УНИВЕРЗИТЕТ “СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”
ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКА
СКОПЈЕ

МАГИСТЕРСКА РАБОТА

БАЗИ ВО БАНАХОВИ ПРОСТОРИ

Мартин Лукаревски

Скопје
Април 2008

Ментор: **Проф. Д-р Новак Ивановски, ПМФ, Скопје**

Членови на комисија:

1. **Проф. Д-р Новак Ивановски, ПМФ, Скопје**
2. **Проф. Д-р Марија Оровчанец, ПМФ, Скопје**
3. **Проф. Д-р Живорад Томовски, ПМФ, Скопје**

Датум на одбрана:

Датум на промоција:

Научна област: математика

БАЗИ ВО БАНАХОВИ ПРОСТОРИ

Мартин Лукаревски

Апстракт. Во првиот дел даваме примери на бази во Банахови простори. Вториот дел е посветен на примени на теоријата на бази за проучување на дуалноста и просторот на Џемс. Во третиот дел ги проучуваме безусловните бази и применувајќи ги операторите на Догаве покажуваме дека класичните простори $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ немаат безусловна база.

BASES IN BANACH SPACES

Martin Lukarevski

ABSTRACT. In the first chapter we present examples of bases in Banach Spaces. The second chapter is dedicated to applications of the theory of bases in the study of duality and the space of James. In the third chapter we study unconditional bases and applying Daugavet operators we show that the classical spaces $C[0,1]$ and $L^1[0,1]$ are without unconditional basis.

Содржина

Глава I

Базично за базите

I.0 Вовед

Во овој воведен дел ќе се обидеме да дадеме краток преглед на резултатите коишто ќе ги користиме во магистерската тема.

Дефиниција I.0.1 Нека X е векторски простор (реален или комплексен). Едно пресликување $\|.\|: X \to [0,\infty)$ се нарекува *норма*, ако

(а) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, x \in X$

(б) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

(в) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Парот $(X, \|.\|)$ се вика *нормиран простор*. Ако од контекстот е јасно или очигледно на која норма се мисли, тогаш за самиот X се зборува дека е нормиран простор.

На еден нормиран простор $(X, \|.\|)$ на природен начин се индуцира метрика; стави

$$d(x,y) := \|x-y\| \quad \forall x, y \in X$$

Со оваа метрика во еден нормиран простор се дефинирани тополошки поими како конвергентна низа, Кошиева низа, непрекинатост, компактност и.т.н. Во еден општ нормиран простор, за разлика од конечно димензионалните нормирани простори, една Кошиева низа не мора да конвергира. Затоа се дава

Дефиниција I.0.2 Метрички простор во којшто секоја Кошиева низа конвергира се нарекува *потполн*. Потполн нормиран простор се вика *Банахов простор*.

Бидејќи еден Банахов простор е векторски простор, секој линеарен функционал дефиниран на потпростор Y од X може да биде продолжен на целиот X. Тоа е последица на Аксиомата на избор. Хан и Банах покажале независно еден од друг дека помеѓу сите продолженија F на даден функционал f на Y, секогаш постои такво коешто не ја зголемува нормата. Нормата на линеарниот функционал f се дефинира со $\|f\| := \sup_{x\in B}\left|f(x)\right|$, кадешто $B=\left\{x\in X : \|x\|\le 1\right\}$ е единичната топка на X.

Теорема I.0.3 (Теорема на Хан-Банах, 1927 и 1929) *Нека X е нормиран простор и Y е потпростор. Тогаш за секој непрекинат линеарен функционал $f:Y\to\mathbb{F}$ постои непрекинат линеарен функционал $F:X\to\mathbb{F}$ т.ш.*

$$F|_Y = f, \quad \|F\|=\|f\|$$

Оваа исклучително важна Теорема ќе ја употребуваме многу често. Како нејзина последица се добива дека множеството X^* од непрекинати линеарни функционали на X, наречено дуален простор на X, ги разделува точките на X. Тоа значи дека за секои $x,y\in X$ т.ш. $x\ne y$ постои $f\in X^*$ со $f(x)\ne f(y)$. На тој начин X^* одредува топологија на X наречена *слаба топологија.* Се означува со $\sigma\left(X,X^*\right)$. Произволна слаба околина на $x_0\in X$ е од облик $U\left(x_0;\varepsilon,f_1,\dots,f_k\right)=\left\{x\in X : \left|f_i\left(x-x_0\right)\right|<\varepsilon \quad \forall i=1,\dots,k\right\}$. Во продолжение ќе наведеме неколку факти за слабата топологија на Банахов простор. Ќе видиме дека таа мора да се потчини на строги закони. Кога ги користиме придавките “слаб”, “слаба”, “слабо” секогаш мислиме на слабата топологија. X^{**} е ознака за бидуалот на X, т.е. просторот од ограничени фукционали на X*. Пресликувањето $i:X\to X^{**}$, дефинирано со $i(x)=\hat{x}$ кадештo $\hat{x}(f)=f(x) \quad \forall f\in X^*$ е канонично пресликување од X во неговиот бидуал X** коешто е *изометрија*, што значи дека $\left\|i(x)\right\|=\|x\|$ за сите $x\in X$. Ако $i:X\to X^{**}$ е уште и сурјекција, тогаш за X велиме дека е *рефлексивен.* Со ова пресликување X се идентифицира со затворен потпростор на X**. Во просторот X* се воведува *слаба *-топологија*; тоа е најслабата топологија на X* во којашто сите $x\in X\subset X^{**}$ се непрекинати. Се означува со $\sigma\left(X^*,X\right)$. Произволна слаба *-околина на $f_0\in X^*$ е од облик $U\left(f_0;\varepsilon,\widehat{x_1},\dots,\widehat{x_k}\right)=\left\{f\in X^* : \left|\widehat{x_i}\left(f-f_0\right)\right|<\varepsilon \quad \forall i=1,\dots,k\right\}$, т.е. $U\left(f_0;\varepsilon,\widehat{x_1},\dots,\widehat{x_k}\right)=\left\{f\in X^* : \left|f\left(x_i\right)-f_0\left(x_i\right)\right|<\varepsilon \quad \forall i=1,\dots,k\right\}$.

Една важна Теорема вели дека затворената единична кугла на X* е компактна во однос на слаба* -топологијата. Еден друг главен резултат вели дека затворената единична кугла на X лежи густо во затворената единична кугла на X**, густо во однос на слаба *-топологијата. Од двете Теореми се добива еден критериум за тоа кога еден Банахов простор X е рефлексивен: тоа е случај точно тогаш кога затворената единична кугла на X е слабо компактна. Да одиме со ред за да стигнеме до овој фундаментален резултат.

Теорема I.0.4 (Теорема на Мазур) *Норма затворачот и слабиот затворач на едно конвексно подмножество во Банахов простор се совпаѓаат.*

Теорема I.0.5 (Теорема на Алаоглу, 1940) *Нека X е нормиран простор. Тогаш затворената единична топка*

$$B^* := \left\{ f \in X^* : \| f \| \le 1 \right\}$$

*е компактна во слаба *-топологијата на X*.*

Доказ. Доказот ја користи Теоремата на Тихонов од Општа топологија и ние него тука нема да го дадеме.

Теорема I.0.6 (Теорема на Голдстајн, 1938) *Нека X е Банахов простор и нека*

$$B = \left\{ x \in X : \|x\| \le 1 \right\}; \qquad B^{**} = \left\{ F \in X^{**} : \|F\| \le 1 \right\}.$$

Тогаш $i(B)$ *е слабо-*-густо во* B^{**}.

Доказ. ([8], стр.65) Треба да се покаже дека за произволно $F \in B^{**}$ и произволна негова слаба *-околина U, постои $x \in B$ т.ш. $\hat{x} = i(x) \in U$. А бидејќи околините

$$U(F; \varepsilon, f_1, ..., f_k) := \left\{ G \in X^{**} : \left| F(f_i) - G(f_i) \right| < \varepsilon, \, i = 1, ..., k \right\}$$

формираат околинска база за слаба *-топологијата на X**, за тоа пак е доволно да се покаже дека за произволно $\varepsilon > 0$ и произволни $f_1, ..., f_k \in X^*$ постои $x \in B$ т.ш. $\left| F(f_i) - f_i(x) \right| < \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., k$. Последното тврдење следува од фактот што за функцијата $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) := \sum_{i=1}^{k} \left| F(f_i) - f_i(x) \right|^2$ важи $\inf_{x \in B} h(x) = 0$. Ќе го покажеме тоа. Нека $I := \inf_{x \in B} h(x)$. Јасно е дека $I \ge 0$, па останува да се покаже уште $I \le 0$, од кадешто ќе следува тврдењето. Постои низа (a_n) во B т.ш. $I = \lim_n h(a_n)$. Со дијагонализација (дијагоналниот трик) може да се добие подниза на (a_n), но ние повторно пишуваме (a_n), за којашто ќе постои $\lim_n f_i(a_n) =: \xi_i, \quad \forall i = 1, ..., k$. Тогаш

$$I = \lim_n h(a_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{k} \left| F(f_i) - f_i(a_n) \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left| F(f_i) - \xi_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left| \delta_i \right|^2$$

при што ставаме $\delta_i := F(f_i) - \xi_i$. Значи,

$$I = \sum_{i=1}^{k} \left| \delta_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} \delta_i = \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} \left(F(f_i) - \xi_i \right) = F(f) - \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} \xi_i$$

кадешто ставаме $f := \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} f_i$. Сега ако покажеме дека $\| f \| = \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} \xi_i$, ќе имаме

$$I = F(f) - \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} \xi_i = F(f) - \| f \| \le \| f \| \left(\|F\| - 1 \right) \le 0,$$

бидејќи $\|F\| \leq 1$, и доказот ќе биде завршен. Да го сториме тоа. Од една страна, поради конвексноста на B, за произволни $x \in B$, $a_n \in B$ и произволно $t, 0 \leq t \leq 1$, важи $(1-t)a_n + tx \in B$, па тогаш

$$I := \inf_{x\in B} h(x) \leq h((1-t)a_n + tx) = \sum_{i=1}^{k} \left|F(f_i) - (1-t) f_i(a_n) - t f_i(x)\right|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left|(F(f_i) - f_i(a_n)) - t(f_i(x) - f_i(a_n))\right|^2$$

Сега ако ја искористиме формулата $|z-u|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{z}u) + |u|^2$, за комплексни z и u, имаме

$$I \leq \sum_{i=1}^{k} \left|(F(f_i) - f_i(a_n)) - t(f_i(x) - f_i(a_n))\right|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left|F(f_i) - f_i(a_n)\right|^2 - 2t\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{(F(f_i) - f_i(a_n))}(f_i(x) - f_i(a_n)) + t^2 \sum_{i=1}^{k} (f_i(x) - f_i(a_n))$$

За $n \to \infty$, се добива $I \leq I - 2t\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}(f_i(x) - \xi_i) + t^2 \sum_{i=1}^{k} (f_i(x) - \xi_i)$, од кадешто за $t \to 0$, следува дека $\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}(f_i(x) - \xi_i) \leq 0$, т.е. $\operatorname{Re} f(x) \leq \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}\xi_i \quad \forall x \in B$, па тогаш

$$\|f\| \leq \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}\xi_i$$

Од друга страна, поради $f(a_n) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} f_i(a_n)$, следува дека $\left|\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i} f_i(a_n)\right| \leq \|f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, па ако се земе лимес $n \to \infty$, се добива $\left|\sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}\xi_i\right| \leq \|f\|$. Заедно со горното неравенство, ова дава $\|f\| = \sum_{i=1}^{k} \overline{\delta_i}\xi_i$ и доказот е готов. □

Забелешка: Втор доказ може да се даде преку Теоремата на Мазур за разделување на точка и затворено, конвексно множество во локално конвексен простор. Имено, во X**, $\overline{i(B)}^{w^*}$ е конвексно и затворено во слаба *-топологијата, па применувајќи ја оваа Теорема се покажува дека произволно $F \in X^{**}$ коешто не лежи во ова множество има норма строго поголема од 1. Еквивалентно, B** е подмножество на $\overline{i(B)}^{w^*}$ и со тоа доказот е завршен. За детали да се види [15] стр. 232.

Како последица на Теоремата на Голдстајн се добива дека секој нормиран простор има својство реминисцентно на рефлексивноста. Имено на секој елемент $F \in X^{**}$ може да му се придружи елемент x од X којшто речиси ќе се совпаѓа со $F \in X^{**}$ "вдолж" конечно димензионалните потпростори на X*. Прецизно формулирано

Теорема I.0.7 *Нека X е нормиран простор, $U \subset X^*$ е конечно димензионален потпростор и $F \in X^{**}$ и $\varepsilon > 0$ се произволни. Тогаш постои x од X т.ш. $f(x) = F(f) \quad \forall f \in U$ и уште $\|x\| < \|F\| + \varepsilon$.*

Доказ. Според Теоремата на Голдстајн, секоја слаба* - околина $U(F;\varepsilon, f_1,..., f_k)$ на $F \in X^{**}$ содржи елемент $\hat{x}$ за некое x од X. Значи една таква околина е генерирана од конечно многу функционали од X* и едно $\varepsilon > 0$. Смее да се претпостави дека генерирачките функционали имаат норма 1. Овие распнуваат конечно димензионален потпростор $U \subset X^*$ и тоа што $\hat{x}$ лежи во околина на F значи дека $|F(f) - f(x)| \le M\varepsilon \quad \forall f \in U$ и за некоја константа M. Но оваа константа може да се адаптира и да се добие тврдењето на Теоремата. Во таа смисла x и F се совпаѓаат "вдолж U". □

Од Теорема I.0.7 сега лесно следува Теоремата на Хели којашто подоцна ќе има клучна улога во доказот на Теорема I.0.10.

Теорема I.0.8 (Теорема на Хели, 1921) *Нека X е нормиран простор, $f_1,\ldots, f_n \in X^*$ и нека $c_1,\ldots,c_n$ се скалари. Тогаш се еквивалентни*

(i) *Постои x од X т.ш.* $f_i(x) = c_i \quad \forall i = 1,...,n$

(ii) *Постои* $M \ge 0$ *т.ш.* $\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i\right| \le M \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right\|$ *за секој избор на скалари* $\lambda_i, i = 1,...,n$.

Доказ. • $(i) \Rightarrow (ii)$ е јасно. Земи M := $\|x\|$.

• $(ii) \Rightarrow (i)$: Дефинираме линеарен функционал $F \in X^{**}$ на $U := lin\{f_1,\ldots, f_n\}$ со $F(f_i) := c_i$ за којшто важи $\|F\| \le M$ и којшто со Хан-Банах го продолжуваме на целиот X*. Од горната Теорема следува дека постои x од X т.ш. $f(x) = F(f) \quad \forall f \in U$. Тогаш јасно $f_i(x) = c_i \quad \forall i = 1,...,n$. Забележуваме уште дека x може да се одбере т.ш. $\|x\| \le M$ □

Следува карактеризација на рефлексивните простори преку единичната топка.

Теорема I.0.9 *X е рефлексивен ако и само ако единичната топка B во X е слабо компактна.*

Доказ. Во доказот одлучувачка улога има следната забелешка: Идентифицирајќи го X со потпростор на X** преку каноничното пресликување $i: X \to X^{**}$, $\left(i(x)\right)(f) = f(x)$, се добива дека тополошките простори $\left(X, \sigma\left(X, X^{*}\right)\right)$ и $\left(i(X), \sigma\left(X^{**}, X^{*}\right)\right)$ се хомеоморфни со хомеоморфизам $i: X \to i(X)$. Слабата топологија на X е релативната топлологија на слаба *-топологијата на $X^{**} \supset X$.

Нека X е рефлексивен. Тогаш $i(B)$=B**, а од Теоремата на Алаоглу B** е секогаш $\sigma\left(X^{**}, X^{*}\right)$-компактна, па од направената забелешка следува дека B е $\sigma\left(X, X^{*}\right)$-компактна, т.е. е слабо компактна.

Нека сега B е слабо компактна. Повторно од горната забелешка $i(B)$ е $\sigma\left(X^{**}, X^{*}\right)$-компактна во X**, па уште повеќе е затворена. Но од Теоремата на Голдстајн, $i(B)$ е $\sigma\left(X^{**}, X^{*}\right)$-густа во B**, па следува дека $i(B)$=B** и X е рефлексивен. □

Рефлексивните Банахови простори имаат слабо својство на Ваерштрас. Односно важи следната карактеризација на рефлексивни простори преку ограничени низи.

Теорема I.0.10 *Еден нормиран простор X е рефлексивен ако и само ако секоја ограничена низа во X има слабо конвергентна подниза.*

Нормираните простори во слабата топологија никогаш не се метризабилни, а бидејќи компактноста и низа-компактноста (секоја низа има конвергентна подниза) во општи тополошки простори се различни ствари, Теорема I.0.10 не следува a priori од Теорема I.0.9. Тоа сепак се добива од *Теоремата на Еберлајн-Шмулјан*, којашто претставува една длабока карактеризација на слабо компактните множества:

Теорема I.0.11 (Теорема на Еберлајн-Шмулјан) *За едно подмножество A во нормиран простор се еквивалентни:*

(i) *A е слабо компактно*

(ii) *A е слабо низа-компактно*

Пред да ја докажеме Теоремата на Еберлајн-Шмулјан ќе дадеме директен доказ на Теорема I.0.10. Всушност важи следнава проширена Теорема:

Теорема I.0.12 *Нека X е нормиран простор. Тогаш следните искази се еквивалентни:*

(i) *Просторот X е рефлексивен.*

(ii) *Секоја ограничена низа во X има слабо конвергентна подниза.*

(iii) *Ако (C_n) е опаднувачка низа од непразни затворени ограничени конвексни множества во X, тогаш $\bigcap_n C_n \neq \varnothing$.*

Доказ. Импликациите $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ лесно се докажуваат. За да се докаже $(ii) \Rightarrow (iii)$ на пример, се зема низа (x_n) т.ш. $x_n \in C_n$ којашто е секако ограничена, па под претпоставка има слабо конвергентна подниза. Понатаму користејќи ја верзијата на Теоремата на Хан-Банах за разделување со функционал на точка и затворено конвексно множество, се покажува дека слабиот лимес на поднизата припаѓа во пресекот. Проблем е да се покаже $(iii) \Rightarrow (i)$, или еквивалентно, ако X не е рефлексивен, тогаш постои опаднувачка низа (C_n) од непразни затворени ограничени конвексни множества во X со празен пресек. Да го покажеме тоа. Ќе се послужиме со следната Теорема на Џемс:

Теорема I.0.13 (Теорема на Џемс, 1964) *Банаховиот простор X не е рефлексивен ако и само ако за секое θ, $0 < \theta < 1$, постојат низи (x_n) во X и (f_n) во X* т.ш. $\|x_n\| = \|f_n\| = 1$ и $\operatorname{Re} f_n(x_k) = 0$ за $n > k$, $\operatorname{Re} f_n(x_k) \geq \theta$ за $n \leq k$.*

Доказ. Низите (x_n) и (f_n) се конструираат индуктивно. Во доказот два пати се применува Теоремата на Хели- еднаш на X* и еднаш на X. Нека X не е рефлексивен и б.о.н.о. нека X е реален простор. Тогаш за произволно θ, $0 < \theta < 1$, постои $F \in X^{**}$ т.ш. $\theta < d(F, i(X)) < 1$ и уште може да се претпостави дека $\theta < \|F\| < 1$. Нека $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ и $B^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$. Теоремата на Џемс ќе биде покажана ако покажеме дека постојат низа (x_n) во B и низа (f_n) во B* т.ш. $f_n(x_k) = 0$ за $n > k$ и $f_n(x_k) = \theta$ за $n \leq k$. Да почнеме со конструкцијата. Поради $\|F\| > \theta$ постои f_1 во B* т.ш. $F(f_1) = \theta$ и поради $\theta \leq \|F\| \|f_1\| < \|f_1\|$ постои x_1 во B т.ш. $f_1(x_1) = \theta$. Ги најдовме првите членови од низите (x_n) и (f_n). Сега претпоставуваме дека се конструирани $x_1, \ldots, x_{n-1}$ од B и $f_1, \ldots, f_{n-1}$ од B* т.ш. за нив важи $f_i(x_j) = 0$ за $i > j$, $1 \leq i, j \leq n-1$; $f_i(x_j) = \theta$ за $i \leq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$ и уште дека $F(f_i) = \theta$ за $i = 1, \ldots, n-1$. Последната претпоставка $F(f_i) = \theta$ не е дел од тврдењето на Теоремата, но е битна за следниот чекор во којшто ги добиваме x_n и f_n. Нека $M := \theta / d(F, i(X))$. Забележуваме дека 0< M <1 и дека за произволни скалари $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ важи $\theta = Md\left(F,i\left(X\right)\right) \le M\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\widehat{x_k}+F\right\|$. Ставаме $c_1=c_2=\dots=c_{n-1}:=0$ и $c_n:=\theta$. Тогаш $\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i\right| = \left|\lambda_n\right|\theta \le M\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\widehat{x_k}+\lambda_n F\right\|$. Сега ја применуваме Теоремата на Хели на просторот X* и добиваме дека постои $f_n \in X^*$, коешто поради M<1 може да се одбере од B*, т.ш. $\widehat{x_i}\left(f_n\right)=c_i \quad \forall i=1,...,n-1$ и $F\left(f_n\right)=\theta$, т.е. $f_n\left(x_1\right)=f_n\left(x_2\right)=...=f_n\left(x_{n-1}\right)=0$ и. Ни преостанува уште добиеме едно x_n од B т.ш. $f_i\left(x_n\right)=\theta$ за сите $i=1,\dots,n$. Сега на сцена стапува индуктивната претпоставка. Според неа $F\left(f_i\right)=\theta$ за $i=1,\dots,n-1$, па задно со горното $F\left(f_n\right)=\theta$, добиваме дека $\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\theta\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F\left(f_i\right)\right| \le \left\|F\right\|\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i\right|$. Повторно од Теоремата на Хели ($c_1=c_2=\dots=c_n=\theta$), постои x_n од X, коешто поради $\left\|F\right\|<1$ може да се одбере од B, т.ш. $f_i\left(x_n\right)=\theta$ за сите $i=1,\dots,n$. Со тоа доказот е завршен. □

Да се вратиме на доказот на Теорема I.0.12

• $(iii)\Rightarrow(i)$: Нека X не е рефлексивен. Нема губење на општоста ако претпоставиме дека X е реален. Низите $\left(x_n\right)$ во X и $\left(f_n\right)$ во X* се како во горната Теорема на Џемс. Ги формираме множествата $C_n := \overline{co}\left\{x_n, x_{n+1},...\right\}$. Тврдиме дека $\bigcap_n C_n=\varnothing$. Нека $x\in C_m$ и $\varepsilon>0$ е произволно. Постои $N\in\mathbb{N}$ и $y\in co\left\{x_m,x_{m+1},...,x_{m+N}\right\}$ т.ш. $\left\|x-y\right\|<\varepsilon$. Но тогаш за секое $n>m+N$ важи $\left|f_n\left(x\right)\right|=\left|f_n\left(x-y\right)\right|\le\left\|x-y\right\|<\varepsilon$ од кадешто $\lim_n f_n\left(x\right)=0$. Од друга страна ако $x\in\bigcap_n C_n$, тогаш за секое $n_0\in\mathbb{N}$ $f_{n_0}\left(x\right)\ge\theta$, што претставува контрадикција. Значи навистина $\bigcap_n C_n=\varnothing$ и со тоа Теоремата I.0.12 е целосно докажана. □

Ни преостана уште да ја докажеме Теоремата на Еберлајн-Шмулјан. Доказот се базира на цел еден спектар резултати од општата топологија и функционалната анализа. Некои од нив се добро познати, па затоа само ги наведуваме.

