(\alpha) > \beta(\alpha, 1);$$

(*iii*) Ако $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $\alpha = \frac{p-1}{2}$, тогаш

$$\beta(\alpha, p) = \widehat{\beta}_1(\alpha, p) = \frac{p}{2},$$

т.е., резултатите се еквивалентни;

(*iv*) Ако $p \geq 2$ и $\frac{p-1}{2} < \alpha < p$, тогаш

$$\beta(\alpha, p) \neq \widehat{\beta}_1(\alpha, p),$$

т.е.,

$$\beta(\alpha, p) < \widehat{\beta}_1(\alpha, p)$$

што се должи на најдобриот можен резултат за $\widehat{\beta}_1(\alpha, p)$.

Во продолжение ќе биде наведена генерализацијата на импликацијата (2.1.2) за повеќелисни функции кога p е кој било позитивен цел број, т.е., ќе биде наведен споменатиот Marx-Strohhčker резултат од тип II.

Теорема 2.1.5. *[38] Нека* $p \in \mathbb{N}$, $0 < \gamma < 1$ *и*

$$\beta \equiv \beta(\gamma, p) = \begin{cases} p - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) & (0 < \gamma < \frac{1}{2}) \\ p - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) & (\frac{1}{2} \leq \gamma < 1) \end{cases}. \tag{2.1.9}$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$ *и*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z^p}\right] > \gamma \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.1.10}$$

Забелешка 2.1.3. Вредноста $\beta(\gamma, p)$ е добро дефинирана, т.е., $0 \leq \beta(\gamma, p) < p$. Истото може да се провери користејќи го фактот дека, за $0 < \gamma < 1$, имаме

$$\frac{1}{2(1-\gamma)} > \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1}{2\gamma} > \frac{1}{2}.$$

Функцијата $\beta(\gamma, p)$ во однос на променливата γ, е непрекината на $(0,1)$ и ја има истата гранична вредност во крајните точки на интервалот:

$$\lim_{\gamma\to 0+} \beta(\gamma, p) = \lim_{\gamma \to 1-} \beta(\gamma, p) = p.$$

Исто така, од

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\beta(\gamma, p) = \begin{cases} -\frac{1}{2(1-\gamma)^2} & (0 < \gamma < \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2\gamma^2} & (\frac{1}{2} < \gamma < 1) \end{cases},$$

се добива дека $\beta(\gamma, p)$ е строго монотоно опаѓачка функција по променливата γ на интервалот $(0, \frac{1}{2})$ и строго монотоно растечка на интервалот $(\frac{1}{2}, 1)$. Затоа, за инверзната функција на $\beta(\gamma, p)$ (во однос на променливата γ) постојат два избора: $\frac{2(p-\beta)}{1+2(p-\beta)}$ (кој одговара на $0 < \gamma < \frac{1}{2}$) и $\frac{1}{1+2(p-\beta)}$ (кој одговара на $\frac{1}{2} < \gamma < 1$). Бидејќи интересот е за оној кој дава поголема вредност, за инверзна функција е избрана таа што одговара за $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ и дава вредности во интервалот $(\frac{1}{2}, 1)$, наместо другата што дава вредности во $(0, \frac{1}{2})$, т.е.,

$$\gamma(\beta, p) \equiv \beta^{-1}(\gamma, p) = \frac{1}{1 + 2(p-\beta)},$$

со домен $(p - \frac{1}{2}, p)$ за променливата β.

Во продолжение ќе биде наведена теорема т.е., ќе биде наведена преработка на Теорема 2.1.5. дадена со следната форма:

Теорема 2.1.6. *[38] Нека $p \in \mathbb{N}$, $p - \frac{1}{2} \leq \beta < p$ и*

$$\gamma \equiv \gamma(\beta, p) = \frac{1}{1 + 2(p-\beta)}.$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$ и

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z^p}\right] > \gamma \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Ставајќи $p = 1$ во Теорема 2.1.5. и Теорема 2.1.6., е добиена следната последица:

Последица 2.1.2. *Нека $f \in \mathcal{A}$. Тогаш следните тврдења се точни.*

(*i*) *Ако $0 < \gamma < 1$, тогаш*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2(1-\gamma)} & (0 < \gamma < \frac{1}{2}) \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2\gamma} & (\frac{1}{2} \leq \gamma < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \gamma.$$

(*ii*) *Ако $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, тогаш*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > \frac{1}{3-2\beta}.$$

Сите горе наведени неравенства одговараат на целиот единичен диск $\mathbb{D}$.

Забелешка 2.1.4. Секоја од следните забелешки е достојна за споменување.

(*i*) За $\gamma = \frac{1}{2}$ во претходната Последица, се добива $\beta = \frac{1}{2}$, што е добро познатиот Marx-Strohhčker резултат (2.1.2). Истиот заклучок следува за $\beta = \frac{1}{2}$ во претходната Последица.

(*ii*) Srivastava и другите во [60] ја истражувале функцијата $f \in \mathcal{A}_p$ што го задоволува следниот услов:

$$(1-\lambda)\left(\frac{zf^{(j)}(z)}{f^{(j-1)}(z)}\right)+\lambda\left(1+\frac{zf^{(j+1)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right) \prec (p-j+1)\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)$$

$$(1 \le j \le p; \quad -1 \le B < A \le 1).$$

Всушност Srivastava и другите во [60] го добиваат нивниот резултат преку

$$\left(\frac{f^{(j-1)}(z)}{z^{p-j+1}}\right)^{\nu},$$

но само кога $\lambda > 0$ (види [[60], стр.332, Теорема 5]). Затоа за $j = A = -B = \nu = 1$, претходно наведените резултати поврзани со Marx-Strohhčker резултатот од тип II претставуваат проширување на оние дадени во [60].

Теорема 2.1.6. кога ќе се комбинира со горе споменатиот најдобар можен резултат на Srivastava и другите [60] ја имплицира следната теорема.

Теорема 2.1.7. *Нека $p \in \mathbb{N}$ и $\frac{p-1}{2} \le \alpha < p$. Претпоставуваме исто така дека*

$$\beta \equiv \widehat{\beta_1}(\alpha, p) = \frac{p}{{}_2F_1(1, 2(p-\alpha); p+1; \frac{1}{2})} \ge p - \frac{1}{2}$$

и

$$\gamma \equiv \gamma(\beta, p) = \frac{1}{1+2(p-\beta)}.$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$, тогаш

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \beta \Rightarrow \mathrm{Re}\left[\frac{f(z)}{z^p}\right] > \gamma.$$

Сите претходни неравенства остануваат точни на целиот единичен диск $\mathbb{D}$.

Во [20] се дадени теореми кои содржат неравенства за повеќелисни функции. Од нив добиени се последици кои се дадени во продолжение. Последиците содржат неравенства во кои се вклучени повеќелисни функции.

Последица 2.1.3. *[20] Нека за $f \in \mathcal{A}_p$, важи неравенството*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right] < \frac{1}{2}, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}),$$

тогаш,

$$\left|\frac{f(z)}{z^p} - 1\right| < 1, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}).$$

Последица 2.1.4. *[20] Ако за $f(z) \in \mathcal{A}_p$, важи неравенството*

$$\mathrm{Re}\left[1 + z\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right)\right] < \frac{1}{2}, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}),$$

тогаш $f(z) \in \mathcal{S}_p^*$ и

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right| < p, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}).$$

Понатаму,

Последица 2.1.5. *[20] Ако за $f(z) \in \mathcal{A}_p$, важи неравенството*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right] < \frac{1}{2}, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}),$$

тогаш $f(z) \in \mathcal{C}_p$ и

$$\left|\frac{f'(z)}{z^{p-1}} - p\right| < p, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}).$$

Последица 2.1.6. *[20] Ако за $f(z) \in \mathcal{A}_p$, важи неравенството*

$$\mathrm{Re}\left[1 + z\left(\frac{f'''(z)}{f''(z)} - \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right] < \frac{1}{2}, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N}),$$

тогаш $f(z) \in \mathcal{K}_p$ *и*

$$\left|1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - p\right| < p - 1, \quad (z \in \mathbb{D}; \quad p \in \mathbb{N} - \{1\}).$$

Последните три последици даваат критериуми функцијата $f(z) \in \mathcal{A}_p$, да биде повеќелисна ѕвездолика, повеќелисна блиску-до-конвексна и повеќелисна конвексна функција, соодветно.

Во 1947, Robinson [52] го докажал следниот резултат кој содржи неравенства кои важат за аналитички функции:

Теорема 2.1.8. *[52] Нека* $S(z)$ *и* $T(z)$ *се аналитички на* $\mathbb{D}$, *и нека* $\operatorname{Re}\left[\frac{zS'(z)}{S(z)}\right] > 0, (z \in \mathbb{D})$. *Ако* $\left|\frac{T'(z)}{S'(z)}\right| < 1 (z \in \mathbb{D})$ *и* $T(0) = 0$, *тогаш* $\left|\frac{T(z)}{S(z)}\right| < 1 (z \in \mathbb{D})$.

Во [42] е дадено продобрување и обопштување на претходната теорема за функции кои припаѓаат на $\mathcal{A}_p$, т.е., била дадена следната теорема:

Теорема 2.1.9. *[42] Нека* $S(z) \in \mathcal{A}_m$, $T(z) \in \mathcal{A}_n$ *со* $p = n - m \geq 1$. *Нека за* $S(z)$ *важи* $\operatorname{Re}\left[\frac{S(z)}{zS'(z)}\right] > \alpha, (0 \leq \alpha < 1/m)$. *Ако* $\left|\frac{T'(z)}{S'(z)}\right| < (1 + p\alpha)|z|^{p-1} (z \in \mathbb{D})$, *тогаш* $\left|\frac{T(z)}{S(z)}\right| < |z|^{p-1} (z \in \mathbb{D})$.

Во [42] е даден и следниот резултат за функции од $\mathcal{A}_p$.

Теорема 2.1.10. *[42] Нека* $S(z) \in \mathcal{A}_m$, $T(z) \in \mathcal{A}_n$ *со* $p = n - m \geq 1$. *Нека за* $S(z)$ *важи* $\operatorname{Re}\left[\frac{S(z)}{zS'(z)}\right] > \alpha, (0 \leq \alpha < 1/m)$ *и* $-\frac{\alpha}{p} < \operatorname{Im}\left[\frac{S(z)}{zS'(z)}\right] \leq \frac{\alpha}{p}, (0 \leq \alpha < 1/m)$. *Ако*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{T'(z)}{z^p S'(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\operatorname{Re}\left[\frac{T(z)}{z^p S(z)}\right] > 0 \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Понатаму, интересни резултати кои вклучуваат неравенства за повеќелисни функции можат да се најдат во [44] и [45].

Резултати пак поврзани со оцена на аргументот можат да се најдат во статии на Cho (види [6]-[10]).

2.2. Релации помеѓу некои класи повеќелисни функции

Оваа секција од докторската дисертација содржи оригинални резултати од истражувањата на врските помеѓу некои класи повеќелисни функции. Резултатите се публикувани во трудовите [26] и [27]. Резултатите од [27] се проширување на резултатите од [26].

