

**Интеракција тло-
конструкција при влезни
хармониски и
импулсивни P-SV бранови
генерирани од подземни
активности**

м-р. Васко Кокаланов

Градежен факултет - Скопје

Докторска дисертација

Содржина

Предговор	i
Благодарница	iii
Содржина	v
Листа со слики	ix
Листа со табели	xi
Листа со графици	xiii

Поглавје .1 Вовед 1**1.1 Историјат** 2**1.2 Метода на еквивалентно статичко товарење** 3**1.3 Метода на динамичка анализа** 4**1.4 Интеракција почва-темел-конструкција** 6**1.5 Предмет и цели на дисертацијата** 7**1.6 Содржина на дисертацијата** 8**Поглавје 2. Вештачки граници** 11**2.1 Еластичен-хомоген полупростор** 12**2.2 Елементарни граници** 13**2.3 Вештачки граници** 13

2.3.1 Глобални граници 14

2.3.2 Совршено одговарачки слој 13

2.3.3 Локални граници 21

2.3.3.1 Параксијални 21

2.3.3.2 Вискозни	24
2.3.3.3 Повеќенасочни	26
2.3.3.4 Граници базирани на ширење на излезниот бран	27
2.3.3.5 Екстраполациони	30
2.3 Заклучоци	32
Поглавје .3 Нумерички модел	33
3.1 Еластичен полупростор	34
3.2 Почва - темел	52
3.3 Почва - конструкција	55
Поглавје .4 Аналитичко решение	57
4.1 Опис на моделот	58
4.2 Поместување во почвата	59
4.2.1 Влијанието на почвата врз темелот	59
4.2.2 Влијанието на конструкцијата врз темелот	68
4.2.3 Интеракција	69
4.3 Анализа	70
Поглавје .5 Верификација	75
5.1 Споредба на моделите	76
5.2 Диференцијални поместувања	97
Поглавје .6 Нишање на темелот	101
Поглавје .7 Заклучоци	109

Листа на слики

1.1.	Несимултано поместување на столбовите на мост под влијание на Р-бран	6
1.2.	Различно однесување на објектите со и без завртување на темелот	6
2.1.	Еластичен полупростор	12
2.2.	Споредба на осцилациите за бранова равенка во оригинален облик и комплексен облик	18
2.3.	Коефициентот на рефлексija во зависност од бројот на точки за Р-бран	19
2.4.	Коефициент на рефлексija во зависност од бројот на точки за S-бран	20
2.5.	Зависност на коефициентот на рефлексija од влезниот агол на бранот	20
2.6.	Графички приказ на дисперзионите релации A1, A2 и A3	22
2.7.	Пресметковен модел ограничен со вештачки расејувачки граници	28
3.1.	Декомпозиција на системот почва - конструкција	34
3.2.	Пресметковна ќелија по Kelly	35
3.3.	Фиктивни точки кај слободната површина	35
3.4.	а) Пресметковна ќелија по Min за централен дел	39
3.4.	б) Пресметковна ќелија по Min за слободна површина	39
3.5.	Комбинации на формулации во аглие помеѓу слободната површина и вештачките граници	45
3.6.	Ротација на оските на Р3-гранецата	46
3.7.	Дефиниција на долните агли од моделот	47
3.8.	Поделба на моделот на региони при дефиниција на изворот	47
3.9.	Меѓуслој, рефлексija и рефракција на бран	53
3.10.	Дефиниција на карактеристични точки кај шестоагилен темел	54
3.11.	Трансформација од глобални во локални координати кај косиот меѓуслој	55
3.12.	Конструкција како хомогено еластично тело	56
4.1.	Дводимензионален модел за аналитичко решение	59
4.2.	Картезиски и цилиндрични координати за изведување на аналитичко решени	60
4.3.	Радијални напрегања во цилиндричен координатен систем	66
4.4.	Промена на вредноста на пикот во зависност од односот на масите	72
5.1.	Нумерички модел за еластичен полупростор	78
5.2.	Рефлексija на дојдовен Р - бран	83

5.3. а) Модел 1	86
5.3. б) Модел 2	86
5.4. Радијални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$	92
5.5. Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$	93
5.6. Вертикални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$	93
5.7. Радијални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$	94
5.8. Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$	95
5.9. Вертикални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$	96
5.10. Радијални поместувања во временски интервал $t = 2.0s$	97
5.11. Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 2,0s$	98
5.12. Вертикални поместувања во временски интервал $t = 2,0s$	99
5.13. Модел со три столба за пресметка на диференцијалните поместувања	100
5.14. Позицијата на изворот и точките во кои се пресметува вертикалното поместување	104

Листа на табели

2.1. Комбинација од коефициенти за расејувачките граници	30
4.1. Вредноста на првите 13-те члена од експанзија на редот на $J_0(0.01571)$	62
4.2. Вредноста на првите 13-те члена од експанзија на редот на $J_0(6.28318)$	62
4.3. Вредности на $J_n(0.01571)$ за $0 \leq n \leq 10$	64
4.4. Вредности на $J_n(6.283185)$ за $0 \leq n \leq 10$	65
4.5. Параметри за пресметка на аналитичко решение	70
4.6. Параметри за пресметка на аналитичко решение	71
4.7. Параметри за пресметка на аналитичко решение	73
5.1. Влезни параметри за Модел 1 и 2 (Слика 5.3)	87
5.2. Влезни параметри за Модел 3	100

Листа на графици

3.1.	Полусинусоиден пулс како извор на побуда	40
3.2.	Споредба на влезната и излезната енергија за С&Е границите до 0.6s	41
3.3.	Споредба на влезната и излезната енергија за С&Е границите до 0.8s	41
3.4.	Споредба на влезната и излезната енергија за Stacey P3 границите до 0.6s	43
3.5.	Споредба на влезната и излезната енергија за P3 и P4 границите при различна позиција на изворот, за елстичен простор	44
3.6.	Споредба на влезната и излезната енергија за P3 и P4 границите при различна позиција на изворот, за елстичен полупростор	44
3.7.	Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.6s$	49
3.8.	Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.88s$	50
3.9.	Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.264s$	50
3.10.	Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.401s$	50
3.11.	Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=3.0792s$	51
4.1.	Аналитичко решение за параметри од Табела 4.5	70
4.2.	Аналитичко решение за полупростор	71
4.3.	Влијанието на крутоста врз максималните поместувања	72
4.4.	Аналитичко решение	73
5.1.	Влезен пулс со траење $t_d = 0.201s$	80
5.2.	Верификација со помош на енергии кај бранови со различни периоди	81
5.3.	Поместување во тек со време на точка x близу изворот	84
5.4.	Поместување на точка со тек на време на меѓуслојот темел-конструкција	84
5.5.	Влезна енергија во зависност од ширината на квадратот околу изворот	85
5.6.	Верификација на сопствените фреквенции	87
5.7.	Вертикално поместување на точка од контактот темел - конструкција за бран со фреквенција приближна на првата сопствена фреквенција на конструкцијата	88
5.8.	Вертикално поместување на точка од меѓуслојот темел-конструкција за бран со фреквенца блиска на втората сопствена фреквенца на контрукцијата	90
5.9.	Вертикални поместувања во централниот и страничниот столб	101
5.10.	Диференцијални поместувања кај централниот и страничниот столб	101
5.11.	Влезен пулс со траење $t_d = 0.1s$	104
5.12.	Вертикални поместувања на левиот и десниот горен агол од темелот	105
5.13.	Агол на нишање на темелот	106



Поглавје 1

Вовед

1.1. Историјат

Историјата е сведок на многу загубени човечки животи и материјални штети во колабирани градежни конструкции кои не успеале да го издржат земјотресното оптоварување. За да се спречат овие трагедии или да се ублажат негативните последици од нив, сите земји на чија територија се уште се регистрира сеизмична активност изготвуваат прописи по кои треба да се врши проектирањето на објектите.

Историјата на прописите во нашата земја е поврзана со развојот на прописите кои важеле во поранешна Југославија. Првите прописи за проектирање на објект во сеизмички активни региони во Македонија произлегуваат од „*Privremeni tehnički propisi za opterećenja zgrada*” [1], изготвен 1948 година. Според препораките од овој правилник, во зависност од тоа во која сеизмичка зона припаѓа објектот, сеизмичката сила при анализата требало да се земе од 1 до 2% од неговата маса.

Во периодот по втората светска војна до 1962 година, во Југославија не се регистрирани поголеми потреси. Затоа не се посветувало внимание на сеизмичките влијанија. Во 1962 изготвени се предлог словенечки прописи за градење на згради во сеизмички активни подрачја, кои промовирале нови научни сознанија. Сеизмичкото оптоварување на објектите е третирано како динамички товар. Се дозволува појава на пластични зони во објектите и дисипација на енергијата во истите. Според овој правилник хоризонталните сеизмички сили можеле да бидат доста поголеми и нивната големина можела да биде и до 10% од масата на објектот. Овие препораки останале само предлог без конкретна примена во пракса.

Немање прописи за сеизмичка градба допринело за катастрофални разрушувања при скопскиот земјотрес во 1963. Големиот број на срушени објекти и загубени човечки животи биле причина да се интензивираат истражувањата во областа на сеизмологијата и земјотресното инженерство. Како резултат на тие истражувања во 1964 изготвени се „*Privremeni tehnički propisi za građenje u seizmičkim područjima*” [2]. Овие прописи во најголем дел се базираат на словенечките препораки од 1962. Основата на сеизмичката пресметка е спектрална модална анализа. Нумеричките вредности на коефициентите користени во анализата се одредени врз основа на: сознанијата од скопскиот земјотрес, тогашните прописи од Советскиот сојуз, како и консултации со странски експерти ангажирани во истражувањето на скопскиот земјотрес.

Овој правилник бил во примена се до 1981 година, кога е изготвен „*Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima*” [3]. Во новиот правилник внесени се светските искуства стекнати со проучување на силни земјотреси, акцелограми и бази на податоци од регистрирани силни земјотреси случени на територија на Југославија и светот. Дополнително овој правилник е доработен во 1983, со критички осврт на одредени негови членови. Во 1988 се изработени нови сеизмолошки карти на Југославија направени според МКС-64 и табела за повратен земјотрес за период од 50, 100, 200, 500, 1000 и 10000 години. Овие

карти и табели се додадени на тогашниот правилник. Се препорачува за објекти од високоградбата да се користи повратен период од 100 и 500 години.

Следната модификација на правилникот е во 1990 кога во него се дадени категоризациите на објектите, дефинирани се сеизмичките параметри, локалните услови на почвата и методите според кои се пресметуваат сеизмичките сили. Детално се обработени дополнителните влијанија како што се: хидродинамички притисок на водата, иницијален сеизмички притисок, сеизмички притисок кај насипи и подземни објекти. Исто така вклучени се комбинациите на товарите за различни типови на објекти.

Овој правилник е на сила и денес. Насоките дефинирани во него се обврски кои треба да ги исполнува и почитува секој градежен инженер при проектирање на објектите Македонија.

Според член 20 од правилникот, сеизмичкото пресметување на конструкциите може да се направи според „Методот на еквивалентно статичко оптоварување“ или со „Методот на динамичка анализа“. На која од методите ќе се повика инженерот зависи од категоријата на објектот. Според извршената категоризација во правилникот, најголемиот број на објекти се проектираат според методот на еквивалентната статичка анализа. Исклучок се објектите од поголема важност, чија сеизмичка стабилност се проверува со динамичка анализа.

1.2. Метода на еквивалентно статичко оптоварување

Сеизмичката анализа на објектите задолжително се врши во најмалку два ортогонални правци. Според категоризацијата, почвените услови, местоположбата, дуктилноста и динамичките карактеристики на објектот се определуваат хоризонталните сеизмички сили, кои се третираат како еквивалентно статичко оптоварување. Интензитетот на сеизмичките сили е дефиниран со два члена: вкупен сеизмички коефициент и тежината на објектот.

$$S = K \cdot G \quad (1.1)$$

каде

- G е вкупната тежина на објектот одредена како сума од: постојаните, променливите товари (50% од одреденото според правилникот за оптоварување на објектите) и товарот од снег;
- K е вкупниот сеизмички коефициент е функција од повеќе фактори

$$K = K_o \cdot K_s \cdot K_d \cdot K_p \quad (1.2)$$

каде

- K_o е коефициент кој зависи од категоријата на објектот
- K_s е коефициент на сеизмички интензитет
- K_d е коефициент на динамичност

- K_p е коефициент на дуктилноста и пригушување

За конструкции до пет спрата, вкупната сеизмичка сила се распределува пропорционално по спратовите според процентуалниот удел на спратната маса во вкупната маса на објектот.

$$S_i = S \frac{G_i \cdot H_i}{\sum_{i=1}^n G_i \cdot H_i} \quad (1.3)$$

За објекти повисоки од пет ката, 85% од пресметаната сеизмичка сила се распределува според (1.3). Преостанатите 15% се земаат како концентрирана сила на највисоката точка на објектот.

Вкупната вертикална сеизмичка сила се одредува на сличен начин со множење на масата на објектот со сеизмички коефициент за вертикален правец.

$$S = K_v \cdot G, \quad (1.3)$$

$$K_v = 0.7 \cdot K = 0.7 \cdot K_o \cdot K_s \cdot K_d \cdot K_p \quad (1.4)$$

Торзионите моменти по спратовите на објектот се пресметуваат според изразот

$$M_{t,i} = Q_i \cdot e_i \cdot K_t \quad (1.5)$$

каде

- Q_i е поголемата вредност на хоризонталните попречни сеизмички сили од двата ортогонални правца во i -тиот спрат;
- e_i растојание то од центарот на крутоста до центарот на масата на i -тиот спрат;
- K_t коефициент на зголемување на ексцентрицитетот како последица на спрегнатите странични и торзиони вибрации и како последица на нееднаквите поместувања на стопите на темелите. Ако не се врши пресметка, вредноста на овој коефициент е 1.5

1.3. Метода на динамичка анализа

Според член 39 од правилникот, за да се провери однесувањето на објектите во категорија, треба да се изврши динамичка анализа. Како резултат на динамичката анализа се добиваат напрегањата и деформациите на конструкцијата при максимален земјотрес, како и максималните оштетувања на објектите.

Сеизмичките параметри се одредуваат на основа на постојни теориски и експериментални истражувања. Во одредени ситуации може да биде потребно да се спроведат испитувања за определување на локалната сеизмичност. Хоризонталната сеизмичка сила добиена со динамичката анализа не смее да биде помала од 0.75 од силата која се добива со еквивалентната статичка метода или да биде помала од 0.02G.

1.4 Интеракција почва-темел-конструкција

Димензионирањето според еквивалентни статички сили, односно динамичката анализа, е базирана на претпоставката дека објектот е фундиран на идеално крута подлога. На овој начин се врши занемарување на влијанието на две од трите компоненти на интегрираниот систем: почвата и темелот. Во анализата е опфатена само надземната конструкција.

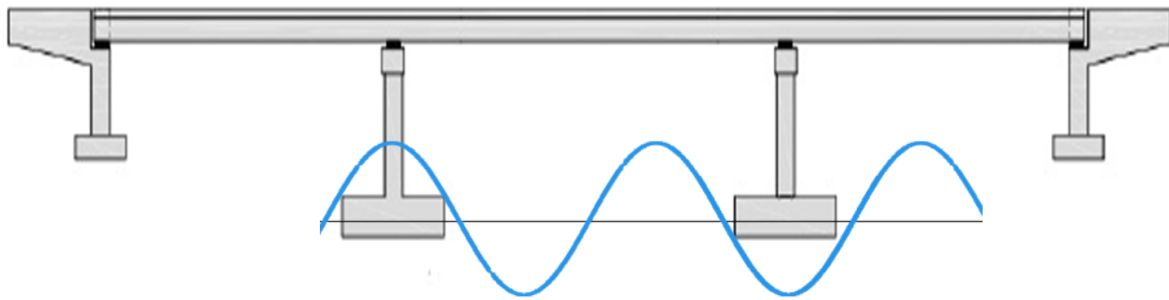
Појасна слика за однесувањето на конструкцијата при сеизмичка побуда се добива доколку конструкцијата се анализира како интегриран систем. Во анализите од овој тип, интегрираниот систем се состои од почва, темел и конструкција. Секоја од овие компоненти има влијание на поместувањата и напрегањата кај конструкцијата.

Најреални резултати за однесувањето на ваков интегриран систем се добива кога сеизмичката активност ќе се интерпретира преку пропагирање на бранови. Тогаш точките на контактите почва-темел и темел-конструкција не се побудуваат симултано. Несимултаните поместувања на различни делови од конструкцијата под влијание на иста побуда се нарекуваат диференцијални поместувања. Посебно ова доаѓа до израз кај долги објекти. Ефектот од диференцијалните поместувања на овие контакти има големо влијание на вкупниот одговор на конструкцијата.

Кај земјотресите, поради големото растојание од епицентарот до објектот, бранот кој приоѓа на конструкцијата се зема дека е рамнински. Тоа значи дека диференцијалните поместувања ќе настанат затоа што бранот допира до конструкцијата во различни временски интервали.

Ако побудата на бранот е подземна експлозија релативно блиску до Земјината површина, во зависност дали се работи за дводимензионална или тродимензионална анализа, треба да се земе во предвид кружниот, односно сферичниот облик на брановиот фронт. На овој начин покрај ефектите од диференцијалното поместување, препорачливо во анализата е да се вклучи и ефектот на нишање на темелот на темелите. Овие два ефекта кои се резултат на поместувањето на почвата и темелот, можат да имаат големо влијание на димензионирањето на одредена група објекти.

Патувањето на енергијата, во форма на бран, ќе резултира во одреден временски интервал, поедини темели да бидат под дејство на сеизмичка активност, а останатите да бидат во мирување (*Слика 1.1*). Резултат на овие несимултани поместувања се дополнителни деформации и напрегања во конструкцијата, кои не се земаат во предвид (посебно не вертикалните) со претпоставката дека конструкцијата е поставена на идеално крута подлога.