Теорема I.0.14 *Една непрекината биекција* $f:X\to Y$ *од еден компактен простор X во еден Хаусдорфов простор* Y *е хомеоморфизам.*

Доказ. Општа топологија!

Теорема I.0.15 *За еден метрички простор* (M, d) *се еквивалентни:*

(i) *M е компактен*

(ii) *M е низа-компактен*

Доказ. Исто, од општа топологија.

Забележуваме дека за разлика од компактните множества во Хаусдорфов простор, низа-компактните множества не мора да бидат затворени. Нормираните простори го имаат тоа фино својство што кај нив не само слабо компактните туку и слабо низа-компактните множества се слабо затворени. Овој важен резултат, познат под името Лема на Деј, игра одлучувачка улога во доказот на Теоремата на Еберлајн-Шмулјан. Во доказот на Лемата на Деј пак, ќе ја искористиме следната:

Лема I.0.16 *Нека U е потпростор од X. Тогаш постои низа од функционали* (f_n) *во B* т.ш.* $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \quad \forall x \in U$

Доказ. Доказот се добива со примена на Теоремата на Хан-Банах. Од неа следува дека $\|x\| = \sup_{f\in B^*} |f(x)| \quad \forall x \in U$, па тогаш може да се извлече подниза (f_n) во B* т.ш. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \quad \forall x \in U$. □

Лема I.0.17 (Лема на Деј, 1958) *Ако A е слабо низа-компактно множество во нормиран простор X, тогаш A е слабо затворено.*

Доказ. Нека A е слабо низа-компактно множество и нека б.о.н.о. $0 \in \overline{A}^w$ (транслациите се слаби хомеоморфизми). Ќе покажеме дека $0 \in A$ од кадешто ќе следува дека A е слабо затворено и со тоа Теоремата ќе биде докажана. Да се потсетиме, произволна слаба околина на $x_0 \in X$ е од облик $U(x_0; \varepsilon, f_1, ..., f_k) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., k\}$, што значи дека ако $0 \in \overline{A}^w$, тогаш за произволно $\varepsilon > 0$ и произволни конечно многу функционали $f_1, ..., f_k$ постои x од A т.ш. $|f_i(x)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, ..., k$. Нека (f_{1j}) е произволна низа од B*. Постои x_1 од A т.ш. $|f_{11}(x_1)| \le 1$. За $L_1 := lin\{x_1\}$, според Лема I.0.16 постои низа (f_{2j}) во B* т.ш. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_{2j}(x)| \quad \forall x \in L_1$. Постои x_2 од A т.ш. $|f_{11}(x_2)| \le \frac{1}{2}$, $|f_{12}(x_2)| \le \frac{1}{2}$, $|f_{21}(x_2)| \le \frac{1}{2}$ и $|f_{22}(x_2)| \le \frac{1}{2}$. Сега за $L_2 := lin\{x_1, x_2\}$ повторно од Лема I.0.16 постои низа (f_{3j}) во B* т.ш. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_{3j}(x)| \quad \forall x \in L_2$. Јасно е како продолжува постапката: во n-тиот чекор се добива x_n од A т.ш. $|f_{ij}(x_n)| \le \frac{1}{n} \quad \forall 1 \le i, j \le n$, а потоа за

$L_n := lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ наоѓаме низа (f_{n+1j}) во B* т.ш. $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_{n+1j}(x)| \quad \forall x \in L_n$. На тој начин се добива една низа (x_n) во A за којашто важи $\lim_n f_{ij}(x_n) = 0$ за произволни фиксни i и j. По претпоставка A е слабо низа-компактно множество, па постои подниза (x_{n_k}) којашто слабо конвергира кон некое x од A. Ќе покажеме дека всушност x = 0 и со тоа ќе го завршиме доказот. Значи $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Од тука следува дека $f_{ij}(x) = 0$ за произволни фиксни i и j. Од друга страна, поради $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ и Теоремата на Мазур, следува дека $x \in clin\{x_1, x_2, ...\}$. Значи за произволно $\varepsilon > 0$ постои некое $n \in \mathbb{N}$ и $y \in L_n$ т.ш. $\|y - x\| < \varepsilon$. Но поради $\|y\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_{n+1j}(y)|$ и $|f_{n+1j}(y)| = |f_{n+1j}(y-x)| < \varepsilon$, следува дека $\|y\| \le \varepsilon$. Тогаш $\|x\| < 2\varepsilon$, од каде се добива дека x = 0 и со тоа Лемата на Деј е докажана. □

Дефиниција I.0.18 Една низа од функционали (f_n) *во X** се вика *тотална* ако нулата е единствениот елемент од X којшто ги анулира сите f_n, т.е. ако важи $f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Лема I.0.19 *Ако X е сепарабилен простор, тогаш постои тотална низа* (f_n) *во X*.*

Доказ. Нека $\{x_1, x_2, ...\}$ е густо во X. Од Теоремата на Хан-Банах следува дека за секое x_n постои $f_n \in X^*$ т.ш. $\|f_n\| = 1$ и уште $f_n(x_n) = \|x_n\|$ (види [1], стр. 135). Тврдиме дека (f_n) е тотална во X*. Навистина, нека $x \in X$ е т.ш. $f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Да покажеме дека x = 0. За произволно $\varepsilon > 0$ постои x_n т.ш. $\|x - x_n\| < \varepsilon / 2$. Тогаш

$$\begin{aligned} \|x\| &\le \|x - x_n\| + \|x_n\| = \|x - x_n\| + f_n(x_n) = \|x - x_n\| + f_n(x_n - x) \le \\ &\le \|x - x_n\| + \|f_n\| \|x_n - x\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

т.е. $\|x\| < \varepsilon$, па значи x = 0. Со тоа покажавме дека (f_n) е тотална во X*. □

Теорема I.0.20 *Ако X е сепарабилен нормиран простор, тогаш слабата топологија* $\sigma(X, X^*)$ *е метризабилна на слабо компактните множества.*

Доказ. Нека A е слабо компактно подмножество во X и нека (f_n) е тотална низа во X*, којашто постои поради Лема I.0.19. Стави $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x - y)| \quad \forall x, y \in A$. Лесно се проверува дека d е метрика на A. Ќе покажеме дека пресликувањето $Id : (A, \sigma(X, X^*)) \to (A, d)$ е непрекинато, па според Теорема I.0.14 како непрекината биекција од компактен во Хаусдорфов простор е хомеоморфизам. Значи $\left(A,\sigma\left(X,X^*\right)\right)$ е метризабилен. За непрекинатоста на Id, доволно е да се покаже дека за произволно $x_0 \in A$ и произволна отворена топка $T\left(x_0,\varepsilon\right)$ во $\left(A,d\right)$, постои околина U на x_0 во $\left(A,\sigma\left(X,X^*\right)\right)$ т.ш. $U \subset T\left(x_0,\varepsilon\right)$. Значи, $T\left(x_0,\varepsilon\right)=\left\{x\in A: d\left(x,x_0\right)<\varepsilon\right\}=\left\{x\in A:\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left|f_n\left(x-x_0\right)\right|<\varepsilon\right\}$. Забележуваме дека A како слабо компактно множество е ограничено, па постои M > 0 т.ш. $\left\|x-x_0\right\|<M \quad \forall x\in A$. За ова M > 0, постои природен број N т.ш. $\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}<\frac{\varepsilon}{2M}$. Да ја разгледаме сега слабата околина $U=U\left(x_0;\frac{\varepsilon}{2N},f_1,\dots,f_N\right)$ на x_0. За произволно $x\in U$ важи $\left|f_i\left(x-x_0\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2N} \quad \forall i=1,\dots,N$, па тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left|f_n\left(x-x_0\right)\right|=\sum_{n=1}^{N}2^{-n}\left|f_n\left(x-x_0\right)\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}\left|f_n\left(x-x_0\right)\right|<$$

$$<N\frac{\varepsilon}{2N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}2^{-n}\left\|f_n\right\|\left\|x-x_0\right\|<\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

Добивме $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\left|f_n\left(x-x_0\right)\right|<\varepsilon$, т.е. $x\in T\left(x_0,\varepsilon\right)$. Значи $U\subset T\left(x_0,\varepsilon\right)$ и со тоа се е покажано. □

Доказ на Теоремата на Еберлајн-Шмулјан.

• $(i)\Rightarrow(ii)$: Ова е полесната импликација. Нека $\left(x_n\right)$ е произволна низа во слабо компактното множество A и нека $Y:=clin\left\{x_1,x_2,\dots\right\}$. Тогаш $A\cap Y$ е слабо компактно множество во сепарабилниот простор Y, па според Теорема I.0.20 е метризабилно. Од Теорема I.0.15 се добива дека $A\cap Y$ е слабо низа-компактно, па постои слабо конвергентна подниза $\left(x_{n_k}\right)$ на $\left(x_n\right)$. Значи A е слабо низа-компактно множество.

• $(ii)\Rightarrow(i)$: Нека A е слабо низа-компактно множество. $i\left(A\right)$ е ограничено, кадешто $i:X\to X^{**}$ е каноничното пресликување. Тогаш од Теоремата на Алаоглу $\overline{i\left(A\right)}^{w^*}$ е слабо*-компактно, па според забелешката направена во доказот на Теорема I.0.9, следува дека множеството $i^{-1}\left(\overline{i\left(A\right)}^{w^*}\right)$ е слабо компактно во X. Но тогаш A е релативно слабо компактно, а бидејќи од Лемата на Деј A е слабо затворено, следува дека A е слабо компактно и со тоа доказот е завршен. □

I.1 Дефиниции и основни својства

Конечно димензионалните векторски простори имаат база и секој вектор во просторот на единствен начин се претставува преку базните елементи. Се работи за алгебарски бази коишто во случај на бесконечно димензионален Банахов простор се буквално бескорисни зашто знаеме дека тогаш секоја таква база е надбројлива. Тоа едноставно следува од Теоремата на Бер за категории. Таа важи за потполни метрички простори, па забележуваме дека поопшто: секоја алгебарска база во бесконечно димензионален Фрешеов и F - простор е надбројлива. Сакаме концептот на база да го видоизмениме и да го генерализираме во бесконечно димензионални Банахови простори. Тоа прв го направил полскиот математичар Јулиус Шаудер (1899-1943), ученик на Стефан Банах (1892-1943).

Дефиниција I.1.1 Нека X е Банахов простор. Една низа (x_n) во X се нарекува *Шаудерова база* за X ако секој $x \in X$ на еден и само на еден начин може да се претстави како $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $a_n \in \mathbb{F}$, при што конвергенцијата е во нормата на X, т.е. $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right\| \to 0$.

Понатаму поради краткост ќе пишуваме само бази, но постојано ќе мислиме на Шаудерови бази.
Уште поопшто, бази можат да се дефинираат и во метрички тополошки простори на истиот природен начин.

Дефиниција I.1.2 Нека X е метрички тополошки простор со метрика d. Една низа (x_n) во X се нарекува *база* за X ако секој $x \in X$ на еден и само на еден начин може да се претстави како $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $a_n \in \mathbb{F}$ при што конвергенцијата е во метриката на X, т.е $d\left(x, \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right) \to 0$.

Евидентно е дека во простор X со Шаудерова база (x_n), секоја точка $x \in X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ може да се поистовети со единствената низа од коефициенти $(a_1, a_2, ...)$. Важно е да се забележи дека при дефинирањето на Шаудеровата база базичните вектори x_n мора да се зададат не како множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, туку како подредена низа (x_n). Во спротивно, ако не внимаваме на редоследот, доаѓаме до нов поим (безусловна база), на којшто подоцна ќе му посветиме посебно внимание.

Од дефиницијата непосредно следува дека $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ и дека затворачот на линеарната обвивка (генераторот) на множеството $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, во ознака $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, е целиот простор X, т.е. $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$. Тој факт го забележуваме како:

Теорема I.1.3 *Просторот* X *има база* (x_n) *само ако важи* $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$

Доказ. Јасен. □

Низите за коишто важи $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$ уште се нарекуваат *фундаментални.* Условот во Лема I.1.3 е само потребен, но е далеку од доволен. Подоцна ќе дадеме пример кога тој е исполнет, а сепак (x_n) не е база. Од оваа и следната Лема добиваме уште еден неопходен услов којшто треба да го задоволува еден простор за да има база. Лемата е интересна и самата за себе како критериум за одлучување на сепарабилност на нормирани простори.

Лема I.1.4 *За еден нормиран простор* X *се еквивалентни:*

(1) X *е сепарабилен*

(2) *Постои пребројливо множество* A *т.ш.* $X = clinA$

Доказ. $(1) \Rightarrow (2)$ е јасно, зашто $X = \overline{A}$ имплицира $X = clinA$.

$(2) \Rightarrow (1)$:Прво го разгледуваме случајот $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.Ставаме

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}, x_i \in A \right\}$$

Тогаш B е пребројливо и ќе покажеме $\overline{B} = X$,поточно

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in B \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

Прво одбираме $y_0 \in linA$, значи $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ со $\lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in A$ т.ш $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Потоа одбираме $\lambda_i^{'} \in \mathbb{Q}$ т.ш. $\left|\lambda_i - \lambda_i^{'}\right| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|}$.Тогаш за $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{'} x_i \in B$ важи

$$\|x - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \max_i \left|\lambda_i - \lambda_i^{'}\right| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| < \varepsilon$$

Во случајот $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ искористи $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ наместо $\mathbb{Q}$. □

Следната Теорема го дава тој основен и неопходен услов за еден простор да има база.

Теорема I.1.5 *Секој Банахов простор со Шаудерова база е сепарабилен.*

Доказ. Поради $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$ доказот директно следува од Лема I.1.4, но имајќи големо значение оваа теорема заслужува и посебен доказ. Нека (x_n) е Шаудерова база во Банаховиот простор X, X над $\mathbb{F}$. (Без губење на општоста земаме $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Тогаш множеството $M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q} \right\}$ е пребројливо и густо во X (За $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ се зема $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$)

Навистина, за $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ од X и $\varepsilon > 0$ произволно, постои n т.ш.

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

и $\forall a_k \in \mathbb{F} \quad \exists r_k \in \mathbb{Q}$ т.ш. $| a_k - r_k | < \dfrac{\varepsilon}{2n \| x_k \|}$, па тогаш

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \| \le \sum_{k=1}^{n} | a_k - r_k | \| x_k \| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Од (1) и (2) се добива дека $\| x - \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \| < \varepsilon$, т.е. M е густо во X, па X е сепарабилен. □

Знаеме дека ℓ^∞ е несепарабилен Банахов простор, па според претходната Теорема тој нема Шаудерова база.

Дали важи обратното, т.е. дали секој сепарабилен Банахов простор има Шаудерова база? Одговорот е едно категорично Не! Следна цел е да покажеме непрекинатост на два вида на природни линеарни пресликувања на Банахови простори со Шаудерова база. Тие ќе ни овозможат да добиеме други појаки и доволни критериуми за една низа да биде база.

Дефиниција I.1.6 Нека Банаховиот простор X има база (x_n). За секој природен број n, n-ти *координатен функционал* x_n^* за базата (x_n) е пресликувањето $x_n^* : X \to \mathbb{F}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \mapsto a_n$, а n-та *природна проекција* P_n за (x_n) е пресликувањето $P_n : X \to X$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Во X се воведува следната норма $|||.|||$, со $||| x ||| := \sup_n \|P_n x\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$ и се покажува дека таа е еквивалентна на $\|\cdot\|$ и е потполна во X. Како последица се добива

Теорема I.1.7 *Природните проекции* $P_n : X \to X$, $\quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ *се ограничени.*

Доказ. Од еквивалентноста на двете норми $\|.\|$ и $|||.|||$, следува дека постои $C > 0$ т.ш. $||| x ||| \le C \| x \| \quad \forall x \in X$. Тогаш $\|P_n x\| \le ||| x ||| \le C \|x\|$, што значи дека P_n е ограничена природна проекција. □

Сега треба да докажеме дека двете норми се навистина еквивалентни. Ако две норми во еден нормиран простор се споредливи (едната е поголема од другата) и потполни, тогаш тие се еквивалентни. Тоа е содржината на:

Теорема I.1.8 (Теорема за двете норми) *Ако* $\|.\|$ *и* $|||.|||$ *се две норми на векторскиот простор* X *коишто двете го прават Банахов простор, и ако постои* $M > 0$ *т.ш.* $\| x \| \le M ||| x ||| \quad \forall x \in X$, *тогаш* $\|.\|$ *и* $|||.|||$ *се еквивалентни.*

Доказ. По претпоставка $Id : (X, |||.|||) \to (X, \|.\|)$ е непрекинато пресликување, па од Теоремата на Банах за инверзно пресликување и $Id^{-1} = Id : (X, \|.\|) \to (X, |||.|||)$ е непрекинато. Тоа значи дека постои $C > 0$ т.ш. $||| x ||| \le C \| x \| \quad \forall x \in X$. □

Останува уште да покажеме дека нормата $|||.|||$ е потполна со што доказот на Теорема I.1.7 ќе биде потполн.

Теорема I.1.9 $(X, |||.|||)$ *е Банахов простор.*

Доказ. Нека $x^n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n x_i$ е Кошиева низа во однос на $|||.|||$. Ќе покажеме дека е конвергентна.

Доказот се одвива во три чекори.

Чекор 1: Колоните на (x^n) конвергираат, т.е. постои $a_i := \lim_{n\to\infty} a_i^n \quad \forall i = 1, 2, \ldots$

Чекор 2: Редот $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ конвергира.