На почетокот ќе биде даден доволен услов кога

$$\left|\arg\left[1+\frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

имплицира

$$\left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Потоа ќе биде наведен доволен услов кога

$$\left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

имплицира

$$\left|\arg\frac{zf^{(p-1)}(z)}{f^{(p-2)}(z)}\right| < \frac{\beta_{p-1}\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

и на крај доволен услов кога

$$\left|\arg\left[1+\frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

имплицира

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

За добивање на резултатите ќе се користи следниот резултат од теоријата на диференцијални субординации од прв ред.

Лема 2.1 (Theorem 2.3i(i) [33]) *Нека $\Omega \subset \mathbb{C}$ и претпоставуваме дека функцијата $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ задоволува $\psi(ix, y; z) \notin \Omega$ за сите $x \in \mathbb{R}$, $y \leq -(1+x^2)/2$, и $z \in \mathbb{D}$. Ако $q \in \mathcal{H}[1, 1]$ и $\psi(q(z), zq'(z); z) \in \Omega$ за сите $z \in \mathbb{D}$, тогаш $\operatorname{Re} q(z) > 0$, $z \in \mathbb{D}$.*

Најпрво ќе биде наведена теорема која ќе се користи во доказот на теоремата која ќе биде наведена во оваа секција, а дава врска помеѓу неравенствата

$$\left|\arg \left[1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

и

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Теорема 2.2.11. *Нека $f \in \mathcal{A}_p$, $p \geq 2$, $0 < \beta_p \leq 1$ и претпоставуваме дека $f^{(k)}(z) \neq 0$ за сите $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ и за сите позитивни цели броеви k. Ако*

$$\alpha \equiv \alpha(\beta_p) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\beta_p}{1-\beta_p} \cdot \left(\frac{1-\beta_p}{1+\beta_p}\right)^{(1+\beta_p)/2} + \operatorname{tg}\frac{\beta_p\pi}{2}\right],$$

тогаш:

$$\left|\arg \left[1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

имплицира

$$\left|\arg \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Доказ. Нека избереме $q^{\beta_p}(z) = \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}$. Тогаш имаме

$$\frac{z\left[q^{\beta_p}(z)\right]'}{q^{\beta_p}(z)} = \frac{z\beta_p q^{\beta_p-1}(z)q'(z)}{q^{\beta_p}(z)} = 1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)} - q^{\beta_p}(z)$$

и

$$1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)} = \frac{z\beta_p q'(z)}{q(z)} + q^{\beta_p}(z).$$

Понатаму, за функцијата

$$\psi(r, s; z) = \beta_p \cdot \frac{s}{r} + r^{\beta_p},$$

имаме

$$\psi(q(z), zq'(z); z) = \beta_p \cdot \frac{zq'(z)}{q(z)} + q^{\beta_p}(z) \in \Omega \equiv \left\{\omega : |\arg\omega| < \frac{\alpha\pi}{2}\right\},$$

т.е.,

$$|\arg\psi(q(z), zq'(z); z)| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Од Лема 2.1 добиваме дека за да покажеме

$$\left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

доволно е да покажеме дека

$$\psi(ix, y; z) = \beta_p \cdot \frac{y}{ix} + (ix)^{\beta_p} = -\beta_p \cdot \frac{y}{x} \cdot i + (ix)^{\beta_p} \notin \Omega$$

за сите реални $x, y \le -\frac{1+x^2}{2}$ ($n = 1$ во Лема 2.1) и за сите $z \in \mathbb{D}$.

За $x > 0$ имаме

$$\begin{aligned}
0 < \arg\psi(ix, y; z) &= \operatorname{arctg}\left[\frac{-\beta_p\frac{y}{x} + x^{\beta_p}\sin\frac{\beta_p\pi}{2}}{x^{\beta_p}\cos\frac{\beta_p\pi}{2}}\right] = \\
&= \operatorname{arctg}\left[\frac{-\beta_p\frac{y}{x}}{x^{\beta_p}\cos\frac{\beta_p\pi}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\beta_p\pi}{2}\right] \\
&\le \operatorname{arctg}\left[\frac{\beta_p\cdot\frac{1+x^2}{2x}}{x^{\beta_p}\cos\frac{\beta_p\pi}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\beta_p\pi}{2}\right] \\
&= \operatorname{arctg}\left[\frac{\beta_p\cdot(1+x^2)}{2x^{\beta_p+1}\cos\frac{\beta_p\pi}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\beta_p\pi}{2}\right] \equiv \varphi(x).
\end{aligned}$$

Слично, за $x < 0$,

$$|\arg\psi(ix, y; z)| = \arg\left(-\beta_p \cdot \frac{y}{|x|} \cdot i + (i|x|)^{\beta_p}\right) = \varphi(|x|).$$

Лесно е да се провери дека функцијата $\varphi(x)$, на интервалот $(0, +\infty)$, ја постигнува нејзината минимална вредност за $x_* = \sqrt{\frac{1+\beta_p}{1-\beta_p}}$, т.е.,

$$\inf\left\{|\arg\psi(ix, y; z)| : x, y \in \mathbb{R}, x \neq 0, y \leq -\frac{1+x^2}{2}\right\} = \varphi(x_*) = \alpha(\beta_p).$$

За $x = 0$ имаме

$$\lim_{|x|\to 0} |\arg\psi(ix, y; z)| = \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} \geq \alpha(\beta_p).$$

Со оваа го завршуваме доказот дека $\psi(ix, y; z) \notin \Omega$ за сите реални $x, y \leq -\frac{1+x^2}{2}$. $\square$

Понатаму ќе покажеме дека важи импликацијата:

$$\left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf^{(p-1)}(z)}{f^{(p-2)}(z)}\right| < \frac{\beta_{p-1}\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Таа исто ќе биде искористена за добивање на теоремата која дава релации помеѓу неравенствата

$$\left|\arg\left[1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

и

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Теорема 2.2.12. *Нека $f \in \mathcal{A}_p$, $p \geq 2$, $0 < \beta_{p-1} \leq 1$ и нека $f^{(k)}(z) \neq 0$ за сите $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ и сите позитивни цели броеви k. Ако x_* е поголемото, од двете позитивни решенија на равенката*

$$2x^{\beta_{p-1}+1} \sin\frac{\beta_{p-1}\pi}{2} + \left(\beta_{p-1}x^2 + \beta_{p-1} - x^2 + 1\right) x^{\beta_{p-1}} \cos\frac{\beta_{p-1}\pi}{2} + x^2 - 1 = 0,$$

и ако

$$\beta_p = \beta_p(\beta_{p-1}) \equiv \operatorname{arcctg}[h(x_*)]$$

каде

$$h(x) \equiv \frac{-1 + x^{\beta_{p-1}} \cos \frac{\beta_{p-1}\pi}{2}}{\beta_{p-1}\frac{1+x^2}{2x} + x^{\beta_{p-1}} \sin \frac{\beta_{p-1}\pi}{2}},$$

тогаш важи следната импликација:

$$\left|\arg \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p \pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad \left|\arg \frac{zf^{(p-1)}(z)}{f^{(p-2)}(z)}\right| < \frac{\beta_{p-1}\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.2.11}$$

Доказ.

Избираме $q^{\beta_{p-1}}(z) = \frac{zf^{(p-1)}(z)}{f^{(p-2)}(z)}$. Тогаш имаме

$$\frac{z\left[q^{\beta_{p-1}}(z)\right]'}{q^{\beta_{p-1}}(z)} = \frac{z\beta_{p-1}q^{\beta_{p-1}-1}(z)q'(z)}{q^{\beta_{p-1}}(z)} = 1 + \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)} - q^{\beta_{p-1}}(z),$$

т.е.,

$$\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)} = \frac{z\beta_{p-1}q'(z)}{q(z)} + q^{\beta_{p-1}}(z) - 1.$$

Понатаму, за функцијата

$$\psi(r, s; z) = \beta_{p-1} \cdot \frac{s}{r} + r^{\beta_{p-1}} - 1,$$

имаме

$$\psi(q(z), zq'(z); z) = \beta_{p-1} \cdot \frac{zq'(z)}{q(z)} + q^{\beta_{p-1}}(z) - 1 \in \Omega \equiv$$

$$\equiv \left\{\omega : |\arg \omega| < \frac{\beta_p \pi}{2}\right\},$$

т.е.,

$$|\arg \psi(q(z), zq'(z); z)| < \frac{\beta_p \pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Од Лема 2.1 добиваме дека за да покажеме

$$\left|\arg \frac{zf^{(p-1)}(z)}{f^{(p-2)}(z)}\right| < \frac{\beta_{p-1}\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

доволно е да покажеме дека

$$\psi(ix, y; z) = \beta_{p-1} \cdot \frac{y}{ix} + (ix)^{\beta_{p-1}} - 1 = -\beta_{p-1} \cdot \frac{y}{x} \cdot i + (ix)^{\beta_{p-1}} - 1 \notin \Omega$$

за сите реални $x, y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ ($n = 1$ во Лема 2.1) и за сите $z \in \mathbb{D}$.

Кога $x > 0$ имаме

$$\operatorname{ctg}\left[\arg \psi(ix, y; z)\right] = \frac{-1 + x^{\beta_{p-1}} \cos \frac{\beta_{p-1}\pi}{2}}{-\beta_{p-1}\frac{y}{x} + x^{\beta_{p-1}} \sin \frac{\beta_{p-1}\pi}{2}} \leq h(x).$$

Слично, за $x < 0$,

$$\begin{aligned} &\left|\operatorname{ctg}\left[\arg \psi(ix, y; z)\right]\right| = \\ &= \left|\operatorname{ctg}\left[\arg\left(-\beta_{p-1} \cdot \frac{y}{|x|} \cdot i + (i|x|)^{\beta_{p-1}} - 1\right)\right]\right| \leq \\ &\leq h(|x|). \end{aligned}$$

Понатаму, $h(x)$ е непрекината на $(0, +\infty)$, $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) > 0$ и од

$$h'(x) = \frac{2\beta_{p-1}\left[2x^{\beta_{p-1}+1}\sin(\beta_{p-1}\pi/2) + \left(\beta_{p-1}x^2 + \beta_{p-1} - x^2 + 1\right)x^{\beta_{p-1}}\cos(\beta_{p-1}\pi/2) + x^2 - 1\right]}{\left(2x^{\beta_{p-1}+1}\sin(\beta_{p-1}\pi/2) + \beta_{p-1}x^2 + \beta_{p-1}\right)^2},$$

добиваме $h'(0) < 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) > 0$. Затоа, $h(x)$ има барем еден локален минимум и барем еден локален максимум на $(0, +\infty)$. Од друга страна, броителот на $h(x)$ е растечка функција на $(0, +\infty)$, а нејзиниот именител е конвексна функција на $(0, +\infty)$. Затоа, $h(x)$ има точно еден локален минимум (во точката x_{**}) и точно еден локален максимум (во точката $x_* > x_{**}$) на $(0, +\infty)$. Па,

$$\sup\left\{|\arg \psi(ix, y; z)| : x > 0, y \leq -\frac{1+x^2}{2}\right\} = \operatorname{arcctg}[h(x_*)] = \beta_p(\beta_{p-1}).$$

На ист начин можеме да покажеме точност и за $x < 0$.

