Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје
Природно - математички факултет
студиска програма: Математички науки и примена

ПРОИЗВОДИ НА ДИСТРИБУЦИИ ВО АЛГЕБРИ НА КОЛОМБО

Докторска дисертација

Кандидат: м-р Марија Митева
Ментор: проф. д-р Билјана Јолевска-Тунеска

Скопје, 2017

РЕЦЕНЗЕНТСКА КОМИСИЈА:

1. Д-р Никита Шекутковски, редовен професор
   Природно-математички факултет
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје

2. Д-р Билјана Јолевска - Тунеска, редовен професор
   Факултет за електротехника и информациски технологии
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје

3. Д-р Весна Манова - Ераковиќ, редовен професор
   Природно-математички факултет
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје

4. Д-р Катерина Хаџи-Велкова Санева, вонреден професор
   Факултет за електротехника и информациски технологии
   Универзитет "Св. Кирил и Методиј"- Скопје

5. Д-р Васко Речкоски, вонреден професор
   Факултет за туризам и угостителство - Охрид
   Универзитет "Св. Климент Охридски" - Битола

Апстракт

Во оваа докторска дисертација се истражувани производи на дистрибуции во алгебри на Коломбо.

Проблемот за производ на дистрибуции, како еден од главните проблеми со кои класичната теорија на дистрибуции се соочува, со конструкцијата на алгебрите на Коломбо на некој начин се надминува. Коломбоовите алгебри се асоцијативни алгебри во кои е вграден просторот на дистрибуции и при тоа операцијата производ во овие алгебри го обопштува класичниот производ на дистрибуции, што значи веќе постоечките производи на дистрибуции и оние пресметани во алгебра на Коломбо се исти. Сепак, овие алгебри овозможуваат пресметување производ на дистрибуции кој во класичната теорија не е дефиниран. Една од главните придобивки на Коломбоовата теорија на обопштени функции е тоа што операциите со сингуларни дистрибуции може да се извршуваат исто толку едноставно како и операциите со глатки функции.

Во докторската дисертација се добиени резултати за производ на сингуларни дистрибуции, но и резултати за производ на непрекината функција со сингуларна дистрибуција. Поконкретно, во Коломбоова алгебра е пресметан производот на дистрибуциите x^{-p} и $\delta^{(p-1)}(x)$ за $x \in \mathbf{R}$ и $x \in \mathbf{R}^n$, кога $p \in \mathbf{N}$, како и производот на дистрибуцијата $x_+^{-r-1/2}$, за $r = 0, 1, 2, \ldots$, со секоја од дистрибуциите $x_-^{-k-1/2}$ и $x_-^{k-1/2}$, за $k = 0, 1, 2, \ldots$. Добиени се резултати и за производот на дистрибуциите $\ln|x|$ и $\delta^{(s-1)}(x)$, за $s = 0, 1, 2, \ldots$, како и резултати за производот во Коломбоова алгебра на функциите $(\cos x - \sin x)$, $(\sin x + \cos x)$ и e^x со дистрибуцијата $\delta^{(r)}(x)$ за $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Abstract

In this doctoral dissertation the main research accent was put on products of distributions in Colombeau algebra.

The problem about product of two arbitrary distributions is one of the main problems that classical theory of distributions had came across. This problem has been overcome with the construction of Colombeau algebras. Colombeau algebra is an associative algebra and the space of Schwartz distributions is embedded in it. The most important feature of Colombeau algebras is that the product of elements in it generalises the classical product of distributions, thus the classical product of two distributions, if it exists, and the new one obtained in Colombeau algebra, are equal. Furthermore, in Colombeau algebra one can obtain product of two singular distributions which in the classical theory is not defined. One of the advantages of Colombeau theory of generalized functions is that we can operate with singular distributions easily as well as with smooth functions.

In this doctoral dissertation we have obtained, in Colombeau algebra, results about product of two singular distributions, as well as results about product of continuous function with singular distribution. More exactly, in Colombeau algebra we have obtained product of distributions x^{-p} and $\delta^{(p-1)}(x)$ when $x \in \mathbf{R}$ and $x \in \mathbf{R}^n$, for $p \in \mathbf{N}$, then the product of distribution $x_+^{-r-1/2}$, for $r = 0, 1, 2, \ldots$, with each of the distributions $x_-^{-k-1/2}$ and $x_-^{k-1/2}$, when $k = 0, 1, 2, \ldots$. We have also obtained results about product of distributions $\ln|x|$ and $\delta^{(s-1)}(x)$, when $s = 0, 1, 2, \ldots$ and product of each of the functions $(\cos x - \sin x)$, $(\sin x + \cos x)$ and e^x with distribution $\delta^{(r)}(x)$ when $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Содржина

Глава 1

Вовед во теоријата на дистрибуции

Теоријата на дистрибуции како математичка теорија се појавила кон средината на минатиот век, како резултат на обидите на научниците да им дадат математичко значење на бројни концепти во науката, најмногу во квантната физика, кои до тогаш биде сфаќани интуитивно. Уште пред појавата на теоријата на дистрибуции научниците користеле некои концепти кои денес ги знаеме како дистрибуции, како на пример Дирак δ функцијата и нејзините изводи. Својствата на овие концепти биле дефинирани така да тие одговараат на експерименталните резултати, а истовремено да бидат соодветни за анализа и решавање на проблемите кои истите ги карактеризираат. Но, повеќето операции со нив останале математички непоткрепени. Дирак δ функцијата е дефинирана на следниот начин:

$$\delta(x) = 0 \text{ за } x \neq 0,\ \delta(0) = +\infty \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Својствата на оваа функција се разликуваат од својствата на класичните функции во математичката анализа бидејќи во анализата определен интеграл од функција која е различна од 0 само во една точка, не може да биде различен од 0.

Дирак δ функцијата и нејзините својства биле дефинирани така да таа карактеризира одредена 'бесконечност' во една точка, на пример, густина на единечен полнеж - полнежот е сконцентриран во една точка, т.е. во волумен 0, што значи густината на полнежот е нула секаде, освен во една точка, во која густината ќе биде бесконеча.

Овој пример покажува дека функциите и нивните својства не биле доволни за со нив да бидат опишани некои физички феномени и нивните својства, поради што се јавила потребата за обопштување на поимот за функција. Тоа обопштување е направено со воведување на поимот за обопштена функција или дистрибуција. Првата систематизирана теорија на дистрибуции (обопштени функции) ја објавил францускиот математичар Лорент Шварц, во 1950 година, во своето дело "Теорија на дистрибуции" (**Theorie des distributions**) чија подобрена верзија е од 1959 година [46]. Апаратот на теоријата на дистрибуции овозможува оние концепти во науката и техниката, кои не може да се опишат со функции, да бидат опишани со дистрибуции, додека оние што може да се опишат со функции, може исто така да се опишат и со својствата на дистрибуции.

1.1 Основни поими

Во продолжение ќе ги наведеме основните поими и ознаки од теоријата на дистрибуции.

Дефиниција 1.1.1. *Носач на функција* φ е затворачот на множеството $\{x \,|\varphi\,(x) \neq 0\}$.

Носачот на функција φ ќе го означуваме со $supp\varphi$.

Дефиниција 1.1.2. Глатките функции $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ($\mathbf{R}$ е множеството на реални, а $\mathbf{C}$ е множеството на комплексни броеви) со компактен носач се викаат *тест функции.*

Множеството од тест функции во однос на операциите собирање на функции и множење на функција со скалар е векторски простор кој ќе го означуваме со $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ или само $\mathcal{D}$. Овде ќе напоменеме дека сите тест функции од просторот $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ не мора да имаат исти носач.

Нека $f : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ е пресликување. За $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ќе означуваме: $f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle$.

Дефиниција 1.1.3. Пресликувањето $f : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ ќе речеме дека е *линеарно* ако важат следните две равенства:

$$\langle f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle f, \varphi_1 \rangle + \langle f, \varphi_2 \rangle \tag{1.1}$$

$$\langle f, \alpha\varphi \rangle = \alpha \langle f, \varphi \rangle \tag{1.2}$$

каде α е скалар.

Дефиниција 1.1.4. За низата од функции $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ велиме дека *конвергира кон нула* во $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ако носачот на секоја тест функција φ_n од дадената низа е подмножество од компактно множество K и $\lim\limits_{n\to\infty} {\varphi_n}^{(k)}(x) = 0$ за $k = 0, 1, 2, ...$

Дефиниција 1.1.5. За линеарното пресликување f ќе речеме дека е *непрекинато* ако за секоја низа од функции $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ која конвергира кон нула во $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, низата од броеви $(\langle f, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ конвергира кон нула, т.е важи $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$.

Дефиниција 1.1.6. *Дистрибуција (обопштена функција)* е линеарно непрекинато пресликување $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$.

Значи, со дистрибуција f ни е даден непрекинат линеарен функционал кој на секоја тест функција и придружува комплексен број. Множеството од сите дистрибуции со домен

$\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ќе го означуваме со $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Нека f е локално интеграбилна функција. Истата ја дефинираме како дистрибуција на просторот од тест функции $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, со следниот интеграл:

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1.3}$$

Дистрибуциите кои се добиени од локално интеграбилна функција со равенството (1.3) се викаат *регуларни дистрибуции*. Ако две непрекинати функции f и g дефинирани на исто множество се разликуваат само за некои вредности на аргументот, т.е. се разликуваат на множество со мера нула, тогаш броевите $\langle f, \varphi \rangle$ и $\langle g, \varphi \rangle$ нема да се разликуваат па овие две функции ќе генерираат иста дистрибуција. Сите локално интеграбилни функции кои на овој начин генерираат иста дистрибуција сметаме дека се еквивалентни и истите определуваат класа на еквиваленција која соодветствува на една иста регуларна дистрибуција.

На истиот начин секоја тест функција генерира дистрибуција, па според тоа просторот од тест функции $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ е потпростор од просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Но, не сите дистрибуции може да се генерираат од локално интеграбилна функција.

Пример 1.1.1. Дирак δ функцијата чии својства се наведени на почетокот на ова поглавје, како дистрибуција е дефинирана на следниот начин:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{1.4}$$

Со оваа дефиниција својствата на Дирак δ функцијата, дефинирани на почетокот на поглавјето, се запазени. Имено,

δ функцијата има вредност нула за вредности на аргументот различни од нула, па според тоа ќе важи:

$$\delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \varphi(0) \tag{1.5}$$

Ако постои локално интеграбилна функција $\delta(x)$ така што за секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ важи равенството

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{1.6}$$

и ако земеме

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq a \\ e^{\frac{a^2}{x^2-a^2}} & |x| < a \end{cases}, \quad a > 0 \tag{1.7}$$

со замена на (1.7) во (1.6) се добива:

$$\frac{1}{e} = \int_{-a}^{a} \delta(x)\, e^{\frac{a^2}{x^2-a^2}}\,dx \tag{1.8}$$

Ако земеме $a \to 0$ десната страна во равенството (1.8) конвергира кон нула што доведува до контрадикција. Одовде, Дирак δ функцијата, за која сега може да го користиме терминот Дирак δ дистрибуција, нема да биде регуларна дистрибуција. $\Box$

Дистрибуциите кои не се регуларни ги викаме *сингуларни дистрибуции.*

Ако f е функција од една независна променлива x, често пати функцијата ја означуваме со $f(x)$. Ако f е регуларна дистрибуција чиј домен е просторот $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ од тест функции $\varphi(x)$, која е генерирана од функција f со равенството (1.3), дистрибуцијата f исто така може да ја означиме со $f(x)$. За сингуларна дистрибуција f може да се користи ознаката $f(x)$ која ќе покажува дека аргументот на тест функциите е x, иако сингуларните дистрибуции во општ случај не се дефинирани со вредност во точка x. Овие ознаки ќе бидат потребни кога ќе дефинираме некои операции со дистрибуции и смена на променливи при тие операции.

Претходните дефиниции можеме да ги прошириме и на n - димензионален простор, т.е. тест функциите и дистрибуциите да ги разгледаме како функции и функционали дефинирани на подмножества од $\mathbf{R}^n$. Нека $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ каде $x_1, x_2, ..., x_n$ се n реални еднодимензионални променливи. Тест функции во овој случај ќе бидат сите непрекинати функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ чии парцијални изводи од произволен ред постојат и се непрекинати и чиј носач е компактно множество во $\mathbf{R}^n$. Просторот од тест функции во $\mathbf{R}^n$ се означува со $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Дефиниција 1.1.7. *Дистрибуција во* $\mathbf{R}^n$ е непрекинат линеарен функционал $f : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{C}$.

Поимите линеарност и непрекинатост на функционал во $\mathbf{R}^n$ се дефинираат аналогно како и истите поими за функционал во $\mathbf{R}$. Имено, функционалот f чиј домен е просторот $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ е линеарен ако за произволни тест функции φ_1 и φ_2 и произволни комплексни броеви α и β важи:

$$\langle f, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle f, \varphi_1 \rangle + \beta \langle f, \varphi_2 \rangle \tag{1.9}$$

Линеарниот функционал f е непрекинат ако низата од броеви $(\langle f, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ конвергира кон нула кога низата од функции $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ конвергира кон нула во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Просторот од дистрибуции во $\mathbf{R}^n$ ќе го означуваме со $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Ако f е локално интеграбилна функција дефинирана на $\mathbf{R}^n$ (или на подмножество од $\mathbf{R}^n$) истата определува дистрибуција f на тој начин што на произволна тест функција $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и го придружува бројот

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\,\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)\,dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx \end{aligned} \tag{1.10}$$

Сите дистрибуции кои може да се генерираат од локално интеграбилна функција на овој начин се викаат *регуларни* дистрибуции. Секоја регуларна дистрибуција соодветствува на класа од локално интеграбилни функции кои се разликуваат на множество со мера нула.

Дистрибуциите на $\mathbf{R}^n$ кои не се регуларни се викаат *сингуларни* дистрибуции.

Дирак δ дистрибуцијата, која е сингуларна дистрибуција, на $\mathbf{R}^n$ се дефинира на следниот начин:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{1.11}$$

каде $\varphi(0)$ е вредноста на $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ за $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$. Притоа важи:

$$\delta(x) = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,....\delta(x_n) \tag{1.12}$$

За дистрибуцијата f ќе речеме дека е дефинирана на отворено множество $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ако f е непрекинат линеарен функционал чиј домен се тест функциите со носач подмножество од Ω.

Дефиниција 1.1.8. За две дистрибуции f и g велиме дека се еднакви на отворено множество $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ако за секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ чиј носач е подмножество од Ω, важи:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \tag{1.13}$$

Унијата на сите отворени множества на кои дистрибуцијата f е еднаква на нула се вика *нула множество* за f. Затворачот на множеството на кое дистрибуцијата f не е еднаква на нула е *носачот* на дистрибуцијата f.

Носачот на дистрибуција f може да содржи точка во која дистрибуцијата f е еднаква на нула.

Носачот на δ дистрибуцијата е координатниот почеток во $\mathbf{R}^n$.

1.2 Операции со дистрибуции

Некои од операциите кои се дефинирани кај обичните функции, на пример, собирање и множење со скалар, ќе ги прошириме и кај дистрибуциите. Овие операции се викаат *регуларни* операции. Други операции, како на пример производ, композиција и конволуциски производ на две произволни дистрибуции се дефинирани само за одредени класи на дистрибуции, но не и во општ случај.

1) Ако f и g се две дистрибуции, нивниот збир $f + g$ е дистрибуција која на секоја тест функција φ и го придружува бројот $\langle f + g, \varphi \rangle$ определен со равенството:

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \tag{1.14}$$

Дека $f+g$ е дистрибуција следува од фактот што десната страна во последното равенство определува непрекинат линеарен функционал на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ бидејќи f и g се непрекинати линеарни функционали.

2) Производ на дистрибуција f со константа α е дистрибуција определена со равенството:

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha\varphi \rangle \tag{1.15}$$

каде α е комлексен број, а $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Со овие две операции просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ е линеарен векторски простор.

3) Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ е дистрибуција и τ е точка од $\mathbf{R}^n$. Дистрибуцијата $f\,(x-\tau)$ се дефинира на следниот начин:

$$\langle f\,(x-\tau)\,, \varphi\,(x) \rangle = \langle f\,(x)\,, \varphi\,(x+\tau) \rangle \tag{1.16}$$

Доколку $f\,(x)$ е локално интеграбилна функција во $\mathbf{R}$, последната дефиниција е соодветна на равенството

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(x-\tau)\,\varphi\,(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(x)\,\varphi\,(x+\tau)\,dx \tag{1.17}$$

кое се добива едноставно со смена на променливите во интегралот од левата страна.

Дистрибуцијата $f\,(x-\tau)$ се вика *транслација* на дистрибуцијата $f\,(x)$.

4) Дистрибуцијата $f\,(-x)$ се дефинира на следниот начин:

$$\langle f\,(-x)\,, \varphi\,(x) \rangle = \langle f\,(x)\,, \varphi\,(-x) \rangle \tag{1.18}$$

5) Нека $f(x)$ е локално интеграбилна функција дефинирана на $\mathbf{R}^n$. Ако $\varphi(x)$ е произволна тест функција од $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, за $a > 0$ важи следното равенство:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(ax)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{a^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx \tag{1.19}$$

кое се добива со смена на променливата во интегралот од левата страна.

Ако $\varphi(x)$ е глатка функција со компактен носач, тогаш таква е и функцијата $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$, т.е. и $\varphi\left(\frac{x}{a}\right)$ е тест функција од множеството $\mathcal{D}$, па последното равенство може да се обопшти и на дистрибуциите, т.е. може да дефинираме дистрибуција $f(ax)$ на следниот начин:

$$\langle f(ax), \varphi(x)\rangle = \left\langle f(x), \frac{1}{a^n}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right\rangle \qquad a > 0 \tag{1.20}$$

6) **Производ на дистрибуција и глатка функција.** Нека f е произволна дистрибуција, g е глатка функција, а $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ е произволна тест функција. Производот $g\varphi$ ќе биде исто така глатка функција која ќе има вредност нула секогаш кога φ ќе има вредност нула. Значи, $g\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Производот gf на дистрибуцијата f со глатката функција g е дистрибуција дефинирана на следниот начин:

$$\langle gf, \varphi\rangle = \langle f, g\varphi\rangle \tag{1.21}$$

Да ја покажеме линеарноста на функционалот gf дефиниран со (1.21). Нека $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned}\langle gf, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\rangle &= \langle f, \alpha g\varphi_1 + \beta g\varphi_2\rangle \\ &= \langle f, \alpha g\varphi_1\rangle + \langle f, \beta g\varphi_2\rangle \\ &= \alpha\langle f, g\varphi_1\rangle + \beta\langle f, g\varphi_2\rangle \\ &= \alpha\langle gf, \varphi_1\rangle + \beta\langle gf, \varphi_2\rangle \end{aligned} \tag{1.22}$$

Да покажеме непрекинатост на функционалот gf дефиниран со (1.21). Нека $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ е низа од тест функции која конвергира во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ кон нула. Тогаш и низата од тест функции $(g\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ конвергира во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ кон нула.

Понатаму, $(\langle gf, \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}} = (\langle f, g\varphi_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$. Заради непрекинатоста на функционалот f низата од десната страна во последното равенство конвергира кон нула, па и низата од левата страна ќе конвергира кон нула, што покажува дека и функционалот gf е непрекинат.

Со равенството (1.21) се дефинира и производ на дистрибуцијата f со регуларна дистрибуција g која соодветствува на глатката функција g.

Пример 1.2.1. Нека g е глатка функција, φ е тест функција и δ е Дирак делта дистрибуцијата.

$$\begin{aligned}\langle g\delta, \varphi\rangle &= \langle \delta, g\varphi\rangle = g\,(0)\,\varphi\,(0) \\ &= g\,(0)\,\langle \delta, \varphi\rangle = \langle g\,(0)\,\delta, \varphi\rangle \end{aligned} \tag{1.23}$$

т.е. добиваме

$$g\,(x)\,\delta\,(x) = g\,(0)\,\delta\,(x) \qquad \square \tag{1.24}$$

Производот на две произволни дистрибуции во теоријата на дистрибуции на Шварц, не е дефиниран во општ случај. Примери ќе разгледаме на крајот од ова поглавје.

1.3 Конвергенција на низа од дистрибуции

Ќе го дефинираме поимот за конвергенција на низа од дистрибуции.