Чекор 3: $|||x^n - x||| \to 0 \quad , \quad n \to \infty$

Доказ на Чекор 1. Јасно е дека за секои два природни броеви n и m важи $\|\sum_{i=n}^{m} a_i x_i\| \le 2|||x|||$. Тогаш

$$|a_i^n - a_i^m| = \frac{\|a_i^n x_i - a_i^m x_i\|}{\|x_i\|} \le \frac{2|||x^n - x^m|||}{\|x_i\|} \quad \to \quad 0 \text{ за } n, m \to \infty ,$$

т.е. $(a_i^n) \quad n = 1, 2, \ldots$ е Кошиева, па постои $a_i = \lim_{n\to\infty} a_i^n$

Доказ на Чекор 2. Ова е најсуптилниот дел во доказот. Нека $t_s = \sum_{n=1}^{s} a_n x_n$ Ќе покажеме дека (t_s) е $\|.\|$- Кошиева низа.

Нека $\varepsilon > 0$ е призволно. Постојат $k, m \ge k_0$ т.ш. за секој $s \in \mathbb{N}$

$$\|\sum_{n=1}^{s}(a_n^k - a_n^m)x_n\| \le \sup_N \|\sum_{n=1}^{N}(a_n^k - a_n^m)x_n\| = |||x^k - x^m||| < \varepsilon$$

па ако пуштиме $k \to \infty$ се добива

$$\|\sum_{n=1}^{s}(a_n - a_n^m)x_n\| \le \varepsilon \tag{*}$$

Тогаш, за $m > k \ge k_0$

$$\|t_m - t_k\| = \|\sum_{n=k+1}^{m} a_n x_n\| \le$$

$$\le \|\sum_{n=1}^{m}(a_n - a_n^{k_0})x_n\| + \|\sum_{n=1}^{k}(a_n - a_n^{k_0})x_n\| + \|\sum_{n=k+1}^{m} a_n^{k_0} x_n\| \le 2\varepsilon + \|\sum_{n=k+1}^{m} a_n^{k_0} x_n\| \le 3\varepsilon \ ,$$

за доволно големо k, бидејќи $\sum_{n=k+1}^{m} \alpha_n^{k_0} x_n$ е дел од конвергентен ред $x^{k_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k_0} x_n$

Значи, (t_s) е Кошиева низа, па конвергира т.е. постои $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$

Доказ на Чекор 3. Од (*) се добива

$$|||x - x^m||| = \sup_s \|\sum_{n=1}^{s}(a_n - a_n^m)x_n\| \le \varepsilon \qquad \forall m \ge k_0$$

Значи, (x^n) конвергира во однос на $|||.|||$, т.е. $(X,|||.|||)$ е Банахов простор од кадешто следува еквивалентноста на нормите $\|.\|$ и $|||.|||$. Со тоа теоремата е докажана. □

Освен што за секоја поединечна проекција P_n поради нејзината непрекинатост важи $\|P_n\| < \infty$, и целата низа од норми $(\|P_n\|)$ е ограничена.

Теорема I.1.10 $\sup_n \| P_n \| < \infty$

Доказ. Важи $\|P_n x\| \le ||| x ||| \le C \|x\|$, односно за фиксирано $x \in X$, $\sup_n \| P_n x \| < \infty$. Оттука и од Принципот на рамномерна ограниченост ($Uniform\ Boundedness\ Principle - UBP$), познат уште и како Теорема на Банах-Штајнхаус (види [1], стр.83) директно следува тврдењето. □

Дефиниција I.1.11 Нека P_n се природните проекции во простор X со база (x_n). Тогаш $\mathrm{K} := \sup_n \|P_n\| < \infty$ се нарекува *базична константа* за базата (x_n).

Заедно со природните проекции и координатните функционали се непрекинати.

Теорема I.1.12 *Секој координатен функционал* $x_n^* : x \to a_n$ *во Банахов простор со база е непрекинат.*

Доказ.

$$|a_n| = \frac{\|a_n x_n\|}{\|x_n\|} = \frac{\|(P_n - P_{n-1})(x)\|}{\|x_n\|} \le \frac{2K\|x\|}{\|x_n\|}$$

□

Интересно е тоа што во својата дефиниција на база Шаудер барал координатните функционали да се непрекинати. Банах покажал дека тоа не е потребно, односно дека тоа може да се покаже со остроумна примена на Теоремата на Банах-Штајнхаус.

Теоремите I.1.7 и I.1.10 остануваат да важат во потполни метрички тополошки простори. Доказите треба само малку да се изменат.

За крај на овој параграф даваме еден многу корисен критериум за тоа кога една низа во Банахов простор е база.

Теорема I.1.13 *Низата* (x_n) *во Банахов простор X е база во X ако и само ако важи*

(1) $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$

(3) $\exists M \geq 0 \quad \| \sum_{n=1}^{m_1} a_n x_n \| \leq M \| \sum_{n=1}^{m_2} a_n x_n \| \quad \forall m_1 \leq m_2 \quad \forall a_i \in \mathbb{F}$

Доказ. Ако (x_n) е база, тогаш условите (1) и (2) следуваат директно од дефиницијата, додека (3) следува од Теорема I.1.7. Дека трите услови се потребни следува од досега изнесеното. Да докажеме дека тие се и доволни за низата (x_n) да биде база.

Значи, нека (x_n) ги задоволува условите (1), (2) и (3).

Прво, ќе покажеме дека ако еден елемент $x \in X$ има претставување преку (x_n), тогаш тоа е еднозначно.

Навистина, од $x = \sum_n \alpha_n x_n = \sum_n \beta_n x_n$ и од (3), следува дека

$$|\alpha_1 - \beta_1| \| x_1 \| \leq M \| \sum_n \alpha_n x_n - \sum_n \beta_n x_n \| = 0 \text{ , па тогаш } \alpha_1 = \beta_1 .$$

Со индукција се добива дека $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Значи, покажавме единственост на претставувањето. Сега да покажеме и егзистенција на такво претставување.

Нека $p_m(\sum_n \alpha_n x_n) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$ кадешто $(\alpha_n) \in c_{00}$ т.е.

$$p_m : lin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to lin\{x_1, ..., x_m\}$$

па тогаш од (3) p_m е линеарен ограничен оператор со норма не поголема од M. Од условот (2), p_m може на единствен начин да се прошири до линеарен ограничен оператор $P_m : X \to lin\{x_1, ..., x_m\}$ со норма не поголема од M, т.е. $\|P_m\| \leq M$.

Сега ќе покажеме дека $\lim_m P_m x = x \quad \forall x \in X$.

Нека $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ се произволни. Поради условот (2) постои $y \in lin\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ т.ш. $\| x - y \| < \frac{\varepsilon}{M+1}$. Тогаш

$$\| P_m x - x \| \leq \| P_m x - P_m y \| + \| P_m y - y \| + \| x - y \| \leq$$

$$\leq (M+1)\| x-y \| + \| P_m y - y \| \leq \varepsilon + \| P_m y - y \|$$

Од произволноста на ε следува дека

$$\| P_m x - x \| \leq \| P_m y - y \| \to 0 \text{ за } m \to \infty, \text{, па}$$

$$\lim_{m\to\infty} \| P_m x - x \| = 0 \text{, т.е. } x = \lim_{m\to\infty} P_m x$$

Од друга страна, $P_m P_n = P_n P_m = P_{\min\{m,n\}}$ на $lin\{x_n : n \in N\}$, па поради (2), ќе важи $P_m P_n = P_n P_m = P_{\min\{m,n\}}$ и на целото множество X.

$P_1 x = a_1 x_1$ за некое $a_1 \in \mathbb{F}$, па од $P_1 P_2 = P_2 P_1$, следува дека $P_2 x = \sum_{n=1}^{2} a_n x_n$ и.т.н. Со индукција се покажува дека $P_m x = \sum_{n=1}^{m} a_n x_n$ за некои $a_1, ..., a_m \in \mathbb{F}$ па значи $x = \lim_m P_m = \sum_n a_n x_n$ и со тоа покажавме дека секое $x \in X$ има преставување преку базата (x_n), а веќе покажавме дека тоа е единствено. Значи, (x_n) е база во X. □

***Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen.**
David Hilbert

I.2 Бази во простори од низи

Откако ги дефиниравме базите и запознавме неколку својства и критериуми поврзани со нив, редно е да видиме примери на простори со база. Започнуваме со наједноставните и класични простори во функционалната анализа-просторите од низи.

Пример. (а) Во просторите c_0 и l^p, $1 \le p < \infty$ единичните вектори $e_n = (0,...0,1,0,...)$ (1 на n-тото место) формираат база. Навистина, за $x = (x_n) \in c_0$, $\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \|_\infty = \sup\{ |x_k| : k > n\} \to 0$ за $n \to \infty$ т.е. редот $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ конвергира во однос на $\sup$ нормата $\|.\|_\infty$ кон x, па пишуваме $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ и ова претставување е еднозначно.

Слично, за $x = (x_n) \in l^p, 1 \le p < \infty$, важи $\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^p \to 0$ за $n \to \infty$, и ова претставување е еднозначно, па повторно пишуваме $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Пример. (б) Во просторот c, база е низата $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, кадешто $e_0 = (1,1,...)$.
За $x = (x_n) \in c$ со $a := \lim_{n\to\infty} x_n$, имаме

$$\left\| (x_1, x_2, ...) - (a, a, ...) - (x_1 - a, ..., x_n - a, 0, 0, ...) \right\|_\infty =$$

$$= \left\| (0, ..., 0, x_{n+1} - a, x_{n+2} - a, ...) \right\| \to 0 \text{ т.е. } x = ae_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - a) e_n$$

*Секогаш започни со наједноставните примери.

Пример. (в) Во просторот l^p, $0<p<1$, којшто е F-простор со метрика

$$d\left(x,y\right):=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n-y_n\right|^p ,$$

но не е локално конвексен простор (види [1] стр. 221, Зад. 31) единичните вектори $e_n=(0,\ldots 0,1,0,\ldots)$ повторно формираат база.

Теоријата не протекува паралелно и за функциските простори $L^p\left[0,1\right], 0<p<1$, за коишто во следниот параграф ќе видиме дека воопшто немаат база.

I.3 Бази во функциски простори

Други класични простори во функционалната анализа во коишто ќе дадеме бази се функциските простори $C[0,1]$ и $L^p[0,1], 1 \le p < \infty$. Во просторот $C[0,1]$ според славната Теорема на Ваерштрас од 1885, секој елемент може рамномерно да се апроксимира со полиноми. Односно важи $clin\{t^n : n \ge 0\} = C[0,1]$. Полиномите p_n од n-ти степен коишто апроксимираат дадена функција f од $C[0,1]$ можат дури и експлицитно да се зададат. Еден таков вид на полиноми се полиномите на Бернштајн. Со тоа е исполнет неопходниот услов од Теорема I.1.3. Дали тогаш мономите $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ формираат база во $C[0,1]$? Не, условот не е доволен. Кога $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ би била база во $C[0,1]$, тоа би значело дека секоја непрекината функција на $[0,1]$ може да се претстави како бесконечна линеарна комбинација од мономите t^n, односно да се претстави како степенски ред. Но знаеме дека степенските редови коишто рамномерно конвергираат кон непрекината функција (нормата во $C[0,1]$) се диференцијабилни, па добиваме контрадикција дека секоја непрекината функција на $[0,1]$ е диференцијабилна. Постојат примери на непрекинати и недиференцијабилни функции на $[0,1]$. $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ е една таква. Може и на друг начин да се аргументира дека $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ не е база во $C[0,1]$. На пример со Теорема I.1.12. Функционалот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{t^n} \mapsto a_1$ не е ограничен. Да го покажеме тоа. Ги разгледуваме функциите $(1-t)^n$ на $C[0,1]$. Со овој функционал $(1-t)^n \mapsto -n$, па кога би бил ограничен би постоело M>0 т.ш. $|-n| = n \le M \left\|(1-t)^n\right\|_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Но $\left\|(1-t)^n\right\|_\infty = 1$, па се добива дека $n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ што е секако контрадикција.

Сега ќе дадеме една база во $C[0,1]$, којашто ја открил Шаудер (види [15]).

Теорема I.3.1 *База во* $C[0,1]$, *наречена* ***систем на Шаудер***, *претставува низата функции:*

$$s_0(t) := 1\ ; \qquad s_1(t) := t\ ;$$

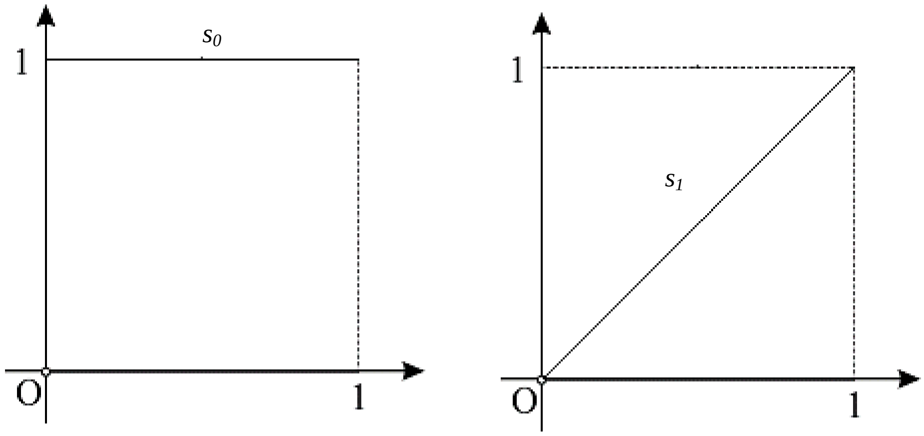
$$s_n(t) = s_{2^{m-1}+i}(t) := \max\left\{0, 1 - 2^m \left| t - \frac{2i-1}{2^m} \right| \right\}.$$

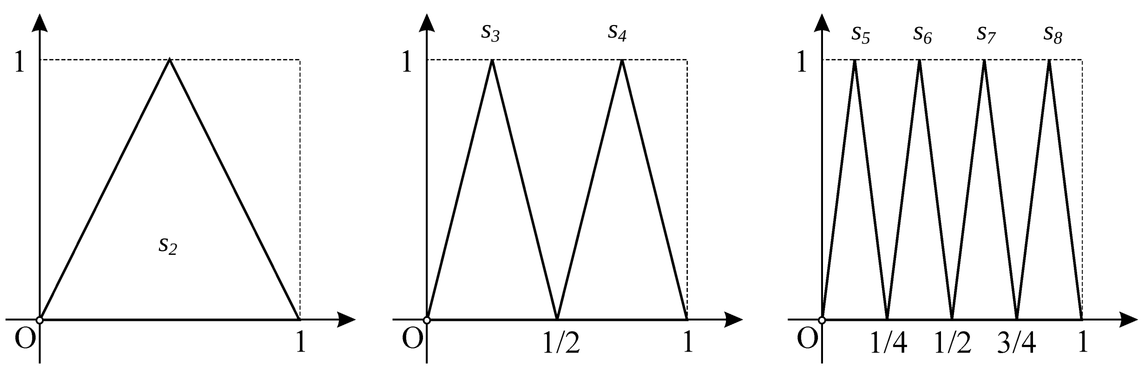
Доказ. $s_n(t) = s_{2^{m-1}+i}(t)$ $\left(n \ge 2, i = 1, \ldots, 2^{m-1}\right)$ значи се определува на следниот начин:

$$s_{2^{m-1}+i}(t) = 0 \text{ ако } x \notin \left(\frac{i-1}{2^{m-1}}, \frac{i}{2^{m-1}}\right),$$

а во внатрешноста на тој интервал $s_{2^{m-1}+i}(t)$ има график во вид на рамнокрак триаголник со висина еднаква на единица и основа којашто се совпаѓа со отсечката $\left[\frac{i-1}{2^{m-1}}, \frac{i}{2^{m-1}}\right]$.

Графички:





Функциите **1**, t, s_n, $n \ge 2$, формираат база бидејќи ги исполнуваат условите од Теорема I.1.13: (1) е јасно; да покажеме сега дека важи условот (2). Ги земаме точките $t_0 := 0$, $t_1 := 1$ и $t_n = t_{2^{m-1}+i} := \dfrac{2i-1}{2^m}$ $\left(n \ge 2, i = 1,...,2^{m-1}\right)$. Очевидно е дека низата $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ е густа во $[0,1]$. Забележуваме дека $s_0(t_0)=1$, $s_1(t_0)=0$, $s_1(t_1)=1$, $s_2(t_0)=s_2(t_1)=0$, $s_2(t_2)=1$, и во општ случај

$$s_n(t_i)=0 \quad \forall i=0,1,...,n-1 \text{ и } s_n(t_n)=1 \qquad (*)$$

За произволна функција $f \in C[0,1]$ сега дефинираме рекурзивната низа $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ со $a_0 := f(t_0)$, и $a_n := f(t_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k s_k(t_n)$ за $n \ge 1$ (**)

Понатаму дефинираме $p_n(f) := \sum_{k=0}^{n} a_k s_k$. Јасно, $p_n(f) \in lin\{s_0, s_1, ...\}$. Тврдиме дека $\|f - p_n(f)\|_\infty \to 0$, од кадешто ќе следува дека $f \in clin\{s_0, s_1, ...\}$. Прво со индукција ќе покажеме дека по делови линеарната функција $p_n(f)$ (полигонална линија) ги интерполира вредностите на f во точките $t_0, t_1, ..., t_n$, т.е. $p_n(f)$ и f се совпаѓаат во тие точки. Навистина, добиваме $(p_0(f))(t_0) = a_0 s_0(t_0) = a_0 = f(t_0)$, $(p_1(f))(t_0) = a_0 s_0(t_0) + a_1 s_1(t_0) = a_0 = f(t_0)$, $(p_1(f))(t_1) = a_0 s_0(t_1) + a_1 s_1(t_1) = a_0 + a_1 = f(t_1)$. Сега да претпоставиме дека $(p_{n-1}(f))(t_i) = f(t_i)$ $\forall i = 0,1,...,n-1$. Имаме

$$(p_n(f))(t_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k s_k(t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k s_k(t_n) + a_n s_n(t_n) \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k s_k(t_n) + a_n \overset{(**)}{=} f(t_n)$$

а за $i = 0,1,...,n-1$, според индуктивната претпоставка добиваме

$$(p_n(f))(t_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k s_k(t_i) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k s_k(t_n) + a_n s_n(t_i) \overset{(*)}{=} (p_{n-1}(f))(t_i) = f(t_i).$$

Значи, $(p_n(f))(t_i) = f(t_i)$ $\forall i = 0,1,...,n$. Бидејќи $p_n(f)$ е искршена линија, за секои две последователни точки t_U и t_V во природниот поредок на $t_0, t_1, ..., t_n$, т.е. во $0 := t_0 < t_{i_1} < ... < t_U < t_V < ... < t_1 =: 1$, $p_n(f)$ е отсечка од t_U до t_V, па важи $(p_n(f))(\lambda t_U + (1-\lambda)t_V) = \lambda f(t_U) + (1-\lambda) f(t_V)$ $\forall \lambda \in [0,1]$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогаш поради рамномерната непрекинатост на f, постои $\delta > 0$ т.ш.

$$|t' - t''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t') - f(t'')| < \varepsilon \quad \forall t', t'' \in [0,1]$$

Искористувајќи ја сега густината на $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ во $[0,1]$, добиваме дека за ова $\delta > 0$ постои $N \in \mathbb{N}$ т.ш. за секое $n > N$, секои две последователни точки во природниот поредок $0 := t_0 < t_{i_1} < ... < t_{i_n} < t_1 =: 1$ на $t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1}$ се на растојание помало од δ, т.е. важи $\max_{j=1,...,n} \left|t_{i_j} - t_{i_{j-1}}\right| < \delta$ и јасно уште $\left|t_1 - t_{i_n}\right| < \delta$.