За $x = 0$ имаме

$$\lim_{|x|\to 0} |\arg \psi(ix, y; z)| = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arcctg}[h(x)] = \frac{\pi}{2} \geq \beta_p(\beta_{p-1}).$$

Со тоа го комплетираме доказот на теоремата. $\square$

Врз основа на претходните две теореми добиени се резултатите во [27], т.е., добиени се теоремата и последицата наведени во продолжение:

Теорема 2.2.13. *Нека $f \in \mathcal{A}_p$, $p \geq 2$, $0 < \beta_{k-1} \leq 1$, $2 \leq k \leq p$, k е цел број, и нека претпоставиме дека $f^{(m)}(z) \neq 0$ за сите $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ и за сите позитивни цели броеви m. Ако низата $\beta_k, (k = 1, 2, ..., p)$ е таква што $\beta_1 = \beta$ и*

$$\beta_k = \beta_k(\beta_{k-1}) \equiv \operatorname{arcctg}\frac{-1 + x_*^{\beta_{k-1}} \cos\frac{\beta_{k-1}\pi}{2}}{\beta_{k-1}\frac{1+x_*^2}{2x_*} + x_*^{\beta_{k-1}} \sin\frac{\beta_{k-1}\pi}{2}}, \quad k = 2, 3, ..., p,$$

каде x_* е поголемото од двете позитивни решенија на равенката:

$$2x^{\beta_{k-1}+1} \sin\frac{\beta_{k-1}\pi}{2} + \left(\beta_{k-1}x^2 + \beta_{k-1} - x^2 + 1\right) x^{\beta_{k-1}} \cos\frac{\beta_{k-1}\pi}{2} + x^2 - 1 = 0,$$

и

$$\alpha \equiv \alpha(\beta_p) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\beta_p}{1-\beta_p} \cdot \left(\frac{1-\beta_p}{1+\beta_p}\right)^{(1+\beta_p)/2} + \operatorname{tg}\frac{\beta_p\pi}{2}\right],$$

тогаш важи следната импликација:

$$\left|\arg\left[1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

$$\Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Доказ. Најпрво ќе покажеме дека

$$\left|\arg \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{\beta_2\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad \left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta_1\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Избираме $q^{\beta_1}(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$. Па, имаме

$$\frac{z[q^{\beta_1}(z)]'}{q^{\beta_1}(z)} = \frac{z\beta_1 q^{\beta_1-1}(z)q'(z)}{q^{\beta_1}(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - q^{\beta_1}(z)$$

т.е.

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{z\beta_1 q'(z)}{q(z)} + q^{\beta_1}(z) - 1.$$

Понатаму, за функцијата

$$\psi(r, s; z) = \beta_1 \frac{s}{r} + r^{\beta_1} - 1$$

имаме

$$\psi(q(z), zq'(z); z) = \beta_1 \frac{zq'(z)}{q(z)} + q^{\beta_1}(z) - 1 \in \Omega \equiv \{\omega : |\arg \omega| < \frac{\beta_2\pi}{2}\},$$

т.е.,

$$|\arg \psi(q(z), zq'(z); z)| < \frac{\beta_2\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Од Лема 2.1, за да покажеме дека

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta_1\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

доволно е да покажеме дека

$$\psi(ix, y; z) = -\beta_1 \cdot \frac{y}{x} \cdot i + (ix)^{\beta_1} - 1 \notin \Omega$$

за сите реални $x, y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ ($n = 1$ во Лема 2.1) и за сите $z \in \mathbb{D}$.

За $x > 0$ имаме

$$\operatorname{ctg}\left[\arg\psi(ix,y;z)\right]=\frac{-1+x^{\beta_1}\cos\frac{\beta_1\pi}{2}}{-\beta_1\frac{y}{x}+x^{\beta_1}\sin\frac{\beta_1\pi}{2}}\le h(x),$$
$$h(x)\equiv\frac{-1+x^{\beta_1}\cos\frac{\beta_1\pi}{2}}{\beta_1\frac{1+x^2}{2x}+x^{\beta_1}\sin\frac{\beta_1\pi}{2}}.$$

Слично, за $x<0$,

$$|\operatorname{ctg}\left[\arg\psi(ix,y;z)\right]|=\left|\operatorname{ctg}\left[\arg\left(-\beta_1\cdot\frac{y}{|x|}\cdot i+(i|x|)^{\beta_1}-1\right)\right]\right|\le h(|x|).$$

Функцијата $h(x)$ е непрекината на $(0,+\infty)$, $h(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)>0$, $h'(0)<0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}h'(x)>0$. Уште повеќе, $h(x)$ има точно еден локален минимум (во точката x_{**}) и точно еден локален максимум (во точката $x_*>x_{**}$) на $(0,+\infty)$ (објаснето во [26]). Па,

$$\sup\left\{|\arg\psi(ix,y;z)|:x>0,y\le-\frac{1+x^2}{2}\right\}=\operatorname{arcctg}[h(x_*)]=\beta_2(\beta_1),$$

каде $\beta_1\equiv\beta$.

На сличен начин можеме да покажеме дека истото важи и за $x<0$.

За $x=0$ имаме

$$\lim_{|x|\to0}|\arg\psi(ix,y;z)|=\lim_{x\to0^+}\operatorname{arcctg}[h(x)]=\frac{\pi}{2}\ge\beta_2(\beta_1).$$

Тогаш

$$\left|\arg\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|<\frac{\beta_2\pi}{2}\quad(z\in\mathbb{D})\quad\Rightarrow\quad\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|<\frac{\beta_1\pi}{2}\quad(z\in\mathbb{D}).$$

Понатаму, за да ги покажеме импликациите:

$$\left|\arg\frac{zf^{(t)}(z)}{f^{(t-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_t\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf^{(t-1)}(z)}{f^{(t-2)}(z)}\right| < \frac{\beta_{t-1}\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}), \quad 3 \le t \le p,$$

како претходно, избираме

$$q^{\beta_{t-1}}(z) = \frac{zf^{t-1}(z)}{f^{t-2}(z)}, \quad 3 \le t \le p.$$

Применувајќи го истиот доказ како за импликацијата (2.2.11),

со итерација добиваме:

$$\psi(ix, y; z) = -\beta_{t-1} \cdot \frac{y}{x} \cdot i + (ix)^{\beta_{t-1}} - 1 \notin \Omega, \quad t = 3, ..., p,$$

за сите реални $x, y \le -\frac{1+x^2}{2}$ ($n = 1$ во Лема 2.1), за сите $z \in \mathbb{D}$, и

$$\beta_t = \beta_t(\beta_{t-1}) \equiv \operatorname{arcctg}\frac{-1 + x_*^{\beta_{t-1}}\cos\frac{\beta_{t-1}\pi}{2}}{\beta_{t-1}\frac{1+x_*^2}{2x_*} + x_*^{\beta_{t-1}}\sin\frac{\beta_{t-1}\pi}{2}},$$

$t = 3, ..., p$. Следствено, следното важи

$$\left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Дека важи импликацијата

$$\left|\arg\left[1 + \frac{zf^{(p+1)}(z)}{f^{(p)}(z)}\right]\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

$$\Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)}\right| < \frac{\beta_p\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

е покажано во Теорема 2.2.11..

Со ова го завршуваме доказот на теоремата. □

За $p = 2$ ја добиваме следната последица:

Последица 2.2.7. *Нека* $f \in \mathcal{A}_2$, $0 < \beta_1 \leq 1$, *и нека* $f'(z) \neq 0$ *за сите* $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. *Сега, нека* $\beta_1 = \beta$ *и*

$$\beta_2 = \beta_2(\beta_1) \equiv \operatorname{arcctg} \frac{-1 + x_*^{\beta_1} \cos \frac{\beta_1 \pi}{2}}{\beta_1 \frac{1+x_*^2}{2x_*} + x_*^{\beta_1} \sin \frac{\beta_1 \pi}{2}},$$

каде x_* *е поголемото од двете позитивни решенија на равенката*

$$2x^{\beta_1+1} \sin \frac{\beta_1 \pi}{2} + \left(\beta_1 x^2 + \beta_1 - x^2 + 1\right) x^{\beta_1} \cos \frac{\beta_1 \pi}{2} + x^2 - 1 = 0.$$

Тогаш важи следната импликација:

$$\left| \arg \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| < \frac{\beta_2 \pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\beta_1 \pi}{2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Глава 3

Резултат на Silverman пренесен од класата еднолисни на класата повеќелисни функции

Во оваа глава ќе биде дефинирана класа на повеќелисни функции зададена како количник од аналитичките репрезентации на ковексноста и ѕвездоликоста која претставува проширување на класата дефинирана на сличен начин за еднолисните функции и ќе бидат презентирани нови резултати, кои се проширување на постоечките за еднолисните функции. Резултатите се дадени во трудот [25].

3.1. Класата $\mathcal{S}^*[A, B]$

Класата $\mathcal{S}^*[A, B]$ за произволни фиксирани броеви A и B, $-1 \leq B < A \leq 1$, се состои од функции $f(z) \in \mathcal{A}$ такви што

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}.$$

Геометриски, ова значи дека $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ го пресликува единечниот диск $\mathbb{D}$ во отворен диск центриран на реалната оска со крајни точки на дијаметарот $(1-A)/(1-B)$ и $(1+A)/(1+B)$. Затоа, класата $\mathcal{S}^*[A,B]$ е подкласа на класата $\mathcal{S}^*$ од еднолисни функции кои се ѕвездолики во однос на нулата.

Класата $\mathcal{S}^*[A,B]$ воведена е од страна на Janowski во трудот [23] и затоа е позната како **класа ѕвездолики функции од тип на Janowski**.

Со специјален избор за A и B ги добиваме следните класи:

- класата ѕвездолики функции од ред α, $0 \leq \alpha < 1 : \mathcal{S}^*(\alpha) \equiv \mathcal{S}^*[1-2\alpha,-1]$;

- $\mathcal{S}^*[\alpha,-\alpha]$ $(0 < \alpha \leq 1)$ - класата функции $f(z) \in \mathcal{A}$ за кои важи:

  $$\left|\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\bigg/\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\right| < \alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

  Оваа класа е проучувана од K.S. Padmanabhan во [47].

  За $\alpha = 1$ се добива класата ѕвездолики функции: $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*[1,-1] = \mathcal{S}^*(0)$ со аналитичка репрезентација

  $$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{D};$$

- $\mathcal{S}^*\left(\frac{b^2-a^2+a}{b}, \frac{1-a}{b}\right)$ $(a+b \geq 1,\ b \leq a \leq b+1)$ - класата функции $f(z) \in \mathcal{A}$ за кои важи:

  $$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - a\right| < b, \quad z \in \mathbb{D}.$$

  Оваа класа е проучувана од H. Silverman во [55];

- $\mathcal{S}^*[\alpha, 0], 0 < \alpha \leq 1$ - класа дефинирана со

  $$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \alpha, \quad z \in \mathbb{D};$$

  за $\alpha = 1$ се добива класата $\mathcal{S}^*[1, 0]$ која била проучувана од R. Singh во [57].

Да забележиме дека $\mathcal{S}^*[A, B] \subset \mathcal{S}^*\left((1-A)/(1-B)\right)$.

3.2. Некои резултати поврзани со класата на Silverman

Во оваа секција ќе бидат наведени веќе постоечки резултати за класата на Silverman.