Дефиниција 1.3.1. Низата од дистрибуции $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ велиме дека *конвергира* кон дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ ако за секоја тест функција φ низата од броеви $(\langle f_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ конвергира кон бројот $\langle f, \varphi\rangle$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ ако } (\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)) \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

За да се покаже дека поимот конвергенција во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ е добро дефиниран, треба да се покаже дека функционалот f со домен $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ кој на секоја тест функција φ и го придружува бројот $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle$ е линеарен и непрекинат. Ќе се повикаме на следната теорема која може да се види во [52] (стр. 37).

Теорема 1.3.1. Ако низата од дистрибуции $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ во $\mathcal{D}'$ конвергира кон функционалот f, тогаш f е исто така дистрибуција. Со други зборови, просторот $\mathcal{D}'$ е затворен во однос на конвергенцијата на дистрибуции.

1.4 Диференцирање на дистрибуции

Меѓу обичните функции може да се најдат бројни примери на функции кои не се се диференцијабилни. Еден од мотивите при развој на теоријата на дистрибуциите бил да се најде простор кој ќе ги содржи обичите функции, при што во тој простор за секој елемент ќе постои извод кој за диференцијабилните функции ќе се совпаѓа со нивниот обичен извод.

Изводот кај дистрибуциите е дефиниран така да за секоја дистрибуција постои извод од произволен ред и при тоа секој извод на дистрибуција е повторно дистрибуција. За да дојдеме до дефиницијата за извод на дистрибуција, ќе земеме регуларна дистрибуција f која е генерирана од функција f од една реална променлива x. Со f' ќе го означиме првиот извод на дистрибуцијата f.

Нека φ е произволна тест функција. Со примена на правилото за парцијална интеграција ќе имаме:

$$\left\langle f', \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \left\langle f, -\varphi' \right\rangle \tag{1.25}$$

Од својствата на тест функциите следува дека $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Дефиниција 1.4.1. Првиот извод на дистриибуцијата $f(x)$, каде x е еднодимензионална реална променлива се дефинира на следниот начин:

$$\left\langle f'(x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle f(x), -\varphi'(x) \right\rangle \tag{1.26}$$

каде $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Пример 1.4.1. Ако ја диференцираме δ дистрибуцијата, ќе добиеме:

$$\left\langle \delta', \varphi \right\rangle = \left\langle \delta, -\varphi' \right\rangle = -\varphi'(0) \qquad \square \tag{1.27}$$

Пример 1.4.2. Да ја разгледаме функцијата

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

Ќе ја диференцираме оваа функција во смисла на дистрибуции:

$$\left\langle {x_+}', \varphi \right\rangle = -\left\langle x_+, \varphi' \right\rangle = -\int_{0}^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx \tag{1.29}$$

каде φ е произволна тест функција.

Да ја означиме со

$$H(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

функцијата на *Heaviside*. Од равенствата (1.29) и (1.30) добиваме:

$$\left\langle {x_+}', \varphi \right\rangle = \langle H, \varphi \rangle \tag{1.31}$$

т.е.

$${x_+}' = H\left(x\right) \tag{1.32}$$

Да ја диференцираме функцијата (1.30) во смисла на дистрибуции. За $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ќе имаме:

$$\begin{aligned} \left\langle H'\left(x\right), \varphi\left(x\right)\right\rangle &= \left\langle H\left(x\right), -\varphi'\left(x\right)\right\rangle \\ &= -\int\limits_0^{\infty} \varphi'\left(x\right) dx = \varphi\left(0\right) = \left\langle \delta\left(x\right), \varphi\left(x\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{1.33}$$

Од последното равенство следува:

$$H'\left(x\right) = \delta\left(x\right) \tag{1.34}$$

Да забележиме дека првиот извод на функцијата $H\left(x\right)$ (гледана како функција, а не како дистрибуција) е нула секаде, освен во точката $x = 0$ во која изводот не постои. □

Парцијалните изводи од прв ред во случај кога имаме n - димензионална независна променлива $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ се дефинираат аналогно на равенството (1.26).

Дефиниција 1.4.2. Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi\left(x\right) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Парцијалниот извод од прв ред $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n$ е дефиниран со равенството:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \tag{1.35}$$

Теорема 1.4.1. ([52], стр. 48) Парцијалниот извод од прв ред на произволна дистрибуција е пак дистрибуција.

Доказ. Директно од дефиницијата за парцијален извод од прв ред и својствата на извод на тест функциите (глатки функции) следува дека парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ на дистрибуцијата f е линеарен функционал.

Нека $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ е низа од тест функции која конвергира кон нула во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Тогаш и низата $\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\right)_{n\in\mathbf{N}}, \quad i = 1, 2, ..., n$ конвергира кон нула во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Бидејќи f е непрекинат функционал ќе следува:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_n \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right\rangle \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.36}$$

што значи и $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ е непрекинат функционал, со што теоремата е докажана. □

Директно од дефиницијата гледаме дека диференцирањето на дистрибуциите всушност се извршува со диференцирање на тест функцијата на која дејствува дистрибуцијата, а бидејќи тест функциите се глатки функции, т.е. бесконечно многу пати диференцијабилни, следува дека диференцирањето на дистрибуцијиите секогаш ќе биде возможно. На овој начин се надминуваат проблемите и со диференцирање на функции. Од математичката анализа знаеме дека секоја диференцијабилна функција е непрекината, но обратното во општ случај не важи. Но, ако функциите ги разгледуваме како дистрибуции, секоја непрекината функција во тој случај е диференцијабилна. Со теоријата на дистрибуции се надминуваат проблеми и со диференцирање на функции со прекин, при што разгледани како дистрибуции и функциите со прекин се исто така диференцијабилни. Во Пример1.4.2 видовме функција која не е диференцијабилна во секоја точка, но ако ја разгледаме како дистрибуција, нејзиниот извод ќе постои во секоја точка.

Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ е дистрибуција и $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ е тест функција. Равенството (1.26) се обопштува на следниот начин:

$$\left\langle f^{(n)}(x), \varphi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle f(x), \varphi^{(n)}(x) \right\rangle \tag{1.37}$$

На исти начин ќе го обопштиме и поимот за парцијални изводи од повисок ред. Претходно ќе ја покажеме следната теорема.

Теорема 1.4.2. ([52], стр. 48) Кај парцијалните изводи од повисок ред, на дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, редоследот на променливите по кои се врши диференцирањето може да се менува, без тоа да влијае на крајниот резултат.

Доказ. Ќе покажеме дека важи равенството:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \tag{1.38}$$

За тест функциите φ, чии изводи од произволен ред постојат и се непрекинати, важи равенство помеѓу мешаните парцијални изводи во случај кога ги диференцираме како функции, т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \tag{1.39}$$

Одовде,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \varphi \right\rangle
\end{aligned} \tag{1.40}$$

На исти начин се обопштува равенството и за изводи од повисок ред, од каде следува тврдењето во теоремата. □

Тука да забележиме дека равенството (1.38) не важи во општ случај доколку извод се бара на функција, во обична смисла, а не во смисла на дистрибуција.

Ако означиме

$$D^k = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k_i} \tag{1.41}$$

при што $k_i \in \mathbf{N_0}$ и $k = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, парцијалните изводи од k - ти ред за дистрибуција f се пресметуваат на следниот начин:

$$\left\langle D^k f, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle f, D^k \varphi \right\rangle \tag{1.42}$$

Пример 1.4.3. Да го пресметаме k - тиот извод на Дирак δ дистрибуцијата.

$$\left\langle D^k \delta, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta, D^k \varphi \right\rangle = (-1)^k D^k \varphi\,(x)\,|_{x=0} \quad \Box \tag{1.43}$$

Нека $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $g \in C^\infty$. Правилото за диференцирање на производот gf (Лајбницово правило) е дадено со следното равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(gf) = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{1.44}$$

Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Правилото (1.44) е добиено врз основа на следното равенство ([52], стр. 49):

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\,(gf)\,, \varphi \right\rangle &= \left\langle gf, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle f, -g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle f, -\frac{\partial}{\partial x_i}\,(g\varphi) \right\rangle + \left\langle f, \varphi \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, g\varphi \right\rangle + \left\langle f, \varphi \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle g \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle + \left\langle f \frac{\partial g}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \quad \Box
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Специјално, ако независната променлива x е еднодимензионална, во претходната теорема ќе важи:

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{1.46}$$

Пример 1.4.4. Нека $g(x) = x$ и δ е Дирак делта дистрибуцијата. Од дефиницијата на δ важи:

$$x\delta = 0 \tag{1.47}$$

Со диференцирање на последното равенство се добива:

$$\delta + x\delta' = 0 \tag{1.48}$$

т.е.

$$x\delta' = -\delta \qquad \square \tag{1.49}$$

Теорема 1.4.3. ([31], стр.28) Нека f е дистрибуција и g е глатка функција. Тогаш:

$$f^{(r)}g = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \Big[f g^{(i)} \Big]^{(r-i)} \tag{1.50}$$

Пример 1.4.5. ([31], стр.29)

$$\begin{aligned} \delta^{(r)}g &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \Big[\delta g^{(i)} \Big]^{(r-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i g^{(i)}(0)\, \delta^{(r-i)} \end{aligned} \tag{1.51}$$

Ако $g = x^s$, тогаш $(x^s)^{(i)}\,|_{x=0}$ ќе биде различно од нула само за $i = s$ и притоа $(x^s)^{(s)} = s!$ од каде со замена во (1.51) се добива:

$$\delta^{(r)}x^s = x^s\delta^{(r)} = \begin{cases} \frac{r!}{(r-s)!}(-1)^{(s)}\delta^{(r-s)}, & 0 \le s \le r \\ 0, & s > r \end{cases} \qquad \square \tag{1.52}$$

Теорема 1.4.4. ([52] стр.49) Со диференцирањето на дистрибуции е определен линеарен непрекинат функционал D^k во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Доказ. Нека f и g се две дистрибуции и φ е тест функција.

$$\begin{aligned} \left\langle D^k(f+g), \varphi \right\rangle &= \left\langle f+g, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle f, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle + \left\langle g, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle D^k f, \varphi \right\rangle + \left\langle D^k g, \varphi \right\rangle \end{aligned} \tag{1.53}$$

т.е.

$$D^k(f+g) = D^k f + D^k g \tag{1.54}$$

Нека $\alpha \in \mathbf{C}$.

$$\left\langle D^k(\alpha f), \varphi \right\rangle = \left\langle \alpha f, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle = \alpha \left\langle D^k f, \varphi \right\rangle = \left\langle \alpha D^k f, \varphi \right\rangle \tag{1.55}$$

т.е.

$$D^k(\alpha f) = \alpha D^k f \tag{1.56}$$

Од (1.54) и (1.56) следува дека D^k е линеарен функционал во $\mathcal{D}'$.

Да покажеме дека функционалот D^k е непрекинат. Нека $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ е низа од дистрибуции која конвергира кон дистрибуција f.

$$\left\langle D^k f_n, \varphi \right\rangle = \left\langle f_n, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle \to \left\langle f, (-1)^k D^k\varphi \right\rangle = \left\langle D^k f, \varphi \right\rangle \tag{1.57}$$

Добиваме дека $D^k f_n \to D^k f$ кога $f_n \to f$, т.е. функционалот D^k е непрекинат. $\square$

Следната теорема дава една врска помеѓу дистрибуциите и обичните функции.

Теорема 1.4.5. Рестрикцијата на дистрибуција $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ на ограничено отворено подмножество од $\mathbf{R}^n$ е извод од конечен ред на непрекинатата функција.

Доказот може да се види во [22](стр. 60).

1.5 Производ на дистрибуции

Операцијата производ на дистрибуции не е дефинирана за две произволни дистрибуции. Производот на дистрибуција со глатка функција не може да се обопшти на две произволни дистрибуции.

Пример 1.5.1. Претходно видовме, согласно правилото за производ на дистрибуција и глатка функција, дека важи:

$$\langle g\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)\, g(0) \tag{1.58}$$

1) Ако го обопштиме ова правило на две произволни дистрибуции, земајќи $g = \delta$ ќе имаме:

$$\left\langle \delta^2, \varphi \right\rangle = \varphi(0)\, \delta(0) = \begin{cases} \infty, & \varphi(0) \neq 0 \\ 0 \cdot \infty & \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{1.59}$$

што значи, на овој начин изразот δ^2 не е дефиниран.

2) Ако земеме $g(x) = \frac{1}{x}$, тогаш

$$\left\langle \frac{1}{x}\delta, \varphi \right\rangle = \varphi(0) \cdot \frac{1}{0} \tag{1.60}$$

што повторно не е дефиниран израз. □

Постојат и други примери за производи на дистрибуции на кои во $\mathcal{D}'$ не може да им се даде значење: $H(x)\,\delta(x)$, $\delta'(x)\,\delta(x)$, $x^{-p}\delta^{(r)}(x)$ (чиј специјален случај е $x^{-1}\delta(x)$) , $\ln^p |x|\, \delta^{(r)}(x)$ за $p =$

1, 2, ... и $r = 0, 1, 2, ...$ се само некои примери за производ на дистрибуции чиј производ согласно теоријата на дистрибуции на Шварц не може да се пресмета.

Покрај не постоењето на некои производи на дистрибуции, друг проблем е тоа што операцијата производ на дистрибуции не е асоцијативна операција.

Пример 1.5.2. Нека $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}
\left\langle x^{-1}x, \varphi \right\rangle &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{-1} \left(x\varphi\left(x\right)\right) dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} x^{-1} \left(x\varphi\left(x\right)\right) dx + \int\limits_{0}^{\infty} x^{-1} \left(x\varphi\left(x\right)\right) dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} x^{-1} \left(x\varphi\left(x\right) + x\varphi\left(-x\right)\right) dx \\
&= \int\limits_{0}^{\infty} \left(\varphi\left(x\right) + \varphi\left(-x\right)\right) dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x\right) dx = \left\langle 1, \varphi \right\rangle
\end{aligned} \tag{1.61}$$

што значи $x^{-1}x = 1$. Одовде

$$\left(x^{-1}x\right)\delta = 1\delta = \delta \tag{1.62}$$

Од друга страна

$$x^{-1}\left(x\delta\right) = x^{-1}0 = 0 \tag{1.63}$$

од каде се гледа дека производот на дистрибуции не е асоцијативна операција. □

1.6 Метод на регуларизација

Теоријата на дистрибуции, како резултат на својствата на дистрибуциите и операциите со нив, нашла голема примена и во науката и во техниката. Со оваа теорија е обопштен поимот за функција, при што функциите ги задржуваат најголем дел од своите својства кога ги разгледуваме од аспект на дистрибуции. Но и покрај тоа што своевремено оваа теорија дала голем придонес во науката, сепак набргу биле увидени некои нејзини недостатоци: наједноставната нелинеарна операција, производ на две дистрибуции, не е дефинирана за две произволни дистрибуции (видовме дека δ^2 не може да се пресмета во просторот од дистрибуции на Шварц), понатаму, производот на дистрибуции не е асоцијативна операција и не секогаш е задоволено Лајбницовото правило за диференцирање на производ. Но, примената на дистрибуции во нелинеарни системи барала и производи на сингуларни дистрибуции кои тогаш не можеле да се пресметаат. Поради тоа биле правени обиди да се дефинира производ на дистрибуции на поширока класа од дистрибуции, а кој ќе биде обопштување на постоечките производи.

Еден од приодите кој е воведен со цел да се дефинира производ на две сингуларни дистрибуции е *секвенцијалниот приод (метод на регуларизација)* кој се должи на Hirata-Ogata, Mikusinski и Sikorski [33].

Дефиниција 1.6.1. δ - низа е низа од тест функции $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ во $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ таква што:

1. $supp\varphi_n \subset \{x \in \mathbf{R}^m \,||x| \leq \alpha_n\}$, при што $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \varphi_n(x)\,dx = 1$

Интуитивно, δ - низа е низа од тест функции која конвергира кон Дирак δ функцијата.

Следната теорема, чиј доказ ќе го изоставиме, може да се види во [22](стр. 53).

Теорема 1.6.1. Нека f е произволна дистрибуција и φ е тест функција. Конволуцискиот производ

$$(f * \varphi)(x) = \langle f(y), \varphi(x-y) \rangle = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\, \varphi(x-y)\, dy \tag{1.64}$$

е C^∞ - функција. $\square$

Ако f е произволна дистрибуција и (φ_n) е δ - низа, со конволуцискиот производ

$$f_n(x) = (f * \varphi_n)(x) = \langle f(y),\, \varphi_n(x-y) \rangle \tag{1.65}$$

се добива низа од функции (f_n) која конвергира кон дистрибуцијата f. Според претходната теорема, f_n се C^∞ - функции. Сите низи кои конвергираат кон иста дистрибуција ги поистоветуваме и ги гледаме како една класа на еквиваленција, па така на секоја дистрибуција f и придружуваме соодветна класа на еквиваленција. Низата (f_n) се вика *регуларизација* на дистрибуцијата f. Елементите на секоја од класите на еквиваленција ги викаме *претставници* на соодветната дистрибуција f. Некои автори, користејќи го овој приод, работат со т.н. 'мрежа на регуларизација' т.е. користат δ - низи $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ дефинирани со:

$$\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{1.66}$$

каде φ е тест функција.

Нека f и g се две произволни дистрибуции, а $f_n = f * \varphi_n$ и $g_n = g * \varphi_n$ се низи кои конвергираат соодветно кон дистрибуциите f и g (регуларизации на f и g). Доколку граничната вредност $\lim\limits_{n\to\infty}(g*\varphi_n)\cdot(f*\varphi_n)$ постои и не зависи од изборот на φ_n, со нејзе е определен производот на f и g во $\mathcal{D}'$:

$$fg=\lim_{n\to\infty}(g*\varphi_n)\cdot(f*\varphi_n) \tag{1.67}$$

Регуларизацијата дава решение за некои производи на дистрибуции.

Пример 1.6.1. ([5], стр.34) Користејќи го приодот на регуларизација се покажува дека во $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ важи:

$$\frac{1}{x}\cdot\delta=-\frac{1}{2}\delta' \tag{1.68}$$

При доказот на последното равенство земена е δ - низата дефинирана со (1.66).

$$\begin{aligned}(\delta*\varphi_\varepsilon)(x) &= \langle\delta(y),\varphi_\varepsilon(x-y)\rangle\\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy\\ &= \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)=\varphi_\varepsilon(x)\end{aligned} \tag{1.69}$$

Нека ψ е произволна тест функција и $\overset{\vee}{\varphi}(x)=\varphi(-x)$.

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\frac{1}{x}*\varphi_\varepsilon\right)\cdot(\delta*\varphi_\varepsilon),\psi\right\rangle &= \left\langle\left(\frac{1}{x}*\varphi_\varepsilon\right)\cdot\varphi_\varepsilon,\psi\right\rangle\\ &= \left\langle\left(\frac{1}{x}*\varphi_\varepsilon\right),\varphi_\varepsilon\psi\right\rangle\\ &= \left\langle\frac{1}{x},\overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon*\varphi_\varepsilon\psi\right\rangle\end{aligned} \tag{1.70}$$

Ќе ја развиеме функцијата ψ:

$$\psi(x)=\psi(0)+x\psi'(0)+x^2\eta(x) \tag{1.71}$$

и ќе го замениме последниот израз во (1.70):

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\right) \cdot (\delta * \varphi_\varepsilon), \psi \right\rangle &= \psi(0) \left\langle \frac{1}{x}, \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * \varphi_\varepsilon \right\rangle \\ &+ \psi'(0) \left\langle \frac{1}{x}, \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * (x\varphi_\varepsilon) \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{x}, \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * \left(x^2 \eta\right) \varphi_\varepsilon \right\rangle \end{aligned} \tag{1.72}$$

Првиот израз од десната страна во последното равенство тежи кон 0 кога $\varepsilon \to 0$ бидејќи $\overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * \varphi_\varepsilon$ е парна функција.

Последниот израз исто така тежи кон 0 кога $\varepsilon \to 0$ (според [34] и [28]).

Останува да го разгледаме вториот израз.