За произволно $t \in [0,1]$, t се наоѓа помеѓу некои две последователни точки во $0 := t_0 < t_{i_1} < ... < t_{i_n} < t_1 =: 1$, да речеме помеѓу t_U и t_V, т.е. $t \in [t_U, t_V]$. Бидејќи t се наоѓа на отсечката од t_U до t_V, постои λ, $0 \le \lambda \le 1$, т.ш. $t = \lambda t_U + (1-\lambda) t_V$ Тогаш имаме,

$$\begin{aligned}\left| f(t) - (p_n(f))(t) \right| &= \left| f(t) - (\lambda f(t_U) + (1-\lambda) f(t_V)) \right| = \\ &= \left| \lambda (f(t) - f(t_U)) + (1-\lambda)(f(t) - f(t_V)) \right| \le \\ &\le \lambda \left| f(t) - f(t_U) \right| + (1-\lambda) \left| f(t) - f(t_V) \right| \le \\ &\le \lambda \max_{t',t'' \in [t_U, t_V]} \left| f(t') - f(t'') \right| + (1-\lambda) \max_{t',t'' \in [t_U, t_V]} \left| f(t') - f(t'') \right| = \\ &= \max_{t',t'' \in [t_U, t_V]} \left| f(t') - f(t'') \right| < \varepsilon\end{aligned}$$

Поради произволноста на $t \in [0,1]$, следува дека $\left\| f - p_n(f) \right\|_\infty \le \varepsilon \quad \forall n > N$ и со тоа е покажано дека важи условот (2).
На интервалот на којшто $s_n \ne 0$, сите претходни s_i, $i = 0,1,...,n-1$ се линеарни. Значи, важи условот (3) со М=1. □

Ќе дадеме и база во просторите $L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, што ќе биде содржината на следната теорема. Во доказот ќе искористиме едно неравенство коешто го формулираме како

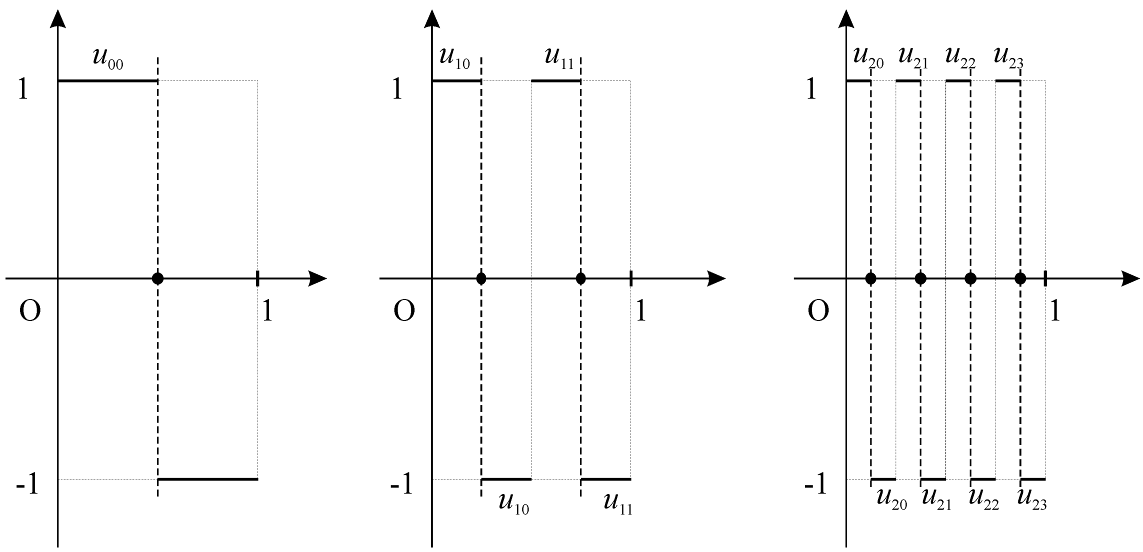
Лема I.3.2 *За произволни реални броеви x и y и* $p \ge 1$ *важи неравенството*

$$2|x|^p \le |x+y|^p + |x-y|^p$$

Доказ. За x = 0 неравенството е тривијално, па затоа претпоставуваме дека $x \ne 0$ и целото неравенство го делиме со $|x|^p$, по што добиваме $2 \le \left|1 + \frac{y}{x}\right|^p + \left|1 - \frac{y}{x}\right|^p$. Ставајќи $t = \frac{y}{x}$ доказот ќе биде готов ако покажеме дека функцијата $f(t) := |1+t|^p + |1-t|^p - 2$ е ненегативна. Очигледно е дека важи $f(t) \ge 0$ за $t \ge 1$ и за $t \le -1$, а за $-1 < t < 1$, $f(t) = (1+t)^p + (1-t)^p - 2$, па ако го искористиме очигледното неравенство $(1+x)^p \ge 1 + px$ за $|x| < 1$, $p \ge 1$ добиваме $f(t) = (1+t)^p + (1-t)^p - 2 \ge (1+pt) + (1-pt) - 2 = 0$ и со тоа се е покажано. □

Теорема I.3.3 *База за* $L^p[0,1], 1 \le p < \infty$, *наречена* ***систем на Хаар***, *формираат функциите* $1, u_{00}(x), u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x), u_{22}(x), u_{23}(x), \ldots$ *кадешто* $u_{kl}(x)$ $(k = 0,1,\ldots; 0 \le l < 2^k)$ *се определува со* $u_{kl}(x) = 0$ *за* $x \notin \left(\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)$, *на првата половина од интервалот* $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ *без средишната точка* $u_{kl}(x)$ *има вредност 1, во средишната точка има вредност 0, и на втората половина од интервалот* $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ *без средишната точка* $u_{kl}(x)$ *има вредност* -1.

Графички



Доказ. Доказот дека функциите формираат база се добива со критериумот од Теорема I.1.13. Навистина, бидејќи $lin\{1, u_{00}, u_{10}, u_{11}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots\}$ ги содржи карактеристичните функции на дијадичките интервали (интервали од облик $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$), јасно е дека важи условот (2) од Теорема I.1.13, т.е. $clin\{1, u_{00}, u_{10}, u_{11}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, \ldots\} = L^p[0,1]$. Треба уште да покажеме дека важи (3). Тој услов важи со M=1 т.е. системот на Хаар е монотона база за $L^p[0,1]$. Нека (a_{kl}) е произволна низа од скалари и нека $f(t) = \sum_{k,l} a_{kl} u_{kl}(t)$ и $g(t) = \sum_{k,l} a_{kl} u_{kl}(t) + a_{k'l'} u_{k'l'}(t)$. и се разликуваат само на некој дијадички интервал I на којшто f има константна вредност b, а g има вредност $b + a_{k'l'}$ на првата половина од I и вредност $b - a_{k'l'}$ на втората поовина од I. Бидејќи за секое $p \ge 1$ според Лема I.3.2 важи $2|b|^p \le |b + a_{k'l'}|^p + |b - a_{k'l'}|^p$, добиваме дека

$$\|g\|^p - \|f\|^p = \int_{I_1} |b + a_{k'l'}|^p + \int_{I_2} |b - a_{k'l'}|^p - \int_{I} |b|^p = \frac{|b + a_{k'l'}|^p + |b - a_{k'l'}|^p}{2^{m+1}} - \frac{|b|^p}{2^m} =$$

$$= \frac{|b + a_{k'l'}|^p + |b - a_{k'l'}|^p - 2|b|^p}{2^{m+1}} \geq 0,$$ т.е. $\|f\| \leq \|g\|$, па исполнет е условот (3). □

За разлика од низа-просторите l^p, $0 < p < 1$, за коишто видовме дека имаат база, за $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, имаме:

Теорема I.3.4 *Просторите* $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, *немаат база.*

Доказ. Просторите $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, се сепарабилни ТВП (простори на Фреше, комплетни во метриката), но немаат база, поради $\left(L^p[0,1]\right)^* = 0$ (види [1] стр. 222, Зад. 33), што е во контрадикција со Теорема I.1.12. □

Шаудерови бази биле конструирани и во многу други важни Банахови простори коишто се појавуваат во анализата. Така на пример, постои база во просторите $C^k\left([0,1]^n\right)$, а во диск алгебрата

$$A\left(\overline{D}\right) := \left\{ f \in C\left(\overline{D}\right) : f \text{ е холоморфна на } D \right\}$$

за којашто долго време се барало база, Бочкарев конструирал една во 1974.

I.4 Монотони и строго монотони бази. Базични низи

Видовме дека за простор X со база (x_n) природните проекции P_n се ограничени и $\sup_n \|P_n\|$ постои и е конечен број, којшто се нарекува базична константа за базата (x_n).

Забележуваме дека поради $\|P_n\| \geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ базичните константи се секогаш поголеми или еднакви на 1.

Дефиниција I.4.1 Базата (x_n) во просторот X се нарекува *монотона* ако нејзината базична константа K е 1.

Значи, со горната забелешка (x_n) е монотона ако и само ако секоја природна проекција P_n има норма 1 т.е. $\|P_n\| = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Пример. Во c_o и l^p, $1 \leq p < \infty$ стандардната база (e_n) од единечни вектори е монотона. Јасно, $\|P_n x\| \leq \|x\|$ и за x : = (1,0,0,...), $\|P_n x\| = 1$

Мора да биде нагласено дека базичната константа K на (x_n) зависи од нормата $\|.\|$ во просторот X. Но X секогаш може да се ренормира со еквивалентна норма $|||.|||$ во однос на којашто (x_n) станува монотона база.

Теорема I.4.2 *Ако (x_n) е база во Банахов простор $(X, \|.\|)$, тогаш постои еквивалентна норма $|||.|||$ во однос на којашто базата (x_n) е монотона.*

Доказ. Нормата $|||.|||$ го прави бараното. Јасно е дека $|||P_n||| \geq 1$ и уште $|||P_n x||| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|P_i x\| \leq \sup_n \|P_n x\| = |||x||| \quad \forall x \in X$ т.е. $|||P_n x||| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, од каде $|||P_n||| = 1$, па $|||.|||$ е монотона норма за (x_n). □

Забелешка: Во Хилбертовиот простор H секоја ортогонална низа (e_n) е монотона базична низа поради

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i\right\|^2$$

Дали секој Банахов простор со база поседува монотона база? Не.

Името “монотона” за база со базична константа 1 било дадено од Малон Деј во 1958, додека постарото име било ортогонални бази, користено за прв пат од Козлов и Џемс во 1950 односно 1951. Монотоните бази своето име го добиле поради еквивалентноста на (i) и (ii) во следната

Теорема I.4.3 *Нека* (x_n) *е база за Банаховиот простор* X. *Тогаш се еквивалентни.*

(i) *Базата* (x_n) *е монотона*

(ii) $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\| \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a_i \in \mathbb{F},\ i = 1,\dots,n+1$

Доказ. • $(i) \Rightarrow (ii)$: Од монотоноста на (x_n) имаме дека $\|P_n\| = 1$, па $\|P_n x\| \leq \|x\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Но тогаш за $x := \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i$, $\|P_n x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq \|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\|$

•• $(ii) \Rightarrow (i)$: Да покажеме дека $\|P_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. За $x \in X$ произволно, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, имаме $\|P_n x\| \leq \|P_{n+1} x\| \leq \|P_{n+2} x\| \leq \dots$ т.е. $\|P_n x\| \leq \|P_m x\| \quad \forall\ m > n$, па од $\|P_n x\| \to \|x\|$ се добива дека $\|P_n x\| \leq \|x\|$, т.е. $\|P_n\| \leq 1$, од каде што следува дека $\|P_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, т.е. базата е монотона. □

Следната дефиниција е мотивирана од претходната Теорема I.4.3

Дефиниција I.4.4 (Крејн, Красноселскиј, Милман, 1948) База за Банахов простор се нарекува *строго монотона* ако $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in \mathbb{F}$, $a_{n+1} \neq 0$.

На пример, (e_n) во l^p, $1 \leq p < \infty$ е строго монотона, додека (e_n) во c_o е монотона, но не е строго монотона база.

Јасно е дека е неопходно еден простор да биде сепарабилен за да поседува база. Фактот дека вообичаените сепарабилни простори имаат база, го навел Банах да го постави проблемот на база во 1932; дали сепарабилен Банахов простор поседува база? (види [3] стр. 111)

Овој проблем долго време останал отворен и бил решен негативно од шведскиот математичар Пер Енфло во 1973 (види [6]).

Дефиниција I.4.5 Низата (x_n) во Банаховиот простор X се нарекува *базична низа* ако таа е Шаудерова база за $clin\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Сега да го разгледаме поедноставното прашање: дали секој бесконечно димензионален Банахов простор содржи базична низа? Односно дали секој бесконечно димензионален Банахов простор содржи бесконечно димензионален потпростор којшто има база. Одговорот е позитивени.
Доказот што ќе го дадеме е последица на една лема на Мазур. Се претпоставува дека Банах го имал овој метод на ум кога тврдел дека има доказ. Суштината во доказот на Лемата на Мазур е во следната забелешка.
За бесконечно димензионален Банахов простор X и конечен број функционали на X, $f_1,\ldots,f_n \in X^*$ постои $x \neq 0$ т.ш. $f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n$. Со други зборови, пресекот на јадрата на конечен број функционали на бесконечно димензионален простор не може да биде тривијален. Да го покажеме тоа. Дефинираме пресликување $F : X \to \mathbb{F}^n$ со $x \mapsto (f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x))$ коешто е линеарно поради линеарноста на пресликувањата f_i. Ако x=0 е единствената точка т.ш. $F(x) = 0$, тогаш F е инјекција во конечно димензионалниот $\mathbb{F}^n$, па значи дека и X е конечно димензионален. Тоа е контрадикција со претпоставката дека X е бесконечно димензионален. Значи мора да постои $x \neq 0$ т.ш. $F(x) = 0$ односно $f_i(x) = 0$.

Лема I.4.6 (Мазур, 1932). *Нека* X *е бесконечно димензионален,* $U \subset$ X *е конечно димензионален потпростор и* $\varepsilon > 0$ *произволно. Тогаш постои* $\|x\| = 1$, *такво што*

$$\|u\| \leq (1+\varepsilon)\|u + \lambda x\| \quad \forall u \in U, \ \forall \lambda \in \mathbb{F}$$

Доказ. Доволно е Лемата да се докаже за сите $u \in U$ со $\|u\| = 1$. S_U е компактна, па постојат $u_1,\ldots,u_n \in S_U$ т.ш. $\forall u \in S_U \quad \exists\, u_i \quad \|u - u_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Со Хан-Банах добиваме дека

$$\exists \ f_i \in \mathrm{X}^*,\ f_i(u_i) = 1 \qquad \text{и} \qquad \|f_i\| = 1 \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

и од направената забелешка

$$\exists \ \|x\| = 1,\ \ f_i(x) = 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Тогаш, за произволно $u \in S_U$, се одбира u_i т.ш. $\|u - u_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, па

$$\|u + \lambda x\| = \|(u - u_i) + (u_i + \lambda x)\| \geq \|u_i + \lambda x\| - \|u - u_i\| \geq f_i(u_i + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\|u\|}{1+\varepsilon}$$

од кадешто следува $\|u\| \leq (1+\varepsilon)\|u + \lambda x\|$ □

Теорема I.4.7 *Секој бесконечно димензионален Банахов простор содржи базична низа.*

Доказ. Од Лемата на Мазур I.4.6, за произволна низа (ε_n) од позитивни броеви $\varepsilon_n > 0$, може индуктивно да се дефинира низа (x_n) т.ш. $\|x_n\| = 1$ и

$$\|x\| \le (1+\varepsilon_n)\|x + \lambda x_{n+1}\| \quad \forall x \in lin\{x_1, ..., x_n\}$$

За дадено $\varepsilon > 0$, (ε_n) може да се одбере т.ш. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) \le 1+\varepsilon$. Нека $\mathrm{K} := \prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)$. Тогаш $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \le \mathrm{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \quad \forall m > n \quad \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$, што значи дека низата (x_n) е базична (според Теорема I.1.13) □

Глава II

Примена на теоријата на бази во функционалната анализа

II.1 Бази и дуалност

Како примена на базите, во овој параграф ќе дадеме карактеризација на рефлексивните простори коишто содржат база. Ќе видиме дека просторот е рефлексивен ако и само ако базата има две својства. Сите изнесени резултати се на Роберт Џемс од 1950 (види [10]). За потсетување

Дефиниција II.1.1 За нормираниот простор X велиме дека е *рефлексивен* ако каноничното пресликување $i: X \to X^{**}$ дефинирано со $i(x) = \hat{x}$ кадешто $\hat{x}(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$ е сурјективно.

Како последица на Теорема I.1.13, се добива дека една низа (x_n) е базична ако и само ако $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, и

$$\exists M \geq 0 \quad \|\sum_{n=1}^{m_1} a_n x_n\| \leq M \|\sum_{n=1}^{m_2} a_n x_n\| \quad \forall m_1 \leq m_2 \; \forall a_i \in \mathbb{F}$$

Нека (P_n) се природните проекции придружени на базата (x_n) и $\left(P_n^*\right)$ се нивните адјунгирани оператори. Веднаш забележуваме дека $P_n^*\left(x_k^*\right) = x_k^*$ за $k \leq n$ и $P_n^*\left(x_k^*\right) = 0$ за $k > n$. Затоа за секој избор на скалари (a_i) и $n < m$, имаме $P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$. Повторно од критериумот за база, т.е. од Теорема I.1.13, ја добиваме

Теорема II.1.2 *Ако* (x_n) *е Шаудерова база во Банаховиот простор X, тогаш* (x_n^*) *е базична низа во* X^*

Доказ.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\right\| = \left\|P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right)\right\| \le \left\|P_n^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\| \le K\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\right\|$$

$\forall a_i \in \mathbb{F}\ i=1,..,m \quad \forall m>n$ □

Поради $\|P_n^*\| = \|P_n\|$ забележуваме дека базичната константа на (x_n^*) е идентична со таа на (x_n). Банах пак, забележал дека ако (x_n) е база за X, тогаш (x_n^*) е база за слаба*-топологијата на X^*. Навистина, од $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ следува $\hat{x}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{x}_n$, па тогаш $\forall x^* \in X^* \quad \hat{x}\left(x^*\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{x}_n\left(x^*\right)$ од кадешто $x^*(x)=\hat{x}\left(x^*\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{x}_n\left(x^*\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^*\left(x_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} x^*\left(x_n\right) x_n^*(x) \quad \forall x \in X$, па затоа $x^*=\sum_{n=1}^{\infty} x^*\left(x_n\right) x_n^*$. Општо, овој развој не конвергира во нормата. Имаме конвергенција во норма за секое $x^* \in X^*$ ако и само ако низата (x_n^*) е база во X^*, т.е. ако и само ако $clin\left\{x_n^*: n \in \mathbb{N}\right\}=X^*$. Значи нужно е X^* да е сепарабилен. Според тоа за $X=l^1$ или за $X=C[0,1]$ова не може да се случи за ниту една база. Ќе покажеме дека ова е секогаш случај кога X е рефлексивен. Претходно забележуваме дека доволен услов за (x_n) да е фундаментална низа, т.е. $clin\left\{x_n: n \in \mathbb{N}\right\}=X$ е $f=0$ да е единствениот функционал коишто ги анулира сите x_n, односно

$f\left(x_n\right)=0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f=0$. Тоа лесно следува од Хан-Банах.

Теорема II.1.3 *Ако X е рефлексивен простор со база* (x_n), *тогаш* (x_n^*) *е база во* X^*.

Доказ 1. Нека $F \in X^{**}$ е т.ш. $F\left(x_n^*\right)=0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. X е рефлексивен па $F=\hat{a}$ за некое $a \in X$. Тогаш $x_n^*(a)=\hat{a}\left(x_n^*\right)=F\left(x_n^*\right)=0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, од кадешто добиваме дека $a=0$, па тогаш и $F=\hat{a}=0$. Од горната забелешка $clin\left\{x_n^*: n \in \mathbb{N}\right\}=X^*$, па (x_n^*) е база во X^*.

Доказ 2. X е рефлексивен ако и само ако слаба*-топологијата на X^* и слабата топологија на X^* се совпаѓаат. Бидејќи (x_n^*) е база во слаба*-топологијата на X^*, важи

$$X^* = \overline{lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}}^{w^*} = \overline{lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}}^{w} = \overline{lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}}$$

што значи дека (x_n^*) е база во X^*. Забележуваме дека последното равенство е последица на добро познатата Теорема на Мазур, според која слабо затворените конвексни множества се затворени множества (види [19], стр.108).

Приметуваме дека условот X да е рефлексивен е доволен услов за (x_n^*) да биде база во X^*, но не е потребен. Така на пример, за нерефлексивниот c_0, $\left(e_n^*\right)$ е база во $l^1 = c_0^*$. Базите (x_n) такви што и (x_n^*) е база во X^* заслужуваат да добијат посебно име.

Дефиниција II.1.4 Нека X е простор со база (x_n). Ако низата од координатни функционали (x_n^*) е база во X^*, тогаш (x_n) се вика *стеснувачка* база.

Подоцна ќе стане јасно како овие бази го добиле своето име. Од веќе изложеното, $\left(e_n\right)$ е стеснувачка база во c_0 и не е стеснувачка база во l^1 (всушност во l^1 ниту една база не е стеснувачка зашто неговиот дуал е несепарабилен). Исто, и $L^1\left[0,1\right]$ нема стеснувачки бази.

Сепак, базата $\left(e_n\right)$ во l^1 има едно својство коешто го нема во c_0. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ е произволен ограничен ред во l^1, т.е. $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| < \infty$. Тогаш $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| < \infty$, што значи дека редот конвергира апсолутно, па тогаш конвергира и во норма. Во c_0, $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ е ограничен ред зашто $\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, но $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ не конвергира. Значи, $\left(e_n\right)$ во c_0 не е ограничено потполна база. $L^1\left[0,1\right]$ повторно лошо се однесува и воопшто нема ограничено потполни бази, факт којшто следува од Теоремата на Гелфанд и Теорема III.2.8 - за овие резултати ќе зборуваме во Глава III. Овие разгледувања нè мотивираат да ја дадеме

Дефиниција II.1.5 Нека X е простор со база (x_n). Ако секој ограничен ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ во X конвергира, тогаш (x_n) се вика *ограничено потполна база.*

Рефлексивноста е едно многу фино својство и ќе видиме дека таа повторно е доволна за една база (x_n) да биде ограничено потполна. Но не е потребна-пример е нерефлексивниот l^1 со ограничено потполна база $\left(e_n\right)$. Следната Лема е централна за наредните резултати.