Во неговиот труд [54] Silverman ги проучувал својствата на класата од функции дефинирани како количник од аналитичката репрезентација на конвексноста и ѕвездоликоста.

Во [66] Тунески пак добил доволен услов функцијата $f(z) \in \mathcal{G}_b$ да припаѓа на класата $\mathcal{S}^*[A, B]$ и на нејзините поткласи.

Во продолжение ќе бидат наведени некои од резултатите од [66].

Теорема 3.2.1. *[66] Нека $f(z) \in \mathcal{A}$ и нека A и B се такви што $-1 \leq B < A \leq 1$. Ако*

$$\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \prec 1 + \frac{(A-B)z}{(1+Az)^2} \equiv h(z)$$

тогаш $f(z) \in \mathcal{S}^*[A, B]$. Резултатот е најдобриот можен.

Во согласност со дефиницијата за субординација тоа што резултатот во претходната теорема е најдобриот можен значи дека $h(\mathbb{D})$ е најголемата област во комплексната рамнина со својство:

$$\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \in h(\mathbb{D}) \quad (z \in \mathbb{D}) \quad \Rightarrow \quad f(z) \in \mathcal{S}^*[A,B].$$

За $A = 1$ во претходната теорема се добива:

Последица 3.2.1. *[66] Нека $f(z) \in \mathcal{A}$ и нека $-1 \leq B < 1$. Ако*

$$\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \in \mathbb{C} \setminus \left[\frac{5-B}{4}, \infty\right) \equiv \mathbb{C} \setminus \left\{x : x \geq \frac{5-B}{4}\right\}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$ тогаш $f(z) \in \mathcal{S}^*[1,B]$. Резултатот е најдобриот можен.

Тоа што резултатот во претходната последица е најдобриот можен значи дека $\mathbb{C} \setminus \left[\frac{5-B}{4}, \infty\right)$ е најголемата област во комплексната рамнина со наведеното својство.

Теоремата 3.2.1. овозможува да се дојде до следната последица за класата $\mathcal{G}_b$.

Последица 3.2.2. *[66] Нека A и B се такви што $-1 \leq B < A \leq 1$. Тогаш $\mathcal{G}_b \subset \mathcal{S}^*[A,B]$ каде $b = \frac{A-B}{(1+|A|)^2}$. За $A \neq 0$ резултатот е најдобриот можен.*

Во продолжение ќе биде даден пример кој содржи конкретни заклучоци кои можат да се добијат од резултатите наведени претходно.

Пример 3.1 *Со специфицирање на вредности за A и B имаме:*

- (i) *Ако $f(z) \in \mathcal{A}$ и $\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \in \mathbb{C} \setminus \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ за сите $z \in \mathbb{D}$ тогаш $f(z) \in \mathcal{S}^*$. ($B = -1$ во Последица 3.2.1.);*

- (ii) *$\mathcal{G}_b = \mathcal{S}^*[0,-b]$ за $0 < b \leq 1$. ($A = 0$ и $B = -b$ во Последица 3.2.2.);*

(iii) $\mathcal{G}_b \subset \mathcal{S}^*[b/(1-b), 0]$ *за* $0 < b \leq 1$, *т.е., ако* $f(z) \in \mathcal{G}_b$ *тогаш*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{b}{1-b}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$.

Следните резултати даваат врски помеѓу класата на Silverman и некои останати класи функции.

Во ([41]) дадени се подобри како и нови резултати поврзани со резултати претходно добиени од Silverman. Тие се наведени во продолжение. Теорема која е соодветна на Теоремата 1.3.12., т.е., Теоремата 1.3.13. и дава најдобар можен резултат е следната:

Теорема 3.2.2. *Нека* $f \in \mathcal{G}_b$, $\quad 0 < b \leq 1$. *Тогаш* $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1}{1+bz}$ *и резултатот е најдобриот можен како што покажува функцијата* $\frac{z}{1+bz}$.

Забелешка 3.2.1. Функцијата $1/(1+bz)$ го пресликува единечниот диск $\mathbb{D}$ во диск со дијаметрално крајни точки $1/(1+b)$ и $1/(1-b)$, па од претходната теорема имаме

$$f \in \mathcal{G}_b \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{S}^*\left(1/(1+b)\right), \quad 0 < b \leq 1.$$

Но, од Теорема 1.3.12. имаме

$$f \in \mathcal{G}_b \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{S}^*\left(2/(1+\sqrt{1+8b})\right)$$

и од $1/(1+b) \geq 2/(1+\sqrt{1+8b})$ за $0 < b \leq 1$, така што еднаквост важи само за $b = 1$, се заклучува дека резултатот од последната теорема е подобриот.

Теорема 3.2.3. *Ако* $f \in \mathcal{G}_{1/2}$ *тогаш* $z\,(zf'(z/f(z))$ *е еднолисна на* $\mathbb{D}$.

Друг вид на резултат е даден со следната теорема:

Теорема 3.2.4. *Нека* $f \in \mathcal{A}$. *Ако*

$$\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \prec 1 + \frac{2z}{(1+z)^2} \equiv h(z),$$

тогаш

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+z}{1-z},$$

т.е., $f \in \mathcal{S}^*(\equiv \mathcal{S}^*(0))$.

Од $h(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \backslash [3/2, +\infty)$ биле добиени следните две последици:

Последица 3.2.3. *Нека* $f \in \mathcal{A}$ *и нека* $\left|\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}\right| < \frac{3}{2}, z \in \mathbb{D}$. *Тогаш* $f \in \mathcal{S}^*$.

Последица 3.2.4. *Нека* $f \in \mathcal{A}$. *Ако* $\operatorname{Re}\left[\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}\right] < \frac{3}{2}, z \in \mathbb{D}$, *тогаш* $f \in \mathcal{S}^*$.

Теорема 3.2.5. *[41] Нека* $f(z) \in \mathcal{A}$ *и нека*

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}\right] < \lambda(\alpha), \quad z \in \mathbb{D},$$

каде

$$\lambda(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \cos((1-\alpha)\frac{\pi}{2}),$$

$0 < \alpha < 1$. *Тогаш* $f(z) \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, *т.е.,* $f(z)$ *е силно ѕвездолика од ред* α.

За $\alpha = 1/2$ се добива следната импликација:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}\right] < \lambda(1/2) = 1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{6} = 1.3102\cdots$$

$$\Rightarrow \quad \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\pi}{4}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ravichandran и Darus во [50] го добиваат следниот резултат:

Последица 3.2.5. *[50] Нека $h(z)$ е ѕвездолика на $\mathbb{D}$ и $h(0)=0$. Ако $f \in \mathcal{A}$ и*

$$\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} \prec 1+h(z),$$

тогаш

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \left[1-\int_0^z \frac{h(\eta)}{\eta}d\eta\right]^{-1}.$$

Во [51] цел на авторите била да најдат доволен услов $f(z) \in \mathcal{A}$ да биде силно ѕвездолика од ред α во однос на аргументот на $\frac{zf'(z)/f(z)}{1+zf''(z)/f'(z)}$. При тоа го добиваат следниот резултат:

Теорема 3.2.6. *[51] Нека $0<\alpha<1$ и $0<\beta<1$ е дадено со*

$$\tan\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right]=\frac{\alpha}{1-\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Ако $f \in \mathcal{A}$ и

$$\left|\arg\left(\frac{1+zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}\right)\right| < \frac{\beta\pi}{2} \quad (z\in\mathbb{D}),$$

тогаш $f(z) \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$.

Mocanu ја вовел во [37] класата

$$\mathcal{M}(\alpha)=\left\{f\in\mathcal{A} : \mathrm{Re}\left[\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>0, \quad z\in\mathbb{D}\right\}$$

од $\alpha-$конвексни функции, α реален број, која дава непрекинат премин од конексните во ѕвездоликите функции.

Во [58] е дадена генерализација на резултатите од [66], а во [68] е проучувана линеарната комбинција на аналитичката репрезентација на ѕвездоликоста и конвексноста т.е., диференцијалниот оператор

$$G(a,b,f;z)\equiv a\frac{zf'(z)}{f(z)}+b\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right),$$

и е даден најдобриот можен доволен услов што имплицира $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$. Во продолжение ќе биде даден резултат од [68], за модулот на $G(a, b, f; z)$ како доволен услов што имплицира $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$, со следната последица:

Последица 3.2.6. *[68] Нека $f(z) \in \mathcal{A}$ и нека A и B се такви што $-1 \le B < A \le 1$. Ако*

$$|G(1, -1, f; z)| < \frac{A - B}{(1 + |A|)(1 + |B|)} \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш $f(z) \in \mathcal{S}^*[A, B]$. Резултатот е најдобриот можен.

3.3. Нов резултат за повеќелисни функции проширување на резултат на Silverman за еднолисни

Во оваа секција ќе биде проучуван израз кој претставува проширување на

$$\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)}$$

на повеќелисни функции, т.е., ќе биде проучуван количникот

$$\frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)}$$

и ќе биде даден доволен услов така што да важи импликацијата:

$$\left|\frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)} - 1\right| < \lambda \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right| < \mu \qquad (3.3.1)$$

(двете неравенства се на целиот единичен диск).

За докажување на импликациите во оваа секција ќе ја користеме следната лема од теоријата на диференцијални субординации.

Лема 3.1 (Theorem 2.3h(i), p.34, [33]) *Нека* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и претпоставуваме дека функцијата* $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *задоволува* $\psi(Me^{i\theta}, Ke^{i\theta}; z) \notin \Omega$ *за сите* $K \geq Mn$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $z \in \mathbb{D}$. *Ако* $p \in \mathcal{H}[a, n]$ *и* $\psi(p(z), zp'(z); z) \in \Omega$ *за сите* $z \in \mathbb{D}$, *тогаш* $|p(z)| < M$, $z \in \mathbb{D}$.

Оваа лема дава можност за добивање на доволни услови кога одредени диференцијални неравенства важат.

Најпрво ќе биде разгледана импликацијата:

$$\left| \frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \lambda \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \lambda_1 \quad (3.3.2)$$

(двете неравенства се на целиот единичен диск), и со нејзина помош ќе дојдеме до импликацијата (3.3.1).

Теорема 3.3.7. *Нека* p *е природен број поголем од 1 и* $\lambda_1 > 0$. *Исто така, нека* $f \in \mathcal{A}_p$. *Ако* $\lambda \leq \lambda(\lambda_1) \equiv \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^2}$, *тогаш импликацијата* (3.3.2) *важи.*

Доказ. Врз основа на Лема 3.1, нека ставиме $M = \lambda_1$ и дефинираме функција $p(z) = \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)} - 1$. Понатаму, за функцијата $\psi(r, s; z) = \frac{s}{(r+1)^2}$, таква што $p(z) \in \mathcal{H}[0, 1]$ ($n = 1$ во Лема 3.1) имаме

$$\psi(p(z), zp'(z); z) = \left| \frac{zp'(z)}{(p(z) + 1)^2} \right| = \left| \frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \lambda(\lambda_1)$$

за сите $z \in \mathbb{D}$ и

$$\begin{aligned}\psi(Me^{i\theta}, Ke^{i\theta}; z) &= \left|\frac{Ke^{i\theta}}{(Me^{i\theta}+1)^2}\right| = \frac{K|e^{i\theta}|}{|Me^{i\theta}+1|^2} = \\ &= \frac{K}{|Me^{i\theta}+1|^2} \geq \frac{M}{|Me^{i\theta}+1|^2} \\ &\geq \frac{M}{M^2+2M+1} = \frac{M}{(M+1)^2} \\ &= \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^2} \geq \lambda\end{aligned}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$. Па, $|p(z)| < M$ за сите $z \in \mathbb{D}$. $\square$

На сличен начин ќе биде докажан и следниот резултат.