Слика 1.1 Несимултано поместување на столбовите на мост под влијание на Р-бран

Кога бранот му приоѓа на темелот под агол помал од 90 степену настанува ротацијата на темелот (Слика 1.2). Енергијата која ја носи бранот ќе предизвика поместување на темелот, кое ќе ја следи геометријата на брановиот фронт. Бидејќи почвата и темелот се медиуми со различни крутости ќе се појават разлики во поместувањата на темелот и почвата. Темелот како покруто тело нема да може да ја следи деформацијата на почвата и затоа ќе се јави ротација на истиот. Поради интеракцијата на темелот и конструкцијата оваа ротација ќе се пренесе и на конструкцијата. Како резултат на интеракцијата ќе се појават торзиони сили (од брановите компоненти надвор од рамнината на пропагирање) или секундарни моменти на виткање (од брановите компоненти во рамнината на пропагирање). Овие сили се јавуваат дури и кај идеално симетрични објекти. Треба да се има во предвид дека иако аголот на ротација е многу мал, неговото влијание на конструкцијата е големо. Доколку објектот има голема висина и оваа ротација на темелот може да создаде релативно големи поместувања во најгорните катови. Вкупните хоризонтални поместувања на катовите е резултат не само на сеизмички сили, туку и на поместувањето кое настанува поради ротацијата на темелот.



Слика 1.2 Различно однесување на објектите со и без завртување на темелот

1.5 Предмет и цели на дисертацијата

Основната цел на оваа докторска дисертација е проучувањето на однесувањето на интегрираниот систем почва - конструкција и изработка на софтверско решение базирано на верификуван нумерички модел со кое ќе може да се добијат одговори за однесувањето на надземните објекти под влијание на хармониски и импулсивни бранови кои побудуваат движење на честичките во рамнината на пропагирање, т.н. P-SV бранови.

За да може нумеричкиот модел да се користи на широк опсег на испитувања, мора да биде нумерички стабилен за да симулира побуди во подолг временски период. Користените апроксимации треба да допринесат за добивање на конвергентни решенија со задоволителна точност. Нумеричката стабилност е условена од стабилноста на поединечните компоненти на моделот, односно на неговите граничните елементи (вештачките граници, слободните површини, меѓуслоевите) и централните елементи (хомогената средина). Покрај индивидуалната нумеричка стабилност, поединечните елементи мора да се во добра меѓусебна поврзаност. Нивната интеракција при формирање на целината, не смее да ја наруши стабилноста на целиот нумерички модел. Од друга страна, најстабилните нумерички шеми не секогаш се и најточни. Затоа од особена важност е да се направи добар компромис помеѓу овие два фактора.

Од големиот број на податоци кои може да се добијат со истражуваниот нумеричкиот модел, во докторската дисертација посебно внимание посветено е на:

1. Одредување на сопствените фреквенции на надземните објекти;
2. Дефинирање на брановата фреквенција при која настанува максималното поместување на надземниот објект;
3. Анализа на диференцијалните поместувања предизвикани од ефектот на брановиот премин кај долги конструкции;
4. Испитување на влијанието на времетраењето на побудата и аголот на приоѓање на бранот врз нишањето на темелот, како еден од феномените кои произлегуваат со анализата на конструкцијата како интегриран систем со темелот и почвата

Секој од овие ефекти има свое влијание на динамичкото однесување на објектите. Истражувањата спроведени во дисертацијата ќе придонесат за појасно согледување на однесувањето на комплексниот интерактивен систем почва – конструкција при влезни хармониски и импулсивни P - SV бранови. Во литературата ретко може да се сретне нумерички модел кој може да одговори на сите точки од интерес на оваа дисертација. Исто така недостасува и соодветно аналитичко решение со кое може да се верификуваат нумеричките модели.

Истражуваниот модел е параметарски конципиран. Преку промена на клучните параметри моделот може да се прилагоди за соодветниот проблем. Дополнително се анализирани сите компоненти на моделот и определено нивното влијание на квалитетот на резултатите.

1.6 Содржина на дисертацијата

Дисертација е организирана во 7 поглавја, на 118 страници и во неа се опфатени 39 слики, 32 графика и 10 табели.

Поглавје 1 е Вовед во докторската дисертација. Во него се изнесени мотивите за изработка на тезата, како и предметите и целите на дисертацијата.

Поглавје 2 дава хронолошки приказ на истражувањата на *Вештачките граници*, од идеја до нивна денешна апликација. Дадени се информации за категоризацијата на вештачките граници и главните карактеристики и теориските основи на главните претставници на секоја група.

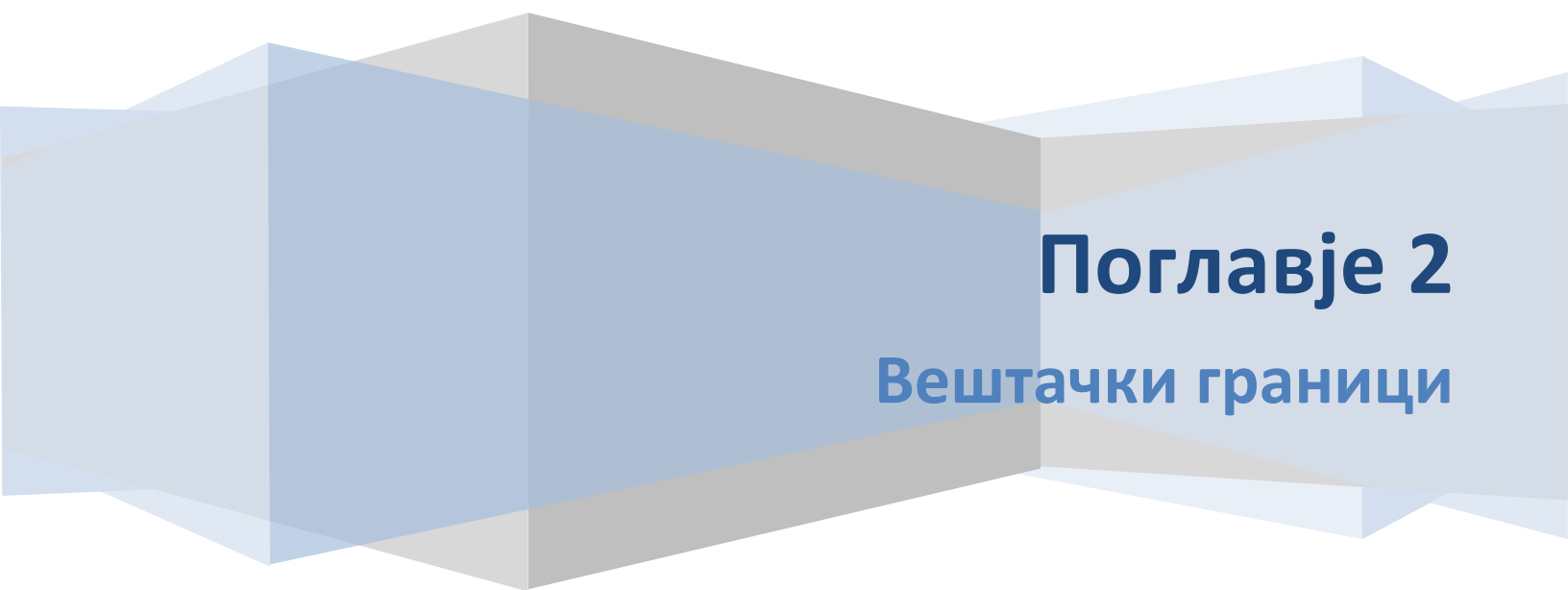
Поглавје 3 ги содржи главните тези на дисертацијата. Во неа е даден детален опис на сите поединечни елементи на ново формиранит *Нумерички модел* за анализа на однесувањето на систем почва – конструкција при влезни хармониски и импулсивни P-SV бранови. Поглавјето е поделено во 3 секции, соодветно на фазите на развој на нумеричкиот модел. Почвата е моделирана како еластичен полупростор составена од централен дел, вештачки граници и слободна површина. Во првата секција дадена е критична анализа и апликативен опис на експлицитната шема на конечни разлики за симулација на еластичниот полупростор. Во втората секција се става акцент на дефиницијата на меѓуслоевите и додавање на темелот во еластичниот полупростор. Третата секција е опис на воведувањето на надземниот објект во моделот.

Поглавје 4 е посветено на креирање *Аналитичко решение* кое се користи за верификација на резултатите од нумеричкиот модел. Аналитичкиот модел произлегува од суперпозиција на силите кои дејствуваат врз темелот. Прво се зема силата со која почвата влијае на темелот. Потоа се додава силата која произлегува од интеракцијата на темелот и конструкцијата. Овие две сили заедно со инерцијалната сила од масата на темелот го формираат системот на сили во системот почва - конструкција. Од условите за динамичка рамнотежа на овие сили се добива аналитичкото решение.

Поглавје 5 ја опишува методата за *Верификација* на точноста на моделот. Резултатите добиени со нумеричкиот модел базиран на основните законите за пропагација на бранот, се споредуваат со вредностите на аналитичкиот модел. Нумеричкиот модел се верификува и со законот за постојаност на енергијата преку споредба на влезната енергија од изворот и енергијата на бранот кој го напушта моделот. Дополнително во ова поглавје се анализира и ефектот на брановиот премин кај долги конструкции.

Поглавје 6 содржи резултати од спектралните амплитуди на нишање на темелот и нивна интерпретација. Преку резултатите од серија симулации се покажуваат ефектите и последиците врз темелот и конструкцијата кои прозлегуваат од нишањето на темелот. Со ова се покажува недостатокот на моменталните прописи кои се базирани на претпоставка дека конструкцијата е поставена на идеално крута основа.

Поглавје 7 ги сублимира *Заклучоците* на истражувањата опфатени со оваа дисертација и дава насоки за понатамошен развој на моделот и идеи за понатамошни истражувања.

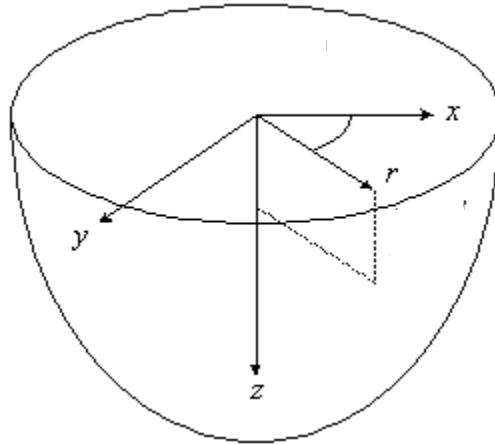


Поглавје 2

Вештачки граници

2.1 Еластичен хомоген полупростор

Еластичен полупростор претставува хомогена средина која на едниот крај е ограничена со слободна површина (XY - рамнината, $z = 0$), а во останатите правци се протега до бесконечност (Слика 2.1).



Слика 2.1 Еластичен полупростор

Во праксата, голем дел од проблемите поврзани со еластичен полупростор се решаваат со анализи на бранова пропација. Нумеричките модели за решавање на ваков тип на проблеми, од практични причини, мора да се со конечни димензии. Тоа значи дека во нумеричката анализа се разгледува конечен дел од бесконечниот полупростор. Трансформирањето на бесконечен математички модел на еластичен полупростор во конечен нумерички модел, подразбира формирање на почвен исечок ограничен со четири граници. *Kausel* и *Tassoulas* [42] направиле груба класификација на границите со кои може да се ограничи нумерички модел во конечни димензии:

- Елементарни (нетранспарентни) граници
- Глобални (точни) граници
- Локални (несовршени) граници

Во поново време, на овие три типа на основни граници, е додаден и четврти тип. Станува збор за транспарентни вештачки граници, т.н. Совршено одговарачки слој. Идејата за овие граници за прв пат била воведена од страна на *Berenger* [10]. Развојот на методот на конечни елементи и појавата на компјутерските програми базирани на овој метод, допринеле за популарноста на овие граници и нивна помасовна примена во денешните истражувања.

Низ историјата, се појавиле голем број на идеи за дефинирање на вештачките граници. Создадени се повеќе решенија за решавање на еден ист проблем. Сепак, не постојат јасно дефинирани правила за изборот на најсоодветните вештачки граници. Тоа

овозможува слобода при изборот на границите кои ќе обезбедат најдобро совпаѓање на нумеричките решенијата на отсечениот модел, со точните вредности добиени со математичкиот модел кој го зема во предвид целокупниот еластичен полупростор. Покрај точноста, како втор предуслов при изборот на границите, се јавува нивната нумеричка стабилност. Најточните граници не се секогаш доволно нумерички стабилни. Изборот на најсоодветните граници најчесто значи компромис помеѓу двата критериума, точност и стабилност.

2.2 Елементарни граници

Елементарните граници се физички граници кои воопшто не дозволуваат поминување на бранот низ нив. Постојат два услови кои мора да бидат задоволени од овие граници: нулти поместувања (*Dirichlet*) или нулти напрегања (*Neumann*). Доколку е исполнет еден од овие два условия бранот се одбива назад во централниот дел. Кога елементарните граници се користат за ограничување на почвениот исечок, димензиите на моделот треба да се доволно големи за да рефлектираниот бран не ја наруши точноста на решението. Од димензијата на моделот зависи времето потребно да се изврши една нумеричка симулација. Потребните хардверски ресурси за реализација на нумеричката симулација се пропорционални со големината на моделот. Во време кога сметачките машини биле на почетокот од својот развој ова било сериозен недостаток.

Во 1974 година, *Smith* [58] ја презентирал идејата за транспарентна граница создадени со двојно решавање на елементарните граници. Со неговиот предлог најнапред се прави симулација во која границите се дефинирани со услов на нулти поместувања, а потоа истата граница се решава според условот на нулти напрегања. Рефлектираните бранови создадени од првиот и вториот услов се со спротивни знаци. Вкупното решение е добиено како аритметичката средина од двете поединечни решенија. Бидејќи рефлектираните бранови создадени од првиот и вториот услов се со спротивни знаци треба рефлексивната да се анулира. Ова решение се покажало ефикасно единствено во случај кога моделот е ограничен само со една двојно решена елементарна граница (*Kausel* и *Tassoulas* [42]). Кога се воведува втората, стабилноста на границата се нарушува затоа што бранот се рефлектира повеќекратно.

2.3 Вештачки граници

Со помош на вештачките граници (глобалните, локалните и совршено одговарачкиот слој) се симулираат *Sommerfeld* [59] условите. Овие услови овозможуваат внесената енергијата во моделот да се расее во бесконечност. Секој од овие три типа на граници претставуваат проблем сам за себе, но подеднакво значаен фактор е и нивната интеракција.

Во литературата овие граници се сретнуваат со различни имиња: „вештачки“, „апсорбирачки“ и „нерефлектирачки“. Без разлика на името сите имаат иста функција, да му дозволат на бранот кој доаѓа или го напушта моделот, непречено да помине низ нив без да се јави негова рефлексија. За реализација на таа цел постојат две главни идеи. Првата идеја е да се дефинираат точни граници кои се глобални во простор и време, и како такви ќе вршат апсолутна апсорпција на енергијата. Втората е да се воведат апроксимации базирани на локална дефиниција во простор и време, кои ќе создадат одредена рефлексија.

2.3.1 Глобални граници

Во последните две децении се зголемува потребата за создавање на нумерички модели со поголема точност. Тоа допринесува за интензивирање на научните истражувања во развојот на глобалните граници. За да се изведе дефиницијата за глобална граница, која ќе биде перфектен апсорбер на енергија, потребно е да се изврши трансформацијата на брановата равенка од временски домен во фреквентен домен и обратно. Трансформираната равенка во фреквентен домен, содржи членови кои при трансформацијата назад во временски домен, не може да се дефинираат со локални диференцијални оператори. Тие членови се присутни преку псеудо - диференцијални оператори (Tsypkov [63]). Решението во некоја конкретна точка од границата зависи од решенијата добиени во тековниот и сите претходни временски чекори, на сите останати точки од границата. Поради тоа треба да се сочува историјата на решенијата за сите точки од границата во текот на времетраењето на симулацијата, што бара голема меморија и време на пресметка.

Употребата на псеудо - диференцијалните оператори носи дополнителен негативен ефект. Примената на овие граници е ограничена само на примери со граници со правилна форма.

Гледано од практичен и пресметковен аспект, овие граници се многу робусни. Покрај повеќе потрошено време за нивна апликација, овој тип на граници има потреба од примена на пресметковна машина со поголем капацитет за складирање на податоци и моќни процесори за побрза обработка на истите. Иако овој тип на граници може да се постават непосредно до регионот од интерес, а со тоа да се намалат димензиите на моделот, цената за изработка на еден ваков пресметковен модел е доста висока.

Овие недостатоци ја спречуваат масовната практична употреба на глобалните граници, иако резултатите добиени со овие граници се без грешка.

Првата идеја за модел со глобални граници е претставена од страна на *Lysmer* и *Waas* [49] во 1972. Нивното решение се однесува на слоевити наслаги врз крута карпеста основа. Оптоварувањето се прави надвор од рамнината во која се пресметуваат поместувањата. Подоцна *Waas*[64] го проширил решението и за случај кога оптоварувањето се врши во рамнината која се анализира. *Kausel* [42] дава генерално

решение за тродимензионален случај. Решението презентирано во литературата е изведено во цилиндрични координати ([39], [40], [41]).

Седум години подоцна, *Engquist* и *Majda* [20] даваат ново решение за глобалните граници. Нивното решение се смета за пресвртница во развојот на вештачките граници. Тие ја разгледуваат брановата равенка како суперпозиција на бран кој се движи кон лево ($-\infty \leq x \leq 0$) и бран кој се движи кон десно во x -правец ($0 \leq x \leq \infty$).

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} = e^{iw(t+\beta y)} \left(A e^{iw\sqrt{1-\beta^2}x} + B e^{-iw\sqrt{1-\beta^2}x} \right) \quad (2.1)$$

каде

- A и B се амплитудите на брановите кои се движат кон лево и кон десно
- x е координатата на точката во која се разгледува бранот
- w е фреквенцијата на бранот
- $\beta = \sin(\theta)$, θ е агол на приоѓање на бранот кон границата

Engquist и *Majda* ја поставиле вештачката граница на $x = 0$ и претпоставиле дека бранот кој се движи лево кон точката е дојдовниот бран, а бранот кој се движи кон десно е рефлектираниот бран од границата. Во таа точка поставиле граничен услов кој вклучува апроксимација на псеудо диференцијален оператор кој го елиминира бранот кој се движи кон десно и со тоа ја редуцирале рефлексијата *Ditkowski* [17].