Лема II.1.6 *Нека* (x_n) *е база во Банахов простор X. Тогаш редот* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *е ограничен во X ако и само ако постои* $F \in X^{**}$ *такво што* $F(x_n^*) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека $F \in X^{**}$ е произволно. Да покажеме дека $\sum_{n=1}^{\infty} F(x_n^*) x_n$ е ограничен ред. Според UBP за ограниченоста на $\sum_{n=1}^{\infty} F(x_n^*) x_n$ доволно е $\sum_{n=1}^{\infty} F(x_n^*) f(x_n)$ да биде ограничен за секој $f \in X^*$, од каде поради линеарноста и непрекинатоста на F, доволно е $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) x_n^*$ да биде ограничен. Повторно поради UBP, за последниот ред да биде ограничен, доволно е $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) x_n^*(a)$ да биде ограничен за секој $a \in X$, а поради линеарноста и непрекинатоста на f, доволно е $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(a) x_n$ да е ограничен. Но (x_n) е база и последниот ред конвергира кон a, па е ограничен.

Сега обратно, нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ е ограничен ред. x_n^* се линеарно независни, па постои линеарен функционал F дефиниран на $lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}$ т.ш. $F(x_n^*) = a_n$. Уште повеќе, тој е непрекинат на $lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}$. Навистина, од $f = \sum_{n=1}^{m} t_n x_n^*$, следува $\left|F(f)\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} t_n a_n\right| = \left| f\left(\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right)\right| \le M \|f\|$, каде $M = \sup_N \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right\| < \infty$ по претпоставка. Од Теоремата на Хан-Банах, F може да се прошири т.ш. да биде дефиниран и непрекинат на целиот X^*. □

Теорема II.1.7 *Нека X е рефлексивен простор со база* (x_n). *Тогаш* (x_n) *е ограничено потполна база.*

Доказ. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ е ограничен ред. Да покажеме дека конвергира. Од Лема II.1.6 постои $F \in X^{**}$, т.ш. $F(x_n^*) = a_n$, а поради рефлексивноста на X, $F = \hat{a}$. Добиваме $a_n = \hat{a}\left(x_n^*\right) = x_n^*\left(a\right)$. Но тогаш $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*\left(a\right) x_n = a$, т.е. редот конвергира . □

Можеме ли да најдеме простор X со база (x_n) којашто ќе биде и стеснувачка и ограничено потполна, а X да не биде рефлексивен? Такво нешто не е можно. Тоа е фундаменталната карактеризација на рефлексивните простори со база на Џемс од 1950.

Теорема II.1.8 *Нека X е Банахов простор со база $\left(x_n\right)$. Тогаш X е рефлексивен ако и само ако $\left(x_n\right)$ е стеснувачка и ограничено потполна.*

Доказ 1. • $\Rightarrow$: Тоа се Теорема II.1.3 и Теорема II.1.7.

• $\Leftarrow$ (Условот е доволен) Нека $\left(x_n\right)$ е стеснувачка и ограничено потполна база во X. Да покажеме дека X е рефлексивен. Па нека $F \in X^{**}$ е произволен. Од Лема II.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} F\left(x_n^*\right) x_n$ е ограничен, па по претпоставка конвергира. Нека $a = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(x_n^*\right) x_n$. Ќе покажеме дека $F = \hat{a}$. За $f \in X^*$ произволно

$$\hat{a}(f) = f(a) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} F\left(x_n^*\right) x_n\right) = F\left(\sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_n\right) x_n^*\right) = F(f) \quad \forall f \in X^*,$$

бидејќи x_n^* е база во X^*. Значи $F = \hat{a}$, па просторот е рефлексивен.

Доказ 2. Се темели на длабоката Теорема I.0.10 за карактеризација на рефлексивни простори преку низи. Во доказот се користи уште и резултатот дека ако низата $\left(x_n\right)$ слабо конвергира кон x на некое густо подмножество $D \subset X^*$, тогаш $\left(x_n\right)$ слабо конвергира кон x. Нека $\left(y_k\right)$ е ограничена низа во X и б.о.н.о. (без ограничување на општоста) нека $\left\|y_k\right\| = 1$. Треба да покажеме дека $\left(y_k\right)$ има слабо конвергентна подниза. Со дијагоналниот аргумент може да се добие подниза $\left(y_{k_m}\right)$ т.ш. постои $a_n := \lim_m x_n^*\left(y_{k_m}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ќе покажеме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ е ограничен ред . $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lim_m P_n y_{k_m}$, па затоа $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \le \sup_n \left\|P_n\right\| = K$. Под претпоставка, редот конвергира, т.е. $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Тогаш $a_n = \lim_m x_n^*\left(y_{k_m}\right) = x_n^*(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и пак под претпоставка $X^* = \overline{lin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}}$. Од горната забелешка $\left(y_{k_m}\right)$ слабо конвергира кон y. Значи, добивме слабо конвергентна подниза од произволната ограничена низа $\left(y_k\right)$. Од Теоремата I.0.10 X е рефлексивен.

II.2 Просторот на Џемс

За рефлексивните простори X каноничното пресликување $i : X \to X^{**}$ дефинирано со $i(x) = \hat{x}$ кадешто $\hat{x}(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$ е сурјективно и уште е изометрија, $\left\|\hat{x}\right\| = \|x\|$, па јасно е дека бидуалот X^{**} на рефлексивен простор X е изометрички изоморфен со X^{**}, $X \cong X^{**}$. Дури Банах претпоставувал дека обратното е исто така точно: ако $X \cong X^{**}$, тогаш X е рефлексивен, т.е. i е сурјекција. Друга сродна хипотеза на Банах била дека ако X^{**} е сепарабилен, тогаш X е рефлексивен. Овие две претпоставки на Банах се одржале прилично долго време- се до 1951 кога Роберт Џемс ги побил со својата работа (види [11]). Тој го дал првиот противпример- сепарабилен простор X изометрички изоморфен со X^{**} којшто не е рефлексивен. Како што заслужува, просторот го добил името “простор на Џемс”. Тој е првиот некласичен простор во функционалната анализа. Со него Џемс извршил Коперникова револуција. Претходно се се вртело околу рефлексивноста и на некој начин рефлексивноста била центар на се. Џемс покажал дека не е така.

Да го претставиме сега овој простор и да ги покажеме неговите својства. Започнуваме со c_0. За $x = (x_n) \in c_0$, дефинираме

$$\|x\|_J := \sup_{\substack{n_1 < \ldots < n_r \\ r \in \mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right|^2 + \left| x_{n_r} - x_{n_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in [0, \infty]$$

кадешто супремумот се зема по сите растечки поднизи од природни броеви со должина $r, r \in \mathbb{N}$.
Го разгледуваме сега

$$J := \left\{ x \in c_0 : \|x\|_J < \infty \right\}$$

Јасно е дека $\left(J, \|\ \|_J\right)$ е нормиран простор. $\|x + y\|_J \le \|x\|_J + \|y\|_J$ следува од Коши-Шварц.

Следно нешто е да покажеме дека $\left(J, \|\ \|_J\right)$ е Банахов простор. За тоа ќе мораме да разгледуваме низи од елементите на J, односно низи од низи. Се чини дека употребата на двојни индекси како во сите стандардни докази е неизбежна. Сепак, ќе можеме да ги избегнеме ако воведеме една нова ознака. За растечка низа од r природни броеви $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$, нека

$$\|x\|_J^r := \sup_{n_1 < \ldots < n_r} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right|^2 + \left| x_{n_r} - x_{n_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Јасно е дека со Коши-Шварц важи $\|x + y\|_J \le \|x\|_J + \|y\|_J$

Теорема II.2.1 *Просторот на Џемс* $\left(J, \|\ \|_J\right)$ *е Банахов простор.*

Доказ. Нека $\left(x^n\right)$ е Кошиева низа во J. На следниот начин ќе покажеме дека конвергира: за $x^n = \left(x_k^n\right)_{k=1}^{\infty}$ покажуваме дека постои $\lim_n x_k^n =: x_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, и дека за $x := \left(x_k\right)$ $\left\|x^n - x\right\|_J \to 0$ (Ова е единственото место кајшто употребуваме двојни индекси).

Најпрво за дадено $\varepsilon > 0$ одбираме природен број N т.ш.

$$\left\|x^n - x^m\right\|_J < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N$$

Но тогаш за фиксно к = 1,2,....

$$\left|x_k^n - x_k^m\right| \leq \left\|x^n - x^m\right\|_J < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N$$

што значи дека $\left(x_k^n\right)_{k=1}^{\infty}$ е Кошиева скаларна низа, па конвергира. Значи постои $\lim_n x_k^n =: x_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Нека $x := \left(x_k\right)$. Сега ќе покажеме дека $\left\|x^n - x\right\|_J \to 0$. Нека $r \in \mathbb{N}$ е произволно и нека $n_1 < n_2 < ... < n_r$ е исто така призволна растечка низа од точно r природни броеви. Поради $\lim_n x_{n_i}^n = x_{n_i}$, постои $m_0 = m_0\left(\varepsilon, r\right)$ т.ш.

$$\left\|x^{m_0} - x\right\|_J^r < \varepsilon$$

Б.о.н.о. смее $m_0 \geq N$ да биде претпоставено, па значи за сите $n \geq N$ важи

$$\left\|x^n - x\right\|_J^r \leq \left\|x^n - x^{m_0}\right\|_J^r + \left\|x^{m_0} - x\right\|_J^r \leq \left\|x^n - x^{m_0}\right\|_J + \varepsilon < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Значи, за произволно $r \in \mathbb{N}$, од една страна се добива дека

$$\left\|x\right\|_J^r \leq \left\|x - x^N\right\|_J^r + \left\|x^N\right\|_J^r < 2\varepsilon + \left\|x^N\right\|_J =: M < \infty$$

т.е. $x \in J$, а од друга страна од $\left\|x^n - x\right\|_J \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$ $\left\|x^n - x\right\|_J^r < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$, ако се земе супремум по сите $r \in \mathbb{N}$, се добива $\left\|x^n - x\right\|_J \leq 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$, односно $\left\|x^n - x\right\|_J \to 0$ и доказот е завршен. □

Следно нешто е да покажеме дека просторот на Џемс не е рефлексивен и за таа цел го користиме Критериумот на Џемс за рефлексивност преку бази, т.е. Теорема II.1.8. Но најпрво да покажеме дека просторот на Џемс е простор со база.

Теорема II.2.2 *Низата (e_n) од стандардни единични вектори е база во просторот на Џемс $(J, \| \ \|_J)$ којашто не е ограничено потполна.*

Доказ. Нека $x = (x_n) \in J$ е произволно. Ќе покажеме дека
$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_J = \left\| (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \right\|_J \to 0$. Нека $\varepsilon > 0$ и $r \in \mathbb{N}$ се произволни.
$(x_n) \in c_0$, односно $x_n \to 0$. Затоа постои $N \in \mathbb{N}$ т.ш.

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{r}} \quad \forall n \geq N \text{, па тогаш } |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{r}} \quad \forall n, m \geq N .$$

Тогаш за произволна растечка низа $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$ со $n_1 \geq N$, важи

$$\left(\sum_{k=1}^{r-1} \left| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right|^2 + \left| x_{n_r} - x_{n_1} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

па затоа $\forall n \geq N$ ќе важи $\left\| x - \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\|_J^r \leq \varepsilon$, што значи дека

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_J \to 0 , \ n \to \infty$$

па (e_n) е база за $(J, \| \ \|_J)$.
$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_J = \left\| (1, \ldots, 1, 0, \ldots) \right\|_J = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, но $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ не конвергира од кадешто добиваме дека (e_n) не е ограничено потполна база за $(J, \| \ \|_J)$ □

Теорема 2.3 *Просторот на Џемс $(J, \| \ \|_J)$ е сепарабилен нерефлексивен простор.*

Доказ. $(J, \| \ \|_J)$ има база (e_n), но таа не е ограничено потполна база, па од Критериумот на Џемс, Теорема II.1.8, $(J, \| \ \|_J)$ не е рефлексивен. □

Ни остана да покажеме дека иако $i(J) \subsetneq J^{**}$ т.е. J е нерефлексивен, сепак важи $J \cong J^{**}$. За тоа ќе ни треба опис на бидуалот X^{**} на простор X којшто има стеснувачка база. Ќе се испостави дека базата на J е стеснувачка. Во претходниот параграф стеснувачките бази ги дефиниравме на малку поинаков начин од стандардниот. Сега ќе стане јасно (тоа е стандардната дефиниција) зошто се викаат “стеснувачки”.

Теорема II.2.4 *Нека (x_n) е база во Банаховиот простор X. Тогаш се еквивалентни*

(i) (x_n) *е стеснувачка база*

(ii) $\lim_m \|x^*\|_m = 0 \quad \forall x^* \in X^*$ *, кадешто* $\|x^*\|_m$ *е норма на рестрикцијата на* x^* *на* $clin\{x_n : n > m\}$

(затоа името стеснувачка (shrinking) база)

Доказ. $\bullet (i) \Rightarrow (ii)$: Нека $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n^* \in X^*$ е произволно. Тогаш

$$\|x^*\|_m = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} b_i x_i^* \right\|_m \le \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} b_i x_i^* \right\| \to 0$$

односно важи (ii)

$\bullet (ii) \Rightarrow (i)$: Нека $\lim_m \|x^*\|_m = 0 \quad \forall x^* \in X^*$. Треба да покажеме дека (x_n^*) е база во X^*, односно дека $X^* = clin\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$. Нека K е базичната константа на (x_n). За произволно $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$, важи

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \right\| \le \|x\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \le (1+K)\|x\|$$

па тогаш за произволно $x^* \in X^*$ имаме

$$\left| \left(x^* - \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^* \right)(x) \right| = \left| x^* \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i \right) \right| \le \|x^*\|_n (1+K)\|x\|$$

од кадешто

$$\left\| x^* - \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) x_i^* \right\| \le \|x^*\|_n (1+K) \to 0$$

што значи дека $x^* \in clin\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, т.е. (x_n) е стеснувачка база. □

Теорема II.2.5 *Базата* (e_n) *на* $(J, \| \ \|_J)$ *е стеснувачка.*

Доказ. Да претпоставиме дека не е. Тогаш за некое $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ и некоја нормализирана блок база (u_k) на (e_n) би имале $x^*(u_k) \ge \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Сега, користејќи ја еквивалентната норма $|||.|||_J$ на $\|.\|_J$, дефинирана со

$$|||x|||_J := \sup_{n_1 < \ldots < n_r} \left(\sum_{k=1}^{r-1} \left| x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

се покажува дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{k}$ конвергира кон некое $u \in J$. Но тогаш

$$x^*(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^*(u_k)}{k} \ge \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$$

а тоа е контрадикција. Да ги дадеме сега деталите на доказот. Очигледно е дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}$ конвергира кон некое $u\in c_0$. Ќе покажеме уште повеќе, имено дека $u\in J$. Значи $u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}$, при што $u_k=\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} b_i e_i$. Ставаме $n_0:=0$, к=1,2,... Веднаш да направиме две забелешки. Првата е дека $|||u_k|||\geq\left|b_i-b_j\right| \quad \forall i,j$ т.ш. $n_{k-1}+1\leq i,j\leq n_k$, а втората дека $\left|b_i\right|\leq 1 \quad \forall i\in\mathbb{N}$ што следува од $|||u_k|||_J=1$. Нека $u=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$ т.е. $u=\left(a_1,a_2,a_3,\ldots\right)$. Тогаш поради

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} b_i e_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k\,,$$

добиваме дека $a_i=\frac{1}{k}b_i\,,\quad i=n_{k-1}+1,\ldots,n_k\,;\ k=1,2,\ldots$ т.е. тоа е формата на членовите a_i коишто припаѓаат на едно исто блокче u_k/k. Ја разгледуваме сега сумата $\sum_{k=1}^{r-1}\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2$. Ќе покажеме дека за произволно $r\in\mathbb{N}$ и произволна растечка низа $n_1<n_2<\ldots<n_r$ таа е конечна, од кадешто ќе следува дека навистина $u\in J$. Сумата $\sum_{k=1}^{r-1}\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2$ може да се раздели на две суми,

$$\sum_{k=1}^{r-1}\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2=\sum_{k,\,a_{n_{k+1}},\,a_{n_k}\in u_n/n}^{(a)}|\ldots|\;+\sum_{\substack{k,\,a_{n_{k+1}}\in u_{n+m}/(n+m)\\ a_{n_k}\in u_n/n}}^{(b)}|\ldots|$$

Во првата сума (a) се сумира по оние членови $\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2$ за коишто и $a_{n_{k+1}}$ и a_{n_k} припаѓаат на едно исто блокче u_n/n, а во втората сума (b) се сумира по оние членови $\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2$ за коишто $a_{n_{k+1}}$ и a_{n_k} припаѓаат на различни блокчиња $u_{n+m}/\left(n+m\right)$ и u_n/n.

Останува уште да се оценат двете суми и да се покаже дека не може да бидат бесконечни од кадешто ќе следува тврдењето $u\in J$. Во случајот под (a) имаме $\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2=\left|\frac{b_i-b_j}{n}\right|^2\leq\frac{|||u_n|||^2}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ при што првото неравенството е горе направената прва забелешка. Според тоа, сумата под (a) е ограничена со конвергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Во случајот под (b) имаме $\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2=\left|\frac{b_i}{n+m}-\frac{b_j}{n}\right|^2\leq\left(\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n}\right)^2$ при што неравенството следува од втората забелешка. Според тоа, сумата под (b) е ограничена со конвергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Во секој случај за целата сума $\sum_{k=1}^{r-1}\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2$ важи $\sum_{k=1}^{r-1}\left|a_{n_{k+1}}-a_{n_k}\right|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, па значи $|||u|||_J \le \left(5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ односно $u \in J$ и со тоа доказот е завршен. □

Да ја дадеме сега карактеризацијата на бидуалниот простор на простор со стеснувачка база.

Теорема II.2.6 *Нека* (e_n) *е стеснувачка база за X. Тогаш кореспонденцијата* $x^{**} \leftrightarrow \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right)$ *е алгебарски изоморфизам на* X^{**} *со просторот* $\left\{(a_n) : \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| < \infty\right\}$. *Ако* (e_n) *е монотона база, тогаш* $\left\|x^{**}\right\| = \lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|$

Доказ. Нема загуба на општоста ако претпоставиме дека (e_n) е монотона база. Во тој случај лимесот $\lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|$ постои. Ќе покажеме дека линеарното пресликување дефинирано со $x^{**} \to \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right)$ е инјекција.
Под претпоставка $\left(e_n^*\right)$ е база за X^*, па секое $x^{**} \in X^{**}$ е потполно определено со своите вредности на $\left(e_n^*\right)$. Тоа значи дека ако $\left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right) = \left(y^{**}\left(e_n^*\right)\right)$, тогаш $x^{**} = y^{**}$, т.е. $x^{**} \to \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right)$ е инјекција.
Нека сега $x^{**} \in X^{**}$ и $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n^* \in X^*$ се произволни. Тогаш

$$\left|x^{**}\left(x^*\right)\right| = \lim_n \left|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)a_i\right| = \lim_n \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right)\right| \le \lim_n \left\|x^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|, \text{ па}$$

$$\left\|x^{**}\right\| \le \lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|$$

Но од Хан-Банах, за $\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i \in X$ постои $x^* \in B_{X^*}$ т.ш.

$$x^*\left(\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|$$

затоа лимесот се достигнува, па важи $\left\|x^{**}\right\| = \lim_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}\left(e_i^*\right)e_i\right\|$.

Останува да покажеме уште дека $x^{**} \to \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right)$ е сурјекција. Па нека $\left(a_n\right)$ е низа т.ш. $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \le M$. Дефинираме линеарен функционал x^{**} со

$$x^{**}\left(x^*\right) := \lim_n x^*\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right)$$

којшто е добро дефиниран поради тоа што $\left(e_n\right)$ е стеснувачка база.
Да покажеме дека е ограничен. Од $\left|x^{**}\left(x^*\right)\right| \le M \left\|x^*\right\|$, следува дека $\left\|x^{**}\right\| \le M$ т.е. $x^{**} \in X^{**}$. Исто така од $x^{**}\left(x^*\right) = \lim_n x^*\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right)$, следува дека $x^{**}\left(e_n^*\right) = a_n$, па тогаш $x^{**} \to \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right) = \left(a_n\right)$, односно пресликувањето $x^{**} \to \left(x^{**}\left(e_n^*\right)\right)$ е сурјекција. □

Со помош на ова поистоветување на X^{**} со $\left\{\left(a_n\right) : \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| < \infty \right\}$ (кога $\left(e_n\right)$ е стеснувачка база во X), сега сме во состојба да ја докажеме главната теорема во овој параграф.