Теорема 3.3.8. *Нека p и k се природни броеви поголеми од 1 и $0 \leq k \leq p-2$. Исто така, нека $f \in \mathcal{A}_p$, $\lambda_{k+1} > 0$ и*

$$\lambda_k \leq \lambda_k(\lambda_{k+1}) \equiv \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}+k+2} + \lambda_{k+1}.$$

Ако

$$\left|\frac{zf^{(p-k)}(z)}{f^{(p-k-1)}(z)} - (k+1)\right| < \lambda_k(\lambda_{k+1}) \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\left|\frac{zf^{(p-k-1)}(z)}{f^{(p-k-2)}(z)} - (k+2)\right| < \lambda_{k+1} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Доказ. Нека $M = \lambda_{k+1}$ и нека дефинираме функции

$$p(z) = \frac{zf^{(p-k-1)}(z)}{f^{(p-k-2)}(z)} - k - 2$$

и

$$\psi(r, s; z) = \frac{s}{r+k+2} + r,$$

така што $p(z) \in \mathcal{H}[0,1]$ ($n = 1$ во Лема 3.1) и

$$\begin{aligned}\psi(p(z), zp'(z); z) &= \left| \frac{zp'(z)}{p(z)+k+2} + p(z) \right| \\ &= \left| \frac{zf^{(p-k)}(z)}{f^{(p-k-1)}(z)} - k - 1 - p(z) + p(z) \right| \\ &= \left| \frac{zf^{(p-k)}(z)}{f^{(p-k-1)}(z)} - k - 1 \right| < \lambda_k(\lambda_{k+1})\end{aligned}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$. Со цел да ја докажеме теоремата доволено е да покажеме дека $\psi(Me^{i\theta}, Ke^{i\theta}; z) \geq \lambda_k(\lambda_{k+1})$ за сите $K \geq M$, $\theta \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{D}$. Навистина, од $k+2 \geq M$ имаме

$$\begin{aligned}\psi(Me^{i\theta}, Ke^{i\theta}; z) &= \left| \frac{Ke^{i\theta}}{Me^{i\theta}+k+2} + Me^{i\theta} \right| = \left| \frac{K}{Me^{i\theta}+k+2} + M \right| \\ &\geq \frac{K}{M+k+2} + M \geq \frac{M}{M+k+2} + M \\ &= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}+k+2} + \lambda_{k+1} = \lambda_k(\lambda_{k+1})\end{aligned}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Со оглед на тоа што функциите $\lambda(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)^2}$ и $\lambda_k(\lambda_{k+1}) = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}+k+2} + \lambda_{k+1}$ се строго монотони на интервалите $(0,1)$ и $(0,+\infty)$, соодветно, добиваме дека постојат нивните инверзни функции

$$\lambda_1(\lambda) = \frac{1 - 2\lambda + \sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda}$$

и

$$\lambda_{k+1}(\lambda_k) = \frac{1}{2}\left(\lambda_k - k - 3 + \sqrt{(\lambda_k+k+3)^2 - 4\lambda_k}\right).$$

Затоа, Теорема 3.3.7. и Теорема 3.3.8. можат да се запишат во следната еквивалентна форма.

Теорема 3.3.9. *Нека p е природен број поголем од 1 и $0 < \lambda \le 1/4$. Исто така, нека $f \in \mathcal{A}_p$. Ако*

$$\left| \frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \lambda \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\left| \frac{zf^{(p)}(z)}{f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \frac{1 - 2\lambda + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Теорема 3.3.10. *Нека p и k се природни броеви поголеми од 1 и $0 \le k \le p - 2$. Исто така, нека $f \in \mathcal{A}_p$ и $0 < \lambda_k < 1$. Ако*

$$\left| \frac{zf^{(p-k)}(z)}{f^{(p-k-1)}(z)} - (k+1) \right| < \lambda_k \quad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\left| \frac{zf^{(p-k-1)}(z)}{f^{(p-k-2)}(z)} - (k+2) \right| < \lambda_{k+1}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \left[\lambda_k - k - 3 + \sqrt{(\lambda_k + k + 3)^2 - 4\lambda_k} \right] \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Крајната цел ќе ја постигнеме со комбинирање на претходните две теореми. Теорема 3.3.10. може да се примени рекурзивно бидејќи $\frac{1}{2} \left[\lambda_k - k - 3 + \sqrt{(\lambda_k + k + 3)^2 - 4\lambda_k} \right]$ е во интервалот $(0, 1)$ кога $\lambda_k \in (0, 1)$.

Теорема 3.3.11. *Нека p е природен број поголем од 1 и $0 < \lambda \le 1/4$. Исто така, нека $\lambda_1 = \frac{1-2\lambda+\sqrt{1-4\lambda}}{2\lambda}$ и за $k = 1, 2, \ldots$,*

$$\lambda_{k+1} = \frac{1}{2} \left[\lambda_k - k - 3 + \sqrt{(\lambda_k + k + 3)^2 - 4\lambda_k} \right].$$

Ако $f \in \mathcal{A}_p$ *и*

$$\left| \frac{1 + zf^{(p+1)}(z)/f^{(p)}(z)}{zf^{(p)}(z)/f^{(p-1)}(z)} - 1 \right| < \lambda \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - p \right| < \lambda_{p-1} \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

За $p = 2$ и $\lambda = 1/4$ имаме $\lambda_1 = 1$ и ја добиваме следната последица.

Последица 3.3.7. *Ако* $f \in \mathcal{A}_2$ *и*

$$\left| \frac{1 + zf'''(z)/f''(z)}{zf''(z)/f'(z)} - 1 \right| < \frac{1}{4} \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

тогаш

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 2 \right| < 1 \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Глава 4

За ограниченото вртење на аналитичките функции

Во оваа глава од докторската дисертација ќе бидат презентирани оригинални резултати поврзани со еднолисните функции, поконкретно за функциите со ограничено вртење. Тие треба да земат место во оваа докторска дисертација која се однесува на повеќелисните функции, бидејќи се тесно поврзани со нив. Ќе бидат дадени нови критериуми кои ќе гарантираат дека функцијата $f \in \mathcal{A}$ припаѓа на класата функции со ограничено вртење. Резултатите од оваа глава се публикувани во трудот [64].

4.1. Класата функции со ограничено вртење

Функциите од класата

$$\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} f'(z) > 0, z \in \mathbb{D}\} =$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{A} : f'(z) \prec \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D} \right\}$$

т.е., функциите $f(z) \in \mathcal{A}$ за кои $|f'(z) - 1| < 1, z \in \mathbb{D}$ се нарекуваат **функции со ограничено вртење** [15]. Мотивацијата за ваквиот назив доаѓа од фактот што $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ е еквивалентно со $|\arg f'(z)| \leq \pi/2$, а $\arg f'(z)$ го претставува аголот на вртење (ротација) на сликата на полуправа од z што се добива со помош на функцијата f. Познато е дека $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$. Со оглед на тоа што сите позначајни класи еднолисни функции истовремено се и ѕвездолики, за очекување е да важи $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}^*$. Но, Krzyz во [28] дава контрапример со кој покажува дека тоа не е точно. Mocanu во [36] дава уште еден контрапример кој покажува дека дури ни построгиот услов $f \in \mathcal{A}$, $|f'(z) - 1| < 1$ $(z \in \mathbb{D})$ не имплицира $f \in \mathcal{S}^*$. Фактот што не важи ниту $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}^*$, ниту $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{R}$, ја прави класата $\mathcal{R}$ интересна за истражување. Референци во таа насока се [65], [19], [28] и [62].

Во трудот [63] со користење на метод од теоријата на диференцијални субординации дадени се резултати поврзани со изразот

$$z\,\frac{f'(z) - 1}{f(z) - z} = \frac{f'(z) - 1}{f(z)/z - 1}, \tag{4.1.1}$$

кои водат до доволни услови една функција $f \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, да биде со ограничено вртење. Во продолжение дадени се некои од тие резултати:

Теорема 4.1.1. *[63] Нека $f \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, така што $f(z) \neq z$ за секое $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, и нека $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Ако*

$$z\,\frac{f'(z) - 1}{f(z) - z} - n \prec \frac{\lambda z}{a_n + \lambda z} =: h_1(z), \tag{4.1.2}$$

каде $0 < |\lambda| \leq |a_n|$, тогаш

$$\frac{f(z) - z}{z^n} \prec a_n + \lambda z \tag{4.1.3}$$

и функцијата $a_n + \lambda z$ е најдобра доминанта на (4.1.2). Уште повеќе,

$$\left|\frac{f(z)-z}{z^n} - a_n\right| < \lambda, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.1.4}$$

и овој заклучок е најдобар можен, т.е., во неравенството (4.1.4) параметарот $|\lambda|$ не може да се замени со помал број така што импликацијата да продолжи да важи.

Забелешка 4.1.1. *[63]* За функцијата $h_1(z)$ дефинирана со (4.1.2) лесно може да се провери дека:

(*i*) Ако $0 < |\lambda| < |a_n|$, тогаш $h_1(\mathbb{D})$ е отворен диск со центар

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left[h_1\left(e^{i\arg(a_n/\lambda)}\right) + h\left(-e^{i\arg(a_n/\lambda)}\right)\right] = \frac{|\lambda|^2}{|\lambda|^2 - |a_n|^2},$$

и радиус

$$r = \left|h_1\left(e^{i\arg(a_n/\lambda)}\right) - c\right| = \frac{|\lambda| \cdot |a_n|}{|a_n|^2 - |\lambda|^2}.$$

(*ii*) Ако $|\lambda| = |a_n|$, тогаш $h_1(z) = \frac{z}{z+e^{i\arg(a_n/\lambda)}}$, и

$$h_1(\mathbb{D}) = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}.$$

Од Теорема 4.1.1. се добива следната последица.

Последица 4.1.1. *[63] Нека $f \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $f(z) \neq z$ за секое $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, и нека $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

(*i*) *Ако $0 < |\lambda| < |a_n|$ и*

$$\left|z\frac{f'(z)-1}{f(z)-z} - n - \frac{|\lambda|^2}{|\lambda|^2 - |a_n|^2}\right| < \frac{|\lambda| \cdot |a_n|}{|a_n|^2 - |\lambda|^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

тогаш

$$\left|\frac{f(z)-z}{z^n} - a_n\right| < |\lambda|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(ii) Ако

$$\operatorname{Re}\left[z\,\frac{f'(z)-1}{f(z)-z}\right] < n+\frac{1}{2}, \quad z\in\mathbb{D},$$

тогаш

$$\left|\frac{f(z)-z}{a_n z^n}-1\right| < 1, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Овие импликации се најдобри можни, т.е., во обата случаи радиусот на отворениот диск од заклучокот е најмал можен така што соодветната импликација да продолжи да важи.