Ќе означиме

$$\alpha_\varepsilon = \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon * (x\varphi_\varepsilon) \tag{1.73}$$

од каде од равенството $x(\varphi_1 * \varphi_2) = (x\varphi_1) * \varphi_2 + \varphi_1 * (x\varphi_2)$ следува

$$\overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \left[(-x)\overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right] = -x\left(\varphi_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right) + (x\varphi_\varepsilon) * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon \tag{1.74}$$

Одовде,

$$\alpha_\varepsilon - \overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon = x\left(\varphi_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right) \tag{1.75}$$

што значи

$$\left\langle \frac{1}{x}, \alpha_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{x}, \alpha_\varepsilon + \overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{x}, \alpha_\varepsilon - \overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{x}, \alpha_\varepsilon - \overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon \right\rangle \tag{1.76}$$

бидејќи $\alpha_\varepsilon + \overset{\vee}{\alpha}_\varepsilon$ е парна функција.

Одовде следува дека

$$\left\langle \frac{1}{x}, \alpha_\varepsilon \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{x}, x\left(\varphi_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right) \right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi_\varepsilon * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right)(x)\, dx = \frac{1}{2} \tag{1.77}$$

бидејќи $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

На крај добиваме:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \left(\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\right)(\delta * \varphi_\varepsilon), \psi \right\rangle = \frac{1}{2}\psi'(0) = -\frac{1}{2}\langle \delta', \psi\rangle \tag{1.78}$$

за секое $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ што значи

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{x} * \varphi_\varepsilon\right)(\delta * \varphi_\varepsilon) = -\frac{1}{2}\delta' \tag{1.79}$$

а ова пак значи дека со приодот на регуларизација во $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ важи:

$$\frac{1}{x}\cdot\delta = -\frac{1}{2}\delta' \qquad \Box \tag{1.80}$$

Но, и секвенцијалниот приод не дава комплетно решение на проблемот со производ на дистрибуции.

Пример 1.6.2. ([5], стр.33) Да го побараме производот δ^2 со методот на регуларизација.

Ќе ја земеме δ - низата дефинирана со (1.66).

Во претходниот пример видовме дека

$$(\delta * \varphi_\varepsilon)(x) = \varphi_\varepsilon(x) \tag{1.81}$$

Нека ψ е произволна тест функција.

$$\left\langle (\delta * \varphi_\varepsilon)^2, \psi \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^2 \psi(x)\,dx \tag{1.82}$$

Ако избереме $\psi(x) = 1$ со носач $[-l, l]$, во последниот интеграл ќе имаме:

$$\left\langle (\delta * \varphi_\varepsilon)^2, \psi \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{-l}^{l}\left[\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^2 dx = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-l/\varepsilon}^{l/\varepsilon}[\varphi(t)]^2 dt \tag{1.83}$$

Последното равенство треба да важи за произволна тест функција φ. Ако φ е таква да

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 dx \neq 0 \tag{1.84}$$

и $\varepsilon \to 0$, интегралот во равенството (1.83) ќе тежи кон бесконечност.

Според тоа, производот δ^2 не може да се пресмета ниту со приодот на регуларизација. $\square$

Глава 2

Коломбоова теорија на обопштени функции

Со цел надминување на проблемот со производ на дистрибуции, повеќе автори се обидувале да конструираат комутативна и асоцијативна алгебра $(\mathcal{A}(\Omega), +, \circ)$, каде Ω е отворено множество во $\mathbf{R}^n$, која што ги задоволува следните својства:

1) Просторот $\mathcal{D}'(\Omega)$ од дистрибуции над Ω со линеарно пресликување е вграден во $\mathcal{A}(\Omega)$ и $f(x) \equiv 1$ е единечен елемент во $\mathcal{A}(\Omega)$;

2) Постојат оператори на диференцирање $\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$, кои се линеарни и го задоволуваат правилото на Лајбниц за диференцирање на производ:

$$\partial_i (f \cdot g) = (\partial_i f) \cdot g + f \cdot (\partial_i g) \text{ за } f, g \in \mathcal{A}$$

3) $\partial_i|_{\mathcal{D}'(\Omega)}$, $i = 1, 2, ..., n$, е вообичаениот парцијален извод (го обопштува диференцирањето на дистрибуции);

4) $\circ|_{C(\Omega) \times C(\Omega)}$ е вообичаениот производ на непрекинати функции.

2.1 Невозможниот резултат на Шварц

Шварц во својот труд [45] дал еден контрапример, познат како 'невозможниот резултат на Шварц' (Schwartz impossibility result) со кој покажал дека не може да се конструира алгебра што ќе ги задоволува сите претходно наведени услови.

Во примерот (кој може да се види и во [5], стр.46) се разгледани функциите $f(x) = x$ и $g(x) = |x|$. Со диференцирање на класичниот производ на овие две функции, се добива:

$$\partial (x\,|x|) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} = 2\,|x| \tag{2.1}$$

т.е.

$$\partial^2 (x\,|x|) = 2\partial (|x|) \tag{2.2}$$

Да го разгледаме сега производот на двете функции во алгебрата $\mathcal{A}$ со погоре наведените својства. За да ги разликуваме двата производа, класичниот производ на две функции (дистрибуции) f и g ќе го означиме со fg, а новиот производ (производот во $\mathcal{A}$) ќе го означиме со $f \cdot g$.

Со диференцирање на производот на истите функции гледани како дистрибуции во $\mathcal{A}$, ќе имаме:

$$\partial (x \cdot |x|) = |x| + x \cdot \partial (|x|) \tag{2.3}$$

$$\partial^2 (x \cdot |x|) = 2\partial (|x|) + x \cdot \partial^2 (|x|) \tag{2.4}$$

т.е.

$$\partial^2 (x \cdot |x|) = 2\partial (|x|) + 2x \cdot \delta \tag{2.5}$$

Последното равенство е исполнето бидејќи согласно теоријата на дистрибуции (Пример 1.4.2) важи:

$$\partial^2(|x|) = 2\delta \tag{2.6}$$

Доколку операторот на диференцирање во $\mathcal{A}$ го обопштува диференцирањето во $\mathcal{D}'$, тогаш (2.2) и (2.5) треба да бидат исти, од каде следува дека во $\mathcal{A}$ треба да важи:

$$x \cdot \delta = 0 \tag{2.7}$$

Истото равенство, $x\delta(x) = 0$, според класичната теорија на дистрибуции важи во $\mathcal{D}'$.

До суштинскиот заклучок Шварц дошол со помош на следната теорема.

Теорема 2.1.1. ([5], стр.47) Нека е дадена асоцијативна алгебра $\mathcal{A}$ и линеарен оператор на диференцирање $\partial : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ кој го задоволува Лајбницовото правило за диференцирање на производ.

- Да претпоставиме дека функциите: 1, x, $x(\ln|x| - 1)$ и $x^2(\ln|x| - 1)$ се елементи на $\mathcal{A}$;

- функцијата 1 е неутрален елемент во $\mathcal{A}$;

- за операцијата производ во $\mathcal{A}$ важи:

$$x(\ln|x| - 1) \cdot x = x^2(\ln|x| - 1) \tag{2.8}$$

- операторот ∂ го обопштува класичното диференцирање на функции.

Тогаш $x \cdot \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$.

Доказ. Ќе покажеме дека $\partial^2 [x(\ln|x|-1)] \cdot x = 1$

$$\partial [(x(\ln|x|-1))x] = \partial [x(\ln|x|-1)] \cdot x + x(\ln|x|-1)\,\partial x \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \partial^2 [(x(\ln|x|-1))x] &= \partial^2 [x(\ln|x|-1)] \cdot x + \partial [x(\ln|x|-1)] \cdot \partial x \\ &+ \partial [x(\ln|x|-1)]\,\partial x + x(\ln|x|-1)\,\partial^2 x \end{aligned} \tag{2.10}$$

од каде

$$\begin{aligned} \partial^2 [x(\ln|x|-1)] \cdot x &= \partial^2 [(x(\ln|x|-1))x] - 2 \cdot \partial [x(\ln|x|-1)] \cdot \partial x \\ &- x(\ln|x|-1)\,\partial^2 x \end{aligned} \tag{2.11}$$

Имајќи го во предвид последниот услов во теоремата, т.е. операторот ∂ го обопштува класичниот извод на функција, како и релацијата (2.8), се добива:

$$\partial^2 [x(\ln|x|-1)] \cdot x = \partial^2 \left[x^2(\ln|x|-1)\right] - 2 \cdot \partial [x(\ln|x|-1)] \tag{2.12}$$

Од друга страна, имајќи повторно во предвид дека дадениот оператор на диференцирање го обопштува класичното диференцирање на функции, ќе важи:

$$\partial \left[x^2(\ln|x|-1)\right] = 2x(\ln|x|-1) + x \tag{2.13}$$

од каде

$$\partial^2 \left[x^2(\ln|x|-1)\right] = 2\partial [x(\ln|x|-1)] + 1 \tag{2.14}$$

Заменувајќи (2.14) во (2.12) се добива:

$$\partial^2 [x(\ln|x|-1)] \cdot x = 1 \tag{2.15}$$

Ако го означиме елементот $\partial^2 [x (\ln |x| - 1)]$ со $x^{-1} \in \mathcal{A}$ каде $\mathcal{A}$ е асоцијативна алгебра и ако $x \cdot \delta = 0$, тогаш:

$$0 = x^{-1} (x \cdot \delta) = \left(x^{-1} \cdot x\right) \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta \tag{2.16}$$

Добивме: $x \cdot \delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$ што би значело дека ако постои алгебра со наведените својства нејзин елемент нема да биде Дирак δ дистрибуцијата, што пак ќе значи дека алгебрата $\mathcal{A}$, која се конструира со цел да се дефинира производ на дистрибуции, нема да го содржи просторот на дистрибуции $\mathcal{D}'$ (чиј елемент е Дирак δ дистрибуцијата).

Од друга страна пак, ако алгебрата $\mathcal{A}$ ја содржи Дирак δ - дистрибуцијата, тогаш оваа дистрибуција нема да ја задоволува релацијата $x \cdot \delta = 0$ во однос на операцијата производ во алгебрата $\mathcal{A}$, а тоа би значело дека на овој начин не се обопштуваат постоечките производи на дистрибуции.

Овој пример покажува дека не може да се конструира алгебра со својствата наведени на почетокот од ова поглавје.

2.2 Конструкција на алгебра на Коломбо

Неможноста да се дефинира производ на произволни дистрибуции ја наметнала потребата од нова теорија на обопштени функции која ќе даде решение на постоечките проблеми. Таква теорија развил францускиот математичар Коломбо (Jean - Francois Colombeau) во 1980-тите години, која за сега дава оптимално решение за проблемите со производ на дистрибуции. Коломбо конструирал алгебра за која што $C(\Omega)$ (непрекинати функции на Ω) во условот 4) на почетокот од ова поглавје, го заменил со $C^\infty(\Omega)$, т.е. важи:

4') $\circ|_{C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega)}$ е вообичаениот производ од функции.

Коломбо во своите книги [5, 6, 7] го опишува проблемот за производ на дистрибуции и ја воведува диференцијалната алгебра од обопштени функции $\mathcal{G}$, која подоцна е наречена Коломбоова алгебра, со што поставил една нова теорија на обопштени функции. Тој вовел неколку варијанти на Коломбоови алгебри, но сите со истото својство да множеството од C^∞ функции е подалгебра од $\mathcal{G}$, нешто што Коломбо го согледал како суштинско за надминување на 'невозможниот резултат' на Шварц. Оваа нова теорија на обопштени функции на Коломбо е поширока од теоријата на дистрибуции. Истата овозможува истовремено да се справиме со проблемот за непрекинатост, проблемот со диференцирање и со нелинеарните проблеми.

Во продолжение ќе ја дадеме идејата која довела до конструкција на овие алгебри, како и основните дефиниции и ознаки кои се користат во Коломбоовата теорија на обопштени функции.

Коломбо воден од потребата за математичка теорија која ќе ги поткрепи интуитивните пресметки во квантната физика, во која операциите ќе бидат во согласност со експерименталните резултати, се обидел да конструира алгебра од обопштени функции која ќе го содржи просторот $\mathcal{D}'$ од дистрибуции на Шварц и при тоа производот на две дистрибуции f и g ќе биде дистрибуција која тест функцијата φ ја пресликува на следниот начин:

$$\varphi \to \langle f, \varphi\rangle \cdot \langle g, \varphi\rangle \tag{2.17}$$

Но, овој производ нема да го обопштува производот на C^∞ - функциите бидејќи во општ случај ако f и g се C^∞ - функции и φ е тест функција

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx \cdot \int g(x)\,\varphi(x)\,dx \neq \int f(x)g(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2.18}$$

од каде се јавила идејата за алгебарска конструкција во која што ќе важи равенство во (2.18), т.е разликата во ова неравенство ќе исчезне.

Нека $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ е просторот од сите C^∞ -функции $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ со компактен носач.

За $q \in \mathbf{N_0}$ дефинирани се множества од тест функции A_q на следниот начин:

$$A_0(\mathbf{R}^n) = \left\{ \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \middle| \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1 \right\}$$

$$A_q(\mathbf{R}^n) = \left\{ \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \middle| \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1, \quad \int\limits_{\mathbf{R}^n} x^j \varphi(x)\, dx = 0; 1 \leq |j| \leq q \right\}$$

за $q \geq 1$, каде $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$; $j = (j_1, j_2, ..., j_n) \in \mathbf{N}^n$; $|j| = j_1 + j_2 + ... + j_n$ и $x^j = (x_1)^{j_1}(x_2)^{j_2} \cdots (x_n)^{j_n}$.

Очигледно е дека $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_q \supset \cdots$.

Теорема 2.2.1. ([6], стр.7) Множествата A_q, за $q = 1, 2, ...$ се непразни множества.

Доказ. Ќе го покажеме тврдењето за $n = 1$. Нека $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\psi \neq 0$, $\mathrm{supp}\psi \subseteq [-l, l]$ и нека $\int\limits_{\mathbf{R}} \psi(x)\, dx = 1$.

Нека $\phi_1 = \psi + \alpha_1 \psi'$ за $\alpha_1 \in \mathbf{C}$ кое ќе го определиме така да $\phi_1 \in A_1$.

Со парцијална интеграција се добива:

$$\int\limits_{\mathbf{R}} x\psi'(x)\, dx = -\int\limits_{\mathbf{R}} \psi(x)\, dx = -1 \tag{2.19}$$

α_1 го бираме така да важи

$$\int_{\mathbf{R}} x\phi_1(x)\,dx = 0 \tag{2.20}$$

т.е.

$$\int_{\mathbf{R}} x\psi(x)\,dx + \alpha_1 \int_{\mathbf{R}} x\psi'(x)\,dx = 0 \tag{2.21}$$

од каде со примена на (2.19) се добива

$$\alpha_1 = \int_{\mathbf{R}} x\psi(x)\,dx \tag{2.22}$$

Нека сега $\phi_2 = \phi_1 + \alpha_2\psi''$ при што $\alpha_2 \in \mathbf{C}$ го бираме така да $\phi_2 \in A_2$.
Прво,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} x\phi_2(x)\,dx &= \int_{\mathbf{R}} x\phi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_{\mathbf{R}} x\psi''(x)\,dx \\ &= 0 + \alpha_2\left(-\int_{\mathbf{R}} \psi'(x)\,dx\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

од каде следува дека $\phi_2 \in A_1$.
Понатаму,

$$\int_{\mathbf{R}} x^2\phi_2(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} x^2\phi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_{\mathbf{R}} x^2\psi''(x)\,dx \tag{2.24}$$

$$\int_{\mathbf{R}} x^2\psi''(x)\,dx = -2\int_{\mathbf{R}} x\psi'(x)\,dx = 2 \tag{2.25}$$

заради (2.19).

За да важи $\int\limits_{\mathbf{R}} x^2 \phi_2(x)\, dx = 0$ т.е. $\phi_2 \in A_2$ добиваме дека

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{R}} x^2 \phi_1(x)\, dx \tag{2.26}$$

Со индукција се покажува дека за секое q постои $\alpha_q \in \mathbf{C}$ така што $\phi_q = \phi_{q-1} + \alpha_q \psi^{(q)}$ е елемент на множеството A_q.

Во случај кога $n > 1$ ја разгледуваме функцијата

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi(x_1)\, \psi(x_2) \cdots \psi(x_2) \tag{2.27}$$

Постоењето на овие функции во еднодимензионален случај го покажавме, од каде следува постоењето на функцијата $\Psi \in A_q$ во n-димензионален случај. $\square$

Пример 2.2.1. Функцијата

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{2.28}$$

е глатка функција со компактен носач ($suppf = [-1, 1]$), т.е. $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Да означиме:

$$c(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\, dx \tag{2.29}$$

Функцијата

$$\psi(x) = \frac{1}{c(f)} \cdot f(x) = \begin{cases} \frac{1}{c(f)} \cdot e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{2.30}$$

ќе биде исто така глатка функција со компактен носач, т.е. $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\psi \neq 0$ и при тоа ќе важи $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 1$. Ова значи дека $\psi \in A_0(\mathbf{R})$.

Да конструираме функција $\phi_1 = \psi + \alpha_1\psi'$, така што ќе важи $\phi_1 \in A_1$. Според претходната теорема,

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi(x)\,dx = \frac{1}{c(f)}\int_{-1}^{1} xe^{-\frac{1}{1-x^2}}dx = 0 \tag{2.31}$$

Вредноста на последниот интеграл е нула бидејќи функцијата $xe^{-\frac{1}{1-x^2}}$ е непарна функција за која интегралот $\int_0^1 xe^{-\frac{1}{1-x^2}}dx$ има конечна вредност. Ова значи дека $\phi_1 = \psi \in A_1(\mathbf{R})$.

Да ја конструираме функцијата $\phi_2 = \phi_1 + \alpha_2\psi''$ така што $\phi_2 \in A_2$. Согласно претходната теорема,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi_1(x)\,dx = -\frac{1}{2c(f)}\int_{-1}^{1} x^2e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx \tag{2.32}$$

Интегралот во последното равенство има вредност различна од нула, што значи дека и $\alpha_2 \neq 0$, па за функцијата

$$\phi_2(x) = \psi(x) + \alpha_2\psi''(x) \tag{2.33}$$

$$= \frac{1}{c(f)}\cdot f(x) + \frac{\alpha_2}{c(f)}\cdot f''(x) \tag{2.34}$$

ќе важи $\phi_2 \in A_2$. $\square$

Повторувајќи ги чекорите од доказот на Теорема 2.2.1, со индукција исто така се покажува дека

$$\int_{\mathbf{R}} x^i\psi^{(j)}(x)\,dx = 0, \quad i < j \tag{2.35}$$

и

$$\int_{\mathbf{R}} x^i \psi^{(j)}(x)\, dx \neq 0, \quad i = j \tag{2.36}$$

Понатаму, за $\varphi \in A_q(\mathbf{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$ се користат ознаките:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{2.37}$$

и

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x) \tag{2.38}$$

Сакајќи да добие алгебра која ќе го содржи просторот од дистрибуции и чии елементи ќе може да бидат помножени и диференцирани исто како и C^∞ - функциите, Коломбо почнал со $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, алгебра од функции $f(\varphi, x) : A_0(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ кои се бесконечно многу пати диференцијабилни во однос на втората променлива x (за секое фиксирано φ). $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ е линеарен векторски простор со стандардните операции производ на функции и производ на функција со скалар.

Просторот $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ќе биде подалгебра од $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ и тоа е она подмножество од функции во $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ кои не зависат од φ.

Нека

$$\partial = \frac{\partial^{|k|}}{\partial {x_1}^{k_1} \cdots \partial {x_n}^{k_n}} \tag{2.39}$$

е оператор на диференцирање во $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, во однос на променливата x, при фиксно φ. Од дефиницијата на функциите f во $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ (бесконечно многу пати диференцијабилни во однос на x) следува дека ∂f ќе биде функција во $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ и Лајбницовото правило за диференцирање на производ ќе важи.