Теорема II.2.7 *Просторот на Џемс* $\left(J, \| \ \|_J\right)$ *не е рефлексивен, но е изометрички изоморфен со својот бидуал* J^{**}.

Доказ. Од Теоремите II.2.5 и II.2.6 добиваме дека

$$J^{**} = \left\{\left(a_n\right) : \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| < \infty \right\}$$

Ќе покажеме дека $J^{**} \subseteq c$ или еквивалентно, ако $\left(a_n\right) \notin c$, тогаш $\left(a_n\right) \notin J^{**}$. Па ако не постои $\lim_n a_n$, тогаш постојат $\varepsilon > 0$ и низи $\left(p_n\right)$ и $\left(q_n\right)$ т.ш. $\left|a_{p_n} - a_{q_n}\right| \ge \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$\left\| \sum_{n=1}^{q_m} a_n e_n \right\| \ge \left(\left|a_{p_1} - a_{q_1}\right|^2 + \left|a_{q_1} - a_{p_2}\right|^2 + \ldots + \left|a_{q_m} - a_{p_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{\frac{m}{2}}\, \varepsilon$$

па $\left(a_n\right) \notin J^{**}$. Значи, ако $\left(a_n\right) \in J^{**}$, тогаш постои $\lim_n a_n$, па J^{**} се опишува на ист начин како J, освен што се исклучува рестрикцијата $\lim_n x_n = 0$ за $x \in J$. Со други зборови, J^{**} е линеарна обвивка на J и низата $(1,1,\ldots)$, т.е. $J^{**} = lin\left\{i\left(J\right), e_0\right\}, \quad e_0 = (1,1,\ldots)$. Пресликувањето $T : J^{**} \to J$, дефинирано со $\left(x_1, x_2, \ldots\right) = x \mapsto \left(-\lambda, x_1 - \lambda, x_2 - \lambda, \ldots\right)$, кадешто $\lambda := \lim_n x_n$ е јасно изометрички изоморфизам. Јасно е и дека е сурјекција. За $x = \left(x_1, x_2, \ldots\right) \in J$,

$\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...\right)=\left(x_2,x_3,...\right)-x_1e_0\in J^{**}$ и $\left(x_2-x_1,x_3-x_1,...\right)\to\left(x_1,x_2,...\right)=x$. Останува да се покаже дека T е изометрија, односно дека $\|Tx\|_J=\|x\|_{J^{**}}$. Тука ќе ја користиме Теорема II.2.6. Според неа, нормата на елементот $\left(x_n\right)$ во J**, по направената идентификација, е еднаква на супремумот по сите конечни делови на $\left(x_n\right)$ во J, т.е. $\left\|\left(x_1,x_2,...\right)\right\|_{J^{**}}=\sup\limits_m\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J$. Прво ја пресметуваме $\|Tx\|_J$. $\|Tx\|_J=\left\|\left(-\lambda,x_1-\lambda,x_2-\lambda,...\right)\right\|_J$. Потсетуваме дека

$$\|x\|_J:=\sup_{\substack{n_1<...<n_r\\ r\in\mathbb{N}}}\left(\sum_{k=1}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_{n_r}-x_{n_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\in\left[0,\infty\right]$$

Се разгледуваат два случаи: дали во растечката подниза индекси $n_1<n_2<...<n_r$, $n_1=1$ или $n_1>1$. Во првиот случај $\left\|\left(-\lambda,x_1-\lambda,x_2-\lambda,...\right)\right\|_J=\sup\limits_{\substack{1=n_1<...<n_r\\ r\in\mathbb{N}}}\left(\left|x_m\right|^2+\sum\limits_{k=2}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Во вториот случај $\left\|\left(-\lambda,x_1-\lambda,x_2-\lambda,...\right)\right\|_J=\sup\limits_{\substack{n_1<...<n_r\\ r\in\mathbb{N}}}\left(\sum\limits_{k=1}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_{n_r}-x_{n_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Во секој случај,

$$\|Tx\|_J=\left\|\left(-\lambda,x_1-\lambda,x_2-\lambda,...\right)\right\|_J=\max\begin{cases}\sup\limits_{\substack{1=n_1<...<n_r\\ r\in\mathbb{N}}}\left(\left|x_m\right|^2+\sum\limits_{k=2}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ \sup\limits_{\substack{n_1<...<n_r\\ r\in\mathbb{N}}}\left(\sum\limits_{k=1}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_{n_r}-x_{n_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{cases}\qquad(1)$$

Да ја пресметаме сега $\|x\|_{J^{**}}$. $\|x\|_{J^{**}}=\left\|\left(x_1,x_2,...\right)\right\|_{J^{**}}=\sup\limits_m\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J$. Во пресметувањето на $\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J$ повторно разгледуваме два случаи: дали во растечката подниза индекси $n_1<n_2<...<n_r$, $n_r\le m$ или $n_r>m$. Во првиот случај $\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J=\sup\limits_{n_1<...<n_r}\left(\sum\limits_{k=1}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_{n_r}-x_{n_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, додека во вториот случај $\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J=\sup\limits_{\substack{n_1<...<n_r\\ n_r>m}}\left(\left|x_{n_1}\right|^2+\left|x_{n_{r-1}}\right|^2+\sum\limits_{k=1}^{r-2}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Во секој случај

$$\|x\|_{J^{**}}=\sup_m\left\|\left(x_1,x_2,...,x_m,0,...\right)\right\|_J=\max\begin{cases}\sup\limits_{n_1<...<n_r}\left(\sum\limits_{k=1}^{r-1}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2+\left|x_{n_r}-x_{n_1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ \sup\limits_{\substack{n_1<...<n_r\\ n_r>m}}\left(\left|x_{n_1}\right|^2+\left|x_{n_{r-1}}\right|^2+\sum\limits_{k=1}^{r-2}\left|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{cases} \tag{2}$$

Како што нема разлика помеѓу ознаките $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$, исто така, со еден остар поглед се забележува дека нема разлика помеѓу (1) и (2). Се работи за еден ист број во два различни записи. Со тоа покажавме дека $\|Tx\|_J=\|x\|_{J^{**}}$ и T е изометрија. □

Глава III

Безусловни бази

III.1 Општа теорија на безусловно конвергентни редови

Постоењето на база во Банахов простор не дава многу информации за структурата на просторот. Ако сакаме подетално да ја проучуваме структурата на Банаховиот простор користејќи бази, мораме да разгледуваме бази со различни специјални својства. Без сомнение, најкорисна и најпроучувана специјална класа на бази е таа на безусловните бази.

Пред да ги изучуваме безусловните бази, ќе презентираме неколку општи факти коишто се однесуваат на безусловната конвергенција.

Дефиниција III.1.1 Редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ во Банахов простор X се нарекува *безусловно конвергентен* ако за секоја пермутација π на $\mathbb{N}$ редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ е конвергентен.

Теорема III.1.2 *За редот* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *во Банахов простор, следните искази се еквивалентни.*

(i) *Редот* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *конвергира безусловно*

(ii) *Редот* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ *конвергира за секоја строго растечка низа* $n_1 < n_2 < n_3 < .....$ *од природни броеви*

(iii) *Редот* $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ *конвергира за секоја низа од знаци* (θ_n), *т.е.* $\theta_n = \pm 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) *За секое* $\varepsilon > 0$ *постои природен број* k, *таков што за секое конечно подмножество* A *од* $\mathbb{N}$ *со* $\min A \geq k$ *важи* $\left\| \sum_{n \in A} x_n \right\| < \varepsilon$.

Доказ. Еквиваленцијата на (ii) и (iii) очигледна. Нека важи (iv) и нека $n_1 < n_2 < n_3 < .....$ е произволна низа. Постои $p \in \mathbb{N}$ така што $n_p \geq k$, па тогаш $\forall q \geq p$ $\left\| \sum_{i=p}^{q} x_{n_i} \right\| < \varepsilon$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ е Кошиева, па важи (ii). Слично, за произволна пермутација π на $\mathbb{N}$, постои $n \in \mathbb{N}$ така што, $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)\} \supset \{1, 2, ..., k\}$, па тогаш $\left\| \sum_{i=n}^{m} x_{\pi(i)} \right\| < \varepsilon$ $\forall m \geq n$, што значи дека $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ е Кошиев ред, па конвергира. Значи, покажавме $(iv) \to (i)$ и $(iv) \to (ii)$.

Нека сега не важи (iv), т.е. $\exists \varepsilon > 0$ така што $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists A \subset \mathbb{N}$ конечно со $\min A \geq k$ и $\left\| \sum_{n \in A} x_n \right\| \geq \varepsilon$

Така , за $k_1 := 1$, нека A_1 е соодветното конечно множество со $\left\| \sum_{n \in A_1} x_n \right\| \geq \varepsilon$

Нека $A_1^{'}$ е т.ш. $\{1\} \cup A_1 \cup A_1^{'} = \{1, 2, ..., \max A_1\}$

За $k_2 := \max A_1$, нека A_2 е конечно со $\min A_2 \geq k_2$ и $\left\| \sum_{n \in A_2} x_n \right\| \geq \varepsilon$ и $A_2^{'}$ е пак дополнувањето, т.е. $\{1\} \cup \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_1^{'} \cup \mathrm{A}_2 \cup A_2^{'} = \{1, 2, ..., \max \mathrm{A}_2\}$

За $k_3 := \max \mathrm{A}_2$ постои конечно A_3 т.ш. $\min \mathrm{A}_3 \geq k_3$ и и.т.н. индуктивно се добиваат конечни множества (A_k) т.ш. $\left\| \sum_{n \in \mathrm{A}_k} x_n \right\| \geq \varepsilon$

Ако ги земеме елементите од $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n$ да ја формираат поднизата $n_1 < n_2 < ...$,ако A_k почнува со n_k, а завршува со n_m, тогаш $\left\| \sum_{i=k}^{m} x_{n_i} \right\| \geq \varepsilon$, па $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ не е Кошиев, т.е. не важи (ii).

Исто така, јасно е дека $\pi :\ 1, A_1, A_1^{'}, A_2, A_2^{'}$ е една пермутација на $\mathbb{N}$, па ако A_k започнува со a_k, а завршува со b_k, тогаш $\left\| \sum_{n=a_k}^{b_k} x_{\pi(n)} \right\| = \left\| \sum_{n \in A_k} x_n \right\| \geq \varepsilon$ т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ не е Кошиев ред и $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ не конвергира безусловно , т.е. не важи (i).

Покажавме значи дека $(ii) \Rightarrow (iv)$ и $(i) \Rightarrow (iv)$ и со тоа доказот е завршен. □

Последица III.1.3. *Ако редот* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *во Банаховиот простор конвергира безусловно, тогаш* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *за секоја пермутација* π *на* $\mathbb{N}$.

Доказ. Ќе го прифатиме без доказ фактот дека ако скаларниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира безусловно, тогаш $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

За произволно $f \in X^*$, $f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\pi(n)}\right)$ конвергира т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\pi(n)}\right)$ е безусловно конвергентен скаларен ред. $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_n\right)$ $\forall \pi$ на $\mathbb{N}$

Ако претпоставиме дека постојат две пермутации π_1 и π_2 на $\mathbb{N}$ т.ш. $x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_1(n)} \neq \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_2(n)} = x_2$, тогаш од Хан-Банах постои $f \in X^*$ т.ш. $f(x_1) \neq f(x_2)$ т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\pi_1(n)}\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_{\pi_2(n)}\right)$, а тоа е контрадикција. □

Забележуваме дека во Хилбертов простор е многу едноставно да се даде пример на безусловно конвергентен ред којшто не конвергира апсолутно. Таков пример е $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$. Во Банахови простори таква конструкција не лежи при пака.

Да потсетиме, за редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ велиме дека конвергира апсолутно ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ е конвергентен. За $X = \mathbb{F}$ (односно $\mathbb{F}^n$) како што е познато, важи еквивалентност на апсолутната и безусловната конвергенција. Во бесконечно димензионалните простори ова се различни поими, зашто Теоремата на Дворецки-Роџерс од 1950 гласи :

- *Во секој бесконечно димензионален Банахов простор постои безусловно конвергентен ред којшто не конвергира апсолутно.*

Инаку секогаш важи импликацијата:

Апсолутна конвергенција $\Rightarrow$ Безусловна конвергенција

Поточно, Теоремата на Дворецки-Роџерс гласи :

Теорема III.1.4 *Нека X е бесконечно димензионален Банахов простор. За* (λ_n), $\lambda_n > 0$, *со* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, *постои безусловно конвергентен ред* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *во* X *со* $\|x_n\| = \lambda_n$

Поради $l^1 \subsetneq l^2$, јасно е дека ако низата $(\lambda_n), \lambda_n > 0$ се избере т.ш. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\ 2} < \infty$, но $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, тогаш безусловно конвергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ во X со $\|x_n\| = \lambda_n$ чијашто егзистенција ја тврдиме, нема да биде апсолутно конвергентен. Да покажеме сега дека таков ред постои во X. Доказот на Теоремата на Дворецки-Роџерс се потпира на Теорема III.1.2 (iii) и еден резултат од локалната теорија на Банахови простори којшто го формулираме како

Лема III.1.5 *Нека X е Банахов простор со* $\dim X = n^2$ *и норма* $||.||$. *Тогаш постои потпростор* Y *со* $\dim Y = n$ *и Хилбертова норма* $|||.|||$ *на* Y *т.ш.* $\|y\| \leq ||| y |||$ $\forall y \in Y$ *и постои ортонормирана база* (y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ *на* Y *т.ш.* $\|y_i\| \geq 1/8 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказ. Нека $(b_i, b_i^*), i = 1, 2, \ldots, n^2$ е *база на Ауербах* за X ((b_i) и (b_i^*) се бази во X и X* соодветно т.ш. $\|b_i\| = \|b_i^*\| = 1$ и $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$). Ставаме $||| x |||_1 := n\left(\sum_{j=1}^{n^2} b_j^*(x)^2\right)^{1/2}$. Тогаш $|||\,.\,|||_1$ е јасно Хилбертова норма на X затоа што потекнува од скаларниот производ $\langle x, y \rangle = n^2 \sum_{j=1}^{n^2} b_j^*(x) b_j^*(y)$ и уште важи

$$||| x |||_1 / n^2 \leq \max_j \left|b_j^*(x)\right| \leq \|x\| \leq \sum_{j=1}^{n^2} \left|b_j^*(x)\right| \leq ||| x |||_1$$

Последното неравенство е последица на Коши-Шварц, претпоследното на триаголник, второто е тривијално, а првото е очигледно кога ќе се запише во еквивалентната форма $\sum_{j=1}^{n^2} b_j^*(x)^2 \leq n^2 \left(\max_j \left|b_j^*(x)\right|\right)^2$. Значи имаме $||| x |||_1 / n^2 \leq \|x\| \leq ||| x |||_1$.

Да го разгледаме сега следното тврдење

> $(\dagger)$ Секој потпростор Y на X со $\dim Y > \dim X / 2$ содржи вектор y со $||| y |||_1 = 1$ и $\|y\| > 1/8$.

Ако $(\dagger)$ е точно, можеме индуктивно да конструираме барем $n^2 / 2 - 1$ елементи y_i коишто се ортонормирани во однос на $|||\,.\,|||_1$ и за коишто важи $\|y_i\| \geq 1/8$ за секое *i*. Во овој случај нема што да се докажува и Лемата е докажана.

Ако $(\dagger)$ не е точно, тогаш тоа значи дека постои потпростор X_2 на X со $\dim X_2 > n^2 / 2$ во којшто за сите единични вектори $||| x |||_1 = 1$ важи $\|x\| \leq 1/8$.

Во X_2 можеме да воведеме Хилбертова норма $|||.|||_2$ со$|||.|||_2 := |||.|||_1/8$. За произволен вектор $x \in X_2$, векторот $x/|||x|||_1$ е $|||.|||_1$- нормиран, па затоа од горното неравенство следува $1/n^2 \le \|x\|/|||x|||_1 \le 1/8$ или еквивалентно $8|||x|||_2/n^2 \le \|x\| \le |||x|||_2$ за секое $x \in X_2$. Да го разгледаме сега тврдењето добиено од $(\dagger)$ со замена на X со X_2 и на $|||.|||_1$ со $|||.|||_2$, т.е.

> $(\dagger_2)$ Секој потпростор Y на X_2 со $\dim Y > \dim X_2/2$ содржи вектор y со $|||y|||_2 = 1$ и $\|y\| > 1/8$.

Ако $(\dagger_2)$ е точно, Лемата III.1.5 е докажана. Ако $(\dagger_2)$ не е точно, постои потпростор X_3 на X_2 со $\dim X_3 > \dim X_2/2$ и Хилбертова норма $|||.|||_3$ на X_3 т.ш. $8^2|||x|||_3/n^2 \le \|x\| \le |||x|||_3$ за секое $x \in X_3$. Забележуваме дека $\dim X_3 > n^2/2^2$. Ова беше вториот чекор во доказот и во него добивме потпростор X_3 со $\dim X_3 > n^2/2^2$. Јасно е како продолжуваме понатаму. Исто така е јасно дека процесот мора да заврши, зашто за некое природно l важи $8^{l+1} > n^2$, па не може да имаме $8^{l+1}|||x|||_l/n^2 \le \|x\| \le |||x|||_l$. Значи процесот завршува после $l-1$ чекори за некое природно l т.ш. $8^l \le n^2$. За добиениот потпростор X_l важи $\dim X_l > n^2/2^{l-1}$. Во овој простор можеме да најдеме барем $\dim X_l/2 - 1$ вектори y_i коишто се ортонормирани во однос на $|||.|||_l$ и за коишто важи $\|y_i\| > 1/8$, за секое *i*. Бидејќи $n^2 \ge 8^l$, добиваме дека $n^2 2^{-l} - 1 > n$ и со ова доказот е завршен. □

Во горната Лема III.1.5 одбравме посебен вид на база којашто секогаш постои во конечно димензионални простори, но нејзината егзистенција воопшто не е очигледна. Затоа ќе ја докажеме.

Теорема III.1.6 *Нека X е конечно димензионален Банахов простор и нека* $\dim X = n$. *Постојат база* $\{b_1,\ldots,b_n\}$ *на X и база* $\{b_1^*,\ldots,b_n^*\}$ *на X* т.ш.* $\|b_i\| = \|b_i^*\| = 1$ $\forall i = 1,\ldots,n$ *и уште* $b_j^*(b_i) = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le n$, *кадешто* δ_{ij} *е симболот на Кронекер.*

Доказ. Б.о.н.о. $X = \mathbb{F}^n$ и ја користиме следната

Лема III.1.7 *Ако за n вектори* $x_i = (x_{i1},\ldots,x_{in}) \in \mathbb{F}^n$, *i = 1,…,n важи* $\det(x_1,\ldots,x_n) \ne 0$, *т.е. ако*

$$\det\begin{pmatrix} x_{11} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & . & . & . & x_{2n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ x_{n1} & . & . & . & x_{nn} \end{pmatrix} \neq 0,$$ *тогаш* $x_1,...,x_n$ *се линеарно независни.*

Доказ. Линеарна алгебра!

Базните вектори $\{b_1,\dots,b_n\}$ ќе ги добиеме наеднаш, како максимум на едно пресликување. Дефинираме пресликување $D: X^n \to \mathbb{F}$ со $x \mapsto \left|\det\left(x_1,...,x_n\right)\right|$ кадешто $x=\left(x_1,...,x_n\right)$. D е непрекинато како композиција на две непрекинати пресликувања: *det* пресликувањето коешто пак од своја страна е непрекинато поради тоа што е составено како сума на продукти на линеарни форми, и пресликувањето апсолутна вредност-|.|. Поради непрекинатоста, на компактното множество $K=\left\{\left(x_1,...,x_n\right)\in X^n : \|x_i\|=1,\ \forall i=1,...,n\right\}$ D има максимум и нека тој максимум е во точката $\left(b_1,\dots,b_n\right)$. Тогаш поради $\det\left(b_1,\dots,b_n\right)\neq 0$ и горната Лема, $\{b_1,\dots,b_n\}$ е линеарно независно и затоа $\{b_1,\dots,b_n\}$ формира база на X . Уште важи $\|b_i\|=1$, $\forall i=1,...,n$.

Дефинираме линеарни функционали b_j^* на X со

$$x \mapsto D\left(b_1,...,b_{j-1},x,b_{j+1},...,b_n\right)/D\left(b_1,\dots,b_n\right).$$

Јасно е дека $b_j^*\left(b_i\right)=\delta_{ij}$. Поради тоа $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ е база на X*. Уште

$$\|b_j^*\|=\sup_{\|x\|=1}\left|D\left(b_1,...,b_{j-1},x,b_{j+1},...,b_n\right)/D\left(b_1,\dots,b_n\right)\right|=1$$

и со тоа доказот е завршен. □

Базите со вакво својство се наречени *бази на Ауербах* според нивниот пронаоѓач Херман Ауербах (1901-1942), полски математичар.