Gustafsson [31] е првиот истражувач кој понудил решение за проблем на вештачки граници кога изворот на побудата се наоѓа надвор од пресметковниот модел. Во позадина на неговата работа е примена на Лапласова трансформација во време и Фуриева трансформација во простор за сепарација на променливите. Тоа води до нехомогени релации, кои по извршените инверзни трансформации стануваат глобални апсорбирачки граници (*Tsynkov* [63]).

Givoli, *Grote* и *Keller* (*Givoli&Keller*[26], *Grote&Keller*[28], *Givoli* [27]) дале нов приод при дефинирање на глобалните граници. Нивната техника се нарекува *Dirichlet to Neumann (DtN)* пресликување. Со оваа техника, дадена бесконечната област Ω_∞ , се дели на ограничен пресметковен простор Ω одвоен од останатиот дел D со вештачка граница B . Аналитичкото решение на проблемот во D , води до точна релација помеѓу непозната функција и нејзините нормални изводи на B . Оваа релација всушност го претставува *DtN* пресликувањето (*Tsynkov* [63]). Тоа е искористено како граничен услов на B , со што се формира нумерички решлив граничен проблем во областа Ω . При бранова пропација *DtN* пресликувањето претставуваат точни гранични услови. Тие не предизвикуваат никакво вештачко одбивање на бранот назад во пресметковната област (*Givoli* [27]).

Premov и *Spasapan* [54] презентираат интересна идеја како да се подобри локалното асимптотско *DiN* пресликување од низок ред, за проблеми кои вклучуваат високи модови.

Кога во пресметковен домен постојат неколку издвоени препреки на брановата пропација, задавањето на еден граничен услов во облик на *DiN* пресликување претставува многу скапо решение. *Grote* и *Kirsch* [29], [30] даваат алтернатива преку поделба на целото поле на распростирање и на граничниот услов, на поединечни излезни компоненти од бранот.

Kallivokas и *Lee* [38] ја изразуваат вештачка граница во елиптична форма. Нивната граница е имплементирана на модел за распростирање на бесконечен флуид. Пресметковниот модел е ограничен со вештачка граница во елиптична форма. Основен проблем кај оваа граница е задоволувањето на *Sommerfeld* - условите за бесконечност.

2.3.2 Совршено одговарачки слој (COC)

Повикувајќи се на условот на *Sommerfeld* дека интензитетот на брановите опаѓа кога тие патуваат кон бесконечноста, *Berenger*[10] дошол до идеја да направи нов вид на вештачки граници. *Berenger* ја напуштил идејата вештачките граници да се креираат со помош на гранични услови и ја вовел идејата за граничен слој. Наместо да го ограничи конечниот нумерички модел со линиски граници, тој направил модел каде по контурите на централниот дел е поставен апсорбирачки слој. Овој слој е изграден од апсорбирачки материјал и е комплетно независен од граничните услови. Тој има материјални карактеристики и димензии различни од централниот дел. Бранот кој го напушта централниот дел продолжува да патува низ апсорбирачкиот слој и ја губи енергијата експоненцијално.

Според теоријата на браново движење, одреден дел од бранот кој патува низ слоеви со различни материјални карактеристики, ќе се рефлектира на границата помеѓу слоевите. Доколку се направи правилен избор на материјалните карактеристики и дебелината на слојот, совршено одговарачкиот слој може да отстапи од ова правило.

Постојат неколку модели на формулирање на совршено одговарачки слој (COC). Првиот, кој бил претставен од *Berenger*, се нарекува „*split - field*“ COC. Преку овој модел решението на бранот се дава како сума на две нови вештачки компоненти (*Johnson*[36]). Втората техника, која е повеќе применувана во денешно време, е позната под името еднооксијален COC. Со овој модел слојот се опишува преку вообичаената бранова равенка во комбинација со анизотропен апсорбирачки материјални карактеристики (*Johnson*[36]).

Овој тип на граници најнапред биле воведени за симулација на модели за распростирање на електромагнетни бранови. Границите прв ги презентирал *Berenger*. Идејата е да создаде систем на издолжени координати. За да постои пригушување на

бранот коефициентот на издолжување на координатите треба да е комплексен број. Овој коефициент е само по должина на едната оска, додека координатите по другите оски не подлежат на овој фактор на издолжување. На овој начин се прави селективно пригушување на распростирањето на брановите во одредени правци.

Доколку се разгледува равенката на бран кој патува низ хомогена средина

$$u(x, t) = Ae^{-(kx - wt)} \quad (2.2)$$

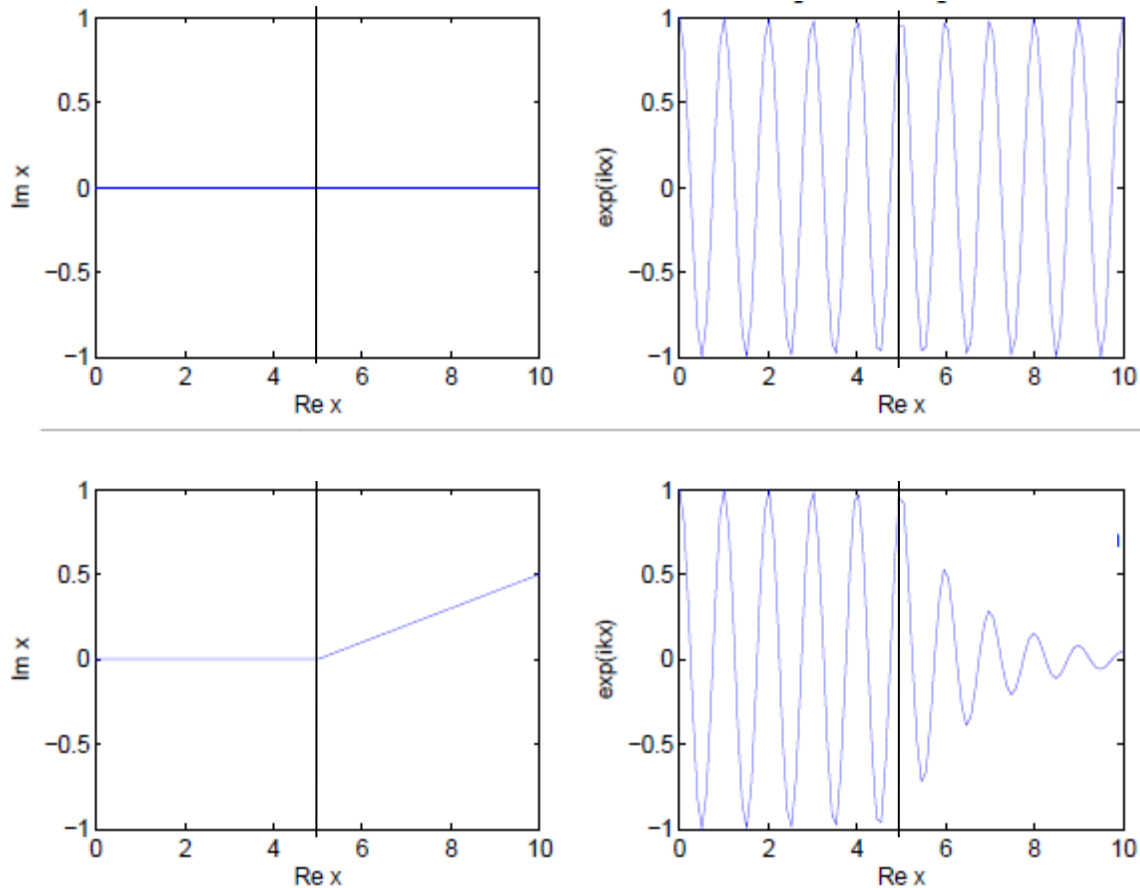
може да се забележи дека равенката претставува аналитичка функција по x . Комплексниот фактор на издолжување, \tilde{x} , може да се изрази како збир на реален број x и некоја функција од x , $\frac{\sigma(x')}{w}$ со која се одредува деформацијата на контурата.

$$\tilde{x} = x + \int^x \frac{i\sigma(x')}{w} dx' \quad (2.3)$$

За да се поедностави целата постапка, преку равенката (2.3) се изразуваат реалните вредности x во зависност од комплексните вредности \tilde{x} , и се заменуваат во (2.2). Се добива бранова равенка која содржи комплексен фактор на издолжување

$$u(x, t) = Ae^{-(kx - wt) - \frac{k}{w}\sigma x} \quad (2.4)$$

На овој начин брановата равенка се сведува во комплексен облик $e^{ik(Rex + iImx)} = e^{ikRex} e^{-kImx}$. Слика 2.1 ја прикажува разликата во осцилации на бранова равенка во оригинален облик e^{ikx} и комплексниот облик.



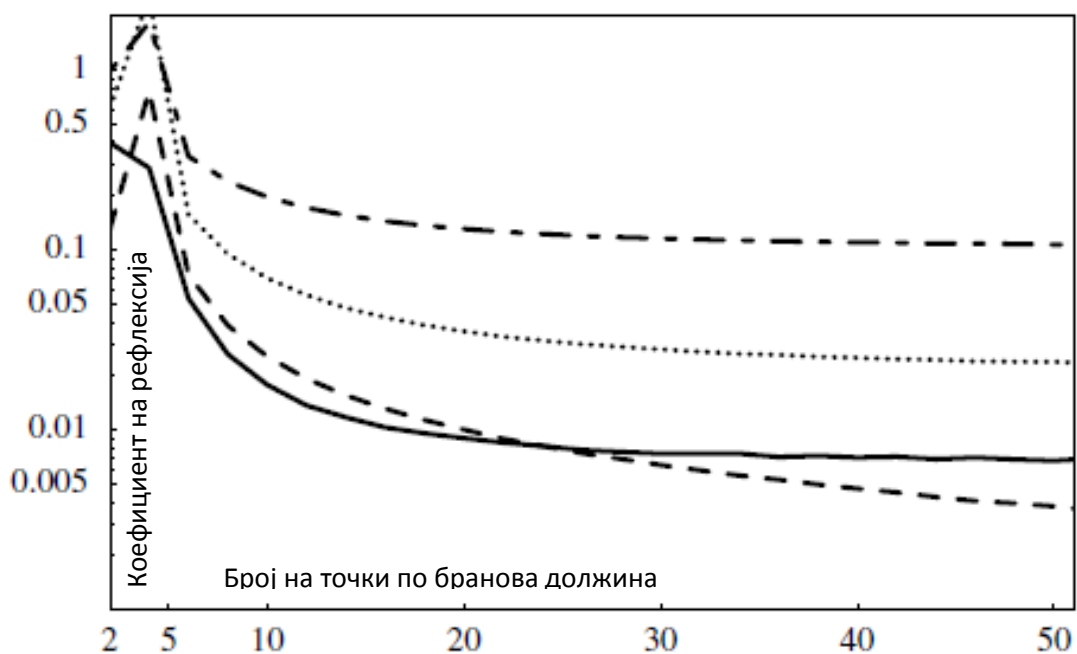
Слика 2.2. Споредба на осцилациите за бранова равенка во оригинален облик и комплексен облик

Во горниот ред од Слика 2.2 се гледа дека кога имагинарниот дел не постои осцилациите се константни. Истото се случува и кога бранот е претставен со комплексна интерпретација, за вредности на реалниот дел помали од 5 (долниот ред од Слика 2.2). Во тој опсег имагинарниот дел има вредност нула. Зголемувајќи го реалниот дел над 5, доведува до пораст на имагинарниот дел, а со тоа и експоненцијално опаѓање на вредноста на решението. Бидејќи, за вредности на $Re < 5$, решението во горниот и долниот ред не се разликуваат, може да се заклучи дека СОС не само што е апсорбирачки слој, туку е исто така нерелефрактни. Ова го прави различен од обичен апсорбирачки материјал.

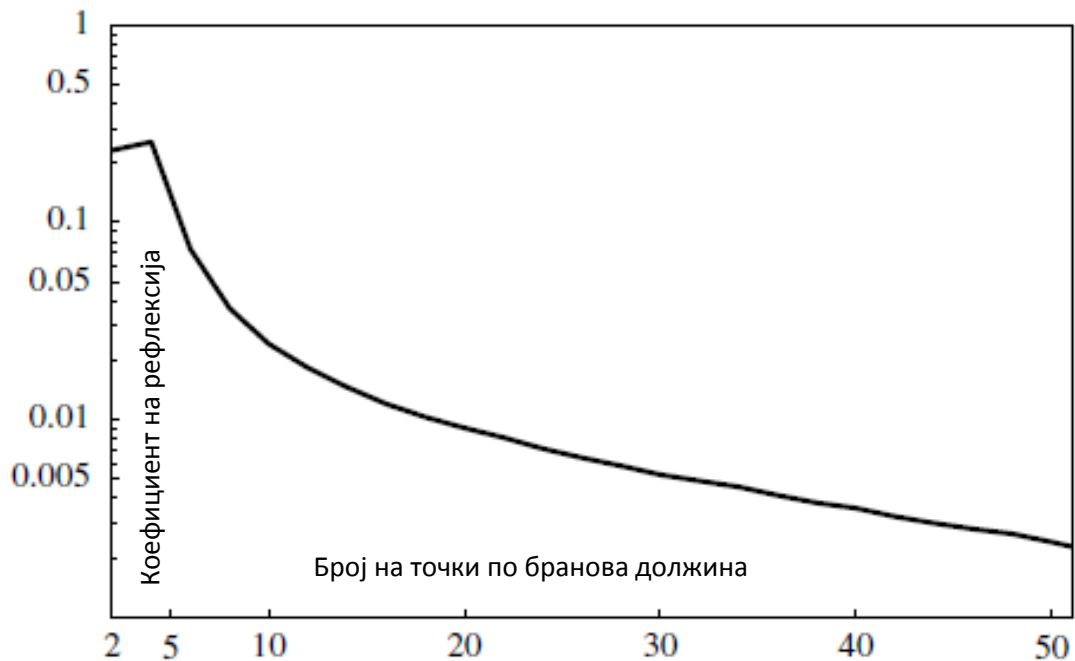
СОС е оригинална техника за дефинирање на вештачките граници. Покрај предностите во нејзината примена постојат одредени недостатоци. Ограничувањето на бесконечниот полупростор со овие граници функционира идеално само доколку бранот во моделот се претстави со точна бранова равенка. Доколку бранот нумерички е претставен со апроксимираната бранова равенка, СОС предизвикува одредена рефлексија.

Апсорпцијата на брановите во СОС е директно зависна од аголот под кој приоѓа бранот и од бројот на точки по бранова должина. На *Слика 2.3* и *Слика 2.4* се прикажани: коефициентот на рефлексивност во зависност од бројот на точки по бранова должина за *P*- и *SV*- бранови. Зависноста на коефициентот на рефлексивност од аголот под кој влезниот бран влегува во СОС е прикажана на *Слика 2.5* (*Festa&Nielsen[22]*).

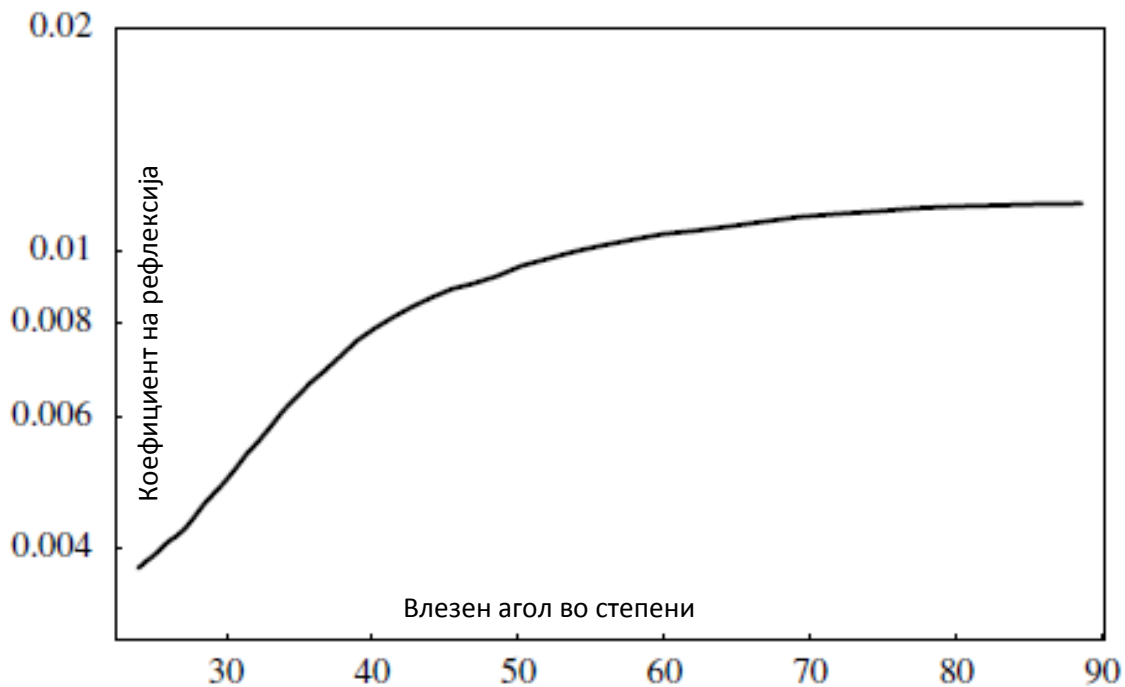
Како трет недостаток на овие вештачки граници се смета немањето можност за примена на истите во нумерички модели со нехомогени материјални средини. Идејата за истегнување на координатите престанува да важи доколку материјалните карактеристики се нехомогени нормално на границите на моделот.