Со $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ е означена подалгебра од алгебрата $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$, со елементи такви што за секое компактно подмножество K од

$\mathbf{R}^n$ и произволно $p \in \mathbf{N_0}$ постои $q \in \mathbf{N}$ така што, за секое $\varphi \in A_q(\mathbf{R})$ и $c > 0$, $\eta > 0$ важи:

$$\sup_{x \in K} |\partial^p f(\varphi_\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{-q} \tag{2.40}$$

за $0 < \varepsilon < \eta$. Со други зборови, $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ ги содржи функциите од $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ чии изводи се ограничени на компактни множества со степени од ε со негативен експонент. C^∞ - функциите се содржат во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Пример 2.2.2. ([6], стр.10) Нека $f(\varphi, x) = \varphi(-x)$. Од својствата на тест функциите φ следува дека $f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

$$f(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

од каде повторно од својствата на тест функциите следува $f \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Нека сега $g(\varphi, x) = e^{\varphi(-x)}$. $g \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$.

$$g(\varphi_\varepsilon, x) = e^{\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)}$$

Ако φ го избереме така да $\varphi(0) = 1$, тогаш

$$g(\varphi_\varepsilon, 0) = e^{\frac{1}{\varepsilon^n}}$$

од каде $g \notin \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$. $\square$

Да земеме функција $f \in C(\mathbf{R}^n)$ (непрекината функција). На f и придружуваме функција F со домен $A_0 \times \mathbf{R}^n$ на следниот начин:

$$F(\varphi, x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\varphi(y - x)\,dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x + t)\varphi(t)\,dt \tag{2.41}$$

Бидејќи φ е C^{∞} - функција со компактен носач и F ќе биде C^{∞} - функција (согласно Теорема 1.6.1) во однос на x, при фиксно φ, т.е. $F \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Од (2.41)

$$F(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\, \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+\varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}
\partial^k F(\varphi_\varepsilon, x) &= \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^k \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\, (\partial^k \varphi)\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^k \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+\varepsilon t)\, (\partial^k \varphi)(t)\, dt
\end{aligned} \tag{2.43}$$

За фиксно φ интегрирањето се врши на компактни множества па според тоа $F \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Со равенството (2.41) е дефнинирано линеарно пресликување $F : C(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$. Од (2.42) следува дека

$$F(\varphi_\varepsilon, x) \to f(x) \text{ кога } \varepsilon \to 0$$

Покрај тоа, $F = 0 \Rightarrow f = 0$, што значи пресликувањето (2.41) е инјективно.

Со пресликувањето (2.41) просторот од непрекинати функции $C(\mathbf{R}^n)$ е вграден во алгебрата $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Притоа, $C(\mathbf{R}^n)$ не е подалгебра од $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ бидејќи во општ случај, дури и кога $f, g \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+\varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x+\varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \\
&\qquad \neq \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+\varepsilon t)\, g(x+\varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Од погоре изнесеното видовме дека просторот $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ се содржи во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ на начин што C^{∞} - функциите $f(x)$ се оние функции $f(\varphi, x)$ кои не зависат од φ.

Од друга страна, просторот од непрекинати функции $C(\mathbf{R}^n)$ го вградивме во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ со релацијата (2.41), а бидејќи важи $C^{\infty}(\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R}^n)$, со релацијата (2.41) исто така и $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$се вградува во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Овие две вградувања на $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ се разликуваат бидејќи во општ случај за $\varepsilon > 0$

$$f(x) \neq \int\limits_{R^n} f(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2.45}$$

Идејата одовде е да се најде идеал со кој ќе се постигне да оваа разлика исчезне.

Дефиниција 2.2.1. *Нула функции* или *занемарливи функции* се викаат функциите $f(\varphi, x)$ во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ такви што за секое компактно подмножество K од $\mathbf{R}^n$ и произволно $p \in \mathbf{N_0}$ постои $q \in \mathbf{N}$ така што за секое $r \geq q$ и секое $\varphi \in A_r(\mathbf{R})$ и $c > 0, \eta > 0$ важи:

$$\sup_{x \in K} |\partial^p f(\varphi_\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{r-q} \tag{2.46}$$

каде $0 < \varepsilon < \eta$.

Множеството од нула функции во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ ќе го означуваме со $\mathcal{I}[\mathbf{R}^n]$.

Ако $F \in \mathcal{I}[\mathbf{R}^n]$, а $G \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$, производот $F \cdot G$ ќе биде исто така нула функција, т.е. $F \cdot G \in \mathcal{I}[\mathbf{R}^n]$ што значи $\mathcal{I}[\mathbf{R}^n]$ е идеал во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Да земеме функција $f \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$. Нека

$$F(\varphi, x) = f(x) - \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x + t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2.47}$$

т.е.

$$\begin{aligned} F(\varphi_\varepsilon, x) &= f(x) - \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+\varepsilon t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= -\int\limits_{\mathbf{R}^n} [f(x+\varepsilon t) - f(x)]\,\varphi(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.48}$$

Доколку се развие разликата во последниот интеграл во Тајлоров ред и се земат во предвид својствата на тест функциите φ како елементи на множества A_q, $q \in \mathbf{N}_0$, очигледно е дека $F(\varphi_\varepsilon, x)$ ќе тежи кон нула побрзо од било кој степен на ε, рамномерно на компактни множества и по сите изводи. Ова значи дека $F(\varphi_\varepsilon, x) \in \mathcal{I}[\mathbf{R}^n]$.

На овој начин разликата во (2.45) исчезнува во фактор алгебрата

$$\frac{\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]}{\mathcal{I}[\mathbf{R}^n]}$$

Дефиниција 2.2.2. *Обопштени функции* во Коломбоовата теорија се елементите на фактор алгебрата

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(\mathbf{R}^n) = \frac{\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]}{\mathcal{I}[\mathbf{R}^n]} \tag{2.49}$$

Со други зборови, дефинирана е релација на еквиваленција '$\sim$' во $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ на следниот начин:

$$F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow F_1 - F_2 \in \mathcal{I}[\mathbf{R}^n] \tag{2.50}$$

па така обопштените функции во Коломбоовата теорија се класи на еквиваленција од глатки функции, кои класи се определени со (2.50). Според тоа, ако F е произволен елемент од $\mathcal{G}$, а ∂ е оператор на диференцирање, ∂F ќе биде исто така елемент од $\mathcal{G}$ и при тоа ќе важи Лајбницовото правило за диференцирање на производ. Уште повеќе, за непрекинатите функции во $\mathcal{G}$ ќе постојат парцијални изводи од произволен ред.

За овие функции понатаму ќе го користиме терминот *нови обопштени функции* или *Коломбоови обопштени функции*, со цел да се избегне двосмисленост, односно истите да не се поистоветуваат со обопштените функции (дистрибуции) дефинирани во теоријата на дистрибуции на Шварц.

2.3 Вградување на просторите $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $C(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ во Коломбоовата алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$

1) Ако $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ од самата конструкција на алгебрата $\mathcal{G}$ следува дека

$$F_1(\varphi, x) = f(x) \tag{2.51}$$

и

$$F_2(\varphi, x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2.52}$$

ќе бидат еден ист елемент во $\mathcal{G}$. Значи, вградувањето на $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ функциите во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ е идентитет:

$$f \to \widetilde{f}(\varphi, x) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n) \tag{2.53}$$

каде $\widetilde{f}(\varphi, x) = f(x)$, $\varphi \in A_0$ и $x \in \mathbf{R}^n$.

Покрај тоа, $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ќе биде подалгебра од $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

2) Вградувањето на непрекинатите функции во Коломбооовата алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ е дефинирано со пресликувањето (2.42):

$$f \to \widetilde{f}(\varphi, x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\,\varphi(y-x)\,dy = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,\varphi(y)\,dy$$

каде $\varphi \in A_0$ и $x \in \mathbf{R}^n$. Со ова пресликување всушност на функцијата $f \in C(\mathbf{R}^n)$ и е придружена класа на еквиваленција на елементи од $\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$. Функцијата f и елементите од нејзината класа на еквиваленција, т.е. вредностите $f(x)$ и соодветно $\widetilde{f}(\varphi, x)$, во општ случај не се еднакви.

$C(\mathbf{R}^n)$ не е подалгебра од $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$, што може да се види од следниот пример.

Пример 2.3.1. Да ги разгледаме функциите

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2.54}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \tag{2.55}$$

Класичниот производ на овие две непрекинати функции е $f_1 f_2 = 0$. Нивниот производ како елементи на $\mathcal{G}$ е класата на функцијата

$$F(\varphi_\varepsilon, x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2.56}$$

За $x = 0$ имаме:

$$F(\varphi_\varepsilon, 0) = \int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon t \varphi(t)\, dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{0} \varepsilon t \varphi(t)\, dt = \varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \varphi(t)\, dt \tag{2.57}$$

од каде според (2.36) следува дека

$$F(\varphi_\varepsilon, 0) \neq 0 \tag{2.58}$$

што значи $C(\mathbf{R})$ не е подалгебра од $\mathcal{G}(\mathbf{R})$. $\square$

Ова несовпаѓање на двата производа ќе биде надминато со воведување на поимот 'асоцирање во $\mathcal{G}$'.

3) Вградувањето на просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'(\mathbf{R^n})$ во Коломбоовата алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{R^n})$ се прави со пресликувањето

$$\begin{aligned} f \to \widetilde{f}(\varphi, x) &= \left(f * \overset{\vee}{\varphi}\right)(x) \\ &= \langle f(y), \varphi(y-x)\rangle \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y)\,\varphi(y-x)dy \end{aligned} \tag{2.59}$$

каде $\varphi \in A_0$.

Да забележиме дека вградувањето на дистрибуциите во Коломбоовата алгебра е обопштување на вградувањето на непрекинатите функции во истата алгебра.

Теорема 2.3.1. ([5], стр.61) Ако $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ тогаш $\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$.

Доказ. Од Теорема 1.6.1 следува дека $\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x)$ е C^∞- функција.

Понатаму, ќе ја примениме Теорема 1.4.5 според која за дистрибуција f важи $f = \partial^p g$, каде $\partial^p g$ е извод од конечен ред p на непрекината функција g.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) &= \langle f(y), \varphi_\varepsilon(y-x)\rangle \\ &= \langle \partial^p g(y), \varphi_\varepsilon(y-x)\rangle \\ &= (-1)^p \langle g(y), \partial^p \varphi_\varepsilon(y-x)\rangle \\ &= (-1)^p \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(y)\,\partial^p \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\ &= (-1)^p \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(x+\varepsilon t)\,\frac{1}{\varepsilon^p} \partial^p \varphi(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.60}$$

Одовде,

$$\left|\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x)\right| \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(x+\varepsilon t)|\,|\partial^p \varphi(t)|\,dt \le c\varepsilon^{-p} \tag{2.61}$$

што значи $\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) \in \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$. $\square$

Теорема 2.3.2. ([5], стр.64) Пресликувањето (2.59) со кое дистрибуциите се вградуваат во Коломбоовата алгебра е инјективно.

Доказ. Ќе покажеме дека ако $\widetilde{f}(\varphi, x) = 0 \Rightarrow f = 0$ за $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in A_0$ и $x \in \mathbf{R}^n$.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(\varphi, x) = 0 \Leftrightarrow \langle f(y), \varphi(y-x)\rangle = 0 \quad \forall (\varphi, x) \in A_1 \times \mathbf{R}^n \\
&\Leftrightarrow \langle f(y), \psi(y-x)\rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad \int \psi(x)\, dx = 1 \\
&\Leftrightarrow f = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

Со пресликувањето (2.59) на произволна дистрибуција f и придружуваме класа на еквиваленција $\widetilde{f} \in \mathcal{G}$ (Коломбоова обопштена функција) на елемент $f_\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ кој го викаме *претставник* на дистрибуцијата f. Операциите производ и диференцирање на обопштени функции се извршуваат на произволен претставник од класата на соодветната обопштена функција, кој всушност е C^∞- функција. Притоа, резултатите не зависат од избраниот претставник.

На овој начин се надминуваат проблемите кои се јавуваат кај функциите со прекин, проблемите со диференцирање, но и многу нелинеарни проблеми. Вградувајќи ги соодветните функции, односно дистрибуции во Коломбоова алгебра, ние понатаму оперираме со C^∞- функции, бидејќи претставниците од класата на на секоја од разгледуваните функции, односно дистрибуции, се C^∞- функции.

Од овде јасно е дека ако ∂ е оператор на диференцирање во $\mathcal{G}$ и $\widetilde{f}$ е Коломбоова обопштена функција чии претставници се елементите од класата на функција $f_\varepsilon \in \mathcal{E}_M$, тогаш $\partial\widetilde{f}$ ќе биде исто така Коломбоова обопштена функција чии претставници ќе бидат елементите од класата на ∂f_ε. Лајбницовото правило за диференцирање на производ во $\mathcal{G}$ исто така ќе важи со оглед на тоа дека диференцираме произволни претставници (глатки функции).

Пример 2.3.2. Претставниците на Дирак- δ дистрибуцијата во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ ќе бидат елементите од класата на функцијата

$$\widetilde{\delta}\,(\varphi, x) = \langle \delta\,(y)\,, \varphi\,(y - x)\rangle = \varphi\,(-x) \tag{2.62}$$

т.е.

$$\widetilde{\delta}\,(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{2.63}$$

Претставниците на δ^2 ќе бидат елементите од класата на $[\varphi\,(-x)]^2$, т.е.

$$\widetilde{\delta^2}\,(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]^2 \quad \square \tag{2.64}$$

2.4 Концептот на слабо равенство во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$

Видовме дека $x\delta\,(x) = 0$ во $\mathcal{D}'$. Ова равенство во $\mathcal{G}$ не важи. Имено, во $\mathcal{G}$

$$x \cdot \delta\,(x) = \widetilde{f}\,(\varphi, x) = x\varphi\,(-x) \tag{2.65}$$

каде $\varphi \in A_0$, што значи $\widetilde{f}\,(\varphi, x)$ во општ случај е различно од нула кога $x \neq 0$.

Но,

$$\widetilde{f}\,(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{x}{\varepsilon}\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{2.66}$$

па $\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) \to 0$ при секое фиксно x, кога $\varepsilon \to 0$, поради тоа што φ е функција со компактен носач.

Поради ова, во $\mathcal{G}$ е дефиниран концептот на 'слабо' равенство, кој се разликува од равенството во $\mathcal{D}'$. Во продолжение ќе го воведеме овој концепт.

Со $\mathcal{E}_0$ ќе го означиме множеството функции $f : A_0 \to \mathbf{C}$.

Со $\mathcal{E}_M$ ќе го означиме множеството од функции f од $\mathcal{E}_0$ за кои што постои $p \in \mathbf{N}$, т.ш. за секое $\varphi \in A_p$ постојат $\eta > 0$ и $c > 0$ и при тоа важи:

$$f(\varphi_\varepsilon) \leq c\varepsilon^{-q} \tag{2.67}$$

каде $0 < \varepsilon < \eta$.

Со $\mathcal{I}_0$ ќе го означиме идеалот во $\mathcal{E}_M$ кој ги содржи функциите $f \in \mathcal{E}_0$ такви што за секое $p \in \mathbf{N}$ постои $q \in \mathbf{N}$ такво што за $r > q$ и $\varphi \in A_r$ постојат $\eta > 0$ и $c > 0$ и при тоа важи:

$$f(\varphi_\varepsilon) \leq c\varepsilon^{r-q} \tag{2.68}$$

каде $0 < \varepsilon < \eta$.

Дефинираме фактор алгебра

$$\overline{\mathbf{C}} = \frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{I}_0} \tag{2.69}$$

чии елементи ќе ги викаме *обопштени комплексни броеви.*

Множеството од комплексни броеви $\mathbf{C}$ е вградено во алгебрата од обопштени комплексни броеви со пресликувањето:

$$z \in \mathbf{C} \to \overline{z} \in \overline{\mathbf{C}} \text{ каде } \overline{z}(\varphi) = z, \text{ за } \varphi \in A_0$$

Дефиниција 2.4.1. За комплексниот број z ќе речеме дека е *асоциран* со обопштениот комплексен број $\overline{z}$ ако постои $q \in \mathbf{N}_0$ така што за сите $\varphi \in A_q$ важи: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{z}(\varphi_\varepsilon) = z$.

Дефиниција 2.4.2. Нека $F = \widetilde{f}(\varphi, x) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$. *Вредноста на Коломбоовата обопштена функција* F во точката $x \in \mathbf{R}^n$ се дефинира на следниот начин:

$$F(x) = f(\varphi, x) \in \overline{\mathbf{C}} \tag{2.70}$$

каде $\varphi \in A_0$.

Вредноста $F(x)$ е добро дефинирана: ако g е друг претставник на Коломбоовата обопштена функција, т.е. $F = \widetilde{g}(\varphi, x)$, тогаш $f - g \in \mathcal{I}(\mathbf{R}^n)$, од каде следува дека $(f-g)(x) \in \mathcal{I}_0$.

Ова значи дека вредноста $F(x)$ не зависи од изборот на претставникот на Коломбоовата обопштена функција F.

Една Коломбоова обопштена функција може да биде различна од нула во $\mathcal{G}$, но нејзината вредност во секоја точка да биде еднаква на нула.

Теорема 2.4.1. ([6], стр.39) Нека $f \in C(\mathbf{R}^n)$ е непрекината функција. Вредноста на оваа функција како елемент на Коломбоовата алгебра во секоја точка x е асоцирана со класичната вредност $f(x)$.

Доказ. Согласно правилото за вградување на непрекинатите функции во $\mathcal{G}$,

$$\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt$$

па со оглед на тоа дека $\varphi \in A_0$ е функција со компактен носач и f е непрекината функција, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x) = f(x)$ што значи вредноста $\widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x)$ е асоцирана со вредноста $f(x)$. $\square$

Дефиниција 2.4.3. Нека $F = \widetilde{f}(\varphi_\varepsilon, x)$ е Коломбоова обопштена функција и K е компактно подмножество од $\mathbf{R}^n$. Обопштениот комплексен број

$$h(\varphi) = \int\limits_K \widetilde{f}(\varphi, x)\, dx \tag{2.71}$$

се вика *интеграл* од функцијата F по K и се означува со $\int\limits_K F(x)\, dx$.

Дефиницијата е добра бидејќи интегрираме C^{∞} - функција, а вредноста на интегралот нема да зависи од изборот на претставникот на F.

Теорема 2.4.2. Ако $F = \widetilde{f}(\varphi, x)$ е Коломбоова обопштена функција која соодветствува на C^{∞} - функција f тогаш

$$\int\limits_K F(x)\, dx = \int\limits_K f(x)\, dx \tag{2.72}$$

Доказот е тривијален, следува од фактот дека

$$F(x) = \widetilde{f}(\varphi, x) = f(x)$$

.

Теорема 2.4.3. ([6], стр.42) Ако Коломбоовата обопштена функција F соодветствува на непрекината функција f, тогаш обопштениот комплексен број $h(\varphi) = \int\limits_K \widetilde{f}(\varphi, x)\, dx$ е асоциран на комплексниот број $\int\limits_K f(x)\, dx$.

Доказ.

$$h(\varphi_{\varepsilon}) = \int\limits_K \widetilde{f}(\varphi_{\varepsilon}, x)\, dx = \int\limits_K \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt dx \tag{2.73}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x + \varepsilon t)\, \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2.74}$$

останува $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} h(\varphi_{\varepsilon}) = \int\limits_K f(x)\, dx$ со што теоремата е докажана. □

Теорема 2.4.4. Ако $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, тогаш

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} (\psi \cdot T)(x)\, dx = \langle T, \psi \rangle \in \mathbf{C} \subset \overline{\mathbf{C}} \tag{2.75}$$

каде $(\psi \cdot T)$ е производот во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

Доказ. [6], стр. 52-54.

Последната теорема покажува дека и во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ дистрибуциите се ограничени линеарни функционали од $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ во $\mathbf{C}$ и уште повеќе, дефиницијата на новите (Коломбоови) обопштени функции може да се смета за обопштување на дефиницијата на дистрибуциите (т.е. на обопштените функции во теоријата на Шварц).

Дефиниција 2.4.4. Ќе речеме дека Коломбоовата обопштена функција $F \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ е еднаква на нула во смисла на *слабо равенство* во $\mathcal{G}$, ако за секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ важи:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} F(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \tag{2.76}$$

Означуваме $F \sim 0$.

Ќе речеме дека F_1 и $F_2 \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ се *еднакви во смисла на слабо равенство* во $\mathcal{G}$ ако $F_1 - F_2 \sim 0$. Означуваме $F_1 \sim F_2$.

Да забележиме дека кога $F \in \mathcal{D}'$ и $F \sim 0$, тогаш

$$0 = \int\limits_{\mathbf{R}^n} F(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle F, \varphi \rangle \tag{2.77}$$

од каде следува дека $F = 0$ во $\mathcal{D}'$.