Мора да напоменеме дека проблемот на постоење на бази на Ауербах за бесконечно димензионални Банахови простори е се уште отворен.

Доказ 1 на Теоремата на Дворецки-Роџерс. (Индиректен) Прво забележуваме дека за единечните вектори $u_i = y_i / \|y_i\|$ чијашто егзистенција беше покажана во Лема III.1.5, и за произволни скалари a_i, $i = 1,...,n$, поради $|||u_i||| = |||y_i|||/\|y_i\| \leq 8$, важи

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i u_i\right\| \leq |||\sum_{i=1}^n a_i u_i||| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 |||u_i|||^2\right)^{1/2} \leq 8\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2}$$

Нека сега (λ_n) е низа од позитивни броеви, $\lambda_n > 0$, т.ш. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\;2} < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, на пример $\lambda_n = 1/n$. Одбираме растечка низа од позитвни броеви (n_k) т.ш. $\sum_{i=n_k}^{\infty} \lambda_i^2 \leq 2^{-2k}$, к = 1,2,.... Од Лема III.1.5 во секој Банахов простор X со $\dim X \geq (n_{k+1} - n_k)^2$ можеме да најдеме единични вектори (u_i), $i = n_k, \ldots, n_{k+1}$-1 за коишто според горната забелешка ќе важи

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i u_i \right\| \leq 8 \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

Тогаш во секој бесконечно димензионален Банахов простор (на ова место влегува во игра претпоставката дека X е бесконечно димензионален) можеме да најдеме единични вектори (u_i), $u = n_k, \ldots, n_{k+1}$-1 за коишто ако ставиме $x_i := \lambda_i u_i$ (тогаш јасно $\|x_i\| = \lambda_i$), за секој избор на знаци θ_i ќе имаме

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \theta_i x_i \right\| \leq 8 \left(\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \lambda_i^{\;2} \right)^{1/2} \leq 8 \cdot 2^{-k}$$

За $i < n_1$ за x_i земаме кој било вектор во X со норма λ_i. Според Теорема III.1.2 (iii) редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е безусловно конвергентен, но поради $\|x_i\| = \lambda_i$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ не е апсолутно конвергентен. □

Доказ 2 на Теоремата на Дворецки-Роџерс. (Директен) Овој доказ се темели на горниот пример дека во секој бесконечно димензионален Хилбертов простор H, редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ е пример на безусловно конвергентен ред којшто не конвергира апсолутно и уште на една длабока Теорема на А.Пич за факторизација на оператори преку Хилбертов простор.

- *Нека $T : X \to X$ е интегрален оператор на Банаховиот простор X. Тогаш постои Хилбертов простор H и постојат ограничени оператори $T_1 : X \to H$ и $T_2 : H \to X$ т.ш. $T = T_2 \circ T_1$.*

Сега ако X е Банахов простор во којшто секој безусловно конвергентен ред е апсолутно конвергентен, тогаш $Id : X \to X$ е интегрален оператор, па од Теоремата на Пич постои Хилбертов простор H и постојат ограничени оператори $T_1 : X \to H$ и $T_2 : H \to X$ т.ш. $Id = T_2 \circ T_1$. Id е сурјективен, па значи дека и $T_2 : H \to X$ е сурјективен. Од Првата Теорема за изоморфизам (види [1] стр.117, Зад.36) имаме $X \simeq H / Ker\, T_2 \simeq H_1$ за некој Хилбертов простор H_1. Тогаш во H_1 секој безусловно конвергентен ред е апсолутно конвергентен, па од горното следува дека $\dim H_1 < \infty$. Од изоморфизмот $X \simeq H_1$ следува дека и $\dim X < \infty$. □

Пример: Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e_n$ безусловно конвергира кон $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\ldots\right)$ во c_0, но не конвергира апсолутно, зашто $\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{(-1)^n}{n} e_n \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$

Сега преминуваме на безусловни бази.

Дефиниција III.1.8 База (x_n) во Банахов простор X се нарекува *безусловна* ако за секое $x \in X$, развојот на $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ конвергира безусловно.

На почеток забележуваме дека во случај на база (x_n), секоја точка $x \in X$ се поистоветува со низата $(a_1, a_2, \ldots)$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Во случај на безусловна база (x_n), точката x се поистоветува со множеството$\{a_1, a_2, \ldots\}$. Тоа е големата предност на безусловните бази- не е битен редоследот во претставувањето преку елементите на базата. Затоа тие многу наликуваат на конечните бази.

Следната теорема е непосредна последица на Теоремата III.1.2.

Теорема III.1.9 *Една базична низа (база)* (x_n) *е безусловна ако и само ако важи некој од следниве услови.*

(i) *За секоја пермутација* π *на* $\mathbb{N}$, *низата* $(x_{\pi(n)})$ *е базична низа (база)*

(ii) *За секое подмножество* $\sigma \subseteq \mathbb{N}$, *конвергенцијата на* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *ја имплицира конвергенцијата на* $\sum_{n \in \sigma} a_n x_n$

(iii) *Ако* $|b_n| \le |a_n|$ *за секое* n, *тогаш конвергенцијата на* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *ја имплицира конвергенцијата на* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$.

Ако (x_n) е безусловна базична низа и $\sigma \subseteq \mathbb{N}$, тогаш операторот P_σ дефиниран на $clin\{x_1, x_2, \ldots\}$ со $P_\sigma\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n \in \sigma} a_n x_n$ е ограничен.

P_σ се нарекува *природна проекција придружена на безусловната базична низа*. За множествата σ од облик $\sigma = \{1,2,...,n\}$, добиваме дека проекциите P_σ се совпаѓаат со проекциите P_n коишто се природни проекции придружени на базичната низа (x_n). Слично , за секоја низа од знаци $\theta = (\theta_n)$, $\theta_n = \pm 1$, имаме ограничен линеарен оператор M_θ на $clin\{x_1, x_2, ...\}$, дефиниран со $M_\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$. *UBP* имплицира дека $\sup_\sigma \|P_\sigma\|$ и $\sup_\theta \|M_\theta\|$ се конечни. Поради $Id = P_\sigma + P_{\mathbb{N}\setminus\sigma}$ и $M_\theta = P_\sigma - P_{\mathbb{N}\setminus\sigma}$, кадешто $\theta_n := \begin{cases} 1, & n \in \sigma \\ -1, & n \in \mathbb{N}\setminus\sigma \end{cases}$, следува $P_\sigma = \frac{1}{2}(Id + M_\theta)$, па

$$\|P_\sigma\| \le \frac{1}{2}\left(1 + \|M_\theta\|\right) \le \sup_\theta \|M_\theta\| \quad \text{од каде}$$

$$\sup_\sigma \|P_\sigma\| \le \sup_\theta \|M_\theta\|$$

Од $M_\theta = P_\sigma - P_{\mathbb{N}\setminus\sigma}$, следува $\sup_\theta \|M_\theta\| \le 2\sup_\sigma \|P_\sigma\|$

Значи, $\sup_\sigma \|P_\sigma\|$ и $\sup_\theta \|M_\theta\|$ се поврзани со неравенствата:

$$\sup_\sigma \|P_\sigma\| \le \sup_\theta \|M_\theta\| \le 2\sup_\sigma \|P_\sigma\| \quad \text{и јасно}$$

$\sup_\sigma \|P_\sigma\| \ge K \ge 1$, кадешто K е базичната константа на (x_n).

Дефиниција III.1.10 Бројот $\sup_\theta \|M_\theta\|$ се нарекува *безусловна константа* на (x_n) и се означува со K_u .

Следниот резултат открива едно фундаментало својство на безусловните бази.

Теорема III.1.11 *Нека (x_n) е безусловна база во реален Банахов простор X со безусловна константа K_u и нека $F \subset \mathbb{N}$ е конечно подмножество. Тогаш за произволни скалари $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in F$ и произволни γ_i, $i \in F$ т.ш. $|\gamma_i| \le 1$, важи*

$$\left\|\sum_{i\in F} \gamma_i a_i x_i\right\| \le K_u \left\|\sum_{i\in F} a_i x_i\right\|$$

Доказ. Со Хан-Банах одбираме функционал $x^* \in X^*$ т.ш.

$$\|x^*\| = 1 \quad \text{и} \quad x^*\left(\sum_{i\in F} \gamma_i a_i x_i\right) = \left\|\sum_{i\in F} \gamma_i a_i x_i\right\|$$

и нека $\theta = (\theta_1, \theta_2, ...)$ е произволна низа од знаци т.ш. $\theta_i = 1$ ако $a_i x^*(x_i) \ge 0$ и $\theta_i = -1$ ако $a_i x^*(x_i) < 0$. Тогаш

$$\left\|\sum_{i\in F}\gamma_i a_i x_i\right\| \le \sum_{i\in F}|\gamma_i|\left|a_i x^*(x_i)\right| \le \sum_{i\in F}\theta_i a_i x^*(x_i) = x^*\left(M_\theta\left(\sum_{i\in F}a_i x_i\right)\right) \le K_u\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|$$

□

Ако наместо K_uземеме $2K_u$, тогаш претходната теорема останува точна и за комплексни Банхови простори. Навистина, ставајќи $\gamma_i = \alpha_i + i\beta_i$, имаме $\max\{|\alpha_i|,|\beta_i|\} \le 1$, па тогаш

$$\left\|\sum_{i\in F}\gamma_i a_i x_i\right\| \le \left\|\sum_{i\in F}\alpha_i a_i x_i\right\| + \left\|\sum_{i\in F}\beta_i a_i x_i\right\| \le 2K_u\left\|\sum_{i\in F}a_i x_i\right\|$$

□

III.2 $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ како класични простори без безусловна база

Наједноставен пример на безусловна база е базата од единични вектори $e_n = (0,...0,1,0,...)$ во просторите c_0 и l^p, $1 \le p < \infty$. Скоро е очигледно дека е безусловна. Навистина, за $x = (x_n) \in c_0$ постои $n \in \mathbb{N}$ т.ш. $\sup\limits_{k>n}|x_k| < \varepsilon$ и за произволна пермутација π на $\mathbb{N}$ постои $N \in \mathbb{N}$ т.ш. $\{\pi(1), \pi(2), ..., \pi(N)\} \supset \{1, 2, ..., n\}$. Тогаш $\| x - \sum\limits_{k=1}^{N} x_{\pi(k)} e_{\pi(k)} \|_\infty = \sup\limits_{k>n}|x_k| < \varepsilon$. Аналогно и за $x = (x_n) \in l^p$, $1 \le p < \infty$. Многу поинтересен пример на безусловна база е Системот на Хаар во $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$ (Марсинкиевич, 1937, види [18], стр. 407).

Едноставен и важен пример на база којашто не е безусловна е *сумирачката база* во c. Се состои од векторите $x_n := (0,...,0,1,1,...)$ кадешто единиците започнуваат од n-тото место. Нормата на

$$\sum_{n=1}^{m} a_n x_n = \Big(\overset{1}{a_1}, \overset{2}{a_1 + a_2}, ..., \overset{m}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}, \overset{m+1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}, ... \Big)$$

е $\sup\limits_{1\le k \le m}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right|$. Базата (x_n) е монотона и нормализаирана ($\|x_n\| = 1 \ \forall n$) на c, но не е безусловна поради $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\| = n$ и $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i x_i\right\| = 1$ за секое $n \in \mathbb{N}$.

Бидејќи поимот за безусловна база е многу посилен од поимот за база, природно е тоа што е многу полесно да се дадат примери на простори без безусловна база, отколку да се даде пример на простор којшто воопшто нема база. Дури и примерите се многу природни простори. Така, најпознатите нерефлексивни класични функциски простори $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ се примери на простори без безусловна база.

Дефиниција III.2.1 Низата (x_n) во нормираниот простор X се вика *слаба Кошиева низа* ако за секое $f \in X^*$ скаларната низа $(f(x_n))$ е Кошиева низа. Просторот X се вика *слабо низа-полн* ако секоја слаба Кошиева низа слабо конвергира.

Значи, просторот X е слабо низа-потполн ако од конвергенцијата на скаларната низа $\left(f\left(x_n\right)\right)$ за секое $f \in X^*$, следува постоење на $x \in X$ т.ш. $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x\right)$ за секое $f \in X^*$.

Пример. c_0 не е слабо низа-потполн Банахов простор.
Навистина, низата $x_n := (1,\ldots,1,0,0,\ldots)$ е слаба Кошиева, но не постои $x \in c_0$ т.ш. $x_n \xrightarrow{w} x$. Имајќи предвид дека $c_0^* = l^1$, за произволно $z^* = \left(a_n\right) \in l^1$, имаме $\left|z^*\left(x_n\right) - z^*\left(x_m\right)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} \left|a_k\right| \to 0$, па навистина е слаба Кошиева. Нека претпоставиме дека $x_n \xrightarrow{w} x = \left(b_1, b_2, \ldots\right)$. Тогаш $z^*\left(x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, но од друга страна имаме $z^*\left(x\right) = \lim_n z^*\left(x_n\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Значи добиваме дека $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \forall a = \left(a_n\right) \in l^1$. Ставајќи $a = \left(a_n\right) = \left(0,\ldots,0,1,0,\ldots\right)$, добиваме дека $b_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, што значи дека $x_n := (1,\ldots,1,0,0,\ldots)$ не конергира слабо.

Од *UBP* следува дека секоја слаба Кошиева низа е ограничена низа. Според Теорема I.0.10 во рефлексивните простори секоја ограничена низа има слабо конвергентна подниза, па се добива дека рефлексивните простори се слабо низа-потполни. Обратното не важи. l^1 го има својството на Шур (слабо конвергентните низи се конвергентни низи- види [15], стр. 218) па е слабо низа-потполн, но не е рефлексивен. Ќе покажеме дека секоја слаба Кошиева низа во $L^1[0,1]$ слабо конвергира, односно просторот $L^1[0,1]$ е исто така слабо низа-потполн.

Теорема III.2.2 (Штајнхаус, 1918) $L^1[0,1]$ *е слабо низа-потполн простор.*

Доказ. Нека $\left(x_n\right)$ е слаба Кошиева низа во $L^1[0,1]$, т.е. $\left(f\left(x_n\right)\right)$ конвергира за секое $f \in \left(L^1[0,1]\right)^*$. Треба да покажеме дека постои $x \in L^1[0,1]$ т.ш. $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x\right)$ за секое $f \in \left(L^1[0,1]\right)^*$. Ќе ја користиме репрезентацијата на произволен функционал на $L^1[0,1]$ (види [1] стр. 168). Дуалниот простор на $L^1[0,1]$ е $L^\infty[0,1]$. Според оваа репрезентација, за произволен функционал $f : L^1[0,1] \to K$, постои $F \in L^\infty[0,1]$ т.ш. $f\left(x\right) = \int_0^1 F\left(t\right) x\left(t\right) dt$ $\forall x \in L^1[0,1]$. Значи треба да покажеме дека ако постои лимесот $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 F\left(t\right) x_n\left(t\right) dt$ за секое $F \in L^\infty[0,1]$, тогаш постои $x \in L^1[0,1]$ т.ш. тој лимес е еднаков на $\int_0^1 F(t)x(t)\,dt$. За таа цел доволно е да покажеме дека функцијата $G(t)$ дефинирана со $G(t) := \lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(u)\,du$ е апсолутно непрекината функција. Знаеме дека извод на апсолутно непрекината функција на $[0,1]$ е функција од $L^1[0,1]$, па во тој случај ставајќи $x(t) := G'(t)$ добиваме решение на проблемот. Дека $G(t)$ е апсолутно непрекината следува од следното тврдење:

$$(\dagger)\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \text{ т.ш. } \int_H |x_n(t)|\,dt<\varepsilon \quad \forall n=1,2,\dots\ \forall H\subset[0,1]\ \ m(H)<\delta$$

Ако $(\dagger)$ важи, за произволно $\varepsilon>0$, произволно $k\in\mathbb{N}$ и произволни точки $t_1<t_1^{'}<\dots<t_k<t_k^{'}$ од $[0,1]$ т.ш. $\sum_{i=1}^{k}\left(t_i^{'}-t_i\right)<\delta$, ставајќи $H:=\bigcup_{i=1}^{k}\left[t_i,t_i^{'}\right]$ имаме дека $m(H)<\delta$, па тогаш

$$\sum_{i=1}^{k}\left|G\left(t_i^{'}\right)-G(t_i)\right| = \sum_{i=1}^{k}\left|\lim_{n\to\infty}\int_{t_i}^{t_i^{'}} x_n(t)\,dt\right| \le \sum_{i=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\int_{t_i}^{t_i^{'}}|x_n(t)|\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_i}^{t_i^{'}}|x_n(t)|\,dt =$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_H |x_n(t)|\,dt \le \varepsilon$$

што значи дека навистина $G(t)$ е апсолутно непрекината. За да биде доказот потполн, ни преостанува уште да го докажеме $(\dagger)$. Ќе искористиме една Теорема на Лебег од 1909

- *Нека (x_n) е низа функции од $L^1[0,1]$. За да важи равенството*

  $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 F(t)x_n(t)\,dt=0$$

  за секоја функција $F\in L^\infty[0,1]$, потребно и доволно е да се исполнети следните три услови:

  1° *низата* $\left(\int_0^1 |x_n(t)|\,dt\right)$ *е ограничена*

  2° $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ т.ш. $\left|\int_H x_n(t)\,dt\right|<\varepsilon \ \ \forall n=1,2,\dots\ \forall H\subset[0,1]\ \ m(H)<\delta$

  3° $\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(u)\,du=0 \quad \forall t\in[0,1]$

Евидентно е дека $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_0^1 F(t)\left[x_n(t)-x_m(t)\right]dt=0$ за секое $F\in L^\infty[0,1]$. Тогаш од Теоремата на Лебег следува дека за дадено $\varepsilon>0$ постои $\delta_1>0$ и постои $N\in\mathbb{N}$ т.ш.

$$\int_H |x_n(t)-x_N(t)|dt < \varepsilon/2 \quad \forall n \ge N \qquad \forall H \subset [0,1] \quad m(H) < \delta_1$$

За ова $\varepsilon > 0$ постои $\delta_2 > 0$ т.ш.

$$\int_H |x_n(t)|dt < \varepsilon/2 \quad \forall n = 1,2,...,N \quad \forall H \subset [0,1] \quad m(H) < \delta_2$$

Сега да земеме $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Во случај $n = 1,2,...,N$ добиваме дека

$$\int_H |x_n(t)|dt < \varepsilon/2 \quad \forall H \subset [0,1] \;\; m(H) < \delta$$

А во случај $n > N$ добиваме дека

$$\int_H |x_n(t)|dt \le \int_H |x_n(t)-x_N(t)|dt + \int_H |x_N(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall H \subset [0,1] \;\; m(H) < \delta$$

Во секој случај, за произволно $n \in \mathbb{N}$ добиваме дека

$$\int_H |x_n(t)|dt < \varepsilon \quad \forall n = 1,2,... \;\; \forall H \subset [0,1] \quad m(H) < \delta$$

и со тоа доказот е завршен. □

За двата примери l^1 и $L^1[0,1]$ на слабо низа-потполни простори коишто не се рефлексивни, можеме да приметиме дека имаат несепарабилни дуали. Природно се наметнува прашањето кога еден слабо низа-потполн простор е рефлексивен и дали примерите се типични. Ќе видиме дека навистина се типични и дека не постои пример на нерефлексивен слабо низа-потполн простор со сепарабилен дуал. Во успешната потрага по еден простор којашто се одвиваше преку е-мејл кореспонденција со Вилијам Џонсон, од негова страна ми беше укажано на следнава прекрасна:

Теорема III.2.3 *Ако X е слабо низа-потполн простор и неговиот дуал X^* е сепарабилен, тогаш X е рефлексивен.*

Доказ. Од Теоремата I.0.10, доволно е да покажеме дека секоја ограничена низа во X има слабо конвергентна подниза. Поради претпоставката дека X е слабо низа-потполн простор, доволно ќе биде да покажеме дека секоја ограничена низа во X има слаба Кошиева подниза. Па нека (x_n) е ограничена низа во X и $\{f_1, f_2, ...\}$ е густо во X^*. Со дијагоналниот аргумент конструираме подниза (x_{n_k}) т.ш. постои $\lim_k f_i(x_{n_k}) =: a_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$, а потоа искористувајќи ја густината на $\{f_1, f_2, ...\}$ добиваме дека постои $\lim_k f(x_{n_k}) \quad \forall f \in X^*$, односно (x_{n_k}) е слаба Кошиева подниза. Значи X е рефлексивен. □

Следна цел ни е да покажеме дека просторите коишто се слабо низа-потполни и имаат безусловна база се всушност дуали. За тоа ни се потребни претходни подготовки. Да дадеме најпрво една дефиниција.