Слика 2.3 коефициентот на рефлексивност во зависност од бројот на точки за *P*-бран



Слика 2.4 Коефициент на рефлексija во зависност од бројот на точки за S-бран



Слика 2.5 Зависност на коефициентот на рефлексija (ордината) од влезниот агол на бранот (апциса)

2.3.3 Локални граници

Локалните граници се добиени со апроксимација на глобалните граници, по време и простор. Иако апроксимациите отстапуваат од точната дефиниција, и поради тоа носат одредена грешка во решението, тие се воведени затоа што го поедноставува и скратува патот до решението. Во апроксимацијата се користат локалните диференцијални оператори. Споредено со глобалните граници, за да се пресметаат податоците кои се од интерес за некоја точка од локалната границата, доволно е да се знаат решенијата за нејзините соседни точки, во тековниот и неколку претходни временски чекори.

Според начинот на апроксимирање, локалните граници се поделени во пет главни групи

- 1) Параксијални
- 2) Вискозни
- 3) Повеќенасочни
- 4) Граници базирани на ширењето на излезниот бран
- 5) Екстраполациони

2.3.3.1 Параксијални

Заслугата за развој на параксијалните апроксимации се дожи *Clearbout* и *Johnson*[16]. *Clayton* и *Engquist*[15] вовеле практична примената на параксијалните апроксимации како вештачки граници. Тие ги создале едни од најпопуларните и најприменувани параксијални граници. Нивните граници развиени за дводимензионална се претставени со следната бранова равенка:

$$U_{xx} + U_{zz} = v^{-2}U_{tt} \quad (2.5)$$

со скаларно поле во форма

$$U(x, z, t) = Ae^{i(\omega t \pm k_x x \pm k_z z)} \quad (2.6)$$

Преку просторната екстраполација на оваа равенка се добива дисперзионата релација на бран кој патува во позитивна насока на z -оската

$$k_z = \pm \frac{\omega}{v} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega^2 k_x^2}{\omega^2}\right)\right]} \quad (2.7)$$

каде

- k_z и k_x се брановите броеви во z и x -направец соодветно,
- ω е аголната фреквенција
- v е брановата брзина

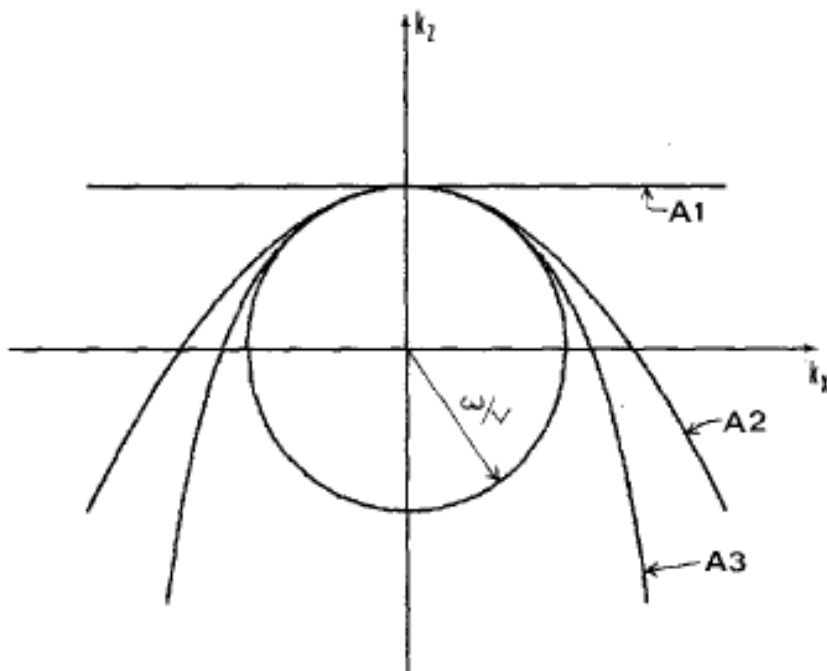
Бидејќи k_z постанува нестабилно за вредности на $\frac{vk_x}{w} > 1$, авторите [15] предложиле ограничување на областа на решенија само за бранови кои се движат во рамките на конус околу z -оската (параксијални бранови) за кои вредноста под коренот во (2.7) не е негативна. За да се добијат параксијалните апроксимации се користи *Pade*-експанзијата на членот под коренот. За позитивен знак во равенката (2.7) се добиваат три апроксимации:

$$A1: \quad \frac{vk_x}{w} = 1 + O\left(\left|\frac{vk_x}{w}\right|^2\right)$$

$$A2: \quad \frac{vk_x}{w} = 1 - \frac{1}{2}\left(\left|\frac{v^2 k_x^2}{w^2}\right|\right) + O\left(\left|\frac{vk_x}{w}\right|^4\right)$$

$$A3: \quad \frac{vk_x}{w} = \frac{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{vk_x}{w}\right)^2}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{vk_x}{w}\right)^2} + O\left(\left|\frac{vk_x}{w}\right|^6\right)$$

Кога треба да се направи апроксимација на бран кој патува во негативната насока на z -оската треба да се користи знакот минус од формулата (2.7). На овој начин двата брана, дојдовниот и излезниот, може да се разделат. На Слика 2.6 е дадена и нивната графичка интерпретација заедно со дисперзионата релација $k_z^2 + k_x^2 = k^2 = \left(\frac{w}{v}\right)^2$. Од сликата се забележува дека грешката се намалува со зголемување на редот на апроксимацијата.



Слика 2.6 Графички приказ на дисперзионите релации A1, A2 и A3

Користејќи ја аналогијата со скаларната равенка (2.6), се добиваат апроксимациите за векторско поле, т.е. за еластичната бранова равенка за бран која патува низ хомогена средина:

$$u_{tt} = D_1 u_{xx} + H u_{xz} + D_2 u_{zz} \quad (2.8)$$

За практичната примена на параксијалната апроксимација равенката (2.8) треба да се изрази во временски домен:

$$A1: \quad u_z + B_1 u_t = 0$$

$$A2: \quad u t_z + C_1 u_{tt} + C_2 u_{tx} + C_3 u_{xx} = 0$$

$$\text{каде } D_1 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}, H = (\alpha^2 - \beta^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_z = C_1 = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}$$

$$C_2 = (\beta - \alpha) \begin{bmatrix} 0 & 1/\beta \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & 0 \\ 0 & \alpha - 2\beta \end{bmatrix}$$

Ефективноста на границите се докажува преку нивната апсорпциска моќ. За таа цел *Clayton* и *Engquist*[15] вовеле коефициент на рефлексija:

$$r(\theta) = - \left[\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \right]^2 \quad (2.9)$$

Според (2.9) рефлексijaта кај овие граници е во директна зависност од аголот под кој бранот приоѓа кон границата (θ). За агол 0, овие граници работат како идеални апсорбирачи. Меѓутоа со порастот на аголот расте процентот на рефлексija.

Добрите резултатите кои биле добиени од истражувањата на *Clayton* и *Engquist*, ги ставиле параксијалните граници во преден план во однос на сите дотогаш познати локални граници. Голем број научни работници започнале истражување на различни аспекти од примената на овие граници. Најзабележителни достигнувања во анулирањето на недостатоците на параксијалните граници дал *Stacey* [61]. Тој докажал дека границите на *Clayton&Engquist* со тек на време ја губат нумеричката стабилност, односно поместувањата почнуваат експоненцијално да растат. Грешката која е создадена од нивната нестабилност влијае не само на точноста на резултатите за точките на границите, туку и на точките од централниот дел на нумеричкиот модел.

Како резултат на истражувањата на *Stacey* добиени се 3 нови формулации за параксијални граници од прв и втор ред. *P3* границата дефинирана со изразите 2.10 и 2.11 е подобрена верзија на *A1* границата од прв ред на *Clayton* и *Engquist*:

$$U_z = -\frac{1}{\beta}U_t + \frac{\beta - \alpha}{\beta}W_x \quad (2.10)$$

$$W_z = -\frac{1}{\alpha}U_t + \frac{\beta - \alpha}{\beta}U_x \quad (2.11)$$

Границата $P4$, дефинирана со изразите 2.12 и 2.13, е подоброто решение на $A2$ параксијална граница од втор ред:

$$\beta U_{zt} = -U_{tt} + \alpha(\alpha - \beta)W_{xz} + \left(\alpha^2 - \alpha\beta + \frac{1}{2}\beta^2\right)U_{xx} \quad (2.12)$$

$$\alpha W_{zt} = -W_{tt} + \beta(\alpha - \beta)U_{xz} + \left(\beta^2 - \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2\right)W_{xx} \quad (2.13)$$

каде

- α и β се брзините на P - и SV -бранот
- U се хоризонталните поместувања
- W се вертикалните поместувања
- индексите ги означуваат изводите по x , y и по време

Stacey воведува уште една граница, $P5$, која е поточна од сите претходно споменати. Меѓутоа комплексноста на оваа граница носи и одредени ограничувања во однос на нејзината примена. Главното ограничување за да не се наруши стабилноста на $P5$ границата е соодносот на брзините на P - и SV - бранот, кој не смее да биде поголем од 2:

$$U_{zt} = -\beta U_{zz} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha - 2\beta}(W_{tx} + 2\beta W_{xz}) + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha - 2\beta)}U_{xx} \quad (2.14)$$

$$W_{zt} = -\alpha W + \frac{\beta - \alpha}{2\alpha - \beta}(U_{tx} + 2\alpha U_{xz}) + \frac{\alpha\beta}{2(\beta - 2\alpha)}W_{xx} \quad (2.15)$$

Низ неколку нумерички теста *Stacey* ја верификува стабилноста и точноста на новоформираните граници. Дополнително низ споредбени анализи на коефициентот на рефлексивност [60] покажано е дека грешката на границите $P2$ и границите $P4$ е од ред $O(s^4)$, додека границите $A1$ и $A2$ имаат ред на грешка $O(s^2)$ и $O(s^3)$ соодветно.

2.3.3.2 Вискозни

Lysmer и *Kuhlemeyer* се сметаат за пионери на вештачките граници. Како појдовна точка во формирањето на вештачките граници во нивниот модел се користи законот за постојаност на енергијата (*Kausel* и *Tassoulas* [42]). Со нивниот труд [50], започнува

развојот на нумеричките методи за симулација за распространување на брановите. Во своите истражувања тие анализираше повеќе начини за дефинирање на границите на моделот. Дефиницијата на вештачките граници ја добиле со претставување на нормалните и тангенцијалните напрегање со изразите 2.16 и 2.17:

$$\sigma = a\rho a\dot{w} \quad (2.16)$$

$$\tau = b\rho\beta\dot{u} \quad (2.17)$$

каде

- a и b се бездимензионални параметри
- α и β се брзините на пропација на P - и SV - бранот
- ρ е густината на медиумот
- $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ и $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$ се забрзувањата

Формулите 2.16 и 2.17 се прва дефиниција за вештачка граница.

Ефикасноста на границата ја докажале со споредба на влезната и излезната енергија на бранот. Со менување на вредностите на бездимензионалните параметри (a и b) тие докажале дека при вредност $a = b = 1$, се постигнува скоро идеална апсорпција на излезната енергија. Изборот на параметрите го тестирале на три различни влезени бранови: тангенцијален, лонгитудален и површински.

За да дојдат до односот помеѓу влезната и излезната енергија Lysmer и Kuhlemeyer трганале од формулата за густината на кинетичка енергија на P - бранот (Ewing[21]):

$$W_p = \frac{1}{2} \rho A_p^2 k^4 c^2 \sec^2 \theta e^{2ikct} \quad (2.18)$$

каде

- A_p е амплитудата на P - бранот,
- k е брановиот број,
- θ е аголот на брановиот фронт во однос на границата и
- c е брзината на бранот долж површината на бранот $c = V_p \sec \theta$.

Вкупната енергија се добива со удвојување на главната кинетичка енергија. Вкупната енергија помножена со брзината на пропација и површината на фронтот на бранот го дава флуksот на енергијата:

$$E_p = 2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \rho A_p^2 k^4 c^2 \sec^2 \theta \right] V_p \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{\rho}{V_p} A_p^2 w^4 \sin \theta \quad (2.19)$$

каде w е кружната фреквенција $k \sec \theta = \frac{w}{c} \sec \theta = \frac{w}{V_P}$.

На сличен начин авторите дошле и до флуксот на рефлектираниот бран:

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{\rho}{V_P} A^2 w^4 \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{\rho}{V_S} B^2 w^4 \sin \vartheta \quad (2.20)$$

каде A и B се амплитудите на рефлектираниот P- и SV-бран, V_P и V_S се нивните брзини, а θ и φ се агли под кои се рефлектираат P- и SV-брановите

Kouroussis et al [45], укажувајќи на грешката која е направена од Lysmer [50], и даваат подобрен израз за односот помеѓу рефлектираната и излезната енергија:

$$\frac{E_r}{E_i} = A^2 + \frac{\tan \vartheta}{\tan \theta} B^2 \quad (2.21)$$

2.3.3.3 Повеќенасочни

Аголот под кој бранот приоѓа на вискозните и параксијалните граници е сериозен проблем за стабилноста и точноста на решенијата. Higdon [33], [34] своите истражувања ги насочил кон создавање на вештачки граници кај кои аголот нема да има влијание на апсорпционата способност на границите.

За да го избегне проблемот со аголот, Higdon предложил граници кои ќе работат како идеални апсорбери само за одредени агли. Во останатите ќе се создаде одредена рефлексија.

Доколку излезниот бран се анализира како суперпозиција на рамнински бранови, тој може да се претстави со следнава равенка:

$$U(x, y, t) = \sum_i f_i(ct + x \cos \varphi_i \pm y \sin \varphi_i) \quad (2.22)$$

За апроксимацијата на оваа бранова равенка Higdon дефинирал оператор во форма на функција за поништување:

$$\left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - c_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(x, y, t) = 0 \quad (2.23)$$

Со правилен избор на соодносот на брзината c и влезниот агол ϕ_i , преку $c_i = c/\cos\phi_i$, операторот за поништување може за секој бран да ја сведе рефлексијата на минимум. Теориски, доколку n тежи кон бескрај, овој оператор ќе претставува граница која е совршен апсорбер.

Будејќи функцијата за поништување зависи од $\cos\phi_i$ се поставува прашање за бројот на агли и нивните вредности кои треба да бидат вклучени во операторот. Низ нумерички тестови, со $n = 2$, *Higdon* покажал дека вредностите за аголот треба да се движат во граници $0 < |\phi_i| < \pi/2$. Покрај тоа заклучил дека на рефлексијата кај овој тип на граници не влијаат вредностите на аглиите.

Коефициентот на рефлексија за овие граници е:

$$R_n = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\cos\phi_i - \cos\theta}{\cos\phi_i + \cos\theta} \right) \quad (2.24)$$

Имајќи во предвид дека косинусот од аголот не може да добие поголем од 1, сите членови на производот во коефициентот на рефлексија ќе бидат со вредности помали од 1. Тоа значи дека и самиот коефициент ќе има крајна вредност помала од 1. Ова е важно подобрување во однос на вискозните граници и *AI* Параксијалните граници.

Примената на повеќенасочните граници носи свои предности и недостатоци. Главните предности се:

- едноставната имплементација, бидејќи користи само нормални изводи;
- се поедноставуваат нумеричките модели, затоа што кај овој тип на изолирање не е потребна посебна дефиниција за аглиите на моделот;
- нема потреба од дополнителни точки. Операторот од овој тип на граници работи само со постоечки точки и нема потреба од воведување фиктивни точки како што е случајот кај екстраполационите граници;

Недостатоците на овие граници се:

- стабилноста – како резултат на грешките при заокружувањата може да станат нумерички нестабилни во текот на времето.
- зависноста од бројот на агли и нивните вредности.

2.3.3.4 Граници базирани на расејување на излезниот бран

Вештачките граници на расејување се најнапред дизајнирани за симулирање на кружна вештачка граница. Основата на овие граници е во отфрлање од решението

(развиено во ред) на членовите кое се пресметуваат за растојанија кои се надвор од зоната на интерес.

Ако се анализира хармониски бран дефиниран со временска зависност во облик $e^{-i\omega t}$, решението на математичкиот проблем може да се добие во облик:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ на } \Omega^+ \quad (2.25)$$

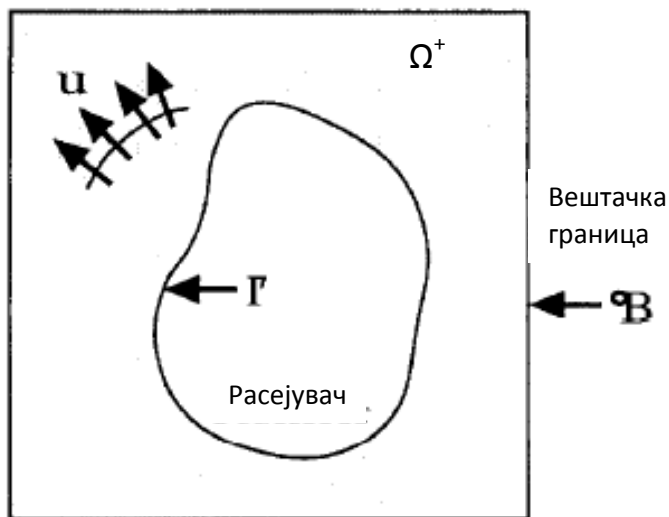
$$u = g \text{ на } \Gamma \quad (2.26)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (u_r - iku) = 0 \quad (2.27)$$

каде е:

- Γ е границата на расејувачот,
- Ω^+ е неограничеиот медиум надвор од границите на расејувачот, и
- g кое се добива од излезниот бран (Слика 2.7)

Третиот дел од оваа равенка го претставува *Sommerfeld*-овиот услов.



Слика 2.7 Пресметковен модел ограничен со вештачки расејувачки граници

За да се сведе математичкото решение на конечни димензии, се воведува оператор B . Со воведување на операторот B , вториот услов (2.26) добива облик:

$$Bu = 0 \text{ на } \Gamma \quad (2.26)$$

Операторот B , може да се дефинира во облик кој ќе ги претставува точните гранични услови:

$$\check{B}u = \frac{\partial u}{\partial n} - Mu \quad (2.29)$$

каде M е од DtM пресликувањето. Тоа значи дека овој оператор, дефиниран на овој начин, е глобален во простор. За да се сведе на конкретни димензии, B операторот добива унифициран облик во поларни координати (r, θ) за расејувачки граници со кружна форма:

$$Bu = u_r - \alpha_i(r)u - \beta_i(r)u_{\theta\theta} \quad (2.30)$$

каде

- α_i и β_i се соодветно избрани радијални функции
- r и θ се поларните координати по кои се прават парцијалните изводи пр $u_r = \frac{\delta u}{\delta r}$
- i го дефинира редот на границата, може да биде 1 или 2

За да се направи правилен избор на овие две функции, треба најнапред да се анализира решението (разиено во ред) во надворешноста од кругот. Врз основа на тоа кои и колку членови на редот ќе бидат отфрлени, има три семејства на расејувачки вештачки граници.

