Функциональный анализ и его приложения
2018, т. 52, вып. 1, с. 13–25

УДК 517.982.4

Результаты о произведении Коломбо обобщенной функции $x_+^{-r-1/2}$ и обобщенных функций $x_-^{-k-1/2}$ и $x_-^{k-1/2}$

© 2018. М. Митева, Б. Йолевска-Тунеска, Т. Атанасова-Пачемска

Получены результаты о произведениях обобщенной функции $x_+^{-r-1/2}$ и обобщенных функций $x_-^{-k-1/2}$ и $x_-^{k-1/2}$ в дифференциальной алгебре $\mathscr{G}(\mathbb{R})$ обобщенных функций Коломбо, которая содержит пространство $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций Шварца в качестве подпространства и допускает понятие «присоединения», т. е. точное обобщение слабого равенства в $\mathscr{G}(\mathbb{R})$. Это позволяет рассматривать полученные результаты в терминах стандартных обобщенных функций.

DOI: `https://doi.org/10.4213/faa3453`

§1. Введение

Широкое применение обобщенных функций в разных областях естественных наук, особенно в физике, где часто возникают произведения обобщенных функций с совпадающими особенностями, приводит к необходимости решения фундаментальной задачи теории обобщенных функций — умножения обобщенных функций. Один из наиболее важных для приложений аспектов теории Шварца обобщенных функций состоит в том, что эта теория позволяет легко оперировать с разрывными функциями наравне с непрерывными и дифференцируемыми функциями, что оказалось полезным при формулировке и решении многих задач из разных областей науки и техники [1]. Однако на практике умножение двух обобщенных функций оказывается не всегда возможным; на пути преодоления этого препятствия было предпринято много попыток определить произведение обобщенных функций ([2]–[5]), или, точнее, добавить новые определения к уже существующим. Многие авторы пытались также вложить пространство обобщенных функций в дифференциальные алгебры [6].

Оптимальный путь преодоления сложностей, которые возникают в теории Шварца обобщенных функций, предложил Коломбо ([7], [8]). Он построил ассоциативную дифференциальную алгебру новых обобщенных функций $\mathscr{G}$, которая содержит алгебру гладких функций в качестве подалгебры (элементы алгебры Коломбо — классы эквивалентности направленностей гладких функций) и линейное пространство $\mathscr{D}'$ обычных обобщенных функций (обобщенных функций Шварца) в качестве подпространства. Теория обобщенных функций Коломбо шире, чем теория обычных обобщенных функций. С точки зрения дифференцирования свойства новых обобщенных функций совпадают со свойствами обычных обобщенных функций, зато с точки зрения умножения и нелинейных операций они отличаются радикально: любое конечное произведение обобщенных функций Коломбо остается обобщенной функцией Коломбо. Более