Во [37] добиен е услов во однос на $zf'(z)/f(z)$ таков што $f\in\mathcal{R}$. Тој е даден со следната теорема:

Теорема 4.1.2. *[37] Нека $\alpha, M>0$ се такви што $|1-\alpha|<M<\alpha$. Ако $f\in\mathcal{A}_n$ го задоволува условот*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-\alpha\right| < M, \quad z\in\mathbb{D},$$

каде $M=M(\alpha,n)$ е дадено со равенката

$$\frac{M^2-(1-\alpha)^2}{n|1-\alpha|}\cdot\arctan\frac{|1-\alpha|}{\sqrt{M^2-(1-\alpha)^2}} = \arctan\frac{\sqrt{\alpha^2-M^2}}{M},$$

ако $\alpha\neq 1$, и

$$\cos\frac{M}{n} = M$$

за $\alpha=1$, тогаш $f\in\mathcal{R}$.

За $\alpha=2$ и $M=\sqrt{2}$ во претходната теорема е добиен следниот поедноставен резултат:

Последица 4.1.2. *[37] Ако $f\in\mathcal{A}$ и*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-2\right| < \sqrt{2}, \quad z\in\mathbb{D},$$

тогаш $\operatorname{Re} f'(z)>0, z\in\mathbb{D}$.

Во 1993, во трудот [70], дадени се следните резултати кои даваат доволен услов кога $f \in \mathcal{R}$:

Теорема 4.1.3. *Ако за* $f \in \mathcal{A}_n$ *важи*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < M, \quad z \in \mathbb{D},$$

каде $M = M_n$ *е решението на равенката*

$$\cos(M/n) = M,$$

тогаш $f \in \mathcal{R}$.

Теорема 4.1.4. *Ако за* $f \in \mathcal{A}_n$ *важи*

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \theta, \quad z \in \mathbb{D},$$

каде $\theta = \theta_n$ *е решението на равенката*

$$\frac{\pi}{2n}\tan\theta + \theta = \frac{\pi}{2},$$

тогаш $f \in \mathcal{R}$.

Следиот резултат имплицира посилен заклучок во однос на заклучокот на Теорема 4.1.3.:

Теорема 4.1.5. ([70]) *Ако за* $f \in \mathcal{A}_n$ *важи*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < N, \quad z \in \mathbb{D},$$

каде $N = N_n$ *е решението на равенката*

$$(1 + N)\, e^{N/n} = 2,$$

тогаш $|f'(z) - 1| < 1$, $z \in \mathbb{D}$.

4.2. Доволни услови за ограничено вртење

Во оваа секција најпрво ќе биде наведена лема од теоријата на диференцијални субординации од прв ред која ќе се користи за добивање на нашите главни резултати поврзани со класата функции со ограничено вртење.

Лема 4.1 ([34]) *Нека $q(z)$ е еднолисна на единечниот диск $\mathbb{D}$, и нека $\theta(\omega)$ и $\phi(\omega)$ се аналитички на домен D кој го содржи $q(\mathbb{D})$, со $\phi(\omega) \neq 0$ кога $\omega \in q(\mathbb{D})$. Даземеме дека $Q(z) = zq'(z)\phi(q(z))$, $h(z) = \theta(q(z)) + Q(z)$, и да претпоставиме дека*

i) *$Q(z)$ е ѕвездолика на единечниот диск $\mathbb{D}$; и*

ii) $\operatorname{Re} \frac{zh'(z)}{Q(z)} = \operatorname{Re}\left[\frac{\theta'(q(z))}{\phi(q(z))} + \frac{zQ'(z)}{Q(z)}\right] > 0,\ z \in \mathbb{D}$.

Ако $p(z)$ е аналитичка на $\mathbb{D}$, со $p(0) = q(0)$, $p(\mathbb{D}) \subseteq D$ и

$$\theta(p(z)) + zp'(z)\phi(p(z)) \prec \theta(q(z)) + zq'(z)\phi(q(z)) = h(z), \tag{4.2.5}$$

тогаш $p(z) \prec q(z)$, и $q(z)$ е најдобра доминанта на (4.2.5).

Сега, со користење на Лема 4.1 ќе биде докажан следниот резултат.

Лема 4.2 *Нека $f \in \mathcal{A}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ се такви што $\alpha + \beta = 0$ или $\alpha + \beta = 1$. Исто така, нека за $q(z)$ еднолисна на единечниот диск $\mathbb{D}$ важи $q(0) = 0$ и*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.2.6}$$

Дополнително, $\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > -1$ *и*

$$\operatorname{Re}\left[1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > -\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.2.7}$$

кога $\alpha+\beta=1$. *Ако*

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} \prec (\alpha+\beta)\cdot[q(z)+1] + \alpha z q'(z) \equiv h(z) \qquad (4.2.8)$$

тогаш $\frac{f(z)}{z} - 1 \prec q(z)$, *и* $q(z)$ *е најдобра доминанта на (4.2.8).*

Доказ. Функциите $\theta(\omega) = (\alpha+\beta)\cdot(\omega+1)$ и $\phi(\omega)=\alpha$ се аналитички на доменот $D=\mathbb{C}$ кој го содржи $q(\mathbb{D})$ и $\phi(\omega)\neq 0$ кога $\omega \in q(\mathbb{D})$. Понатаму, $Q(z) = zq'(z)\phi(q(z)) = \alpha z q'(z)$ е ѕвездолика бидејќи

$$\operatorname{Re}\frac{zQ'(z)}{Q(z)} = \operatorname{Re}\left[1+\frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > 0, \quad z\in\mathbb{D};$$

уште повеќе за функцијата $h(z) = \theta(q(z)) + Q(z)$ имаме

$$\operatorname{Re}\frac{zh'(z)}{Q(z)} = \operatorname{Re}\left[1+\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\frac{zq''(z)}{q'(z)}\right] > 0, \quad z\in\mathbb{D},$$

за $\alpha+\beta=0$ што се должи на (4.2.6) и за $\alpha+\beta=1$ што се должи на (4.2.7).

Сега, нека избереме $p(z) = \frac{f(z)}{z} - 1$ која е аналитичка на $\mathbb{D}$, $p(0)=q(0)=0$ и $p(\mathbb{D}) \subseteq D = \mathbb{C}$. Конечно, имајќи предвид дека субординациите (4.2.5) и (4.2.8) се еквивалентни, од Лема 4.1 го добиваме заклучокот на Лема 4.2. □

Понатаму ќе биде разгледуван модулот на

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} \qquad (4.2.9)$$

и ќе бидат добиени заклучоци што ќе не доведат до критериуми функцијата f да припаѓа на класата $\mathcal{R}$.

Теорема 4.2.6. *Нека* $f\in\mathcal{A}$, $\mu>0$ *и* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *се такви што* $\alpha+\beta=0$ *или* $\alpha+\beta=1$. *Исто така, нека* $\operatorname{Re}\frac{1}{\alpha} > -1$ *кога* $\alpha+\beta=1$.

Ако

$$\left|\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} - (\alpha+\beta)\right| < \delta \equiv \begin{cases} \mu \cdot |\alpha|, & \alpha+\beta = 0 \\ \mu \cdot |1+\alpha|, & \alpha+\beta = 1 \end{cases}, \tag{4.2.10}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$, *тогаш*

$$\left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| < \mu, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.2.11}$$

Оваа импликација е најдобра можна, т.е., во неравенството (4.2.11), μ *не може да се замени со помал број така што да важи импликацијата. Исто така,*

$$|f'(z) - 1| < \lambda \equiv \left\{ \begin{array}{cc} 2\mu, & \alpha+\beta = 0 \\ \mu \cdot \left(\left|1+\frac{1}{\alpha}\right| + \left|1-\frac{1}{\alpha}\right|\right), & \alpha+\beta = 1 \end{array} \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Оваа импликација е исто така најдобра можна, т.е., λ *не може да се замени со помал број така што импликацијата да важи, ако*

(*i*) $\alpha+\beta = 0$; *или*

(*ii*) $\alpha+\beta = 1$ *и* $\left|1+\frac{1}{\alpha}\right| + \left|1-\frac{1}{\alpha}\right| = 2$.

Дополнително, ако $\mu \le \frac{1}{2}$ *за* $\alpha+\beta=0$ *или* $\left|1+\frac{1}{\alpha}\right| + \left|1-\frac{1}{\alpha}\right| \le \frac{1}{\mu}$ *за* $\alpha+\beta = 1$ *тогаш* $f \in \mathcal{R}$.

Доказ. Избирајќи $q(z) = \mu z$ имаме $1 + \frac{zq''(z)}{q'(z)} = 1$, што значи дека (4.2.6) и (4.2.7) од Лема 4.2 важат. Понатаму, за функцијата $h(z)$ дефинирана во (4.2.8) имаме

$$h(z) = \alpha+\beta+\mu z(2\alpha+\beta),$$

што значи дека субординацијата (4.2.8) е еквивалентна на

$$\left|\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} - (\alpha+\beta)\right| < \mu \cdot |2\alpha+\beta| = \delta, \quad z \in \mathbb{D},$$

и од тука еквивалентна на (4.2.10). Затоа, (4.2.11) следува директно од Лема 4.2 и дефиницијата за субординација.

Понатаму, за сите $z \in \mathbb{D}$,

$$\left|\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} - (\alpha+\beta)\right| = \left|\alpha \cdot [f'(z) - 1] + \beta \cdot \left[\frac{f(z)}{z} - 1\right]\right|$$

и

$$\begin{aligned}|\alpha| \cdot |f'(z) - 1| &\leq \left|\alpha \cdot [f'(z) - 1] + \beta \cdot \left[\frac{f(z)}{z} - 1\right]\right| + \left|\beta \cdot \left[\frac{f(z)}{z} - 1\right]\right| \\ &< \delta + |\beta| \cdot \mu = |\alpha| \cdot \lambda,\end{aligned}$$

од $|w_1| \leq |w_1+w_2|+|w_2|$. Затоа, импликацијата од оваа последица важи.

Двете импликации се најдобри можни како што покажува функцијата $f_*(z) = z + \mu z^2$, бидејќи

$$\left|\alpha \cdot f_*'(z) + \beta \cdot \frac{f_*(z)}{z} - (\alpha+\beta)\right| = \mu \cdot |2\alpha + \beta| \cdot |z| = \delta \cdot |z|, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$\left|\frac{f_*(z)}{z} - 1\right| = \mu \cdot |z|, \quad z \in \mathbb{D},$$

$$|f_*'(z) - 1| = 2 \cdot \mu \cdot |z|, \quad z \in \mathbb{D},$$

и $2\mu = \lambda$ ако (i) или (ii) важи. □

Понатаму, ќе биде разгледуван реалниот дел на изразот (4.2.9) и ќе бидат добиени критериуми така што функцијата $f \in \mathcal{A}$ да припаѓа во $\mathcal{R}$.

Теорема 4.2.7. *Нека* $f \in \mathcal{A}$, $\mu > 0$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *се такви што* $\alpha + \beta = 0$ *или* $\alpha + \beta = 1$. *Исто така, нека* $\operatorname{Re} \frac{1}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \alpha > 0$ *кога* $\alpha + \beta = 1$. *Ако*

$$\alpha \cdot f'(z) + \beta \cdot \frac{f(z)}{z} \prec (\alpha+\beta)\left(1 + \frac{2\mu z}{1-z}\right) + \frac{2\alpha\mu z}{(1-z)^2} \equiv h_2(z) \quad (4.2.12)$$

тогаш

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 1-\mu, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.2.13}$$

Оваа импликација е најдобра можна, т.е., во претходното неравенството (4.2.13), μ не може да се замени со поголем број така што импликацијата да важи.