Првиот тип е претставен од *Bayliss-Turkel*[9] кои за основа ја земаат асимптотска експанзијата во далечина:

$$u = \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta)}{r^n} \quad (2.31)$$

$F_n(\theta)$ коефициентите се независни од радиусот r и може да се пресметаат според релацијата

$$2iknF_n = n(n-1)F_{n-1} + BF_{n-1} \quad (2.32)$$

каде

- $n=1, 2, \dots$
- $F_0 = u_\infty$
- B е Laplace - Beltrami оператор

Тргувајќи од Ханкеловата експанзија Li&Cendes[46] дале свој предлог:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\theta)H_n(kr) \quad (2.33)$$

каде H_n е n -ти ред на Ханкеловата функција.

Третата група на членови е даден од *Mittra&Ramahi* [52]. Нивните расечувачки вештачки граници се добиени преку развивање на *Bayliss-Turkel*-овите границите од втор ред. Во *Табела 2.1* се прикажани сите три комбинации на коефициентите:

Тип	α_1	β_1	α_2	β_2
Bayliss-Turkel	$-ik - \frac{1}{2r}$	0	$-ik - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8r(1+ikr)}$	$\frac{1}{2r(1+ikr)}$
Li-Cendes	$-\frac{kH_1(kr)}{H_0(kr)}$	0	$-\frac{k^2r(g_2(kr) - 1)}{(kr g_1(kr) - 1)}$	$-\frac{1}{(kr g_1(kr) - 1)}$
Mittra-Ramahi	$-ik - \frac{1}{2r}$	0	$-ik - \frac{1}{2r} - \frac{1}{8kr^2} + \frac{1}{8k^2r^3}$	$-\frac{1}{2kr^2} + \frac{1}{2k^2r^3}$

Табела 2.1 Комбинација од коефициенти за расечувачките граници

2.3.3.5 Екстраполациони граници

И за овие граници, како појдовна точка, се користи идејата целото браново поле да се претстави како сума од поединечни бранови кои патуваат низ различни правци Θ . Според *Liao* и *Wong* [47] апсорбирачките граници може да се дефинираат преку пресметување на поместувањата на точките од граничното поле користејќи вредности од точки во полето кои се наоѓаат на права линија која е нормална на границата:

$$U(x, y, t + \Delta t) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N U(x - jc\Delta t, y, t - (j-1)\Delta t) \quad (2.34)$$

каде $C_j^N = \frac{N!}{j!(N-j)!}$ е биномен коефициент, а N е редот на граничниот услов.

Ако се искористи идејата дека излезниот бран може да се претстави како збир на бранови кои на границата заклопуваат различни агли со x -оската, нивната брзина ќе биде $a/\cos\theta_i$. Брановата равенка претставена како сума од сите тие бранови добива облик:

$$U(x, y, t) = \sum_i \left(x - \frac{a}{\cos\theta_i} t\right) \quad (2.35)$$

При употребата на апроксимацијата која го третира бранот на овој начин, не смее да занемари фактот дека полињата не се веќе константи по просторно - временската линија $x - at$. Затоа брановото поле мора да биде апроксимирано со помош на полиномен ред од посакуваните вредности $U(x-c\Delta t, y, t)$; $U(x-2c\Delta t, y, t-\Delta t)$; $U(x-3c\Delta t, y, t-2\Delta t)$..., кои

лежат на иста просторно - временска линија $x-\alpha t = x-\alpha (t+\Delta t)$. Екстраполацијата може да се спроведе како специјален случај на Лагранжовата интерполациона формула $L(x)$. Општата Лагранжова формула треба да се модифицира земајќи ги во предвид константни растојанија помеѓу јазлите. Вака адаптираната формула ако се примени на вредностите $U(x-jc\Delta t, y, t-(j-1)\Delta t)$ за $j=1, \dots, N$ и потоа се пресмета во точка $(x, y, t+\Delta t)$ ќе се добие равенката (2.34).

Формулацијата на граничниот услов може да се поедностави со употреба на диференцијални оператори (*Liao* и *Wong* [47]):

$$CU(x, y, t) = (T_{11} + T_{12}\nabla_t^{-1} + T_{13}\nabla_x^{-2})U(x, y, t) \approx U(x - c\Delta t, y, t) \quad (2.36)$$

каде ∇_x^{-1} и ∇_x^{-2} се диференцијални оператори назад по време и x -координата соодветно, а C операторот симулира просторен оператор назад за $c\Delta t$. Бидејќи $c\Delta t \neq \Delta s$ (Δs е растојание помеѓу точките во шемата за конечни разлики) мора да се направи интерполација на вредностите во операторот C . Со вака дефинираните оператори, граничниот услов може да се запише како:

$$[1 - C\nabla_t^{-1}]^N U(x, y, t + \Delta t) = 0 \quad (2.37)$$

Доколку однесувањето на полето во точка $(x, y, t+\Delta t)$ се опише со оваа равенка, тоа значи дека ќе се направи екстраполација од вредностите од просторно - временската точка $(x - c\Delta t, y, t)$, при што операторите C и ∇_t^{-1} ќе се поништат еден со друг (*Liao* и *Wong* [47])

Во анализа на овие граници *Wagner* и *Chew* [65] изнесуваат и предлог за оптимизација на граничниот услов претставен од *Chew* и *Wagner*[14]

$$\left[\prod_{i=1}^N (1 - C(\alpha_i)\nabla_t^{-1}) \right] U(x, y, t + \Delta t) = 0 \quad (2.38)$$

Овој тип на граници користат само еднодимензионален шаблон, т.е. доволни се податоците од права линија која е нормална на апсорбирачката граница што прави лесно да се имплементира во нумеричките модели и во близина на агли од истите.

Од друга страна, шаблонот користи точки кои не се дел од мрежата. За да се екстраполираат вредностите потребно е да се направи интерполација на поместувањата од сите соседни точки. Ова се смета за најголем недостаток на овој тип на гранични услови.

2.4 Заклучоци

Голем дел од решенијата поврзани со сеизмологијата и динамиката на почви користат математички модел на еластичен полупросторот. Од практични цели еластичниот полупростор мора да се дефинира со конечна геометрија. Затоа во нумеричките модели се воведуваат точки во кои се дефинираат пропустливи гранични услови, т.е. вештачки граници. Според формулацијата на вештачките граници тие се класифицираат на граници со глобална и локална дефиниција. И кај двете групи на вештачки граници може да се констатираат одредени предности и недостатоци. Затоа изборот на типот на границата е во зависност од проблемот кој се пресметува.

Глобалните граници и Совршено одговарачкиот слој (СОС) најчесто се користат за ограничување на пресметковни модели кои го користат Методот на конечни елементи. Причината за ова е флексибилноста на границите и нумеричкиот метод кога е во прашање моделирањето на контурите на моделот и елементите во него, кои не се праволиниски. Најголемиот мотив за да се користат овие граници се точните решенија кои се добиваат. Меѓутоа кога станува збор за нивна примена во практичен пресметковен модел, поради нивната дефиниција која користи бесконични редови или изводи од повисок ред, со отсекување на редовите во конечен број членови, или со намалување на редот на изводот се генерира грешка, со што глобалните граници не се повеќе точни. Најголемиот недостаток на овие граници произлегува од нивното изведување. Поголемиот број претставници на глобалните граници се изведени за полн простор. Оттука не може да се предвиди нивното однесување кога во точките од границата ќе се сретнат дојдовниот и рефлектираниот бран од слободната површина на полупросторот (Gicev[23]).

СОС работи точно само ако се решава точната бранова равенка. Кога се пресметува апроксимираната бранова равенка на дискретизиран систем, без разлика на нумеричкиот метод, овој тип на граници креираат одредена грешка (Johnson[36]). Слично како и кај локалниот тип на граници, точноста на совршено одговарачкиот слој е во зависност од аголот на дојдовниот бран. Доколку изворот е на доволно големо растојание, тогаш аголот се намалува а со тоа и грешката на СОС. Сепак најголемиот проблем, овој тип на граници го имаат кај модели кои не се хомогени во хоризонтален правец.

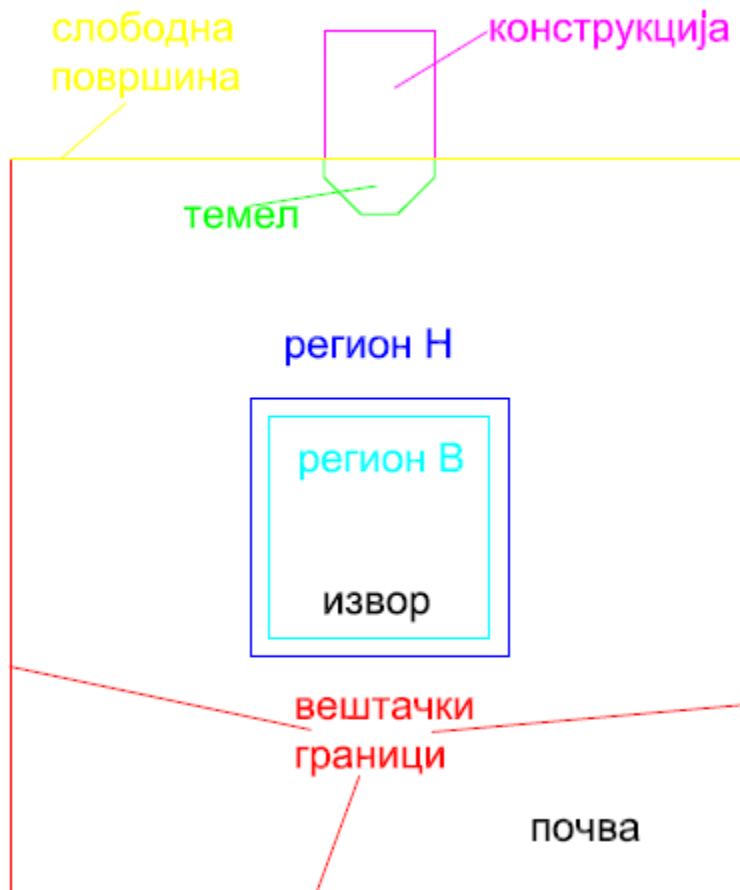
Спротивно на глобалните, локалните граници повеќе одговараат кога се моделираат праволиниски контури. Нивната апроксимација на брановата равенка со просторни и временски изводи од низок ред, одговара на Методот на конечни разлики, кој исто така има слабости кога се во прашање контури кои не се праволиниски. Големината на грешката зависи од повеќе фактори: типот на апроксимација, близината на изворот до границата, аголот на дојдовниот бран и т.н. Со помош на законот за постојаност на енергијата може да се тестираат и изберат оптималните параметри за моделот, за кој овие граници би продуцирале минимална грешка.



Поглавје 3

Нумерички модел

Крајна цел на оваа дисертација е да се развие нумерички модел за определување на одговор на системот почва - конструкција на сеизмички побуди од човечки активности (Слика 3.1)



Слика 3.1 Декомпозиција на системот почва - конструкција

Креирањето и тестирањето на нумеричкиот модел направено е во три фази. Генерирањето на моделот во фази овозможува полесно следење на однесувањето на поделните негови главни елементи.. Најнапред се испитувани границите на моделот. За таа цел е креиран нумерички модел на хомоген - еластичен полупростор. Во втората фаза е додаден темелот. За да се внесе темелот потребно е во моделот да се внесе стабилен контакт како интеракција на две површини со различни материјални карактеристики. Финалниот модел е добиен со вметнување на објектот.

3.1. Еластичен полупростор

Ограничувањето на физичкиот домен, бесконечниот еластичен полупростор, во конечен пресметковен модел започна со имплементирање на параксијалните вештачки граници на Clayton&Engquist[15]. Во оваа фаза нумеричкиот модел се состои од три

главни компоненти: централен дел, три параксијални вештачки граници и слободна површина како контури. Брановото движење во централниот дел е опишано со помош на бранова равенка за ширење на бран во хомоген - еластичен простор.

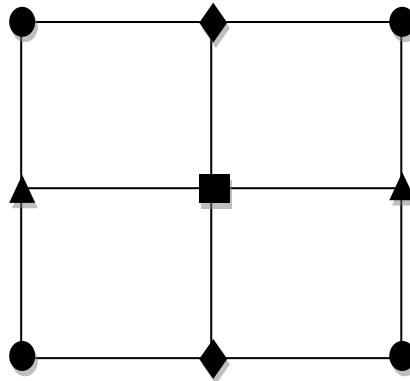
$$\rho \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta z} \right) + \mu \left(\frac{\delta^2 w}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta z \delta x} \right) \quad (3.1a)$$

$$\rho \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\delta^2 u}{\delta z \delta x} + \frac{\delta^2 w}{\delta z^2} \right) + \mu \left(\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} \right) \quad (3.1b)$$

каде

- u и w се поместувањата во x - и z -правец соодветно,
- α и β се компресивната и тангенцијалната брзина соодветно,
- l и m се Ламеовите параметри,
- ρ е густината.

Нумеричкиот модел е направен со користење на Методот на конечни разлики. Брановото распростирање (равенките 3.1a и 3.1b) е пресметано со помош на експоненцијална пресметковна шема, во која за да се добие поместувањето во следниот временски чекор, се користат поместувањата од актуелниот и претходниот временски интервал. Трансформацијата на овие две равенки во експлицитна шема подразбира формирање на пресметковна ќелија во следниов облик:



Слика 3.2 Пресметковна ќелија по Kelly [44]

Поместувањата се пресметуваат во централната точка \blacksquare од пресметковната ќелија (со координати x и z) за секој следен временски чекор ($t+Dt$) со помош на претходно пресметаните поместувањата од сите точки во ќелијата во актуелниот временски чекор и поместувањето од централната точка во претходниот временски чекор.

Секој од изводите во равенките 3.1a и 3.1б, нумерички се апроксимирани со помош на конечни разлики. Вториот извод е заменет со прва конечна разлика напред и назад,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 u}{\delta t^2} &\cong \nabla(\Delta u[x][z][t]) = \frac{\nabla(u[x][z][t+1] - u[x][z][t])}{dt} \\ &= \frac{u[x][z][t+1] - 2u[x][z][t] + u[x][z][t-1]}{dt^2} \end{aligned}$$

▲ - точките се вклучени преку двојниот извод на поместувањето во x - правец

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{u[x+1][z][t] - 2u[x][z][t] + u[x-1][z][t]}{dx^2} \quad (3.2)$$

◆ - точките се активираат преку двојниот извод на поместувањето во z-правец:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = \frac{u[x][z+1][t] - 2u[x][z][t] + u[x][z-1][t]}{dz^2} \quad (3.3)$$

● - точките се дел од мешаниот извод на поместувањето:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} &= \frac{u[x+1][z+1][t] - u[x+1][z-1][t]}{dx dz} \\ &\quad + \frac{u[x-1][z+1][t] + u[x-1][z-1][t]}{dx dz} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Равенките (3.1a) и (3.1б) апроксимирани со експлицитна дискретна шема во конечни разлики ја претставуваат дефиницијата за нумеричко распростирање на бран во централниот дел. За апроксимацијата да биде применлива мора да се задоволат два услова:

- нумеричка стабилност дефинирана со соодносот на временскиот интервал и интервалот на мрежата
- точност дефинирана со нумеричката шема како бројот на пресметковни точки по брановата должина.

Земајќи еднакви просторни интервали во хоризонтален и вертикален правец $\Delta x = \Delta z = h$, за да се добие пресметковна шема со гарантирана стабилност во однос на првиот критериум, мора да биде задоволен следниот услов (Kelly et al.[44])

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (3.5)$$

каде Dt го означува временскиот чекор, h е растојанието помеѓу пресметковните јазли.

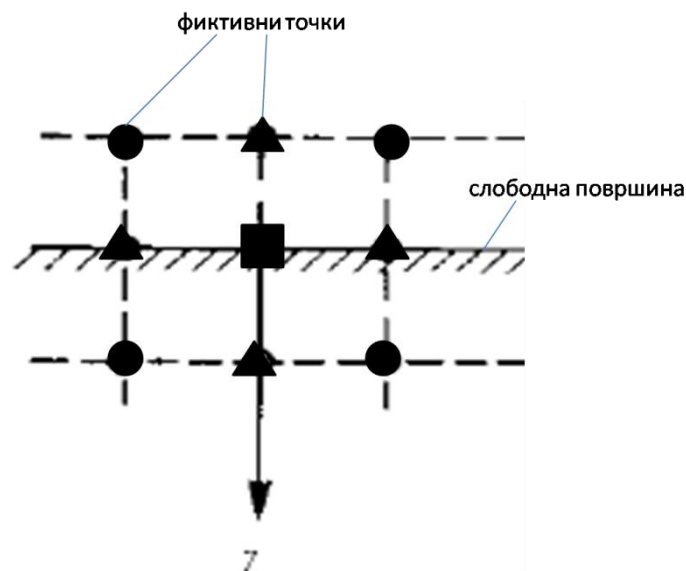
Вториот параметар доаѓа од феноменот наречен мрежна дисперзија, простудиран од страна на *Boore*[11] и *Alford et al*[7]. Тие препорачуваат бројот на јазлови точки по бранова должина да биде десет или повеќе. Тоа се прави со цел да се ограничи мрежната дисперзија во задоволителни граници (*Kelly et al.*[44]).