Со следните две дефиниции е дадено значењето на поимот 'асоцирање' во $\mathcal{G}$ што преставува обопштување на поимот за еднаквост на дистрибуции. Асоцирањето во $\mathcal{G}$ претставува исто така концепт на слабо равенство, но на некој начин 'послабо' од она дадено со претходните две дефиниции.

Дефиниција 2.4.5. За обопштените функции $F, G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ велиме дека се *асоцирани* (означуваме со $F \approx G$) ако за произволни претставници $f(\varphi_\varepsilon, x)$ и $g(\varphi_\varepsilon, x)$ соодветно и произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ постои $q \in \mathbf{N_0}$така што за било кое $\varphi(x) \in A_q(\mathbf{R}^n)$ важи:

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(\varphi_\varepsilon, x) - g(\varphi_\varepsilon, x)| \psi(x)\, dx = 0 \tag{2.78}$$

Дефиниција 2.4.6. За обопштената функција $F \in \mathcal{G}$ велиме дека има *асоцирана дистрибуција* $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ (означуваме со $F \approx u$) ако за произволен претставник на таа обопштена функција $f(\varphi_\varepsilon, x)$ и произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ постои $q \in \mathbf{N_0}$ така што за секое $\varphi(x) \in A_q(\mathbf{R}^n)$ важи:

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\varphi_\varepsilon, x) \psi(x)\, dx = \langle u, \psi \rangle \tag{2.79}$$

Поинаку кажано, обопштената функција $F \in \mathcal{G}$ е асоцирана со дистрибуција $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ ако обопштениот комплексен број $\int\limits_{\mathbf{R}^n} F(x)\, \psi(x)\, dx$ е асоциран со комплексниот број $\int\limits_{\mathbf{R}^n} u(x)\, \psi(x)\, dx = \langle u, \psi \rangle$.

Две обопштени функции F и G се асоцирани ако $F - G$ е асоцирано со $0 \in \mathcal{D}'$.

Претходните дефиниции не зависат од елементот од класата на еквиваленција кој е избран.

Од дефинициите директно следува дека секоја дистрибуција е асоцирана самата на себе.

Покрај тоа, ако за $F \in \mathcal{G}$ постои асоцирана дистрибуција, таа е единствена. Навистина, ако $F \in \mathcal{G}$ е асоцирана со $u_1 \in \mathcal{D}'$

и со $u_2 \in \mathcal{D}'$ ќе следува дека $\langle u_1, \psi \rangle = \langle u_2, \psi \rangle$ а ова значи $u_1 = u_2$.

На елемент од Коломбоовата алгебра, со овој процес на асоцирање му се придружува елемент од просторот на дистрибуции $\mathcal{D}'$ со што се овозможува да добиените резултати се толкуваат во смисла на дистрибуции. Овде ќе нагласиме дека не секој елемент од Коломбоовата алгебра има асоцирана дистрибуција.

Теорема 2.4.5. ([6], стр.65) Ако $f, g \in C(\mathbf{R}^n)$ се две непрекинати функции, нивниот производ $f \cdot g$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ е асоциран со класичниот производ fg во $C(\mathbf{R}^n)$.

Доказ. Ќе ја разгледаме разликата $I(\varphi_\varepsilon, x)$ на двата производа во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$. Ќе користиме $\int \varphi(t)\, dt = 1$.

$$\begin{aligned} I(\varphi_\varepsilon, x) &= \int f(x+\varepsilon t)\, \varphi(t)\, g(x+\varepsilon z)\, \varphi(z)\, \psi(x) dt dz dx \\ &- \int f(x)\, g(x)\, \varphi(t)\, \varphi(z)\, \psi(x)\, dt dx dx \\ &= \int [f(x+\varepsilon t)\, g(x+\varepsilon z) - f(x)\, g(x)]\, \varphi(z)\, \psi(x)\, dt dx dx \end{aligned}$$

од каде $I(\varphi_\varepsilon, x) \to 0$ кога $\varepsilon \to 0$. $\square$

Теорема 2.4.6. ([6], стр.66) Ако $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ тогаш производот fT дефиниран во теоријата на дистрибуции и новиот производ $f \cdot T \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ се еднакви во смисла на слабото равенство во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$.

Доказ. Нека $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Согласно Теорема 2.4.4 имаме:

$$\int_{\mathbf{R}^n} [\psi \cdot (fT)](x)\, dx = \langle fT, \psi \rangle = \langle T, f\psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} [(f\psi) \cdot T](x)\, dx \qquad (2.80)$$

Бидејќи $f, \psi \in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, нивниот класичен производ и новиот се совпаѓаат, т.е. $f\psi = \psi f = \psi \cdot f$. Ова значи дека

$$(\psi f) \cdot T = (\psi \cdot f) \cdot T = \psi \cdot (f \cdot T) \tag{2.81}$$

заради асоцијативноста на Коломбоовата алгебра.

Спред (2.81),

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} [\psi \cdot (f \cdot T)](x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} [(\psi f) \cdot T](x)\, dx = \langle T, \psi f \rangle \tag{2.82}$$

Од (2.80) и (2.82) следува за секое $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ важи:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi \cdot [(fT) - (f \cdot T)](x)\, dx = 0 \tag{2.83}$$

што значи fT и $f \cdot T$ се еднакви во смисла на слабото равенство во $\mathcal{G}$. $\square$

На крајот на ова поглавје ќе покажеме дека производот на дистрибуциите во Коломбоовата алгебра претставува обопштување на веќе постоечките производи на дистрибуции.

Теорема 2.4.7. ([5], стр.71-72) Ако S и T се две дистрибуции во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и нивниот класичен производ ST во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ постои според дефиницијата (1.67), тогаш производот на овие две дистрибуции $S \cdot T$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ е асоциран со нивниот класичен производ, т.е. $S \cdot T \approx ST$ во $\mathcal{G}$.

Доказ. Нека $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ соодветно се вградувањата на S и T во $\mathcal{G}$. Согласно правилото за вградување на дистрибуциите во Коломбоовата алгебра, за $\varphi \in A_0$,

$$\widetilde{S} = \langle S(y), \varphi(y - x) \rangle \tag{2.84}$$

и

$$\widetilde{T} = \langle T(y), \varphi(y - x) \rangle \tag{2.85}$$

од каде

$$S\cdot T=\left(\widetilde{S}\cdot\widetilde{T}\right)(\varphi,x)=\langle S(y),\varphi(y-x)\rangle\cdot\langle T(y),\varphi(y-x)\rangle \tag{2.86}$$

За произволно $\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ ќе важи:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}(S\cdot T)(x)\,\psi(x)\,dx=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\widetilde{S}\cdot\widetilde{T}\right)(\varphi_\varepsilon,x)\,\psi(x)\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbf{R}^n}\langle S(y),\varphi_\varepsilon(y-x)\rangle\,\langle T(y),\varphi_\varepsilon(y-x)\rangle\,\psi(x)\,dx \tag{2.87}$$

Имајќи во предвид дека $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$ е δ - низа, во (2.87) ќе имаме:

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}(S\cdot T)(x)\,\psi(x)\,dx=\langle(S*\varphi_\varepsilon)(T*\varphi_\varepsilon),\psi\rangle\to\langle ST,\psi\rangle \tag{2.88}$$

кога $\varepsilon\to 0$. Според ова, $S\cdot T\approx ST$. $\square$

На крај ќе резимираме некои поважни карактеристики на Коломбоовата алгебра, кои се однесуваат пред се на дистрибуциите.

Две дистрибуции вградени во Коломбоовата алгебра претставуваат Коломбоови обопштени функции. Производот на две дистрибуции во $\mathcal{G}$ во општ случај е Коломбоова обопштена функција, за која не мора секогаш да постои асоцирана дистрибуција.

Доколку за производот на две дистрибуции во $\mathcal{G}$ постои асоцирана дистрибуција, велиме дека постои *Коломбоовиот производ на тие две дистрибуции.* Ако вообичаениот (класичниот) производ на две дистрибуции постои, тогаш постои и нивниот Коломбоов производ и тие два производа се исти.

Од гледна точка на диференцирање, овие нови обопштени функции ги имаат истите својства како и дистрибуциите.

Овие нови обопштени функции се многу блиски до дистрибуциите на начин што нивната дефиниција може да ја сфатиме како обопштување на дефиницијата на дистрибуции на Шварц.

Различни проблеми на кои што наидува класичната теорија на дистрибуции (проблеми со производ, прекини, диференцирање) можат да бидат решени во рамки на Коломбоовата алгебра. Многу производи на дистрибуции кои не постојат во просторот на дистрибуции на Шварц постојат во оваа алгебра.

Асоцирањето во $\mathcal{G}$ ни овозможува резултатите кои ќе ги добиеме да ги толкуваме пак во смисла на дистрибуции.

Користејќи го приодот опишан во Коломбоовата теорија на обопштени функции, ние имаме добиено и објавено резултати за производ на дистрибуции во Коломбоова алгебра. Резултатите се добиени во смисла на асоцирани дистрибуции и истите ќе бидат презентирани во продолжение.

Глава 3

Нови резултати за производ на дистрибуции во алгебра на Коломбо

3.1 Производи на дистрибуции во алгебра на Коломбо и нивна примена

Предмет на истражување во оваа докторска дисертација се производи на дистрибуции во алгебри на Коломбо.

Проблемот за производ на дистрибуции, како еден од главните проблеми со кои класичната теорија на дистрибуции се соочува, со конструкцијата на алгебрите на Коломбо на некој начин се надминува. Коломбоовите алгебри се асоцијативни алгебри во кои е вграден просторот на дистрибуции и при тоа операцијата производ во овие алгебри го обопштува класичниот производ на дистрибуции, што значи веќе постоечките производи и оние пресметани во алгебра на Коломбо се исти. Сепак, овие алгебри овозможуваат пресметување производ на дистрибуции кој во класичната теорија не може да се пресмета. Покрај тоа, една од главните придобивки на Коломбоовата теорија на обопштени функции е и тоа што операциите со функции и дистрибуции со сингуларитети може да се извршуваат исто толку едноставно како и операциите со глатки функции.

Со оглед на тоа што Коломбоовата теорија на обопштени функции е релативно нова теорија, објавена пред триесетина години и има за сега оптимални својства кога се во прашање операции со дистрибуции и нивна примена, се повеќе научици појавуваат интерес за работа со Коломбоовите алгебри.

Значајни резултати за производ на сингуларни дистрибуции во Коломбоова алгебра има објавено авторот Благовест Дамјанов [8]-[15]. Ќе издвоиме некои од нив:

- Во [8] е покажано дека за $p \in \mathbf{N}_0^m$ производот на дистрибуциите $\delta^{(p)}(x)$ и $x_+^p = \begin{cases} x^p, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^m)$ има асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$\widetilde{x}_+^p \cdot \widetilde{\delta}^{(p)}(x) \approx \frac{(-1)^{|p|} p!}{2^m} \delta(x) \tag{3.1}$$

  За производот на дистрибуциите $\delta^{(p)}(x)$ и $x_-^p = (-x)_+^p$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^m)$ важи:

$$\widetilde{x}_-^p \cdot \widetilde{\delta}^{(p)}(x) \approx \frac{p!}{2^m} \delta(x) \tag{3.2}$$

  Во еднодимензионален случај важи:

$$\widetilde{x}^p \widetilde{\delta}^{(p)}(x) \approx (-1)^p p! \delta(x) \tag{3.3}$$

- Исто така во [8] е покажано дека производот на дистрибуциите x_+^a и x_-^{-a-1}, за $a \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Z}$, во Коломбоова алгебра постои, т.е. има асоцирана дистрибуција:

$$\widetilde{x_+^a} \cdot \widetilde{x_-^{-a-1}} = \widetilde{x_-^{-a-1}} \cdot \widetilde{x_+^a} \approx \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(-a)}{2} \delta(x) \tag{3.4}$$

Специјален случај се производите:

$$\widetilde{x_+^{-r-1/2}} \cdot \widetilde{x_-^{r-1/2}} = \frac{(-1)^r \pi}{2} \delta(x) \tag{3.5}$$

за $r = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ и

$$\widetilde{x_+^{-1/2}} \cdot \widetilde{x_-^{-1/2}} = \frac{\pi}{2} \delta(x) \tag{3.6}$$

- Во [9] е покажано дека за $p \in \mathbf{N}^m$ Коломбоовиот производ на дистрибуциите x^{-p} и $\delta^{p-1}(x)$ постои и истиот е даден со релацијата

$$\widetilde{x^{-p}} \cdot \widetilde{\delta^{(p-1)}(x)} \approx \frac{(-1)^{|p|}(p-1)!}{2^m(2p-1)!} \delta^{(2p-1)}(x)\,. \tag{3.7}$$

Ние имаме направено обопштување на резултатите (3.5) и (3.7) што детално ќе биде презентирано во делот со нови научни резултати.

Проф. Д-р Билјана Јолевска Тунеска исто така има објавено значајни резултати кои се однесуваат на производ на дистрибуции во Коломбоова алгебра и примена на алгебрите на Коломбо.

- Во [30] е пресметан производот на дистрибуциите $x_+^{-r-1/2}$ и $x_-^{-r-1/2}$, за $r = 0, 1, 2, ...$, при што е покажано:

$$\widetilde{x_+^{-r-1/2}} \cdot \widetilde{x_-^{-r-1/2}} \approx \frac{\pi}{2\,(2r)!} \delta^{(2r)}(x) \tag{3.8}$$

Во докторската дисертација е направено обопштување на овој резултат, при што и ова ќе биде покажано во следното поглавје.

- Во [29] Коломбоовата алгебра од обопштени функции е применета за наоѓање решенија на систем од линеарни диференцијални равенки при дадени почетни услови.

Можност за примена на Коломбоовите алгебри во различни области од науката и техниката увиделе повеќе научници, што може да се види во повеќе наслови од цитираната литература [1, 3, 4, 17, 25, 27, 40, 43, 44, 48, 49, 50].

3.2 Нови научни резултати за производ на дистрибуции во алгебра на Коломбо

При изработка на докторската дисертација се добиени резултати за производи на дистрибуции со сингуларитети, но и производи на непрекината функција со дистрибуција со сингуларитет. Повеќето од резултатите се веќе објавени во списанија со меѓународен уредувачки одбор, но и во списанија со фактор на влијание.

Резултатот кој што следува во продолжение е резултатот од трудот:

Marija Miteva and Biljana Jolevska-Tuneska. *Some Results on Colombeau Product of Distributions.* Advances in Mathematics: Scientific Journal. Vol 1, No. 2, 121-126 (2012).

Теорема 3.2.1. За производот на обопштените функции $\ln|x|$ и $\delta^{(s-1)}(x)$, каде $s = 0, 1, 2, \ldots$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$\widetilde{\ln|x|} \cdot \widetilde{\delta^{(s-1)}(x)} \approx \frac{(-1)^s}{s}\delta^{(s-1)}(x) \tag{3.9}$$

Доказ. За произволно $\varphi \in A_0(\mathbf{R})$ без губење на општоста ќе претпоставиме дека $\mathrm{supp}\varphi(x) \subseteq [-l, l]$. Применувајќи го правилото за вградување на дистрибуциите во Коломбоовата алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ и воведувајќи ја смената $v=(y-x)/\varepsilon$ ги добиваме 'претставниците' на дистрибуцијата $\ln|x|$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\ln|x|}\,(\varphi_\varepsilon,x) &= \varepsilon^{-1}\int_{x-l\varepsilon}^{x+l\varepsilon}\ln|y|\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy\\
&= \int_{-l}^{l}\ln|x+\varepsilon v|\varphi(v)dv
\end{aligned}\tag{3.10}$$

На исти начин, применувајќи го правилото за вградување во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, правилото за диференцирање на дистрибуции и дефиницијата на δ-дистрибуцијата, за претставниците на $\delta^{(s-1)}(x)$ добиваме:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta^{(s-1)}}\,(\varphi_\varepsilon,x) &= \varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}\delta^{(s-1)}\,(y)\,\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy\\
&= (-1)^{s-1}\frac{1}{\varepsilon^{s-1}}\varepsilon^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}}\delta\,(y)\,\varphi^{(s-1)}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy\\
&= \frac{(-1)^{s-1}}{\varepsilon^{s}}\varphi^{(s-1)}\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}\tag{3.11}$$

Да го пресметаме производот на овие две Коломбоови обопштени функции. Нека $\psi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{\ln|x|}\,(\varphi_\varepsilon,x)\cdot\widetilde{\delta^{(s-1)}}\,(\varphi_\varepsilon,x)\,,\psi(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\ln|x|}\,(\varphi_\varepsilon,x)\,\widetilde{\delta^{(s-1)}}\,(\varphi_\varepsilon,x)\,\psi(x)dx\\
=\frac{(-1)^{s-1}}{\varepsilon^{s}}\int_{-l\varepsilon}^{l\varepsilon}\left(\int_{-l}^{l}\ln|x+\varepsilon v|\varphi(v)dv\right)\varphi^{(s-1)}(-x/\varepsilon)\psi(x)dx\\
=\frac{(-1)^{s}}{\varepsilon^{s-1}}\int_{-l}^{l}\varphi^{(s-1)}(u)\psi(-\varepsilon u)\int_{-l}^{l}\ln|\varepsilon v-\varepsilon u|\varphi(v)dvdu
\end{aligned}\tag{3.12}$$

при што ја користевме смената $u=-x/\varepsilon$.

Функцијата ψ ќе ја развиеме во Тајлоров ред:

$$\psi(-\varepsilon u)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}(-\varepsilon u)^i+\frac{\psi^{(s)}(\eta u)}{(s)!}(-\varepsilon\eta)^s \tag{3.13}$$

каде $\eta \in (0,1)$.

Заменувајќи го равенството (3.13) во (3.12) добиваме:

$$\langle \widetilde{\ln|x|}\,(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{\delta^{(s-1)}}\,(\varphi_\varepsilon, x)\,, \psi(x)\rangle = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(-1)^{s+i}\psi^{(i)}(0)}{i!\varepsilon^{s-i-1}} J_i + O(\varepsilon) \quad (3.14)$$

при што со J_i е означен интегралот:

$$J_i = \int_{-l}^{l} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} \ln|\varepsilon v - \varepsilon u| u^i \varphi^{(s-1)}(u)du \quad (3.15)$$

за $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Да го пресметаме последниот интеграл.

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{-l}^{l} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} \ln|\varepsilon v - \varepsilon u| u^i \varphi^{(s-1)}(u)du \\ &= \frac{1}{i+1} \int_{-l}^{l} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} \ln|\varepsilon v - \varepsilon u| \varphi^{(s-1)}(u) d\left(u^{i+1} - v^{i+1}\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

од каде со парцијална интеграција се добива:

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{1}{i+1} \int_{-l}^{l} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} \left(u^{i+1} - v^{i+1}\right) \ln|\varepsilon v - \varepsilon u| \varphi^{(s)}(u)du \\ &+ \frac{1}{i+1} \int_{-l}^{l} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} \frac{u^{i+1} - v^{i+1}}{u - v} \varphi^{(s-1)}(u)du \end{aligned} \quad (3.17)$$

Првиот интеграл во горниот израз е нула, па со примена на равенството $u^{i+1} - v^{i+1} = (u-v)\sum_{k=0}^{i} u^k v^{i-k}$ и равенството (2.35) во вториот интеграл, добиваме:

$$(i+1)J_i = \sum_{k=0}^{i} \int_{-l}^{l} v^{i-k} \varphi(v)dv \int_{-l}^{l} u^k \varphi^{(s-1)}(u)du \quad (3.18)$$

Според (2.35) и (2.36) единствениот ненулти собирок во горната сума се добива за $i = s - 1$, од каде

$$(i+1)J_i = \int_{-l}^{l} u^i \varphi^{(s-1)}(u) du \tag{3.19}$$

Користејќи ги својствата на тест функциите, со индукција непосредно се проверува дека

$$\int x^i \varphi^{(i)}(x)\, dx = (-1)^i i! \tag{3.20}$$

Одовде добиваме:

$$J_{s-1} = \frac{(-1)^{s-1}(s-1)!}{s} . \tag{3.21}$$

Заменувајќи во (3.14), за производот на дистрибуциите кои ги разгледуваме добиваме:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\ln|x|}\,(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{\delta^{(s-1)}}\,(\varphi_\varepsilon, x)\,, \psi(x)\rangle &= \frac{(-1)^s \psi^{(s-1)}(0)}{s} + O(\varepsilon) \\ &= \frac{(-1)}{s} \langle \delta^{(s-1)}(x), \psi(x)\rangle + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ако пуштиме $\varepsilon \to 0$, ја добиваме релацијата (3.9) со што теоремата е докажана.$\square$

Големата примена на δ дистрибуцијата и нејзините изводи во физиката и техниката, како и примена на производи кои ја содржат δ дистрибуцијата и нејзините изводи (а со тоа и примена на резултатите за производ од облик како во Теорема 3.2.1) можат да се видат во многу трудови: [18, 25, 3, 43, 44, 50, 4, 40, 49, 1, 48] и други.