Доказ. Импликацијата во оваа теорема следува директно од Лема 4.2 за $q(z) = \frac{2\mu z}{1-z}$. Условот $\operatorname{Re}\frac{1}{\alpha} > 0$ стои наместо $\operatorname{Re}\frac{1}{\alpha} > -1$ за да важи (4.2.7). Резултатот е најдобриот можен, како што може да се види од функцијата $f_*(z) = z + z\cdot q(z)$ за која

$$\alpha\cdot f_*'(z) + \beta\cdot\frac{f_*(z)}{z} = (\alpha+\beta)\left(1+\frac{2\mu z}{1-z}\right) + \frac{2\alpha\mu z}{(1-z)^2}$$

и $\operatorname{Re}\frac{f(z)}{z} = 1-\mu$ за $z=-1$. □

Кога $\alpha+\beta=1$ ја добивме следната последица.

Последица 4.2.3. *Нека $f \in \mathcal{A}$, $\alpha > 0$ и $\mu > 0$. Ако*

$$\operatorname{Re}\left[\alpha\cdot f'(z) + (1-\alpha)\cdot\frac{f(z)}{z}\right] > 1-\mu\cdot\left(1+\frac{\alpha}{2}\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.2.14}$$

тогаш

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 1-\mu, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Ако, дополнително,

(*i*) $\alpha > 1$ *и* $\mu \le 1$; *или*

(*ii*) $\alpha < 1$ *и* $\mu \ge 1$;

тогаш

$$\operatorname{Re} f'(z) > 1-\frac{3}{2}\cdot\mu, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.2.15}$$

Овие резултати се најдобри можни.

Доказ. Нека $\alpha + \beta = 1$. Па, за функцијата h_2 дефинирана во (4.2.12) имаме

$$h_2(z) = 1 + \frac{2\mu z}{1-z} + \frac{2\alpha\mu z}{(1-z)^2},$$

$h_2(0) = 1$ и

$$h_2(e^{i\theta}) = 1 - \frac{\mu\alpha}{2}(1+t^2) - \mu + \mu t i,$$

каде $t = \operatorname{ctg}(\theta/2)$. Затоа,

$$X = \operatorname{Re} h(e^{i\theta}) = 1 - \mu\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) - \frac{\alpha}{2\mu}\cdot Y^2,$$

каде

$$Y = \operatorname{Im} h(e^{i\theta}) = \mu t$$

ги достигнува сите реални броеви. Ова води до

$$h_2(e^{i\theta}) = \left\{x + iy : x = 1 - \mu\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2\mu}\cdot y^2, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Од тука, имајќи ја во предвид дефиницијата за субординација, неравенството (4.2.14) и фактот дека

$$\left\{x + iy : x > 1 - \mu\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right), y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq h_2(\mathbb{D}),$$

ја добиваме субординацијата (4.2.12). Затоа, од Теорема 4.2.7. следува

$$\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 1 - \mu, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Понатаму, кога (i) или (ii) важи имаме

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f'(z) &= \frac{1}{\alpha}\cdot\left\{\operatorname{Re}\left[\alpha\cdot f'(z) + (1-\alpha)\cdot\frac{f(z)}{z}\right] - (1-\alpha)\cdot\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right]\right\}\\ &> \frac{1}{\alpha}\cdot\left[1 - \mu\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) - (1-\alpha)(1-\mu)\right] = 1 - \frac{3}{2}\cdot\mu,\end{aligned}$$

за сите $z \in \mathbb{D}$.

Резултатите се најдобри можни во контекст на функцијата $f_*(z) = z + \frac{2\mu z^2}{1-z}$ за која $f_*(z)/z = 1 + \frac{2\mu z}{1-z} \equiv g(z)$, $g(\mathbb{D}) = \{x + iy : x > 1 - \mu, y \in \mathbb{R}\}$,

$$\alpha \cdot f_*'(z) + (1-\alpha) \cdot \frac{f_*(z)}{z} = h_2(z)$$

и

$$\operatorname{Re} f_*'(z) = \operatorname{Re} h_2(z) = 1 - \frac{3}{2} \cdot \mu \quad \text{за} \quad z = -1.$$

□

На сличен начин како и во Последица 4.2.3., за $\alpha = -\beta = 1$ добиваме

Последица 4.2.4. *Нека $f \in \mathcal{A}$ и $\mu > 0$. Ако*

$$\operatorname{Re}\left[f'(z) - \frac{f(z)}{z}\right] > -\frac{\mu}{2}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4.2.16}$$

тогаш $\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 1 - \mu$, $z \in \mathbb{D}$, и $\operatorname{Re} f'(z) > 1 - \frac{3}{2} \cdot \mu$, $z \in \mathbb{D}$. Ако, дополнително, $\mu \leq \frac{2}{3}$, тогаш $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $z \in \mathbb{D}$, т.е., $f \in \mathcal{R}$. Двете импликации се најдобри можни.

Во следниот пример дадени се некои конкретни заклучоци што можат да бидат добиени од претходно наведените резултати од оваа секција со специфицирање на вредности за α, β и μ.

Пример 4.1 *Нека $f \in \mathcal{A}$.*

(i) Ако $\left|f'(z) - \frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{2}$ $(z \in \mathbb{D})$ тогаш $|f'(z) - 1| < 1$ $(z \in \mathbb{D})$ и $f \in R$. ($\alpha = -\beta = 1$ и $\mu = \frac{1}{2}$ во Теорема 4.2.6.);

(ii) Ако $\left|f'(z) + \frac{f(z)}{z} - 2\right| < 1$ $(z \in \mathbb{D})$ тогаш $|f'(z) - 1| < 1$ $(z \in \mathbb{D})$ и $f \in R$. ($\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{1}{4}$ во Теорема 4.2.6.);

(*iii*) *Ако* $\alpha > 0$ *и* $\operatorname{Re}\left[\alpha \cdot f'(z) + (1-\alpha)\cdot \frac{f(z)}{z}\right] > -\frac{\alpha}{2}$ $(z \in \mathbb{D})$ *тогаш* $\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 0$ *(*$z \in \mathbb{D}$*) и* $\operatorname{Re} f'(z) > -1/2$ *(*$z \in \mathbb{D}$*). (*$\mu = 1$ *во Последица 4.2.3.);*

(*iv*) *Ако* $\operatorname{Re}\left[f'(z) + \frac{f(z)}{z}\right] > -\frac{1}{2}$ $(z \in \mathbb{D})$ *тогаш* $\operatorname{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] > 0$ *(*$z \in \mathbb{D}$*) и* $\operatorname{Re} f'(z) > -1/2$ *(*$z \in \mathbb{D}$*). (*$\alpha = 1/2$ *и* $\mu = 1$ *во Последица 4.2.3.);*

(*v*) *Ако* $\operatorname{Re}\left[f'(z) - \frac{f(z)}{z}\right] > -\frac{1}{3}$ $(z \in \mathbb{D})$ *тогаш* $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ *(*$z \in \mathbb{D}$*) и* $f \in R$*. (*$\mu = \frac{2}{3}$ *во Последица 4.2.4.);*

Забелешка 4.2.2. Да забележиме дека во (*iii*) од претходниот пример, заклучокот не зависи од α.

Глава 5

Идеи за понатамошна работа

На почеток да нагласам дека како резултат на работата на докторската дисертација произлегоа четири статии од кои две се отпечатени во меѓународни математички списанија, една е прифатена за печатење и една е поднесена за печатење. Тоа се статиите:

1. Karamazova E., Tuneski N.,*Some inequality relations involving multivalent functions*, Advances in Mathematics: Scientific Journal **5** (2016) 45- 50.

2. Karamazova E., Tuneski N.,*Extension of some results of inequality relations involving multivalent functions*, прифатена за печатење во Southeast Asian Bulletin of Mathematics.

3. Karamazova E., Tuneski N.,*A result by Silverman transfered on multivalent functions*, поднесена за печатење.

4. Tuneski N., Darus M., Karamazova E. *Simple sufficient conditions for bounded turning*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, **132** (2014), 231-238.

Идеите за понатамошна работа се како во насока на проблемите истражувани во трудовите, така и во останати правци на истражување во геометриската теорија на функциите, а пред се во теоријата на повеќелисните функции.

Од проблемите истражувани во докторската дисертација произлегуваат следните идеи за понатамошна работа:

- Определување на нови врски на класата на Silverman со други класи еднолисни функции, како на пример со класата функции со ограничено вртење. Од литературата која ја имав на располагање може да се заклучи дека тие релации досега не се истражувани.

- Понатамошно истражување на класата повеќелисни функции која претставува проширување на класата на Silverman за еднолисни, пред се во насока на наоѓање на врски со други класи повеќелисни функции.

- Определување на услови кога резултатите дадени во Теорема 2.2.11., Теорема 2.2.12. и Теорема 2.2.13. се најдобри можни.

- Определување на услови кога резултатите дадени во Теорема 3.3.7., Теорема 3.3.8. и Теорема 3.3.11. се најдобри можни.

- Определување на нови врски изразени преку импликации кои содржат неравенства помеѓу класите повеќелисни ѕвездолики, ѕвездолки од ред α, силно ѕвездолки од ред α, конвексни, конвексни од ред α, блиску-до-конвексни, блиску-до-конвексни од ред α.

Некои од останатите правци на истражување се следните:

- истражување на би-еднолисните функции;
- понатамошно истражување на повеќелисните функции.

Литература

[1] Aouf M. K., Silverman H., *Partial sums of certain meromorphic p-valent functions*, J. Ineq. Pure and Appl. Math. **7**(**4**) (2006), Art. 119.

[2] Aouf M. K., Mostafa A. O.,*On partial sums of certain meromorphic p-valent functions*, Mathematical and Computer Modelling **50** (2009), 1325–1331.

[3] Aouf M. K., *On a class of p-valent close-to-convex functions of order β and type α*, Internat. J. Math. Math. Sci. **11**(**2**) (1988), 259–266.

[4] Bieberbach L., *Ű́ber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S.B. Preuss. Akad. Wiss. **16** (1916), 940–955.

[5] Bulboacă T., *Differential subordinations and superordinations. New results*, House of Science Book Publ., Cluj-Napoca (2005).

[6] Cho N. E., Kim Y. C., Srivastava H.M., *Argument estimates for a certain class of analytic functions*, Complex Variables. Theory and Application **38** (1999), 277– 287.

[7] Cho N. E., Owa S., *Partial sums of certain meromorphic functions*, J. Ineq. Pure and Appl. Math. **5**(**2**) (2004), Art. 30.

[8] Cho N. E., Srivastava H. M., *Argument estimates of certain analytic functions defined by a class of multiplier transformations*, Mathematical and Computer Modelling **37** (2003), 39–49.

[9] Cho N.E., Kwon O.S., Srivastava H.M., *Inclusion and argument properties for certain subclasses of meromorphic functions associated with a family of multiplier transformations*, J. Math. Anal. Appl. **300** (2004), 505– 520.