Горната контура на моделот е дефинирана како слободна површина. Тоа е најгорниот ред точки со кои се моделира почвата. Бидејќи овие точки се граничат со нематеријална средина тие ќе се разликуваат во однос на точките од централниот дел. Овој ред точки покрај интерпретација на брановата равенка треба да содржат дополнителни услови (равенките 3.6 и 3.7) со кои се анулираат нормалните и тангенцијалните s_z и t_{xz} напрегања:

$$(\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\delta u}{\delta x} + \alpha^2 \frac{\delta w}{\delta z} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} = 0 \quad (3.7)$$

Од пресметковен аспект, специфично кај точките на слободната површина е постоење на некомплетната пресметковната ќелија. Во неа недостасуваат горниот ред точки, кои во овој случај се нематеријални точки. Постојат две главни насоки како да се надмине овој проблем. Првиот концепт на *Alterman&Karal* [8] подразбира додавање на еден ред фиктивни точки (Слика 3.3).



Слика 3.3 Фиктивни точки кај слободната површина

Според оваа идеја точките од слободната површина се пресметуваат користејќи ја брановата равенка и стандардната пресметковна ќелија, додека фиктивните точки

своите вредности ќе ги добијат според дополнителните два услова (равенките 3.6 и 3.7). Бидејќи во равенките за анулирање на двете напрегања се јавуваат само парцијални изводи од прв ред во z - правец, нема потреба од горниот ред точки:

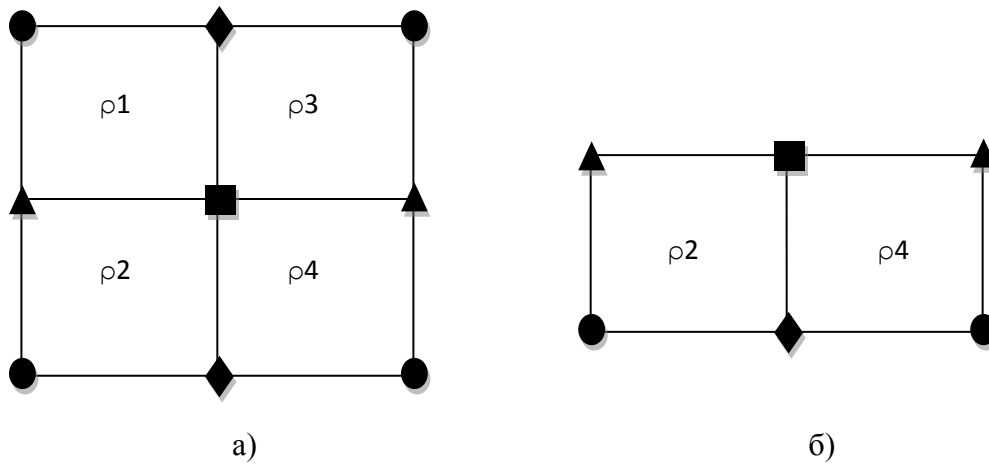
$$(\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{u[x+1][0][t] - u[x-1][0][t]}{2h} + \alpha^2 \frac{w[x][1][t] - w[x][0][t]}{h} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{u[x][1][t] - u[x][0][t]}{h} + \frac{w[x+1][0][t] - w[x-1][0][t]}{2h} = 0 \quad (3.9)$$

Покрај усложнувањето на физичкиот модел, кои произлегуваат од додавањето на уште еден ред фиктивни точки, исто така се усложнува и нумеричкиот модел. Експлицитниот пресметковен шаблон од централниот дел треба да се надополни со имплицитен шаблон, кој ќе ги пресметува поместувањата во фиктивните точки. Ова претставува усложнување на проблемот и од технички аспект, но и внесува неизвесност за долготрајната стабилност на моделот.

Min со соработниците [51] даваат предлог како да се надминат овие потешкотии при дефинирање на слободната површина. Нивната идеја ја користи нумеричка шема на *Kelly* [44] и начинот на кој функционира методот на конечни елементи. Тие предлагаат мрежата да не биде дефинирана со пресметковни јазли како носители на информациите, туку да биде мрежа од ќелии. На тој начин сите материјални карактеристики ќе бидат дефинирани во ќелиите, како што тоа се прави во методот на конечни елементи (Слика 3.3). Во овој случај, на аплицирањето на пресметковниот шаблон за бранова пропација на ваква мрежа од ќелии, му претходи пресметка на материјалните карактеристики за секој јазел поединечно.

Во случај сите четири ќелии да имаат исти материјални карактеристики, пресметковниот шаблон на *Min* е идентичен на пресметковниот шаблон на *Kelly* (Слика 3.4а). Предноста на техниката на *Min* доаѓа до израз кога материјалните карактеристики се разликуваат во некоја од четирите ќелии. Таков пример е слободната површина ($\rho_1 = \rho_3 = 0$) каде горните две ќелии отпаѓаат од пресметковниот шаблон (Слика 3.4б). Овој начин на интерпретирање на материјалните карактеристики не носи потреба истите да ги замениме со фиктивни ќелии или точки. Од тука, при вака дефиниран пресметковен шаблон нема потреба да се додаваат дополнителните услови за анулирање на напрегањата s_z и t_{xz} и шемата останува експлицитно дефинирана и во точките од слободната површина.



Слика 3.4 а) Пресметковна ќелија по Min[51] за централен дел и б) за слободна површина

Последниот сегмент со кој се дефинирани контурите на пресметковниот модел се вештачките граници. Точките од вештачките граници треба да ја симулираат границата на пресметковниот модел, но тие во никој случај не смеат да бидат контурни точки за физичкиот модел. Ова подразбира дека улогата на овие точки е да го пропуштат бранот кој патува од централниот дел на моделот. Повикувајќи се на условот за радијација на *Sommerfeld*[59], тие треба да дозволат енергијата која ја носи бранот да се расее во бесконечноста.

Преминувањето на следната фаза од креирањето на моделот подразбира дека имплементираните вештачки граници се компатибилни со централниот дел и со слободната површина. Тие не треба да создаваат голема рефлексивност и треба да се нумерички стабилни во временскиот интервал предвиден за тестирањето на комплетниот нумерички модел.

Првите граници кои беа применети во моделот, беа параксијалните граници на *Clayton* и *Engquist* [15]. Нивната *A2* апроксимација беше искористена за дефинирање на двете вертикални и хоризонтални граници. Аглиите каде се спојуваат вештачките граници беа определени со нивната *A1* апроксимацијата, ротирана за 45 или -45 степени. Првите испитувања беа спроведени врз математички модел каде сите четири страни беа дефинирани како вештачки граници. Овој модел е избран за тестирање со цел да се увидат перформансите на вештачките граници без притоа да има дополнително влијание на нивната точност и стабилност од слободната површина.

За да се определи степенот на рефлексивност што го продуцираат овие апроксимации беше искористен законот за постојаност на енергијата. Енергијата која е создадена во изворот на моделот треба да биде идентична на енергијата која ќе го напушти моделот низ вештачките граници (*Gicev*[24]; *Gicev & Trifunac*[25]). Изворот е

дефиниран според произволна полусинусоидна функција $A\sin(\pi t/t_d)$, каде амплитудата $A = 50\text{cm}$, а времетраењето на пулсот е $t_d = 0.05\text{s}$. (График 3.1)

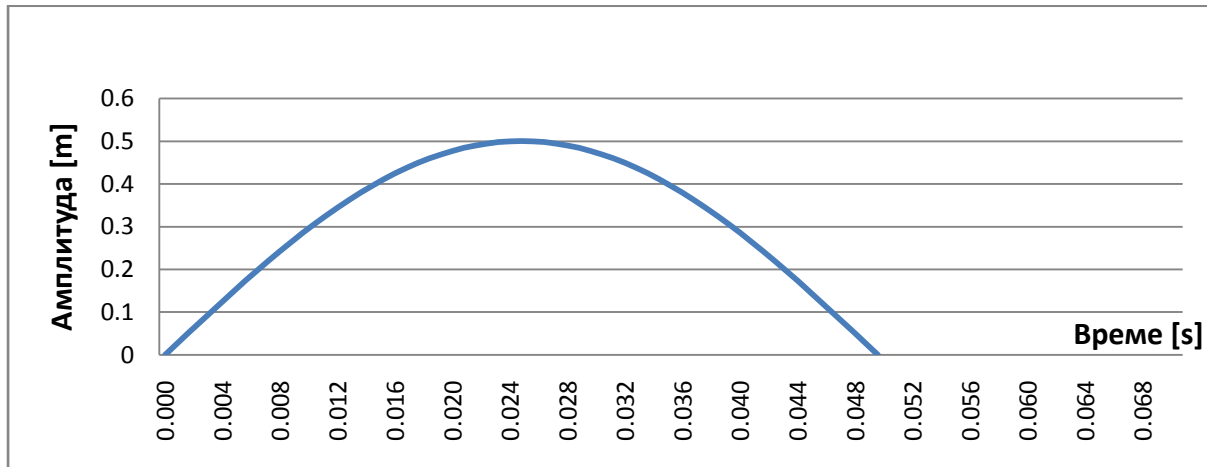


График 3.1 Полусинусоиден пулс како извор на побуда

Мерењето на влезната енергија е направено во 36 точки кои формираат квадрат со страна 9м. Според *Aki* и *Richards* [6] влезната енергија може да биде одредена како:

$$E = \rho \alpha A_i \sum_{k=0}^{\frac{(t_p+t_d)}{\Delta t}} \sum_{i=1}^{36} v_{i,k}^2 \Delta t \quad (3.10)$$

каде

- $v_i^k = \sqrt{\dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2}$ е радијалната брзина во јазелот i и временскиот чекор k ,
- ρ е густината на тлото,
- α брзината на P - бранот.

Припадната површина на јазелот i е $A_i = hc \cos \gamma$, каде γ е аголот помеѓу хоризонталната оска и линијата која ги поврзува изворот и јазелот i и $-\frac{\pi}{4} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}$. Времето потребно пулсот да стаса до најдалечната точка на квадратот е $t_p = 9h/(\alpha\sqrt{2})$. Интегралот во однос на времето се апроксимира со сума за сите временски чекори почнувајќи од $t = 0$ до $t = t_d$. Со оглед на тоа дека математичкото решение за пресметување на енергијата е двоен интеграл, потребно е и за вториот интеграл по простор да се направи уште една сума во нумеричката равенка. Оваа сума ја собира енергијата во сите точки за секој временски чекор одделно.

Резултатите од ова тестирање покажаа дека овие граници се прифатливи според критериумот на рефлексивјата. Рефлексивјата по поминати 0.6s е 10.9% и според График 3.2 има тенденција на опаѓање.

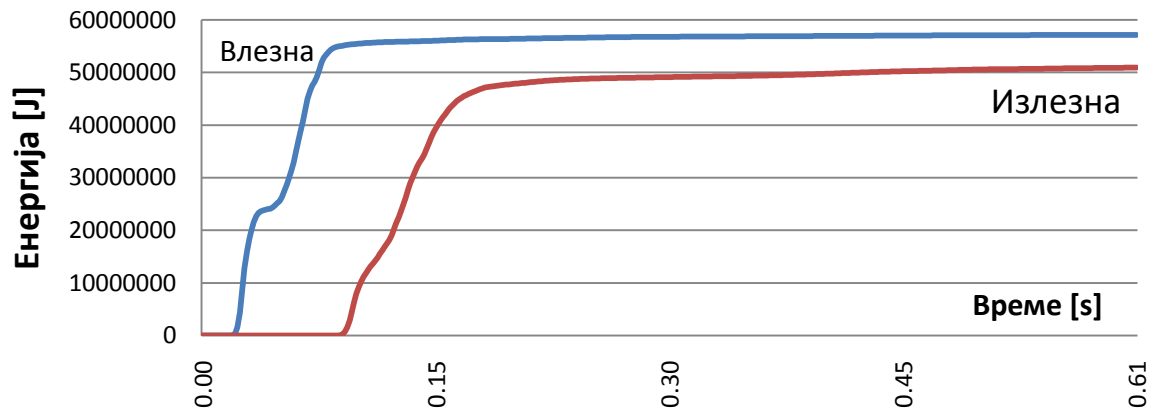


График 3.2 Споредба на влезната и излезната енергија за C&E границите до 0.6s

Но, тестовите покажаа дека во подоцнежните временски интервали овие граници не поседуваат долготрајна нумеричка нестабилност. Поместувањата во точките кои ја содржат дефиницијата за $A2$ и $A1$ апроксимацијата почнуваат да растат експоненцијално (График 3.3). Интерактивноста со централниот дел од моделот прави оваа нестабилност да се пренесе и во останатите точки од моделот. Ова ги прави овие вештачки граници неприменливи кога треба да се спроведат симулации кои траат подолго од времето потребно бранот да го напушти моделот.

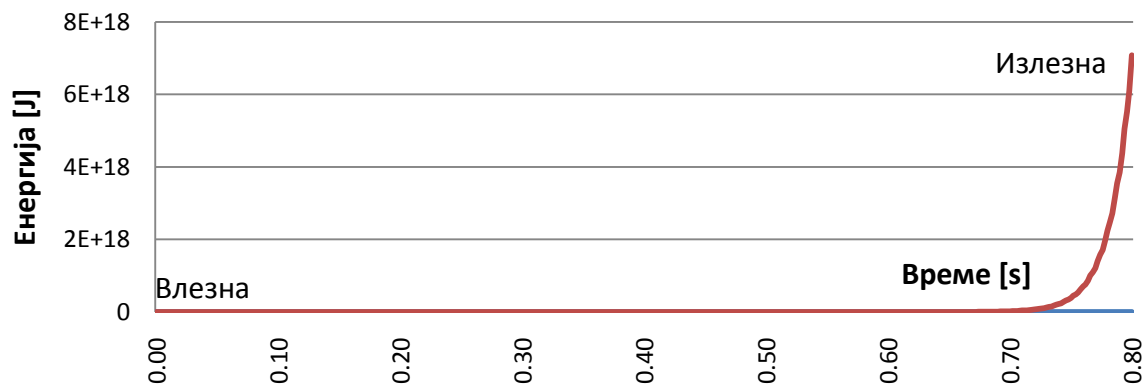


График 3.3 Споредба на влезната и излезната енергија за C&E границите до 0.8s

Следните граници кои беа испитани се параксијалните граници на *Richard Stacey*[61]. Слично како и авторите на претходните граници, и *Stacey* претставил една граница од прв

$$U_z = -\frac{1}{\beta} U_t + \frac{\beta - \alpha}{\beta} W_x \quad (3.11)$$

$$W_z = -\frac{1}{\alpha} W_t + \frac{\beta - \alpha}{\beta} U_x \quad (3.12)$$

и втор ред

$$\beta U_{zt} = -U_{tt} + \alpha(\alpha - \beta)W_{xz} + \left(\alpha^2 - \alpha\beta + \frac{1}{2}\beta^2\right)U_{xx} \quad (3.13)$$

$$\alpha W_{zt} = -W_{tt} + \beta(\alpha - \beta)U_{xz} + \left(\beta^2 - \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2\right)W_{xx} \quad (3.14)$$

нарекувајќи ги *P3* (3.11-3.12) и *P4* (3.13-3.14) соодветно [61].

Определувајќи го редот на грешката, *Stacey* прави споредба на точноста помеѓу неговите и границите на *CE*. Од приложеното се гледа дека *P3* границата е поточна од *A1*, а дека *P4* е во исти ред со точност како *A2* [61] но е постабилна (важи за поголем однос a/β).

$$(A1) \text{ Грешка } (U) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\beta}\right)g' \cdot s^1 + O(s^2)$$

$$\text{Грешка } (W) = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right)f' \cdot s^1 + O(s^2)$$

$$(A2) \text{ Грешка } (U) = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{2\beta}g'' \cdot s^3 + O(s^4)$$

$$\text{Грешка } (W) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2\alpha}f'' \cdot s^3 + O(s^4)$$

$$(P3) \text{ Грешка } (U) = \left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha}\right)f' \cdot s^2 + O(s^3)$$

$$\text{Грешка } (W) = \left(\frac{2\beta - \alpha}{2\alpha}\right)g' \cdot s^2 + O(s^3)$$

$$(P4) \text{ Грешка } (U) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)g'' \cdot s^3 + O(s^4)$$

$$\text{Грешка } (W) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)f'' \cdot s^3 + O(s^4)$$

Покрај недостатокот на нумеричка точност, и стабилност во тек на време, *Stacey*[61] покажал и дека примената на границите на *CE* е ограничена и од соодносот на брзините на пропагирање на бранот. Во својот труд тој докажал дека членот $\left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right)W_{xx}$ од формулацијата на *CE* за пресметка на W_{zt} при соодносот на брзините $\alpha > 2\beta$ станува негативен и тоа води до нумеричка нестабилност. Формулацијата на *Stacey* ја нема таа слаба точка затоа што членот $\left(\beta^2 - \alpha\beta + \frac{1}{2}\alpha^2\right)W_{xx}$ е секогаш позитивен, без разлика на соодносот на брзините.

За да се потврди аналитичкиот пристап во одредувањето на грешката во конкретен практичен пример, направен е идентичен нумерички модел во кој *A2* и *A1*

границите се заменети со $P3$ по целата периферија. Користејќи идентичен влезен пулс и начин на пресметување на влезната и излезната енергија, пресметано е дека рефлексијата која ја создаваат $P3$ вештачките граници е 7,9% (График 3.4) во истиот временски интервал каде рефлексијата на $A2$ е 10,9%.