Резултатите од следните две теореми се резултати од трудот:

Marija Miteva, Biljana Jolevska-Tuneska and Tatjana Atanasova Pacemska. *On Products of Distributions in Colombeau Algebra.* Mathematical Problems in Engineering. Vol. 2014, Article ID 910510.
doi:10.1155/2014/910510 (IF (2013) = 1.383)

Со овие резултати е направено обопштување на резултатот (3.7) на Дамјанов објавен во [9], најпрво за еднодимензионален, а потоа и за m-димензионален случај.

Теорема 3.2.2. За производот на обопштените функции $\widetilde{x_+^{-k}}$ и $\widetilde{\delta^{(p)}(x)}$ кога $k = 1, 2, \ldots$ и $p = 0, 1, 2, \ldots$, во Коломбоовата алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$\widetilde{x_+^{-k}} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(x)} \approx \frac{(-1)^k k \cdot p!}{(p+k+1)!} \delta^{(k+p)}(x) \tag{3.23}$$

Доказ. За произволно $\varphi \in A_0(\mathbf{R})$ без губење на општоста може да земеме дека $\mathrm{supp}\varphi(x) \subseteq [-l, l]$. Првата дистрибуција во разгледуваниот производ е дефинирана на следниот начин:

$$x_+^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} (\ln x) \tag{3.24}$$

Применувајќи го правилото за вградување на дистрибуциите во Коломбоова алгебра и воведувајќи ја смената $t = (y - x)/\varepsilon$ ги добиваме претставниците на дистрибуцијата x_+^{-k} во Коломбоовата алгебра:

$$\begin{aligned} \widetilde{x_+^{-k}}(\varphi_\varepsilon, x) &= \frac{(-1)^{2k-1}}{(k-1)!\varepsilon^{k+1}} \int_x^{x+\varepsilon l} \ln y \varphi^{(k)} \left(\frac{y-x}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \frac{(-1)^{2k-1}}{(k-1)!\varepsilon^{k}} \int_0^{l} \ln(x+\varepsilon t) \varphi^{(k)}(t) dt \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Диференцирајќи во $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, на исти начин како во претходната теорема, ги добиваме претставниците на дистрибуцијата $\widetilde{\delta^{(p)}(x)}$:

$$\widetilde{\delta^{(p)}(\varphi_\varepsilon, x)} = \frac{(-1)^p}{\varepsilon^{p+1}} \varphi^{(p)} \left(-\frac{x}{\varepsilon} \right) \tag{3.26}$$

За да го пресметаме производот на овие две Коломбоови обопштени функции ќе земеме произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{x_+^{-k}(\varphi_\varepsilon, x)} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(\varphi_\varepsilon, x)}, \psi(x) \rangle \quad &= \quad \int_0^\infty \widetilde{x^{-k}(\varphi_\varepsilon, x)} \widetilde{\delta^{(p)}(\varphi_\varepsilon, x)} \psi(x) dx \\
= \frac{(-1)^{2k+p-1}}{(k-1)! \varepsilon^{p+k+1}} & \int_0^{l\varepsilon} \left(\int_0^l \ln(x + \varepsilon t) \varphi^{(k)}(t) dt \right) \varphi^{(p)}(-x/\varepsilon) \psi(x) dx \\
= \frac{(-1)^p}{(k-1)! \varepsilon^{p+k}} & \int_0^l \varphi^{(p)}(u) \psi(-\varepsilon u) \int_0^l \ln |\varepsilon t - \varepsilon u| \varphi^{(k)}(t) dt du \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

при што ја користевме смената $u = -x/\varepsilon$.

Функцијата ψ ќе ја развиеме во Тајлоров ред:

$$\psi(-\varepsilon u) = \sum_{i=0}^{p+k} \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!} (-\varepsilon u)^i + \frac{\psi^{(p+k+1)}(\eta u)}{(p+k+1)!} (-\varepsilon \eta)^{p+k+1} \tag{3.28}$$

каде $\eta \in (0, 1)$.

Заменувајќи ја релацијата (3.28) во (3.27), со промена на редоследот на променливите при интегрирањето добиваме:

$$\langle \widetilde{x_+^{-k}(\varphi_\varepsilon, x)} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(\varphi_\varepsilon, x)}, \psi(x) \rangle = \sum_{i=0}^{p+k} \frac{(-1)^{p+i} \psi^{(i)}(0)}{i!(k-1)! \varepsilon^{p+k-i}} J_i + O(\varepsilon) \cdot \ln(\varepsilon) \tag{3.29}$$

при што означивме:

$$J_i = \int_0^l \varphi^{(k)}(t) dt \int_0^l \ln |\varepsilon t - \varepsilon u| u^i \varphi^{(p)}(u) du \tag{3.30}$$

за $i = 0, 1, \ldots, p+k$.

Решавајќи го со парцијална интеграција последниот интеграл добиваме:

$$\begin{aligned}
J_i &= \int_0^l \varphi^{(k)}(t)dt \int_0^l \ln|\varepsilon t - \varepsilon u| u^i \varphi^{(p)}(u)du \\
&= \frac{1}{i+1}\int_0^l \varphi^{(k)}(t)dt \int_0^l \ln|\varepsilon t - \varepsilon u| \varphi^{(p)}(u) d\left(u^{i+1} - t^{i+1}\right) \\
&= -\frac{1}{i+1}\int_0^l \varphi^{(k)}(t)dt \int_0^l \left(u^{i+1} - t^{i+1}\right) \ln|\varepsilon t - \varepsilon u| \varphi^{(p+1)}(u)du \\
&\quad + \frac{1}{i+1}\int_0^l \varphi^{(k)}(t)dt \int_0^l \frac{u^{i+1} - t^{i+1}}{u-t} \varphi^{(p)}(u)du\,. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Првиот собирок во последниот израз е нула, па според тоа добиваме:

$$\begin{aligned}
(i+1)J_i &= \sum_{s=0}^{i} \int_0^l t^s \varphi^{(k)}(t)dt \int_0^l u^{i-s} \varphi^{(p)}(u)du \\
&= \sum_{s=0}^{i} J_{s,k} \cdot J_{i-s,p} \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

каде $J_{a,b} = \displaystyle\int_0^l v^a \varphi^{(b)}(v)dv$. Интегралот $J_{a,b}$ е различен од нула само во случај кога $a = b$, и неговата вредност во тој случај е $J_{a,a} = (-1)^a a!$. Според ова, единствениот израз во горната сума кој е различен од нула се добива за $i = k + p$ и во тој случај добиваме:

$$J_{k+p} = \frac{J_{k,k} \cdot J_{p,p}}{p+k+1} = \frac{(-1)^{p+k} p! k!}{p+k+1}\,. \qquad (3.33)$$

Ако (3.33) го замениме во (3.29) ќе добиеме:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{x_+^{-k}(\varphi_\varepsilon, x)} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(\varphi_\varepsilon, x)}, \psi(x)\rangle &= \frac{(-1)^p k \cdot p!}{(p+k+1)!}\psi^{(k+p)}(0) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{(-1)^k k \cdot p!}{(p+k+1)!}\langle \delta^{(k+p)}(x), \psi(x)\rangle + O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{3.34}$$

Пуштајќи $\varepsilon \to 0$, ја добиваме релацијата (3.23), со што теоремата е покажана. $\square$

Производите од облик $x^{-k}\delta^{(p)}(x)$ се особено значајни во теоријата на квантната физика.

За да го прошириме резултатот од претходната теорема во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^m)$, ќе ја искористиме следната Лема, која е покажана во [8].

Лема 3.2.1. Нека u и v се дистрибуции во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ така што $u(x) = \prod_{i=1}^m u^i(x_i)$ и $v(x) = \prod_{i=1}^m v^i(x_i)$ при што секое u^i и v^i е дистрибуција во $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ и уште вградувањето на секоја од овие дистрибуции во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ ја задоволува релацијата: $\widetilde{u^i} \cdot \widetilde{v^i} \approx \omega^i$, каде $i = 1, 2, \dots, m$. Тогаш важи: $\widetilde{u} \cdot \widetilde{v} \approx \omega$, каде $\omega(x) = \prod_{i=1}^m \omega^i(x_i)$ е дистрибуција во $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$.

Теорема 3.2.3. За производот на обопштените функции $\widetilde{x_+^{-k}}$ и $\widetilde{\delta^{(p)}(x)}$, за $k = 1, 2, \dots$ и $p = 0, 1, 2, \dots$, во $\mathcal{G}(\mathbf{R}^m)$, постои асоцирана дистрибуција и притоа важи следната релација:

$$\widetilde{x_+^{-k}} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(x)} \approx \frac{(-1)^k k \cdot p!}{(p+k+1)!}\delta^{(k+p)}(x) \tag{3.35}$$

Доказ. Во овој случај, како резултат на структурата на тензорски производ на дистрибуциите кои ги разгледуваме, можеме да ја примениме претходната лема, според која:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_+^{-k}} \cdot \widetilde{\delta^{(p)}(x)} &= \prod_{i=1}^{m} \widetilde{x_{i+}^{-k_i}} \cdot \widetilde{\delta^{(p_i)}(x_i)} \approx \prod_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{k_i} k_i \cdot p_i!}{(p_i+k_i+1)!} \delta^{(k_i+p_i)}(x_i) \\
&= \frac{(-1)^k k \cdot p!}{(p+k+1)!} \delta^{(k+p)}(x) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

со што е покажана и оваа теорема.□

Следните три теореми се резултати кои се објавени во трудот:

Marija Miteva, Biljana Jolevska-Tuneska, Tatjana Atanasova-Pacemska. *Colombeau products of distributions.* SpringerPlus. Vol.2016 (5) 2042. (2016) DOI 10.1186/s40064-016-3742-8 (IF(2015)=0.982)

Теорема 3.2.4. За производот на обопштените функции $(\cos \widetilde{x - \sin} x)$ и $\widetilde{\delta^{(r)}(x)}$ за $r = 0, 1, 2, \ldots$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$(\cos \widetilde{x - \sin} x) \cdot \widetilde{\delta^{(r)}(x)} \approx \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{b_i} \delta^{(r-i)}(x) \qquad (3.37)$$

каде $b_i = 1 + \left[\frac{i}{2}\right]$, а со $[x]$ е означена функцијата цел дел.

Доказ. Го користиме Тајлоровиот развој за функциите $\sin x$ и $\cos x$ при што добиваме:

$$\cos x - \sin x = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{a_i} \cdot \frac{x^i}{i!} + R_r(x) \qquad (3.38)$$

каде со a_i е означено $a_i = \left[\frac{i+1}{2}\right]$. $R_r(x)$ е остатокот во Тајлоровиот развој:

$$R_r(x) = (-1)^{a_{r+1}} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} \left[\cos^{(r+1)}(\eta x) - \sin^{(r+1)}(\eta x)\right] \qquad (3.39)$$

за $0 < \eta < 1$.

Функцијата $(\cos x - \sin x)$ ја вградуваме во Коломбоова алгебра: за произволно $\varphi \in A_0(\mathbf{R})$ имаме:

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\cos x - \sin x}\right)(\varphi_\varepsilon, x) &= \left[(\cos x - \sin x) * \overset{\vee}{\varphi}_\varepsilon\right](x) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\cos y - \sin y)\,\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^{a_i}}{i!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^i\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_r(y)\,\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Без губење на општоста ќе претпоставиме дека $\mathrm{supp}\varphi(x) \subseteq [-l, l]$. Со воведување на смената $\frac{y-x}{\varepsilon} = t$ добиваме:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\cos x - \sin x})(\varphi_\varepsilon, x) &= \sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^{a_i}}{i!}\int\limits_{-l}^{l}(\varepsilon t + x)^i\varphi(t)\,dt \\
&+ \int\limits_{-l}^{l} R_r(\varepsilon t + x)\,\varphi(t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{r}\frac{(-1)^{a_i}}{i!}\int\limits_{-l}^{l}(\varepsilon t + x)^i\varphi(t)\,dt + O(\varepsilon) \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Остатокот ќе биде ограничена величина, т.е $O(\varepsilon)$ заради својствата на функцијата φ.

Користејќи го правилото за вградување, на сличен начин ја вградуваме и дистрибуцијата $\delta^{(r)}(x)$ во алгебрата на Коломбо:

$$\widetilde{\delta^{(r)}}(\varphi_\varepsilon, x) = \frac{(-1)^r}{\varepsilon^{r+1}} \varphi^{(r)}\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3.42}$$

Понатаму, за произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ќе имаме:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\widetilde{\cos x - \sin x}\right)(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{\delta^{(r)}}(\varphi_\varepsilon, x), \psi(x) \right\rangle = \\
&= \frac{(-1)^r}{\varepsilon^{r+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{a_i}}{i!} \left(\int_{-l}^{l} (\varepsilon t + x)^i \varphi(t)\, dt \right) \varphi^{(r)}\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(x)\, dx + O(\varepsilon) \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{\varepsilon^{r}} \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{a_i}}{i!} \int_{-l}^{l} \varphi^{(r)}(u)\, \psi(-\varepsilon u) \int_{-l}^{l} (\varepsilon t - \varepsilon u)^i \varphi(t)\, dt du + O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

при што во горните пресметки ја користевме смената $u = -\frac{x}{\varepsilon}$.

Функцијата ψ ќе ја развиеме во Тајлоров ред:

$$\psi(-\varepsilon u) = \sum_{j=0}^{r} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} (-\varepsilon u)^j + \frac{\psi^{(r+1)}(-\varepsilon \eta u)}{(r+1)!} (-\varepsilon u)^{r+1} \tag{3.44}$$

каде $0 < \eta < 1$. Редот од (3.44) го заменуваме во (3.43), а потоа го менуваме редоследот на интегрирање во последниот интеграл:

$$\left\langle (\cos \widetilde{x - \sin x)\,(\varphi_\varepsilon, x)} \cdot \delta^{(r)} \widetilde{(\varphi_\varepsilon, x)}, \psi\,(x) \right\rangle =$$
$$= \frac{(-1)^{r+1}}{\varepsilon^r} \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{a_i}}{i!} \int_{-l}^{l} \varphi^{(r)}\,(u) \sum_{j=0}^{r} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} (-\varepsilon u)^j \int_{-l}^{l} (\varepsilon t - \varepsilon u)^i \varphi\,(t)\,dtdu + O\,(\varepsilon) =$$
$$= \frac{(-1)^{r+1}}{\varepsilon^r} \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^{a_i}}{i!} \sum_{j=0}^{r} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!} (-\varepsilon)^j \int_{-l}^{l} u^j \varphi^{(r)}\,(u) \int_{-l}^{l} (\varepsilon t - \varepsilon u)^i \varphi\,(t)\,dtdu + O\,(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{i,j=0}^{r} \frac{(-1)^{r+1+a_i+j} \psi^{(j)}(0)}{i!j!\varepsilon^{r-j}} \int_{-l}^{l} u^j \varphi^{(r)}\,(u) \int_{-l}^{l} (\varepsilon t - \varepsilon u)^i \varphi\,(t)\,dtdu + O\,(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{i,j=0}^{r} \frac{(-1)^{r+1+a_i+j} \psi^{(j)}(0)}{i!j!\varepsilon^{r-j}} J_{i,\,j} + O\,(\varepsilon) \tag{3.45}$$

каде

$$J_{i,\,j} = \int_{-l}^{l} \varphi\,(t)\,dt \int_{-l}^{l} (\varepsilon t - \varepsilon u)^i u^j \varphi^{(r)}\,(u)\,du \tag{3.46}$$

за $i,\, j = 0, 1, 2, ...r$.

Во интегралот $J_{i,\,j}$ биномот го запишуваме во развиен облик, со што добиваме:

$$J_{i,\,j} = \int_{-l}^{l} \varphi\,(t)\,dt \int_{-l}^{l} \left[\sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} (\varepsilon t)^k (-\varepsilon u)^{i-k} \right] u^j \varphi^{(r)}\,(u)\,du =$$
$$= \int_{-l}^{l} \varphi\,(t)\,dt \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} (-1)^{i-k} \varepsilon^i \int_{-l}^{l} t^k u^{i-k+j} \varphi^{(r)}\,(u)\,du = \tag{3.47}$$
$$= \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} (-1)^{i-k} \varepsilon^i \int_{-l}^{l} t^k \varphi\,(t)\,dt \int_{-l}^{l} u^{i-k+j} \varphi^{(r)}\,(u)\,du$$

Интегралот $J_{a,b} = \int\limits_{-l}^{l} v^a \varphi^{(b)}\,(v)\,dv$ ќе биде различен од нула само за $a = b$ и неговата вредност во тој случај е: $J_{a,a} =$

$(-1)^a a!$. Според ова, единствениот ненулти собирок во последната сума ќе се добие во случај кога $k = 0$ и $i + j = r$, а вредноста $J_{i,j}$ во тој случај ќе биде:

$$J_{i,\,j} = (-1)^i \varepsilon^i \cdot (-1)^r r! = (-1)^{r+i} \varepsilon^i r! \tag{3.48}$$

Земајќи во предвид дека $j = r - i$ и заменувајќи (3.91) во (3.45) ќе добиеме:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\widetilde{\cos x - \sin x}\right)(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{\delta^{(r)}}(\varphi_\varepsilon, x), \psi(x) \right\rangle = \\
&= \sum_{i,j=0}^{r} \frac{(-1)^{r+1+a_i+j} \psi^{(j)}(0)}{i! j! \varepsilon^{r-j}} \cdot (-1)^{r+i} \varepsilon^i r! + O(\varepsilon) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} (-1)^{1+r+a_i} \psi^{(r-i)}(0) + O(\varepsilon) = \\
&= \sum_{i=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} (-1)^{1+i+a_i} \left\langle \delta^{(r-i)}(x), \psi(x) \right\rangle + O(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ќе означиме $b_i = 1 + i + a_i = 1 + i + \left[\frac{i+1}{2}\right]$, при што лесно се пресметува дека $(-1)^{1+i+\left[\frac{i+1}{2}\right]} = (-1)^{1+\left[\frac{i}{2}\right]}$. Сега ако земеме $\varepsilon \to 0$, ја добиваме релацијата (3.37), со што Теоремата 3.2.4 е докажана.□

Теорема 3.2.5. За производот на обопштените функции $(\widetilde{\sin x + \cos x})$ и $\widetilde{\delta^{(r)}}(x)$ за $r = 0, 1, 2, \ldots$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$(\widetilde{\sin x + \cos x}) \cdot \widetilde{\delta^{(r)}(x)} \approx \sum_{i=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} (-1)^{b_i} \delta^{(r-i)}(x) \tag{3.50}$$

каде $b_i = 1 + \left[\frac{i+1}{2}\right]$.

Доказ. Ако ги развиеме функциите $\sin x$ и $\cos x$ во Тајлоров ред, за нивниот збир ќе добиеме:

$$\sin x + \cos x = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{a_i} \cdot \frac{x^i}{i!} + R_r(x) \tag{3.51}$$

каде $a_i = \left[\frac{i}{2}\right]$.

Понатаму, повторувајќи ги истите чекори како во претходната теорема ќе го добиеме резултатот (3.50).□

Теорема 3.2.6. За производот на обопштените функции $\widetilde{e^x}$ и $\widetilde{\delta^{(r)}(x)}$ кога $r = 0, 1, 2, \ldots$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и при тоа важи:

$$\widetilde{e^x} \cdot \widetilde{\delta^{(r)}(x)} \approx \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{1+i} \delta^{(r-i)}(x) \tag{3.52}$$

Доказ. Функцијата e^x ја развиваме во Тајлоров ред:

$$e^x = \sum_{i=0}^{r} \frac{x^i}{i!} + R_r(x) \tag{3.53}$$

Ако земеме $a_i = 0$ за $i = 0, 1, 2...$ во доказот на Теорема 3.2.4 ќе ја добиеме релацијата (3.52).□

Следните две теореми се дел од трудот со наслов Results on Colombeau Products of Distribution $x_+^{-r-1/2}$ with Distributions $x_-^{-k-1/2}$ and $x_-^{k-1/2}$ кој е прифатен за публикување во списанието Functional Analysis and its Application (IF(2016)=0.450).