Дефиниција III.2.4 Редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ во Банахов простор X се вика $\sigma(X, X^*)$ *безусловно Кошиев* или *слабо безусловно Кошиев* ако $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| < \infty$ за секое $f \in X^*$. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ во дуален Банахов простор X^* се вика $\sigma(X^*, X)$*-безусловно Кошиев* или *слабо*- безусловно Кошиев* ако $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ за секое $x \in X$.

За следната Теорема ќе ни биде потребна една Лема.

Лема III.2.5 (Лема на Забрејко, 1969) *Нека* p *е полунорма на Банаховиот простор* X *којашто е пребројливо субадитивна т.е.* $p\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n)$ $(\le \infty)$ *за сите конвергентни редови* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. *Тогаш постои M>0 т.ш.* $p(x) \le M\|x\| \quad \forall x \in X$

Доказ. Еквивалентно, треба да докажеме дека p е непрекината. За тоа доволно е да се покаже дека p е непрекината во 0. Значи ќе покажеме дека отворената единична топка B на p, $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$, содржи некоја околина на нулата U_ε, т.е. за некое $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon \subset B$ кадешто $U_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$. B е конвексно и апсорбирачко множество, па такво множество е и неговиот затворач $\overline{B}$. Освен тоа $\overline{B}$ е уште и затворено множество, па тогаш $\overline{B}$ како затворено конвексно апсорбирачко множество содржи некоја околина на нулата U_ε. Значи

$$U_\varepsilon \subset \overline{B}, \text{ за некое } \varepsilon > 0 \qquad (*)$$

но поради потполноста на X ќе заклучиме дека важи дури $U_\varepsilon \subset B$ со што Лемата на Забрејко ќе биде докажана. Нека $\|x\| < \varepsilon$. Да покажеме дека $p(x) < 1$. Нека $\varepsilon_0 > 0$ е т.ш. $\|x\| < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Ставаме $\overline{x} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} x$. Тогаш $\|\overline{x}\| < \varepsilon$, па поради (*), постои x_0 во B т.ш. $\|\overline{x} - x_0\| < \alpha\varepsilon$ кадешто $0 < \alpha < 1$ е одбрано така за да важи $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{1}{1-\varepsilon} < 1$. Зашто вака го одбравме $0 < \alpha < 1$ ќе стане јасно на крајот на доказот. Го разгледуваме $(\overline{x} - x_0)/\alpha$. $(\overline{x} - x_0)/\alpha \in U_\varepsilon$, па поради (*) постои x_1 во B т.ш. $\left\|\frac{\overline{x} - x_0}{\alpha} - x_1\right\| < \alpha\varepsilon$, т.е. $\|\overline{x} - (x_0 + \alpha x_1)\| < \alpha^2\varepsilon$.
Сега се разгледува $(\overline{x} - (x_0 + \alpha x_1))/\alpha^2 \in U_\varepsilon$, па според истиот метод, од (*) се

добива x_2 во B т.ш. $\left\|\bar{x}-\left(x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2\right)\right\|<\alpha^3\varepsilon$. Јасно е како продолжува постапката. На овој начин индуктивно се дефинира низа $(x_n)_{n\geq 0}$ во B т.ш.

$$\left\|\bar{x}-\sum_{i=0}^{n}\alpha^i x_i\right\|<\alpha^{n+1}\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Поради $0<\alpha<1$, редот $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_i$ конвергира апсолутно, а бидејќи X е Банахов (на ова место влегува претпоставката за потполноста на X), тој конвергира (види [1], стр.25). Значи постои $x':=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_i$, а од конструкцијата е јасно дека $x'=\bar{x}$. Тогаш $x=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\bar{x}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_i$, па поради $p(x_i)<1 \quad \forall i=1,2,\ldots$ следува дека

$$p(x)=p\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\alpha^i x_i\right)\leq\sum_{i=0}^{\infty}p\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\alpha^i x_i\right)\leq\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\alpha^i=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{1}{1-\varepsilon}<1$$

Значи x е во B и со тоа Лемата на Забрејко е докажана. □

Теорема III.2.6 *За редот* $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *во дуален Банахов простор* X^* *следните тврдења се еквивалентни:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ *е* $\sigma(X^*,X)$*-безусловно Кошиев*

(ii) *Постои константа M>0 т.ш.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|\leq M\|x\| \quad \forall x\in X$$

(iii) *Постои константа M>0 т.ш*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i\right\|\leq M \quad \forall|\gamma_i|\leq 1,\ i=1,\ldots,n,\ n\in\mathbb{N},$$

односно редот $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i f_i$ *е ограничен.*

Доказ. • $(i)\Rightarrow(ii)$*:* Ако дефинираме $p(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$, тогаш p е полунорма на X којашто го задоволува условот од Лемата на Забрејко, па важи (ii).

• $(ii)\Rightarrow(iii)$*:* $\left|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i(x)\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\left|f_i(x)\right|\leq M\|x\| \quad \forall x\in X$, па следува (iii).

• $(iii) \Rightarrow (i)$: За дадено $x \in X$ одбираме $|\gamma_i| = 1$ т.ш. $\left|\hat{x}(f_i)\right| = \hat{x}(\gamma_i f_i)$. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f_i(x) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\hat{x}(f_i)\right| = \hat{x}\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i\right) \le M \left\|\hat{x}\right\| < \infty$$

односно важи (i). □

Со "дуализација" на последнава Теорема, едноставно се добива:

Последица III.2.7 *За редот* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *во Банахов простор* X, *следните тврдења се еквивалентни:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *е* $\sigma\left(X, X^*\right)$*-безусловно Кошиев*

(ii) *Постои константа M>0 т.ш.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f(x_n) \right| \le M \|f\| \quad \forall f \in X^*$$

(iii) *Постои константа M>0 т.ш*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i \right\| \le M \quad \forall |\gamma_i| \le 1,\ i = 1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N},$$

односно редот $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x_i$ *е ограничен*

Доказ. Следува со всадување на X во X^{**} и примена на Теорема III.2.6 на X^{**} □

Теорема III.2.8 *Банахов простор со ограничено потполна база е изоморфен на дуален простор.*

Доказ. Нека (x_n) е ограничено потполна база во X и нека $B := clin\left\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\right\}$. Тогаш X е изоморфен со B^*. Имено, пресликувањето $f : B^* \to X$, дефинирано со $f \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f\left(x_n^*\right) x_n$ е сурјективно и норма-зголемувачко, па го дава бараниот изоморфизам. Значи, $X \simeq B^*$ □

Од следната убава Теорема ќе го добиеме резултатот дека во $L^1[0,1]$ не постојат безусловни бази.

Теорема III.2.9 (Пелчински, Сингер, 1960) *Слабо низа-потполн Банахов простор со безусловна база е изоморфен на дуален простор.*

Доказ. Според Теорема III.2.8 доволно е да покажеме дека ако (x_n) е безусловна база и X е слабо низа-потполн Банахов простор, тогаш (x_n) е ограничено потполна база. Па нека (a_n) е скаларна низа т.ш. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ е ограничен ред, т.е. $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$. Ќе покажеме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ конвергира. Од претпоставката дека (x_n) е безусловна база и
Теорема III.1.7 постои константа M>0 т.ш.

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i a_i x_i \right\| \le M \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \quad \forall |\gamma_i| \le 1,\ i = 1, \ldots$$

Од овде и од тоа што $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ е ограничен ред се добива дека и редот $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i a_i x_i$ е ограничен. Сега Последица III.2.7 повлекува дека $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ е слабо Кошиев ред, па од претпоставката дека X е слабо низа-потполн Банахов простор, тој слабо конвергира. Но бидејќи (x_n) е база $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ конвергира. Значи, (x_n) е ограничено потполна база и со тоа доказот е завршен. □

Моќта на Теоремата на Пелчински-Сингер сега ќе дојде до израз.

Теорема III.2.10 *Просторот $L^1[0,1]$ нема безусловна база.*

Доказ. Од Теоремата на Штајнхаус $L^1[0,1]$ е слабо низа-потполн и од една Теорема на Гелфанд којашто не ја докажуваме $L^1[0,1]$ не е изоморфен на дуален простор. Од Теоремата на Пелчински-Сингер следува тврдењето.

Што е со просторот $C[0,1]$? Рековме дека и тој е без безусловна база и нареден наш бизнис ќе биде да го докажеме тоа. Но бидејќи за разлика од $L^1[0,1]$, $C[0,1]$ не е слабо низа-потполн простор, ќе ни треба нов тип на доказ, зашто доказот на Теорема III.2.10 тука "не пали". За да видиме дека $C[0,1]$ не е слабо низа-потполн простор ќе ја користиме неговата универзалност. Секој сепарабилен Банахов простор "живее" во $C[0,1]$. Попрецизно:

Теорема III.2.11 (Банах-Мазур) *Секој сепарабилен Банахов простор X е изометрички изоморфен со потпростор на $C[0,1]$.*

Во доказот ќе искористиме две Леми коишто нема да ги докажуваме, зашто доказот на првата е во доменот на топологијата, а на втората во скоро секој учебник по функционална анализа.

Лема III.2.12 (Александров и Урисон, 1929) *Нека* $P \subset [0,1]$ *е Канторовиот дисконтинуум и* (M,d) *е компактен метрички простор. Тогаш постои непрекината сурјекција* $f : P \to M$.

Лема III.2.13 *За* X *сепарабилен Банахов простор,* B_{X^*} *е компактен метрички простор.*

Доказ на Теорема III.2.11. Нека $f : [0,1] \to B_{X^*}$ е сурјекција. (Сурјекцијата загарантирана од Лема III.2.12 ја продолжуваме со Титце. Тогаш бараното всадување на X во $C[0,1]$ е изометријата $F : X \to C[0,1]$ дефинирана со $x \mapsto \hat{x} \circ f$. □

Поради фактот што својството “слабо низа-потполн простор” се пренесува на затворени потпростори (ако X е слабо низа-потполн простор и Y е затворен потпростор од X, тогаш и Y е слабо низа-потполн простор), како последица од Теоремата на Банах-Мазур добиваме дека просторот $C[0,1]$ не е слабо низа-потполн. Имено, видовме дека c_0 не е слабо низа-потполн Банахов простор, а тој како сепарабилен простор секако се всадува во $C[0,1]$.

Иако $C[0,1]$ не е слабо низа-потполн простор, неговиот дуал $C[0,1]^*$ е слабо низа-потполн простор и тоа се користи за да се покаже дека $C[0,1]$ нема безусловна база.

Теорема III.2.14 *Ако Банаховиот простор* Y *може да се всади во Банахов простор со безусловна база* X *и ако* Y^* *е слабо низа-потполн, тогаш* Y^* *е сепарабилен.*

Доказ. Нека (x_n) е безусловната база на X и (x_n^*) се соодветните кооординатни функционали. Ја разгледуваме низата $(\phi_n) \in Y^*$ кадешто ϕ_n се рестрикции на x_n^* на Y, т.е. $\phi_n := x_n^*|_Y$. Нека $\phi \in Y^*$ е произволен и нека f е негово Хан-Банах продолжение на X. Доволно е да покажеме дека $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\phi_n \xrightarrow{w} \phi$ од кадешто ќе следува дека Y^* е сепарабилен. Бидејќи (x_n) е безусловна база, редот $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)x_n^*$ $\sigma(X^*, X)$-безусловно конвергира кон f, односно важи $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)x_n^* \xrightarrow{w^*} f$ безусловно.

Тогаш од Теорема III.2.6 следува постоење на M>0 т.ш.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)x_i^*\right\|\le M \quad \forall|\gamma_i|\le 1,\ i=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}$$

Па тогаш јасно е дека

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)\phi_i\right\|\le\left\|\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f(x_i)x_i^*\right\|\le M \quad \forall|\gamma_i|\le 1,\ i=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}$$

Тоа значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n f(x_n)\phi_n$ е ограничен, па повторно од Теорема III.2.6 се добива дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\phi_n$ е слабо безусловно Кошиев ред во Y^*. Поради претпоставката дека Y^* е слабо низа-потполн, добиваме дека $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\phi_n$ слабо конвергира кон некое $\psi\in Y^*$. Значи,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\phi_n(x)=\psi(x) \quad \forall x\in Y$$

Треба уште само да покажеме дека $\psi=\phi$ и доказот е готов. Но тоа е јасно. Бидејќи ϕ_n се рестрикции на x_n^* на Y, важи

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\phi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)x_n^*(x)=f(x) \quad \forall x\in Y$$

а бидејќи f е продолжение на ϕ, имаме $f(x)=\phi(x) \quad \forall x\in Y$. Со тоа $\psi=\phi$, и следува дека Y^* е сепарабилен. □

Теорема III.2.15 $C[0,1]^*$ *е слабо низа-потполн простор.*

Доказ. (Дирк Вернер, лична комуникација) Ќе користиме еден резултат којшто претставува обопштување на Теоремата на Штајнхаус: за произволен простор со мера (Ω,Σ,μ), $L^1(\mu)$ е слабо низа-потполн простор. Ако покажеме дека $C[0,1]^*$ е изоморфен со потпростор на $L^1(\mu)$ доказот е готов. Според Теоремата на Рис за репрезентација, $C[0,1]^*\cong M[0,1]$ (види [19], стр. 62), кадешто $M[0,1]$ е просторот од регуларни Борелови мери на $[0,1]$. Нека (μ_n) е слаба Кошиева низа во $C[0,1]^*$. Ставаме $\mu:=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}|\mu_n|$. μ е позитивна конечна мера. Секое μ_n е апсолутно непрекинато во однос на μ, со некоја густина $f_n\in L^1(\mu)$. Тука ја користиме Теоремата на Радон-Никодим (види [19], стр.470 или [1], стр. 158). Затоа затворената линеарна обвивка на сите μ_n, $clin\{\mu_n : n\in\mathbb{N}\}$, е изоморфна на $clin\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$, односно е изоморфна на затворен потпростор на $L^1(\mu)$ којшто е слабо низа-потполн. Затоа и $clin\{\mu_n : n\in\mathbb{N}\}$

е слабо низа-потполн простор, па бидејќи (μ_n) е слаба Кошиева низа во слабо низа-потполн простор таа слабо конвергира. Со ова се е покажано, па значи, $C[0,1]^*$ е слабо низа-потполн простор. □

Специјално, од Теорема III.2.14 се добива дека ако X има безусловна база и X* е слабо низа-потполн, тогаш X* е сепарабилен. Со оваа забелешка го добиваме централниот резултат во овој параграф.

Теорема III.2.16 $C[0,1]$ *нема безусловна база.*

Доказ. Според Теорема III.2.15 $C[0,1]^*$ е слабо низа-потполн простор и уште е несепарабилен. Од горната забелешката следува дека $C[0,1]$ нема безусловна база. □

III.3 Примена на теоријата на операторите на Догаве на безусловните бази

Теоремите III.2.16 и III.2.10 коишто велат дека просторите $L^1[0,1]$ и $C[0,1]$ се без безусловна база имаат уште еден доказ. Доказот којшто ќе го дадеме за разлика од претходните е brand new и со голема предност што не се потпира на длабоки структурни теореми како што се Теоремата на Банах-Мазур и Теоремата на Гелфанд. Во него се користи теорија на оператори, поточно теоријата на операторите на Догаве.

Дефиниција III.3.1 Ограничениот оператор T на Банаховиот простор X се вика *оператор на Догаве* ако важи $\|Id+T\|=1+\|T\|$

Забележуваме дека за секој ограничен оператор T на X важи $\|Id+T\|\leq 1+\|T\|$. Во случај на равенство T е оператор на Догаве. Множеството од сите оператори на Догаве на X ќе го означиме со $D(X)$. Оваа ознака не сме ја сретнале на друго место, а ја воведуваме со цел да го олесниме изложувањето. Овој тип на важни оператори името го добиваат по Догаве, којшто во 1963 ја дал (види [5])

Теорема III.3.2 (Догаве, 1963) *Секој компактен оператор T на $C[0,1]$ е оператор на Догаве, т.е. $K(C[0,1])\subset D(C[0,1])$.*

Истиот резултат важи и за просторот $L^1[0,1]$. (види [13])

Теорема III.3.3 (Лозановски, 1966) *Секој компактен оператор T на $L^1[0,1]$ е оператор на Догаве, т.е. $K(L^1[0,1])\subset D(L^1[0,1])$.*

Сега за сега потполно е нејасно како овие резултати за оператори на $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ можат да се искористат за да се покаже непостоење на безусловни бази на овие простори. Тоа станува јасно од следната забележителна Теорема на Кадетс (види [12]).

Теорема III.3.4 (Кадетс, 1996) *Ако во Банаховиот простор X конечно димензионалните оператори се оператори на Догаве, тогаш X нема безусловна база.*

Доказ. Значи треба да се покаже дека ако $F(X) \subset D(X)$, тогаш X нема безусловна база. Доказот е со контрадикција. Нека обратно, претпоставиме дека X има безусловна база (x_n). За секое конечно $A \subset \mathbb{N}$ нека P_A е природната проекција придружена на безусловната база (x_n), т.е. $P_A\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n \in A} a_n x_n$ и нека Q_A е проекцијата $Q_A\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = \sum_{n \notin A} a_n x_n$. Тогаш е јасно дека $Id = P_A + Q_A$. За секое фиксно $x \in X$ важи $\sup_A \|P_A x\| < \infty$, па од UBP и $\sup_A \|P_A\| < \infty$. Нека $\alpha := \sup_A \|P_A\|$. Забележуваме дека $\alpha \geq 1$. P_A е конечно димензионален, па по претпоставка е оператор на Догаве. Тогаш $\|Q_A\| = \|Id - P_A\| = 1 + \|P_A\|$. Нека $A_0 \subset \mathbb{N}$ е конечно множество т.ш. $\|P_{A_0}\| > \alpha - \frac{1}{2}$. Тогаш $\|Id - P_{A_0}\| = 1 + \|P_{A_0}\| > \alpha + \frac{1}{2}$. Но,

$$\left\|\left(Id - P_{A_0}\right)x\right\| = \left\|Q_{A_0}x\right\| \leq \left\|Q_{A_0}x - P_B x\right\| + \|P_B x\| \leq \sup_{B \subset \mathbb{N} \setminus A_0, B \text{ finite}} \left\|Q_{A_0}x - P_B x\right\| + \sup_{B \subset \mathbb{N} \setminus A_0, B \text{ finite}} \|P_B x\| \leq$$

$$\leq \sup_{B \subset \mathbb{N} \setminus A_0, B \text{ finite}} \|P_B x\| \leq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X$$

Значи, $\left\|Id - P_{A_0}\right\| \leq \alpha$ што е во контрадикција со $\left\|Id - P_{A_0}\right\| > \alpha + \frac{1}{2}$. Со тоа доказот е завршен. □

Последица III.3.5 *Просторите $C[0,1]$ и $L^1[0,1]$ немаат безусловна база.*

Доказ. Следува со просто спојување на Теоремите III.3.4, III.3.3, III.3.2 и фактот дека $F(X) \subset K(X)$ □

Литература:

[1] Н. Ивановски: *Функционална анализа.* Скопје, 2003
[2] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis: *An Invitation to Operator Theory.* AMS, 2002
[3] S. Banach: *Theorie des Operations Lineaires.* Monografie Matematyczne, 1932
[4] C. Bessaga, A. Pelczynski: *On subspaces of a space with an absolute basis.* Bull. Acad. Sci. Pol. **6,** 313-314 (1958)
[5] I. K. Daugavet: *За едно својство на компактните оператори на просторот C.* Uspekhi Mat. Nauk **18,** (1963) 157-158 (на руски)
[6] P. Enflo: *A conterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. **130,** (1973), 309-317
[7] W. T. Gowers: *A Banach space not containing* c_0, l^1 *or a reflexive subspace.* Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 407-420
[8] F. Hirzebruch, W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis.* B. I., 1971
[9] R. James: *Bases in Banach spaces.* Amer. Math. Monthly **89** (1982), 625-640
[10] R. James: *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. Of Math (2) **52** (1950), 518-527
[11] R. James: *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 174-177
[12] V. Kadets: *Some remarks concerning the Daugavet equation.* Quaestiones Math. **19** (1996), 225-235
[13] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces* (Vol. I and II). Springer, 1977, 1979
[14] G. Ya. Lozanovsky: *За скоро интегралните оператори на КБ-простори.* Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astron. (1966), 35-44 (на руски)
[15] R. Megginson: *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer,1998
[16] J. Schauder: *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.* Math. Z. **26** (1927), 47-65
[17] J. Schauder: *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems.* Math. Zeitschr. **28,** 317-320 (1928)
[18] I. Singer: *Bases in Banach Spaces I* . Springer, 1970
[19] D. Werner: *Funktionalanalysis.* Springer, 2002