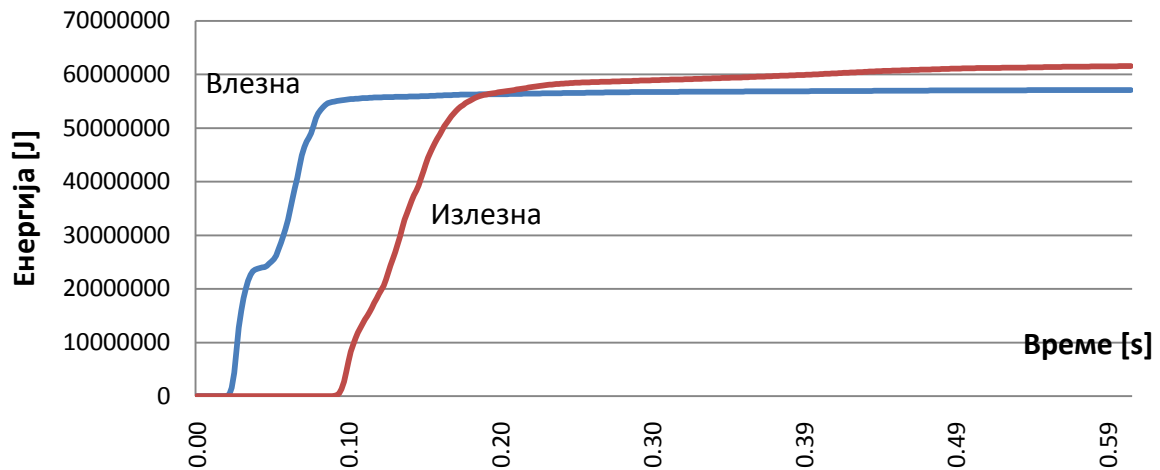


График 3.4 Споредба на влезната и излезната енергија за Stacey $P3$ границите до 0.6s

Пред да се донесе конечна одлука дали границите на *Stacey* се погодни за примена во конечниот модел, беше потребно да се докаже нумеричката стабилност на границите при подолги симулации. Затоа времето на нумеричка симулација беше поместено од 0.6s на 2.0s. Со оглед на тоа дека потврдата требаше да важи и за $P3$ и за $P4$, овие тестови на нумеричка стабилност беа дополнително искористени за меѓусебна компарација на однесувањето и точноста на овие два типа граници.

Најнапред беа испитувани двете граници на истиот модел каде сите четири граници се вештачки. Покрај долготрајноста, на границите беше разгледано и нивното однесување при различна поставеност на изворот во моделот, т.е. при нецелосна симетрија на влезната енергија. Во однос на x - оската изворот е поставен на три локации: 1/6, 2/6 и 3/6 од ширината, додека во z - правец изворот е поставен на 5 различни длабочини 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 од висината. Резултатите прикажани на *График 3.5* покажуваат дека до 2.0s и двете граници функционираат се однесуваат беспрекорно од аспект на стабилност. Дополнително може да се заклучи дека $P3$ границите предизвикуваат помала рефлексија. Рефлексијата има тенденција на пораст, во споредба со $P4$ каде рефлексијата е поголема, но се стабилизира.

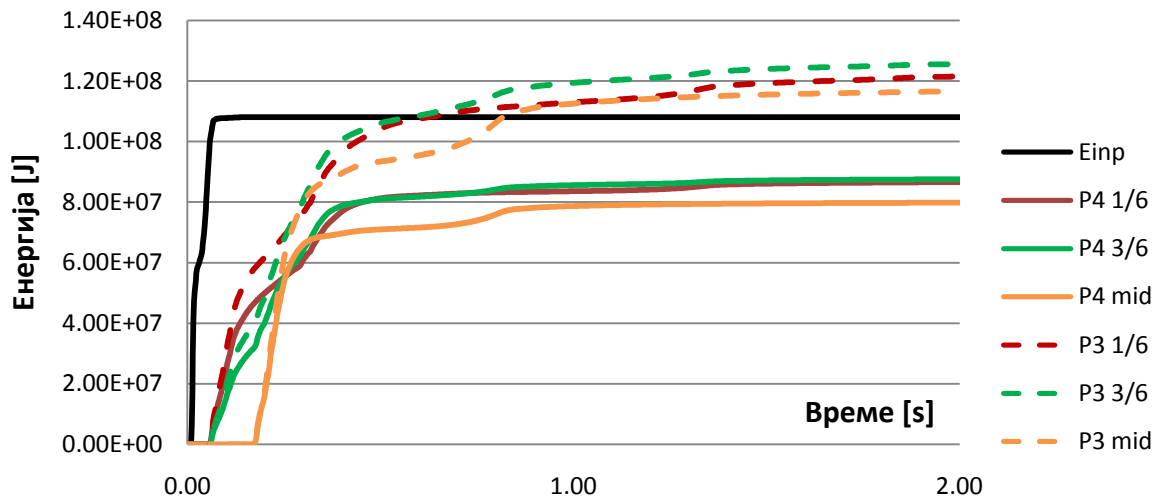


График 3.5 Споредба на влезната и излезната енергија за P3 и P4 границите при различна позиција на изворот, за елстичен простор

Имајќи во предвид дека во финалниот модел горната граница треба да биде слободна површина, направени се истите тестови, но на модел со три вештачки граници и една слободна површина, т.е. модел на полупростор. Во *Графикот 3.6* се прикажани резултатите добиени од овие тестови. И во овој случај тестовите ја потврдуваат стабилноста на границите и при нивна комбинација со слободната површина. Анализирајќи го графикот од гледна точка на точноста, сега може да се утврди дека при модел на еластичен хомоген полупростор P4 границите имаа многу поголема точност и тенденција на стабилизација, во споредба со P3 каде грешката е значителна во однос на P4 и со тенденција на пораст.

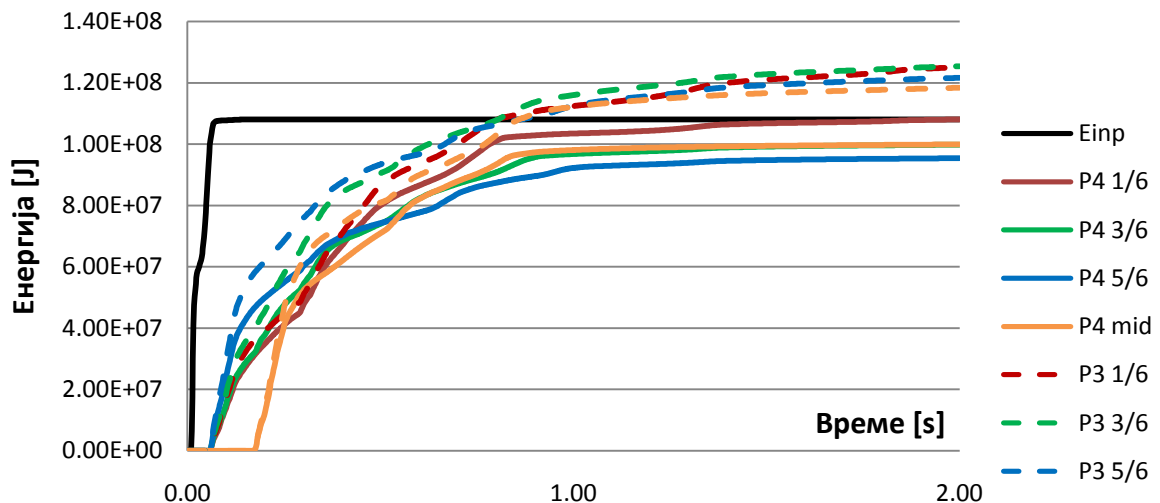
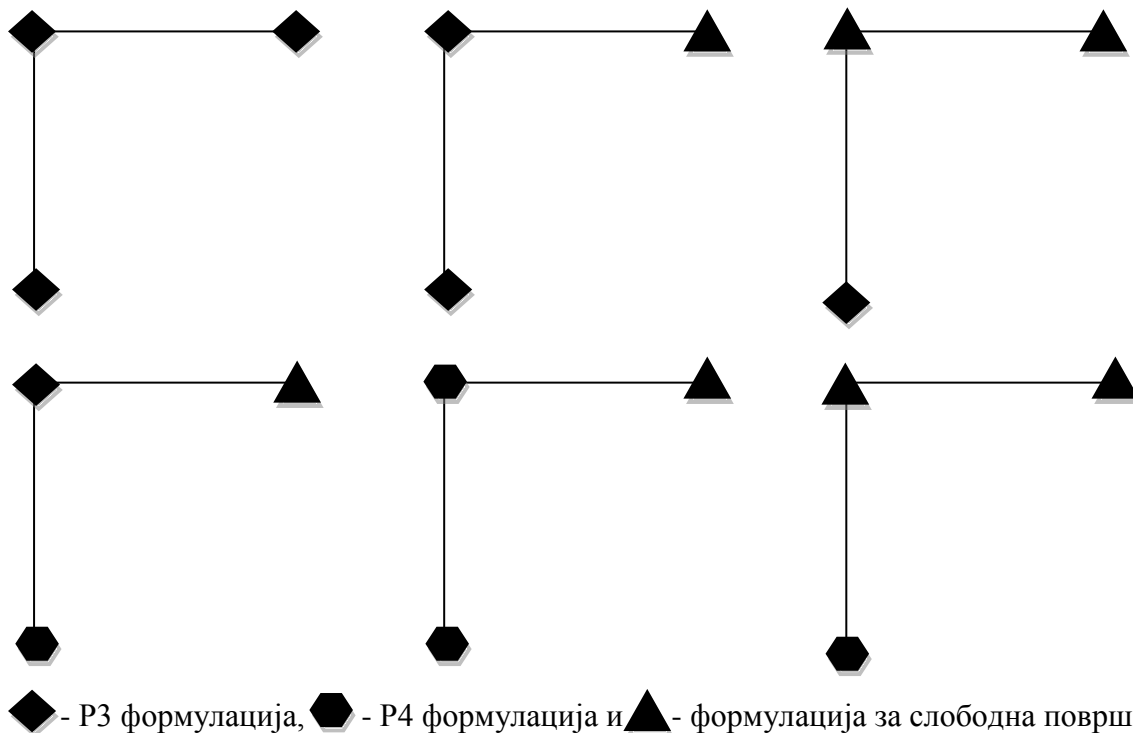


График 3.6 Споредба на влезната и излезната енергија за P3 и P4 границите при различна позиција на изворот, за елстичен полупростор

Последните точки од контурата на моделот дефиниран во првата фаза, се точките кои го претставуваат пресеците помеѓу вертикалните вештачки граници, како и пресекот на истите со слободната површина. Земајќи во предвид дека за одредување на поместувањата во овие точки на располагање се три формулации P3, P4 и

слободната површина потребно беше да се одреди која комбинација е пред се стабилна и нема влијание врз точноста на резултатите.



Слика 3.5 Комбинации на формулации во аглите помеѓу слободната површина и вештачките граници

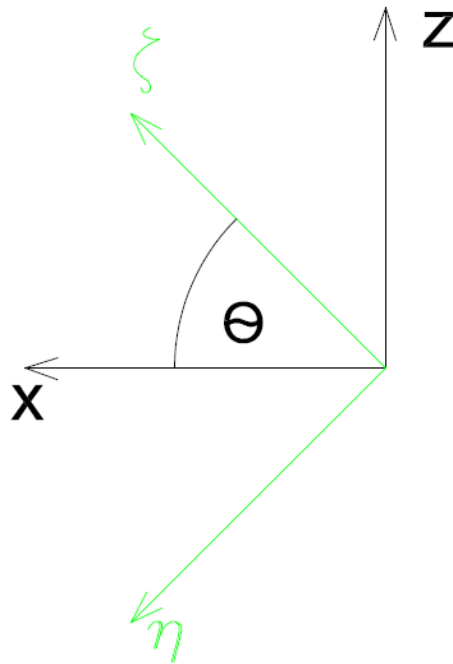
За изборот на најсоодветната формулација помеѓу вештачките граници и слободната површина, во аглите на моделот, беа направени 6 комбинации. Тестовите покажаа дека половина од комбинациите, претставени на Слика 3.5, воопшто немаат нумеричка стабилност, а од останатата половина, нумеричкиот модел со комбинација број 5 покажа најдобри резултати.

Поради геометријата на моделот и аголот под кој приоѓаат брановите, посебно внимание треба да се посвети на точките во кои вертикалните вештачки граници се сечат со хоризонталната вештачка граница. За овие точки е искористена идејата на СЕ[15], кои нумеричката стабилност на своите модели ја постигнале со ротирана А1 - граница. Пресекот на хоризонталната и вертикалната Р4 - граница е моделиран со ротирана Р3 - граница за ± 45 степенa, Слика 3.6.

Ако се разгледува долниот десен агол од моделот и се земе дека поместувањата во x - и z - правец се означат со u и w соодветно, а поместувањата во заротираната правци ζ и η се означат со p и q , тогаш нивната зависност може се дефинира

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

каде C и S се синус и косинус од аголот на ротација.



Слика 3.6 Ротација на оските на P3-границата

Ако равенката 3.15 се замени во 3.12, се добива

$$\frac{1}{\alpha} w_t = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} u_x - w_z \Rightarrow \frac{1}{\alpha} q_t = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} p_\zeta - q_\eta \quad (3.16)$$

$$(S \cdot u_t + C \cdot w_t) = (\beta - \alpha)(C \cdot p_x + (-S) \cdot p_z) - \alpha(S \cdot q_x + C \cdot q_z) \quad (3.17)$$

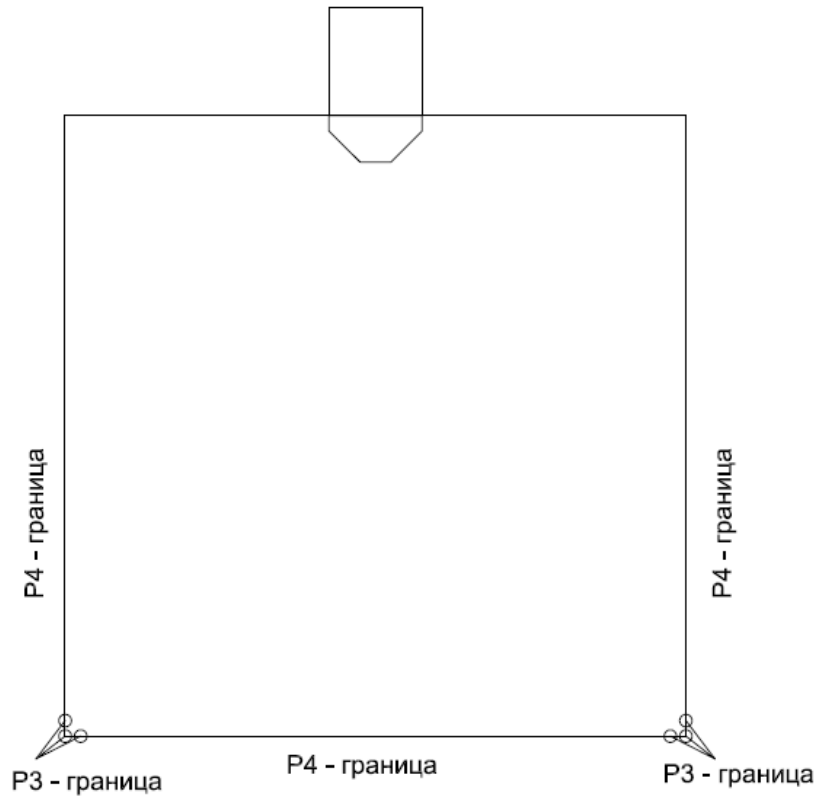
$$u_t + w_t = (\beta - \alpha)(p_x - p_z) - \alpha(q_x + q_z) \quad (3.18)$$

каде суфиксите t , x и z означуваат прв извод по време и x - или z - оска, соодветно

Со повторување на постапката и за 3.11, равенката за P3 - границата добива следен облик

$$u_t + w_t = (\beta - \alpha)(q_x + q_z) - \beta(p_x - p_z) \quad (3.19)$$

Равенката 3.19 заедно со равенката 3.18 формираат систем од две равенки со две непознати (u_t и w_t), кој води до формулацијата за ротирана P3 - граница. По истата постапка се доаѓа до системот равенки кои ја дефинираат ротираната P3 - граница и во долниот лев агол. Ротираната вештачка граница е применета кај точките кои лежат во аглиите на долниот дел од моделот и првите соседни точки кои лежат на хоризонталната и вертикалната оска од вештачките граници (Слика 3.7).





Слика 3.7 Дефиниција на долните агли од моделот

Во сите модели претпоставено е изворот да се наоѓа во централниот дел. Изворот во физичкиот тродимензионален модел предвидено е да биде линиски. Тоа значи дека во овој апроксимиран дводимензионален почвен исечок изворот е лоциран во една точка. Претставување на извор со само една точка математички значи создавање на сингуларна точка. За да се избегне овој проблем искористена е идејата на *Alterman* и *Karal*[8]. Нивниот предлог е централниот дел на почвениот исечок да се подели на два региона *Слика 3.8*



Слика 3.8 Поделба на моделот на региони при дефиниција на изворот

Нивната идеја доаѓа од структурата на вкупното поместување, кое е резултат од заемното дејство на влезниот бран создаден во изворот и рефлектираниот бран од слободната површина. Влезниот бран може да се пресмета аналитички во секоја точка, додека рефлектираниот бран се пресметува нумерички со конечни разлики. Согласно на тоа, тие предложиле поделба на внатрешен (*регион B*), кој би го сочинувале точки околу изворот и надворешен регион каде се опфатени сите останати точки од централниот дел (*регион H*).

Со вака поделен централен дел, брановото распространување низ него е поделено во четири пресметковни етапи за секој временски интервал. Во првите две етапи потребно е да се пресметаат поместувањата од рефлектираниот бран во внатрешниот дел, а во вторите две етапи вкупните поместувања во надворешниот регион. Најнапред се започнува со ажурирање на поместувањата во точките на границите од надворешниот регион , така што од вкупното поместување U во тие точки се одзема поместувањето од изворот кое се пресметува аналитички U_a ($U_r = U - U_a$). Вака ажурираните контури на надворешниот регион ќе послужат како граници на внатрешниот регион, за да може да се пресметаат поместувањата од рефлектираниот бран по шемата на *Kelly*[44]. Третата и четвртата етапа се слични во однос на првите две. Прво се ажурираат вкупните поместувања на точките од контурите од внатрешниот регион  ($U = U_r + U_a$) и потоа тие служат како граници при пресметувањето на поместувањата во надворешниот регион.

Поради сферното ширење на бранот, овој внатрешен регион би требало да биде во кружна форма. Поради ограничените можности на методот на конечни разлики, во нумеричкиот модел е апроксимиран со квадратна форма. Во рамките на дисертацијата испитано е како влијаат димензиите на внатрешниот регион врз точноста на резултатите. Направени се испитувања за извор заменет со надворешен и внатрешен регион во форма на квадрат со различни димензии 20, 30, 50 и 90 метри.