Резултатот од Теорема 3.2.7 која следува во продолжение е обопштување на равенството (3.8) кое е покажано во [30]. Резултатот од Теорема 3.2.8 е обопштување на равенството

(3.5) кое е покажано во [8].

За да ги покажеме двете теореми кои следуваат, ќе го користиме равенството:

$$\int_{t}^{d} s^{r}\varphi^{(r)}\left(s\right)ds=\sum_{m=0}^{r}\left(-1\right)^{m}\frac{r!}{(r-m)!}t^{r-m}\varphi^{(r-m-1)}\left(t\right) \tag{3.54}$$

каде $\varphi^{(-1)}\left(t\right)=\int_{t}^{d}\varphi\left(s\right)ds$, кое едноставно се докажува со индукција.

Теорема 3.2.7. За производот на обопштените функции $\widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}$ и $\widetilde{x_{-}^{-k-1/2}}$, кога $r=0,1,2,\ldots$ и $k=0,1,2,\ldots$ постои асоцирана дистрибуција во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ и притоа важи:

$$\widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}\cdot\widetilde{x_{-}^{-k-1/2}}\approx\frac{\pi}{2\left(r+k\right)!}\delta^{(r+k)}\left(x\right) \tag{3.55}$$

Доказ. Согласно дефиницијата на разгледуваните дистрибуции:

$$x_{+}^{-r-1/2}=\frac{\left(-1\right)^{r}2^{r}}{(2r-1)!!}\cdot\frac{\partial^{r}}{\partial x}x_{+}^{-1/2} \tag{3.56}$$

$$x_{-}^{-k-1/2}=\frac{\left(-1\right)^{k}2^{k}}{(2k-1)!!}\cdot\frac{\partial^{k}}{\partial x}\left(-x\right)_{+}^{-1/2} \tag{3.57}$$

За произволно $\varphi\in A_{0}(\mathbf{R})$ без губење на општоста може да земеме дека $\mathrm{supp}\varphi(x)\subseteq[c,d]$. Користејќи го правилото за вградување во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ и смената $t=(y-x)/\varepsilon$ ги добиваме претставниците на дистрибуцијата $\widetilde{x_+^{-r-1/2}}$ во Коломбоовата алгебра:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) &= (-1)^r \cdot \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^r}{\partial x} \int\limits_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= (-1)^{2r} \cdot \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{r+1}} \cdot \int\limits_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(r)}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^r} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{d} (x+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(r)}(t)\, dt \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Овде треба да забележиме дека разгледуваната обопштена функција е нула за $y < 0$, што значи нејзините претставници ќе бидат еднакви на нула за $d < -\frac{x}{\varepsilon}$.

Аналогно се добиваат и претставниците на обопштената функција $\widetilde{x_-^{-k-1/2}}$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) &= (-1)^k \cdot \frac{2^k}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^k}{\partial x} \int\limits_{-\infty}^0 (-y)^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= (-1)^{2k} \cdot \frac{2^k}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \cdot \int\limits_{-\infty}^0 (-y)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(k)}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \frac{2^k}{(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \int\limits_{c}^{-\frac{x}{\varepsilon}} (-x-\varepsilon s)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(k)}(s)\, ds \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Во последните пресметки ја користевме смената $s = (y-x)/\varepsilon$. Претставниците на оваа обопштена функција ќе имаат вредност нула за $c > -\frac{x}{\varepsilon}$.

Ќе го пресметаме производот на разгледуваните две обопштени функции во Коломбоова алгебра. Земаме произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$:

$$\left\langle \widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x), \psi(x) \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{r+k}} \int_{-d\varepsilon}^{c\varepsilon} \psi(x) \int_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{d} \varphi^{(r)}(t) \times$$

$$\times \int_{c}^{-\frac{x}{\varepsilon}} (x+\varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} (-x-\varepsilon s)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(k)}(s)\, ds dt dx \tag{3.60}$$

Во последното равенство ја воведуваме смената $w = -\frac{x}{\varepsilon}$ при што добиваме:

$$\left\langle \widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) \cdot \widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x), \psi(x) \right\rangle =$$

$$= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!} \cdot \frac{(-1)}{\varepsilon^{r+k}} \int_{-c}^{d} \psi(-\varepsilon w) \int_{w}^{d} \varphi^{(r)}(t) \times$$

$$\times \int_{c}^{w} (t-w)^{-\frac{1}{2}} (w-s)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(k)}(s)\, ds dt dw \tag{3.61}$$

Функцијата ψ ќе ја развиеме во Тајлоров ред:

$$\psi(-\varepsilon w) = \sum_{i=0}^{r+k} \frac{\psi^{(i)}(0)}{i!} (-\varepsilon w)^i + \frac{\psi^{(r+k+1)}(\eta w)}{(r+k+1)!} (-\varepsilon \eta)^{r+k+1} \tag{3.62}$$

каде $0<\eta<1$.

Заменуваме (3.62) во (3.61) со што добиваме:

$$\left\langle \widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon,x)\cdot \widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon,x),\psi(x)\right\rangle \;=$$

$$= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!}\cdot\frac{(-1)}{\varepsilon^{r+k}}\sum_{i=0}^{r+k}\frac{(-1)^i\varepsilon^i\psi^{(i)}(0)}{i!}\times \tag{3.63}$$

$$\times\int\limits_{-c}^{d} w^i\int\limits_{w}^{d}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{w}(t-w)^{-\frac{1}{2}}(w-s)^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(k)}(s)\,dsdtdw+O(\varepsilon)$$

Следно, ќе направиме промена на редоследот на интегрирање во последниот интеграл:

$$\left\langle \widetilde{x_+^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon,x)\cdot \widetilde{x_-^{-k-1/2}}(\varphi_\varepsilon,x),\psi(x)\right\rangle \;=$$

$$= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!}\cdot\frac{(-1)}{\varepsilon^{r+k}}\sum_{i=0}^{r+k}\frac{(-1)^i\varepsilon^i\psi^{(i)}(0)}{i!}\times$$

$$\times\int\limits_{-c}^{d}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{t}\varphi^{(k)}(s)\int\limits_{s}^{t}(t-w)^{-\frac{1}{2}}(w-s)^{-\frac{1}{2}}w^i dwdsdt+O(\varepsilon)$$

$$= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!}\cdot\frac{(-1)}{\varepsilon^{r+k}}\sum_{i=0}^{r+k}\frac{(-1)^i\varepsilon^i\psi^{(i)}(0)}{i!}\cdot I_i+O(\varepsilon) \tag{3.64}$$

каде означивме

$$I_i=\int\limits_{-c}^{d}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{t}\varphi^{(k)}(s)\int\limits_{s}^{t}(t-w)^{-\frac{1}{2}}(w-s)^{-\frac{1}{2}}w^i dwdsdt \tag{3.65}$$

Да го пресметаме интегралот $\int\limits_{s}^{t}(t-w)^{-\frac{1}{2}}(w-s)^{-\frac{1}{2}}w^i dw$.

Со смената $w - s = (t - s)\, v$ и со примена на биномната формула добиваме:

$$\begin{aligned}
\int\limits_s^t (t-w)^{-\frac{1}{2}}(w-s)^{-\frac{1}{2}} w^i dw \;\; &= \\
&= \int\limits_0^1 (1-v)^{-\frac{1}{2}}\, v^{-\frac{1}{2}} [tv + s\,(1-v)]^i dv \\
&= \sum_{p=0}^{i} \frac{i!}{p!\,(i-p)!} t^p s^{i-p} \int\limits_0^1 (1-v)^{i-p-\frac{1}{2}}\, v^{p-\frac{1}{2}}\, dv \\
&= \sum_{p=0}^{i} \frac{i!}{p!\,(i-p)!} t^p s^{i-p}\, B\left(p+\frac{1}{2},\, i-p+\frac{1}{2}\right) \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Одовде, за интегралот I_i ќе имаме:

$$\begin{aligned}
I_i \;\; &= \;\; \int\limits_{-c}^{d} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_{c}^{t} \varphi^{(k)}(s) \sum_{p=0}^{i} \frac{i!}{p!\,(i-p)!} t^p s^{i-p}\, B\left(p+\frac{1}{2},\, i-p+\frac{1}{2}\right) dsdt \\
&= \;\; \sum_{p=0}^{i} \frac{i!}{p!\,(i-p)!}\, B\left(p+\frac{1}{2},\, i-p+\frac{1}{2}\right) \int\limits_{-c}^{d} t^p \varphi^{(r)}(t) \int\limits_{c}^{t} s^{i-p} \varphi^{(k)}(s) dsdt
\end{aligned}$$
$$(3.67)$$

Да означиме

$$J_{i,p} = \int\limits_{-c}^{d} t^p \varphi^{(r)}(t) \int\limits_{c}^{t} s^{i-p} \varphi^{(k)}(s) dsdt \qquad (3.68)$$

кој интерграл има ненулти вредности само во случај кога $p =$

r и $i-p=k$, т.е. $i=r+k$, односно ненулти е само интегралот

$$J_{r+k,r}=\int\limits_{-c}^{d}t^{r}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{t}s^{k}\varphi^{(k)}(s)dsdt \tag{3.69}$$

Сега ќе го примениме равенството (3.54) во (3.69) со што добиваме

$$J_{r+k,r}=\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{m}k!}{(k-m)!}\int\limits_{-c}^{d}t^{r+k-m}\varphi^{(r)}(t)\,\varphi^{(k-m-1)}(t)\,dt \tag{3.70}$$

Последниот интеграл е различен од нула за $r+k-m=r$, т.е. $m=k$:

$$\begin{aligned}J_{r+k,r} &= (-1)^{k}k!\int\limits_{-c}^{d}t^{r}\varphi^{(r)}(t)\,\varphi^{(-1)}(t)dt\\ &= (-1)^{k}k!\int\limits_{-c}^{d}t^{r}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{t}\varphi(s)\,dsdt\end{aligned} \tag{3.71}$$

Го менуваме редоследот на интегрирање и уште еднаш го применуваме равенството (3.54) со што добиваме:

$$\begin{aligned}J_{r+k,r} &= (-1)^{k+1}k!\int\limits_{-c}^{d}\varphi(s)\int\limits_{d}^{s}t^{r}\varphi^{(r)}(t)\,dtds\\ &= (-1)^{k+1}k!\sum_{m=0}^{r}\frac{(-1)^{m}r!}{(r-m)!}\int\limits_{-c}^{d}s^{r-m}\varphi(s)\,\varphi^{(r-m-1)}(s)\,ds\end{aligned} \tag{3.72}$$

Последниот интеграл има вредност различна од нула само за $m=r$, па според тоа:

$$\begin{aligned}
J_{r+k,r} &= (-1)^{r+k+1} r!k! \int\limits_{-c}^{d} \varphi\left(s\right)\varphi^{(-1)}\left(s\right)ds \\
&= (-1)^{r+k+1} r!k! \int\limits_{-c}^{d} \varphi\left(s\right)\left(\int\limits_{c}^{s} \varphi\left(t\right)dt\right)ds \\
&= (-1)^{r+k+1} r!k! \int\limits_{-c}^{d} \left(\int\limits_{c}^{s} \varphi\left(t\right)dt\right)d\left(\int\limits_{c}^{s} \varphi\left(t\right)dt\right) \\
&= (-1)^{r+k+1} r!k! \frac{1}{2}\left(\int\limits_{c}^{s} \varphi\left(t\right)dt\right)^{2}\Bigg|_{-c}^{d} \\
&= \frac{(-1)^{r+k+1}}{2} r!k! \qquad (3.73)
\end{aligned}$$

Одовде,

$$\begin{aligned}
I_{r+k} &= \frac{(r+k)!}{r!k!}\cdot\frac{(-1)^{r+k+1}}{2} r!k! B\left(p+\frac{1}{2}, i-p+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(-1)^{r+k+1}}{2}\left(r+k\right)! B\left(r+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

Вредноста на бета функцијата е:

$$B\left(r+\frac{1}{2},\, k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r-1)!!\,(2k-1)!!\,\pi}{2^{r+k}}\cdot\frac{1}{(r+k)!} \qquad (3.75)$$

па заменувајќи (3.75) во (3.74) се добива:

$$I_{r+k} = \frac{(-1)^{r+k+1}}{2^{r+k+1}}\left(2r-1\right)!!\,(2k-1)!!\,\pi \qquad (3.76)$$

Конечно, за производот на обопштените функции разгледани во теоремата добиваме:

$$\left\langle \widetilde{x_+^{-r-1/2}}\left(\varphi_\varepsilon, x\right) \cdot x_-^{-k-1/2}\left(\varphi_\varepsilon, x\right), \psi\left(x\right)\right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{r+k}}{(2r-1)!!\,(2k-1)!!} \cdot \frac{(-1)}{\varepsilon^{r+k}} \cdot \frac{(-1)^{r+k}\psi^{(r+k)}(0)}{(r+k)!} \times \\
&\times \frac{(-1)^{r+k+1}}{2^{r+k+1}}\,(2r-1)!!\,(2k-1)!!\pi + O(\varepsilon) \\
&= \frac{\pi}{2\,(r+k)!}\psi^{(r+k)}(0) + O(\varepsilon) \\
&= \frac{\pi}{2\,(r+k)!}\left\langle \delta^{(r+k)}(x), \psi(x)\right\rangle + O(\varepsilon) \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

Ако пуштиме $\varepsilon \to 0$ ќе го добиеме равенството (3.55) во Теоремата 3.2.7, со што оваа теорема е докажана.□

Теорема 3.2.8. За производот на обопштените функции $\widetilde{x_+^{-r-1/2}}$ и $\widetilde{x_-^{k-1/2}}$ кога $r = 0, 1, 2, \ldots,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ и $r \geq k$ во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ постои асоцирана дистрибуција и притоа важи:

$$\widetilde{x_+^{-r-1/2}} \cdot \widetilde{x_-^{k-1/2}} \approx C_{r,k}\delta^{(r-k)}(x) \qquad (3.78)$$

каде

$$\begin{aligned}
C_{r,k} &= \frac{(-1)^r\,(2k-1)!!k!r!\pi}{2(4k-1)!!\,(2r-1)!!\,(r-k)!\,(r+k)!} \times \qquad (3.79) \\
&\times \sum_{q=0}^{2k}(-1)^q \binom{2k}{q}\binom{r-k}{k-q}(2\,(r+q)-1)!!\,(2\,(k-q)-1)!!
\end{aligned}$$

Доказ. Првата обопштена функција во $\mathcal{D}'$ е дефинирана со (3.56) во претходната теорема, додека втората обопштена функција во $\mathcal{D}'$ е дефинирана со:

$$x_{-}^{k-1/2} = \frac{(2k-1)!!2^k}{(4k-1)!!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial x}(-x)^{2k-1/2} \tag{3.80}$$

Да ги вградиме овие две обопштени функции во $\mathcal{G}(\mathbf{R})$.

За произволно $\varphi \in A_0(\mathbf{R})$ може да претпоставиме дека $\operatorname{supp}\varphi(x) \subseteq [c, d]$, без губење на општоста. Применувајќи го правилото за вградување во Коломбоова алгебра, како и смената $t = (y - x)/\varepsilon$ ги добиваме претставниците на обопштената функција $\widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}$ во Коломбоовата алгебра:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) &= (-1)^r \cdot \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^r}{\partial x} \int\limits_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= (-1)^{2r} \cdot \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{r+1}} \cdot \int\limits_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(r)}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) dy \\
&= \frac{2^r}{(2r-1)!!} \cdot \frac{1}{\varepsilon^r} \cdot \int\limits_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{d} (x + \varepsilon t)^{-\frac{1}{2}} \varphi^{(r)}(t)\, dt \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

кои имаат вредност нула за $d < -\frac{x}{\varepsilon}$.

Аналогно, користејќи ја смената $s = \frac{y-x}{\varepsilon}$ ги добиваме претставниците и на другата обопштена функција од теоремата:

$$\begin{aligned}
\widetilde{x_{-}^{k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x) &= \frac{(2k-1)!!}{(4k-1)!!}\cdot 2^k \cdot \frac{1}{\varepsilon}\cdot \frac{\partial^k}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{0}(-y)^{2k-1/2}\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy \\
&= \frac{(2k-1)!!}{(4k-1)!!}\cdot 2^k \cdot \frac{(-1)^k}{\varepsilon^{k+1}}\int\limits_{-\infty}^{0}(-y)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy \\
&= \frac{(-1)^k 2^k (2k-1)!!}{(4k-1)!!}\cdot \frac{1}{\varepsilon^k}\int\limits_{c}^{-x/\varepsilon}(-x-\varepsilon s)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}(s)\,ds
\end{aligned}$$

кои имаат вредност нула за $c > -\frac{x}{\varepsilon}$.

Да го пресметаме производот на овие две обопштени функции во Коломбоовата алгебра. За произволно $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ќе имаме:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x)\cdot \widetilde{x_{-}^{k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x), \psi(x)\right\rangle = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x)\cdot \widetilde{x_{-}^{k-1/2}}(\varphi_\varepsilon, x)\,\psi(x)\,dx \\
&= \frac{(-1)^k 2^{r+k}(2k-1)!!}{(4k-1)!!\,(2r-1)!!}\cdot \frac{1}{\varepsilon^{r+k}}\int\limits_{-d\varepsilon}^{c\varepsilon}\psi(x)\times \\
&= \times \int\limits_{-x/\varepsilon}^{d}(x+t\varepsilon)^{-1/2}\varphi^{(r)}(t)\int\limits_{c}^{-x/\varepsilon}(-x-\varepsilon s)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}(s)\,dsdtdx
\end{aligned}$$

Во последниот интеграл ќе ја воведеме смената $w = -x/\varepsilon$ со што добиваме:

$$\left\langle \widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right)\cdot\widetilde{x_{-}^{k-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right),\psi\left(x\right)\right\rangle \;=$$

$$=\frac{(-1)^{k}2^{r+k}\left(2k-1\right)!!}{(4k-1)!!\left(2r-1\right)!!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{r+k}}\int\limits_{d}^{-c}\psi\left(-\varepsilon w\right)\int\limits_{w}^{d}\left(-\varepsilon w+t\varepsilon\right)^{-1/2}\varphi^{(r)}\left(t\right)\times$$

$$\times\int\limits_{c}^{w}\left(\varepsilon w-\varepsilon s\right)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}\left(s\right)\left(-\varepsilon\right)dsdtdw$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}2^{r+k}\left(2k-1\right)!!}{(4k-1)!!\left(2r-1\right)!!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}\int\limits_{d}^{-c}\psi\left(-\varepsilon w\right)\int\limits_{w}^{d}\varphi^{(r)}\left(t\right)\times$$

$$\times\int\limits_{c}^{w}(t-w)^{-1/2}(w-s)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}\left(s\right)dsdtdw \tag{3.82}$$

Користиме Тајлоров развој за функцијата ψ:

$$\psi\left(-\varepsilon w\right)=\sum_{i=0}^{r-k}\frac{\psi^{(i)}\left(0\right)}{i!}(-\varepsilon w)^{i}+\frac{\psi^{(r-k+1)}\left(\eta w\right)}{(r-k+1)!}(-\varepsilon\eta)^{r-k+1} \tag{3.83}$$

за $0<\eta<1$, и со замена во претходното равенство добиваме:

$$\left\langle \widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right)\cdot\widetilde{x_{-}^{k-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right),\psi\left(x\right)\right\rangle \;=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}2^{r+k}\left(2k-1\right)!!}{(4k-1)!!\left(2r-1\right)!!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}\sum_{i=0}^{r-k}\frac{\psi^{(i)}\left(0\right)}{i!}(-1)^{i}\varepsilon^{i}\times$$

$$\times\int\limits_{d}^{-c}w^{i}\int\limits_{w}^{d}\varphi^{(r)}\left(t\right)\int\limits_{c}^{w}(t-w)^{-1/2}(w-s)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}\left(s\right)dsdtdw$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}2^{r+k}\left(2k-1\right)!!}{(4k-1)!!\left(2r-1\right)!!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}\sum_{i=0}^{r-k}\frac{\psi^{(i)}\left(0\right)}{i!}(-1)^{i}\varepsilon^{i}\,I_{i}+O\left(\varepsilon\right)$$