[10] Cho N.E., Kwon O.S., Srivastava H.M., *Inclusion relationships and argument properties for certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators*, J. Math. Anal. Appl. **292** (2004), 470– 483.

[11] de Branges L., *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137–152.

[12] Deniz E., *On p-valently close-to-convex, starlike and convex functions*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics **41**(**5**) (2012), 635 – 642.

[13] Duren P. L., *Univalent functions*, Springer-Verlag, New York (1983).

[14] Dzhenkins Dzh., *Odnolistinje funkcii i konformnie otobrazhenia*, Izdateljstvo inostrannoi literaturi (1962), 252–266.

[15] Goodman A. W., *Univalent functions*, Mariner Publ. Co. Tampa, Florida **I**, **II** (1983).

[16] Goodman, A. W., *Open Problems on Univalent and Multlvalent Functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 1035–1050.

[17] Goodman A. W., *On the Schwarz-Christoffel transformation and p-valent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 204 –223.

[18] Hayman W. K., *Multivalent functions*, University Press, Cambridge, (1958).

[19] Ibrahim R.W., Darus M., *Extremal bounds for functions of bounded turning*, Int. Math. Forum **6**(**33**) (2011), 1623–1630.

[20] Irmak H., Çetin Ö. F. , *Some theorems involving inequalities on $p-$ valent functions*, Turkish J. Math. **23** (1999), 453–459.

[21] Jack I. S., *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. **2** (1971), 469–474.

[22] Jack I.S., *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. (**2**)**3** (1971), 469–474.

[23] Janowski W., *Some extremal problems for certain families of analytic functions I*, Annales Polonici Mathematici **28** (1973), 297–326.

[24] Kaplan W., *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1** (1952), 169–185.

[25] Karamazova E., Tuneski N., *A result by Silverman transfered on multivalent functions*, поднесен за печатење.

[26] Karamazova E., Tuneski N., *Some inequality relations involving multivalent functions*, Advances in Mathematics: Scientific Journal **5** (2016), 45–50.

[27] Karamazova E., Tuneski N., *Extension of some results of inequality relations involving multivalent functions*, прифатен за печатење во Southeast Asian Bulletin of Mathematics.

[28] Krzyz J., *A counter example concerning univalent functions*, Folia Societatis Scientiarum Lublinensis **2** (1962), 57–58.

[29] Livingston A. E., *p-valent Close-to-convex Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 161–179.

[30] Livingston A. E., *The Coefficients of Multivalent Close-to-convex Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 545–552.

[31] Marx A., *Untersuchungen uber schlichte Abbildungen*, Math. Ann. **107** (1932/33), 40–65.

[32] Miller S. S., Mocanu P. T., *Differential subordinations and univalent functions*, Michigan Math. J. **28** (2) (1981), 157–172.

[33] Miller S. S., Mocanu P. T., *Differential subordinations, Theory and Applications*, Marcel Dekker, New York-Basel (2000).

[34] Miller S. S., Mocanu P. T., *On some classes of first-order differential subordinations*, Michigan Math. J. **32** (1985), 185–195.

[35] Miller S. S., Mocanu P., Reade M. O., *All α-convex functions are univalent and starlike*, Proc. Amer. Math. Soc. **37** (1973), 553–554.

[36] Mocanu P. T., *Some starlikeness conditions for analytic functions*, Rev. Roumanie Math. Pures Appl. **33** (1988), 117–128.

[37] Mocanu P. T., *On a subclass of starlike functions with bounded turning*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **55**(**5**) (2010), 375–379.

[38] Nunokawa M., H. Srivastava, N. Tuneski, B. Jolevska-Tuneska, *Some Marx-Strohhacker Type Results for a Class of Multivalent Functions*, Miskolc Mathematical Notes, прифатен за печатење.

[39] Nunokawa M., Ikeda A., Koike N., Ota Y., *On multivalently convex and starlike functions*, Math. Japon. **49**(**2**) (1999), 223–227.

[40] Nunokawa M., *On the theory of multivalent functions*, Tsukuba J. Math. **11** (1987), 273–286.

[41] Obradović M., Tuneski N., *On the starlike criteria defined by Silverman*, Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat. **181**(**24**) (2000), 59–64.

[42] Owa S., Nunokawa M., Saiton H., *Some inequalities involving multivalent functions*, Ann. Polon. Math. **60**(**2**) (1994), 159–162.

[43] Owa S., Nunokawa M., Saiton H., Srivastava H. M., *Close-to-convexity, starlikeness and convexity of certain analytic functions*, Appl. Math.Lett. **15** (2002), 63–69.

[44] Owa S., Nunokawa M., S. Fukui, *A criteiron for $p-$ valently starlike functions*, Inter- nat. J. Math. and Math. Sci. **17**(**1**) (1994), 205–207.

[45] Owa S., Srivastava H. M., Ren F.Y., Yang W.Q., *The starlikeness of a certain class of integral operators*, Complex Variables **27** (1995), 185–191.

[46] Owa S., *On certain classes of p-valent functions with negative coefficients*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin **25**(**4**), (1985), 385–402.

[47] Padmanabhan K. S., *On certain classes of starlike functions in the unit disk*, J. Indian Math. Soc. **32** (1968), 90–103.

[48] Patil D. A., Thakare N. K., *On convex hulls and extreme points of p-valent starlike and convex classes with applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumaine, **27**(**75**) (1983), 145–160.

[49] Pommerenke Chr., *Univalent functions*, Vandenhoeck and Rupreacht, Gotingen (1975).

[50] Ravichandran V., Darus M., *On a criteria for starlikeness*, Int. Math. J. **4**(**2**) (2003), 119–125.

[51] Ravichandran V., Darus M., Seenivasagan N., *On a criteria for strong starlikeness*, The Australian J. of Math. Anal. and App. **2**(**1**) (2005), 1–12.

[52] Robinson R. M., *Univalent majorants*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 1–35.

[53] Schober G., *Univalent functions-selected topics, Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag **475** (1975).

[54] Silverman H., *Convex and starlike criteria*, Int. J. Math. Math. Sci. (**22**) 1 (1999), 75–79.

[55] Silverman H., *Subclasses of starlike functions*, Rev. Roum. Math. Pure Appl. **33** (1978), 1093–1099.

[56] Singh V., Tuneski N., *On a Criteria for Starlikeness and Convexity of Analytic Functions*, Acta Mathematica Scientia, Series B **24**(**4**) (2004), 597–602.

[57] Singh R., *On a class of starlike functions*, J. Indian Math. Soc. **32** (1968), 208–213.

[58] Sokoł J., *On sufficient condition to be in a certain subclass of starlike functions defined by subordination*, Applied Mathematics and Computation **190** (2007), 237–241.

[59] Srivastava H.M., Owa S., *Current topics in analytic function theory*, World Sci. Publ., NJ, (1992).

[60] Srivastava H. M., Patel J., Mohapatra G. P., *A certain class of $p-$valently analytic functions*, Math. Comput. Modelling **41** (2005), 321–334.

[61] Strohhčker E., *Beitrage Zur Theorie der Schlichten Funktionen*, Math. Zeit. **37** (1933), 356–380.

[62] Tuneski N., Obradović M., *Some properties of certain expression of analyti functions*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), 3438–3445.

[63] Tuneski N., Bulboacă T., Petruševski M., Aliaga E., *Some results over the first derivative of analytic functions*, Advances in Mathematics: Scientific Journal **1** (2012), 7–13.

[64] Tuneski N., Darus M., Gelova E., *Simple sufficient conditions for bounded turning*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **132** (2014), 231–238.

[65] Tuneski N., *Some simple sufficient conditions for starlikeness and convexity*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), 693–697.

[66] Tuneski N., *On the quotient of the representations of convexity and starlikeness*, Math. Nachr. **248/249** (2003), 200–203.

[67] Tuneski N., *On a criteria for starlikeness of analytic functions*, Integral Transforms Spec. Funct. **14**(**3**) (2003), 263–270.

[68] Tuneski N., Aceska R., *On the linear combination of the representations of starlikeness and convexity*, Glasnik Matematićki **39**(**59**) (2004), 265–272.

[69] Wang Z. G., Xu N., *A new criterion for multivalent starlike functions*, Appl. Anal. Discrete Math. **2** (2008), 183–188.

[70] Xanthopoulos X., *Subclasses of of starlike functions with* $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, Studia Univ. Babes-Bolyai, Math. **38** (1993), 39–47.

Ознаки

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1$	класа од функции $f(z)$ кои се аналитички во $\mathbb{D}$ и нормализирани така што $f(0) = 0$ и $f'(0) - 1 = 0$, 7
$\mathcal{A}_p$	поткласа од $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ која се состои од функции од облик $f(z) = z^p + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p+n} z^{p+n}$, 7
$\mathbb{C}$	комплексната рамнина, 6
$\mathcal{C}$	класата блиску-до-конвексни функции, 19
$\mathcal{C}(\alpha)$	класата блиску-до-конвексни функции од ред α, $0 \leq \alpha < 1$, 20
$\mathcal{C}_p(\alpha)$	класата повеќелисни блиски-до-конвексни функции од ред α, $0 \leq \alpha < p$ и $p = 1, 2, \ldots$, 20
$\mathbb{D}$	единичен диск, 1
D	домен, 1

$\mathcal{G}_b$	класата функции дефинирана од Silverman, 21
$\mathcal{H}(\mathbb{D})$	класата од сите функции што се аналитички на отворениот единичен диск, 7
$\mathcal{H}[a,n]$	се состои од функции $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ со облик $f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$, 7
$k(z)$	Koebe-овата функција, 8
$k_\theta(z)$	ротациите на Koebe-овата функција, 8
$\mathcal{K}$	класата конвексни функции, 17
$\mathcal{K}(\alpha)$	класата конвексни функции од ред α, $0 \leq \alpha < 1$, 18
$\mathcal{K}_p$	класата повеќелисни конвексни функции, 18
$\mathcal{K}_p(\alpha)$	класата повеќелисни конвексни функции од ред α, $0 \leq \alpha < p$ и $p = 1, 2, \ldots$, 18
$\widetilde{\mathcal{K}_p}(\alpha)$	класата повеќелисни силно конвексни функции од ред α, $0 < \alpha \leq p$ и $p = 1, 2, \ldots$, 19
$\mathcal{R}$	класата функции со ограничено вртење, 3
$\mathcal{S}^*$	класата ѕвездолики функции, 13
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	класата ѕвездолики функции од ред α, $0 \leq \alpha < 1$, 15
$\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$	класата силно ѕвездолики функции од ред α, $0 < \alpha \leq 1$, 15

$\mathcal{S}_p^*$ класата повеќелисни ѕвездолики функции, 15

$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ класата повеќелисни ѕвездолики функции од ред α, $0 \leq \alpha < p$ и $p = 1, 2, \ldots$, 15

$\widetilde{\mathcal{S}_p}^*(\alpha)$ класата повеќелисни силно ѕвездолики функции од ред α, $0 < \alpha \leq p$ и $p = 1, 2, \ldots$, 16

$\mathcal{S}^*[A, B]$ класата ѕвездолики функции од тип на Janowski, 50

$\prec$ ознака за субординација, 23

Индекс