Во интегралот

$$I_i = \int\limits_d^{-c} w^i \int\limits_w^d \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^w (t-w)^{-1/2}(w-s)^{2k-1/2}\varphi^{(k)}(s) ds dt dw \qquad (3.84)$$

го менуваме редоследот на интегрирање и ја користиме смената: $w - s = (t-s)\,v$ со што добиваме:

$$\begin{aligned} I_i &= \int\limits_d^{-c} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^t \varphi^{(k)}(s) \int\limits_s^t (t-w)^{-1/2}(w-s)^{2k-1/2} w^i dw ds dt \\ &= \int\limits_d^{-c} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^t \varphi^{(k)}(s) \int\limits_0^1 [(t-s)(1-v)]^{-1/2}[(t-s)\,v]^{2k-1/2}[(t-s)\,v+s]^i\,(t-s) dv ds dt \\ &= \int\limits_d^{-c} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^t \varphi^{(k)}(s) \int\limits_0^1 (t-s)^{2k} v^{2k-1/2}(1-v)^{-1/2}[tv + s\,(1-v)]^i dv ds dt \end{aligned} \qquad (3.85)$$

Со примена на биномната формула го разложуваме изразот $[tv + s\,(1-v)]^i$ па за последниот интеграл добиваме:

$$\begin{aligned} I_i &= \int\limits_d^{-c} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^t \varphi^{(k)}(s) \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} (t-s)^{2k} t^p s^{i-p} \int\limits_0^1 v^{2k-1/2+p}(1-v)^{i-p-1/2} dv ds dt \\ &= \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} B\left(2k+p+\frac{1}{2}, i-p+\frac{1}{2}\right) \int\limits_d^{-c} \varphi^{(r)}(t) \int\limits_c^t (t-s)^{2k} t^p s^{i-p} \varphi^{(k)}(s) ds dt \\ &= \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} B\left(2k+p+\frac{1}{2}, i-p+\frac{1}{2}\right) \cdot J_{i,p} \end{aligned} \qquad (3.86)$$

каде означивме

$$J_{i,p}=\int\limits_{d}^{-c}\varphi^{(r)}\left(t\right)\int\limits_{c}^{t}\left(t-s\right)^{2k}t^{p}s^{i-p}\varphi^{(k)}\left(s\right)dsdt \tag{3.87}$$

Уште еднаш ја применуваме биномната формула, со што за интегралот $J_{i,p}$ добиваме:

$$J_{i,p}=\sum_{q=0}^{2k}\binom{2k}{q}(-1)^{q}\int\limits_{d}^{-c}t^{2k-q+p}\varphi^{(r)}\left(t\right)\int\limits_{c}^{t}s^{i-p+q}\varphi^{(k)}\left(s\right)dsdt \tag{3.88}$$

Последниот интеграл е различен од нула во случај кога $i-p+q=k$ и $2k-q+p=r$, т.е. за $i=r-k$ и $p=r-2k+q=i+q-k$, а имајќи во предвид дека $p=\overline{0,i}$, добиваме дека неравенството $q-k\leq 0$ треба да е задоволено, од каде $q=\overline{0,k}$, па за интегралот $J_{i,p}$ ќе добиеме:

$$\begin{aligned}
J_{r-k,r-2k+q} &= \sum_{q=0}^{k}\binom{2k}{q}(-1)^{q}\int\limits_{d}^{-c}t^{r}\varphi^{(r)}\left(t\right)\int\limits_{c}^{t}s^{k}\varphi^{(k)}\left(s\right)dsdt \\
&= \sum_{q=0}^{k}\binom{2k}{q}(-1)^{q}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{m}k!}{(k-m)!}\int\limits_{d}^{-c}t^{r+k-m}\varphi^{(r)}\left(t\right)\varphi^{(k-m-1)}\left(t\right)dt
\end{aligned} \tag{3.89}$$

при што во пресметките го применивме равенството (3.54). Последниот интеграл е различен од нула само во случајот $r+k-m=r$, т.е. $m=k$ и тогаш добиваме:

$$\begin{aligned}
J_{r-k,r-2k+q} &= \sum_{q=0}^{k}\binom{2k}{q}(-1)^{q+k}k!\int\limits_{-c}^{d}t^{r}\varphi^{(r)}\left(t\right)\varphi^{(-1)}\left(t\right)dt \\
&= \sum_{q=0}^{k}\binom{2k}{q}(-1)^{q+k}k!\int\limits_{-c}^{d}t^{r}\varphi^{(r)}\left(t\right)\int\limits_{c}^{t}\varphi\left(s\right)dsdt
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Ако го смениме редоследот на интегрирање и го примениме равенстото (3.54) уште еднаш, ќе добиеме:

$$
\begin{aligned}
J_{r-k,r-2k+q} &= \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) (-1)^{q+k} k! \, (-1) \int\limits_{-c}^{d} \varphi\,(s) \int\limits_{d}^{s} t^r \varphi^{(r)}\,(t) dt ds \\
&= \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) (-1)^{q+k+1} k! \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m r!}{(r-m)!} \int\limits_{-c}^{d} s^{r-m} \varphi\,(s)\, \varphi^{(r-m-1)}\,(s)\, ds
\end{aligned}
$$

кој што интеграл е различен од нула само за $m = r$ што значи во втората сума во последниот израз единствениот ненулти собирок го добиваме за $m = r$, па од таму ќе имаме:

$$
\begin{aligned}
J_{r-k,r-2k+q} &= \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) (-1)^{q+k+1} k! (-1)^r r! \int\limits_{-c}^{d} \varphi\,(s) \varphi^{(-1)}\,(s)\, ds \\
&= \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) (-1)^{q+k+r+1} k! r! \int\limits_{-c}^{d} \varphi\,(s) \left(\int\limits_{c}^{s} \varphi\,(t)\, dt \right) ds \\
&= \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) (-1)^{q+k+r+1} k! r! \cdot \frac{1}{2} \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

Погоре добивме дека равенствата $i = r - k$ и $p = r - 2k + q$ треба да бидат задоволени, што значи:

$$
\left(\begin{array}{c} i \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} r-k \\ r-2k+q \end{array} \right) = \frac{(r-k)!}{(r-2k+q)!\,(k-q)!} = \left(\begin{array}{c} r-k \\ k-q \end{array} \right) \qquad (3.92)
$$

па со замена на (3.92) и (3.91) во (3.86) за интегралот I_i добиваме:

$$
I_{r-k} = \sum_{q=0}^{k} \left(\begin{array}{c} 2k \\ q \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} r-k \\ k-q \end{array} \right) (-1)^{q+k+r+1} B\left(r+q+\frac{1}{2}, k-q+\frac{1}{2} \right) k! r! \cdot \frac{1}{2} \qquad (3.93)
$$

На крај, за производот на обопштените функции разгледани во Теорема3.2.8, добиваме:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right)\cdot\widetilde{x_{-}^{k-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right),\psi\left(x\right)\right\rangle \quad = \\
&\quad=\frac{\left(-1\right)^{k+1}2^{r+k}\left(2k-1\right)!!}{\left(4k-1\right)!!\left(2r-1\right)!!}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{r-k}}\cdot\frac{\psi^{(r-k)}\left(0\right)}{\left(r-k\right)!}\left(-1\right)^{r-k}\varepsilon^{r-k}\times \\
&\quad\times\sum_{q=0}^{k}\left(\begin{array}{c}2k\\ q\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}r-k\\ k-q\end{array}\right)\left(-1\right)^{q+k+r+1}B\left(r+q+\frac{1}{2},k-q+\frac{1}{2}\right)k!r!\cdot\frac{1}{2}+O\left(\varepsilon\right) \\
&\quad=\frac{\left(-1\right)^{k}2^{r+k-1}\left(2k-1\right)!!k!r!}{\left(4k-1\right)!!\left(2r-1\right)!!\left(r-k\right)!}\psi^{(r-k)}\left(0\right)\times \\
&\quad\times\sum_{q=0}^{k}\left(\begin{array}{c}2k\\ q\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}r-k\\ k-q\end{array}\right)\left(-1\right)^{q}B\left(r+q+\frac{1}{2},k-q+\frac{1}{2}\right)+O\left(\varepsilon\right) \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

Ја пресметуваме вредноста на бета функцијата

$$B\left(r+q+\frac{1}{2},k-q+\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(2\left(r+q\right)-1\right)!!\left(2\left(k-q\right)-1\right)!!}{2^{r+k}\left(r+k\right)!}\pi \qquad (3.95)$$

и истата ја заменуваме во (3.94) со што добиваме:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \widetilde{x_{+}^{-r-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right)\cdot\widetilde{x_{-}^{k-1/2}}\left(\varphi_{\varepsilon},x\right),\psi\left(x\right)\right\rangle \quad = \\
&\quad=\frac{\left(-1\right)^{k}\left(2k-1\right)!!k!r!\pi}{2(4k-1)!!\left(2r-1\right)!!\left(r-k\right)!\left(r+k\right)!}\psi^{(r-k)}\left(0\right)\times \\
&\quad\times\sum_{q=0}^{k}\left(-1\right)^{q}\left(\begin{array}{c}2k\\ q\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}r-k\\ k-q\end{array}\right)\left(2\left(r+q\right)-1\right)!!\left(2\left(k-q\right)-1\right)!!+O\left(\varepsilon\right) \\
&\quad=C_{r,k}\cdot\left(-1\right)^{(r-k)}\psi^{(r-k)}\left(0\right)+O\left(\varepsilon\right) \\
&\quad=C_{r,k}\left\langle \delta^{(r-k)}\left(x\right),\psi\left(x\right)\right\rangle +O\left(\varepsilon\right) \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

каде означивме:

$$\begin{aligned} C_{r,k} &= \frac{(-1)^r\,(2k-1)!!k!r!\pi}{2(4k-1)!!\,(2r-1)!!\,(r-k)!\,(r+k)!}\times \\ &\times \sum_{q=0}^{k}(-1)^q\binom{2k}{q}\binom{r-k}{k-q}(2\,(r+q)-1)!!\,(2\,(k-q)-1)!! \end{aligned} \tag{3.97}$$

Равенството (3.96), кога $\varepsilon \to 0$, го дава равенството (3.78) од Теорема 3.2.8 со што и оваа теорема е докажана. □

Глава 4

Заклучок и план за понатамошни истражувања

Најголем дел од истражувањата кои што се направени во рамки на оваа докторска дисертација дадоа нови и оригинални научни резултати кои се веќе објавени во меѓународни научни списанија, а некои од нив се презентирани и на меѓународни научни конференции, со што е даден еден научен придонес во теоријата на дистрибуции, конкретно во делот на пресметување производ на дистрибуции, што се јавува како еден од главните проблеми на теоријата на дистрибуции. Објавените и презентирани резултати се достапни на други научници кои ќе може да ги применат истите при анализирање и решавање на различни проблеми во соодветни научни подрачја, а најмногу во проблеми од областа на физиката, аеродинамиката, електротехниката, но и во различни области од математиката.

Нашите понатамошни истражувања ќе бидат насочени повторно кон пресметување на производи на дистрибуции кои во класичната теорија не се дефинирани, но и кон примена на Коломбоовите алгебри во различни области од математиката. Коломбоовите алгебри наоѓаат голема примена во решавањето на диференцијални и парцијални диференцијални равенки [27, 29, 41, 44, 48] бидејќи овозможуваат да се најдат решенија (во просторот од дистрибуции) кои со класичната теорија не можат да се определат. При истражувањата наидовме и на повеќе трудови, објавени воглавно во последните неколку години, во кои може да се види примена на Коломбоовите алгебри и во стохастичките процеси [4, 35, 47]. Наш план е покрај пресметување на производи на дистрибуции, истражувањата да ги насочиме и кон примена на Коломбоовите алгебри во некоја од овие области.

Литература

[1] Alimohammady M., Fattahi Fariba. *Existence/uniqueness of solutions to heat equation in extended Colombeau algebra*. Sahand Communications in Mathematical Analysis. 1 (1):21-28 (2014)

[2] Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R. *Theory of distributions. The sequential approach*, Elsevier, Amsterdam (1973).

[3] Aragona J., Colombeau J.F., Juriaans S.O. *Nonlinear generalized functions and jump conditions for a standard one pressure liquid-gas model*. Journal of Mathematical analysis and Applications. 418(2):964-977 (2014).

[4] Capar U. *Colombeau solutions of a nonlinear stochastic predator - pray equation*. Turkish Journal of Mathematics. 34:1048-1060 (2013).

[5] Colombeau J.F. *New generalized functions and multiplication of distributions*, North Holland Math Studies, 84 (1984).

[6] Colombeau J.F. *Elementary introduction to new generalized functions*, North Holland Math Studies, 113 (1985).

[7] Colombeau J.F. *Multiplication of Distributions*, Springer-Verlag (1992).

[8] Damyanov B. *Results on Colombeau product of distributions*. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae.38(4):627-634 (1997).

[9] Damyanov B. *Multiplication of Schwartz Distributions and Colombeau Generalized Functions*, Journal of Applied Analysis, vol. 5, No. 2, pp. 249-260 (1999).

[10] Damyanov B. *Some distributional products of Mikusiski type in the Colombeau algebra* $\mathcal{G}(\mathbf{R}^m)$, Journal of analysis and its applications, Volume 20, No 3, 777-785 (2001).

[11] Damyanov B. *Mikusinski type Products of Distributions in Colombeau Algebra*, Indian J. pure appl. Math, 32(3): 361-375, March (2001).

[12] Damyanov B. *Balanced Colombeau products of the distributions* $x_{\pm}^{-p}$ *and* x^{-p} , Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 55, No. 1, 189-201 (2005).

[13] B. Damyanov, *Results on Balanced products of the distributions* $x_{\pm}^{a}$ *in Colombeau algebra* $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, Integral Transforms and Special functions, vol. 17, No. 9, 623-635, September (2006).

[14] Damyanov B. *Modelling and Products of Singularities in Colombeau Algebra* $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, Journal of Applied Analysis, vol. 14, No. 1, pp. 89-102 (2008).

[15] Damyanov B. *Results on Generalized models and Singular Products of Distributions in the Colombeau algebra* $\mathcal{G}(\mathbf{R})$. Comment. Math. Univ. Carolinae, 56, 145-157 (2015).

[16] Delcroix, A. *Remarks on the Embedding of Spaces of Distributions into Spaces of Colombeau Generalized Functions.* Novi Sad J. Math. Vol. 35, No. 2, 27-40 (2005).

[17] Embacher G.H., Gurbl G. and Oberguggenberger M. *Product of distributions in several variables and applications to zero-mass QED2*, Z. Anal. Anw., 11 (4), pp. 437-454 (1996).

[18] Farassat F. *Introduction to generalized functions with applications in aerodynamics and aeroacoustics.* NASA Technical Paper 3428 (1996).

[19] Fisher B. *The product of distributions.* The Quarterly Journal of Mathematics.22(2):291-298 (1971).

[20] Fisher B. *On defining the product of distributions.* Mathematische Nachrichten.99(1):239-249 (1980).

[21] Fisher B, Tas K. *On the Comutative Product of Distributions.* J Corean Math Soc. Vol 43 (2) pp. 271-281 (2006).

[22] Friedlander F.G, Joshi M. *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University press (1998).

[23] Gasiorawics S. *Elementary particle physics*, John Wiley and sons Inc., N.Y., (1966).

[24] Gelfand I.M, Shilov G.E. *Generalized Functions*, Academic Press, New York, NY, USA (1964).

[25] Gsponer A. *A concise introduction to Colombeau generalized functions and their applications in classical electrodynamics.* European Journal of Physics. 30(1):109-126 (2009).

[26] Hadamard J.*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York (1952).

[27] Hormann G, Oberguggenberger M. *Eliptic Regularity and Solvability for Partial Differential Equations with Colombeau Coefficients.* Electronic Journal of Differential Equations. Vol 2004 (14) pp. 1-30 (2004).

[28] Itano M. *Remarks on the multiplicative product of distributions.* Hiroshima Math J. 6 pp. 365-375 (1976).

[29] Jolevska-Tuneska B., Takaci A., Ozcag E. *On differential equations with non-standard coefficients*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, Vol.1 pp.1-8 (2007).

[30] Jolevska-Tuneska B., Atanasova-Pacemska, T. *Further results on Colombeau product of distributions*, IJMMS, Volume 2013, Article ID 918905, 5 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/918905.

[31] Kilicman A. *Mathematical Modeling with Generalized function*, University Putra Malaysia Press (2011).

[32] Konig H. *Neue Begrundung der theorie der distributions*, Math. Nachr. 9, pp.129-148 (1953).

[33] Mikusinski J., Sikorski R. *The Elementary Theory of Distributions I*, Polska Akad. Nauk; Rozprawy Mat. 12 (1957).

[34] Mikusinski J. *On the square of the Dirac δ distribution*, Bull. Aca. Pol. Sci 14 (9) (1966).

[35] Mirkov R, Pilipovic S, Seleshi D. *Generalized stochastic processes in algebras of generalized functions.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol.2009 pp.260-270 (2009).

[36] Miteva M, Jolevska-Tuneska B. *Some Results on Colombeau Product of Distributions.* Advances in Mathematics: Scientific Journal. Vol.1 No.2, pp.121-126 (2012).

[37] Miteva M, Jolevska-Tuneska B, Atanasova-Pacemska T. *On Products of Distributions in Colombeau Algebra.* Mathematical Problems in Engineering. Vol.2014, Article ID 910510. doi:10.1155/2014/910510 (IF (2013) = 1.383)

[38] Miteva M, Jolevska-Tuneska B, Atanasova-Pacemska T. *Colombeau Products of Distributions.* SpringerPlus. Vol.2016 (5) 2042. (2016) DOI 10.1186/s40064-016-3742-8 (IF (2015)=0.982)

[39] Miteva M, Jolevska-Tuneska B, Atanasova-Pacemska T. *Results on Colombeau Products of Distribution $x_+^{-r-1/2}$ with Distributions $x_-^{-k-1/2}$ and $x_-^{k-1/2}$* . Functional Analysis and Its Applications. (accepted for publication) (IF(2015)=0.486)

[40] Nigsch E., Samman C. *Global algebras of nonlinear generalized functions with applications in general relativity.* Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences 7(2): 143-171 (2013).

[41] Oberguggenberger M. *Multiplication of distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Longman, Essex (1992).

[42] Oberguggenberger M, Todorov T. *An Embedding of Schwartz Distributions in the Algebra of Asymptotic Functions.* International Journal of Mathematics and Mathematical Science.21(3):417-428 (1998).

[43] Ohkitani K., Dowker M. *Burges equation with a passive scalar: dissipation anomaly and Colombeau calculus.* Journal of Mathematical Physics. 51(3) (2010).

[44] Prusa V., Rajagopal K.R. *On the response of physical systems governed by non-linear ordinary differential equations to step input.* International Journal of Non-Linear Mechanics. 81: 207-221 (2016).

[45] Schwartz, L. *Sur Limpossibilite de la Multiplication des Distributions* C.R. Acad.Sci. Paris (239), 847-848 (1954).

[46] Schwartz, L. *Theorie des distributions*, vols. I and II, Actualites Scientifiques et Industrielles, Hermann and Cie, Paris, (1959).

[47] Seleshi D. *Algebra of Generalized Stochastic Processes and the Stochastic Dirichlet Problem.* Stochastic Analysis and Applications. Vol.26 (2008) http://dx.doi.org/10.1080/07362990802286053

[48] Sojanovic M. *Singular fractional evolution differential equations.* Central European Journal of Physics. 11(10): 1337-1349 (2013).

[49] Steinbauer R. *The ultrarelativistic Reissner-Nordstrom field in the Colombeau algebra.* Journal of Mathematical Physics. 38(3) (1997).

[50] Steinbauer R., Vickers J.A. *The use of generalized functions and distributions in general relativity.* Classical and Quantum Gravity. 23(10) (2006).

[51] Temple G. *The Theory of generalized Functions*, Proc. Roy. Soc. ser. A 28 175-190 (1955).

[52] Zemanian A.H. *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover (1965).

[53] Zhi CL, Fisher B. *Several products of distributions on* $\mathbf{R}^m$. Proceedings of the Royal Society of London. A426:425-439 (1989).