На графициите 3.7 до 3.10 се прикажани поместувањата во тек на време на точка која се наоѓа на вертикалната оска на симетрија, оддалечена 50м од изворот. На еден график се прикажани резултатите за бранот со конкретната периода (*График 3.7* периода $T=0,06s$, *График 3.8* $T=0,088s$, *График 3.9* $T=0,264s$, *График 3.10* $T=0,401s$). Бранот проаѓа низ контролната точка, а е креиран со четирите различни модели во однос на ширината на квадратот (сината линија е поместувањето при модел со квадрат 20x20м, црвена линија е поместувањето при модел со квадрат 30x30м, зелена линија е поместувањето при модел со квадрат 50x50м и лила линија е поместувањето при модел со квадрат 90x90м). Графициите 3.7 и 3.8 покажуваат дека димензијата на квадратот не влијае на брановите со ниски периоди. Отстапувањата помеѓу линиите се минимални.

За разлика од резултатите прикажани на првите два графика, кај вторите два графика се покажува дека промената на димензиите на квадратот влијае во голема мера на изгледот на бранот. Критериумот со кој може да се процени дали зголемувањето на

димензиите на квадратот допринесува за зголемување на точноста на резултатите е периодата на бранот. Ако го анализираме *Графикот 3.9*, и се анализираат периодите на синусоидите на четирите криви, може да се забележи дека кривата која го претставува моделот со најголемиот квадрат е најблиску до синусоида со периода од 0.264s. Овој критериум може да се земе како меродавен затоа што времето кое е потребно да се оформи една цела периода е помало од времето кое е потребно рефлектираниот бран да помине низ таа точка (~0,46s) и да се интерферира со бранот кој доаѓа од изворот.

Скратувањето на периодата на пулсот кој излегува од квадратот значи и различна влезна побуда за системот почва - конструкција. Големината на регионите ќе влијае на временскиот интервал кога бранот ги достигнува максималните амплитуди, како и самите максимални поместувања. Во однос на првото, графициите 3.9 и 3.10 јасно покажуваат дека поради скратената периода на брановите кои излегуваат од квадрати со помали димензии, пиковите на нивните синусоиди се јавуваат порано од пиковите на брановите кај моделите со пошироки квадрати.

Влијанието на димензиите на регионите врз амплитудите на максималните поместувања, најдобро може да се забележи на *График 3.9* и *График 3.10*. Ако кај *Графикот 3.9* може да се каже дека за бран со периода $T=0.264s$ и зелената линија (димензии на квадратот 50x50) може да се прифати како резултат со задоволителна точност, кај следната прикажана периода на *График 3.10* зелената линија (50x50) има сериозни отстапувања од лила линијата (90x90) која во однос на претходните заклучоци се смета како поточно решение.

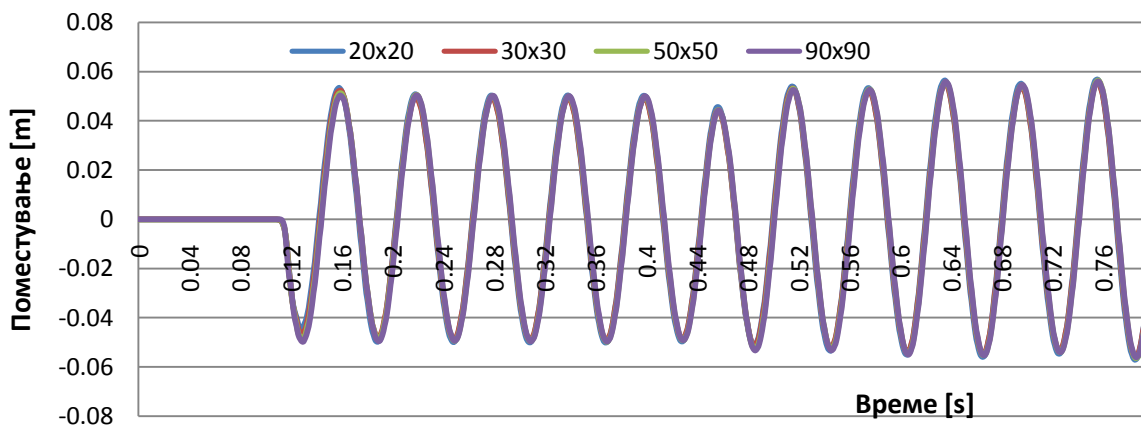


График 3.7 Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.06s$

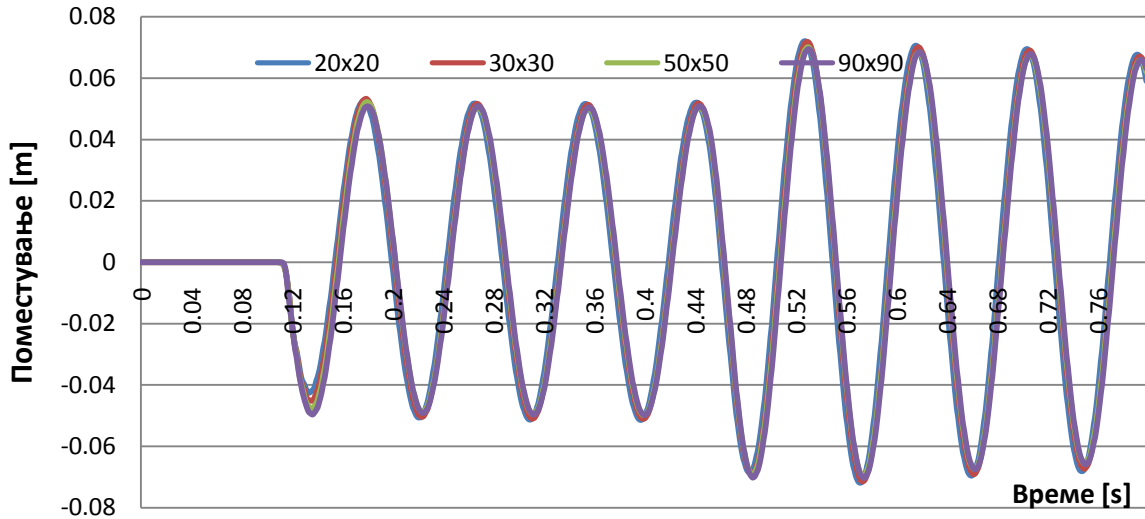


График 3.8 Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.088s$

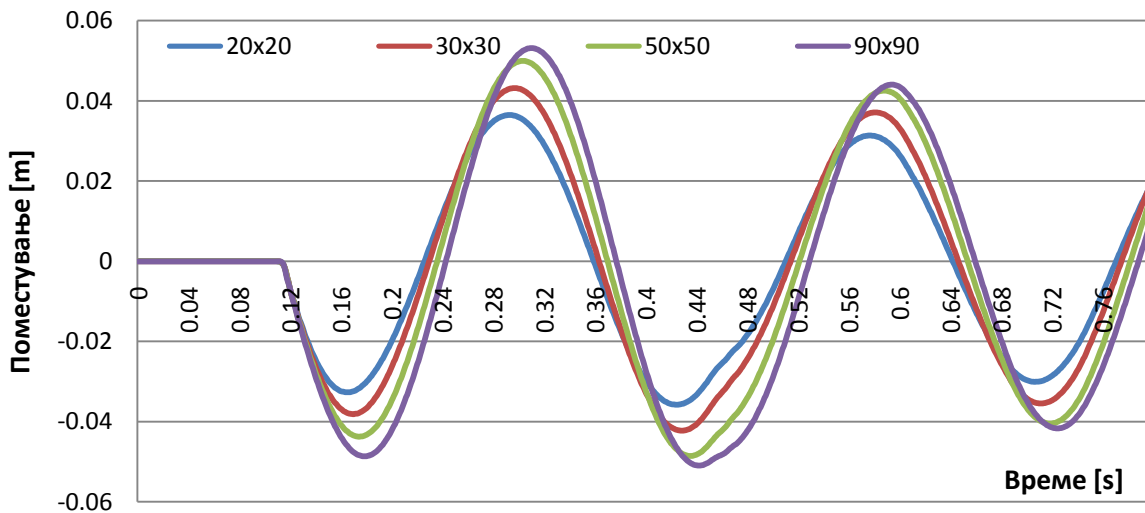


График 3.9 Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.264s$

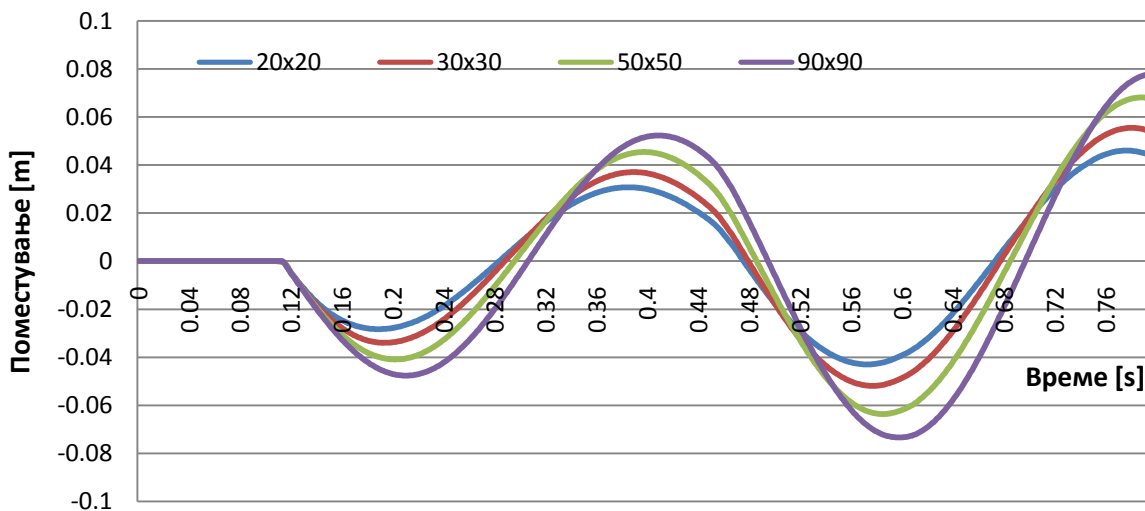


График 3.10 Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=0.401s$

Анализата на овие четири графика доведува до заклучок дека зголемувањето на периодата на влезниот бран значи и потреба од зголемување на димензиите на квадратот. Како доказ за сериозната разлика во одговорот на системот почва - конструкција при бран со димензии на квадрат 30x30m и 90x90m е приложен графикот 3.11.

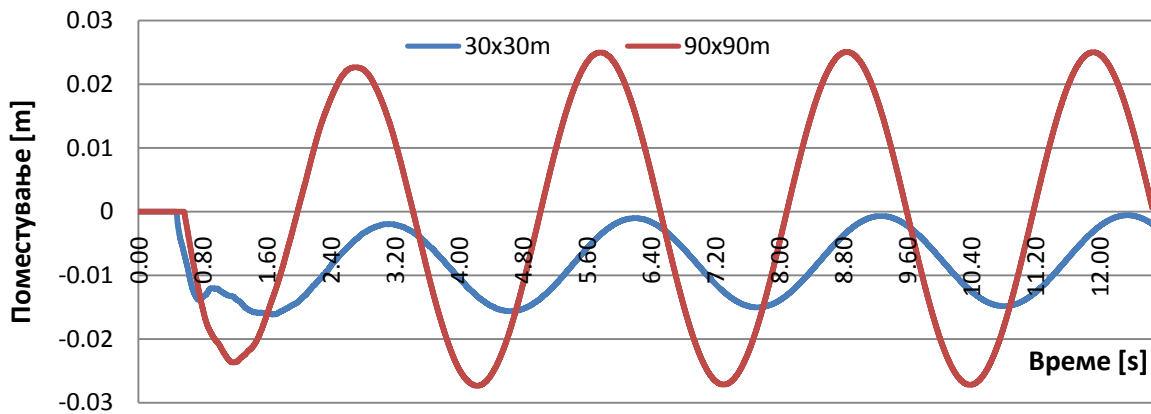


График 3.11 Влијанието на ширината на квадратот кај бран со периода $T=3.0792s$

Графикот 3.11 го прикажува поместувањето на точката која се наоѓа на средина од меѓуслојот помеѓу темелот и конструкцијата, при побуда од бран со периода $T = 3.079s$. Од сината линија јасно се гледа дека квадратот со димензии 30x30m е несоодветен. Одговорот на бран креиран со таков модел е потполно асиметричен и неприфатлив. Кај квадратот со димензии 90x90m одговорот е многу поблизок до реалниот иако во амплитудите на синусоидата се забележува асиметрија на позитивните и негативните пикови.

Во насока на подобрување на дефиницијата на бранот кој излегува од квадратот, применета е интерполација на вредностите добиени со аналитичкото решение U_a . Ако не се применува интерполацијата, тогаш во точките од внатрешниот и надворешниот квадрат, секогаш ќе се преземат резултатите од аналитичкото решение кои одговараат на актуелната итерација $i \cdot \Delta t$ (i е редниот број на циклусот, Δt е временски интервал). Но во најголем дел од точките овој временски интервал $i \cdot \Delta t$ не соодветствува со времето во кое бранот проаѓа низ конкретна точка. Затоа најнапред се пресметува времето на пристигнување на бранот во точката во која треба да се пресмета аналитичкото решение, а потоа користејќи го пресметаното време се интерполира соодветната вредност од аналитичкото решение помеѓу два интервала на итерација.

$$t_p = \frac{L}{\alpha}; \quad t_c = t \cdot \Delta t - t_p; \quad (3.20)$$

ако $t_c < 0$, тоа значи дека бранот во актуелната итерација t , сеуште не е пристигнат во точката во која се пресметува аналитичкото решение, во спротивно

$$t \cdot \Delta t < t_p < (t + 1) \cdot \Delta t \quad (3.21)$$

времето на пристигнување ќе се наоѓа некаде помеѓу временските интервали на актуелниот и следниот временски чекор. Ова значи дека за да се добијат вредности поблиски до вистинските мора да се направи интерполација помеѓу аналитичките вредности од тие два временски интервала

$$U_{t_p} = U_{i\Delta t} + (U_{(i+1)\Delta t} - U_{i\Delta t}) \cdot (i_p - i_{int}) \quad (3.22)$$

каде

- $U_{i\Delta t}$ е аналитичкото решение во актуелниот i_{int} -тиот временски чекор,
- $U_{(i+1)\Delta t}$ е аналитичкото решение во следниот временски чекор,
- $i_p = t_c/\Delta t$ е некој реален број помеѓу i_{int} и $i_{int}+1$,
- $i_{int} = (\text{int})(t_c/\Delta t)$

Деталните истражувања како големината на квадратот влијае на промена на оригиналниот бран во овој алгоритам, се надвор од рангот на истражувањата на оваа докторска дисертација.

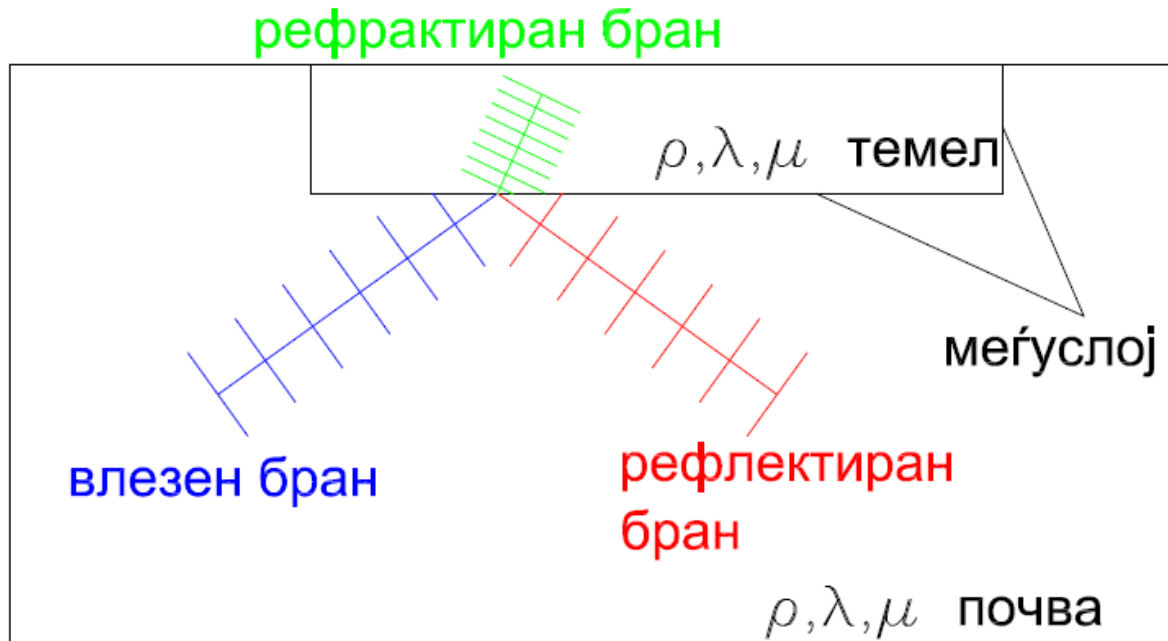
3.2. Почва - темел

Во следната фаза во моделот беше внесен темел од објект. Тој е проектиран со шестоаголна форма. Оваа форма е одбрана за да може нумеричкото решение добиено со моделот да се споредува со аналитичкото решение дадено во литературата. Аналитичкото решение е дадено за апсолутно крут, полукружен цилиндричен темел. Во нумеричкиот модел, движењето на бранот во телото на темелот е опишано со истата формула како и за почвениот материјал (2.1а и 2.1б). Темелот во однос на почвениот полупростор се разликува само во материјалните карактеристики, кои се одредуваат од брзините на распростирање на P - и SV -бранот.

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \text{ и } \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.23)$$

Сепак, за да дојде бранот од почвата во телото на темелот истиот мора да помине низ контактот почва - темел. Тука се граничат два материјала со различни механички карактеристики. Од нумеричка гледна точка оваа контактна површина може да биде извор на нестабилност, посебно тоа се однесува на аглите од темелот. Од физичка гледна точка, кај овој меѓуслој настанува рефракција на бранот (Слика 3.9).

Еден дел од бранот се одбива назад во централниот дел на моделот, а другиот дел од бранот продолжува да се движи низ темелот:



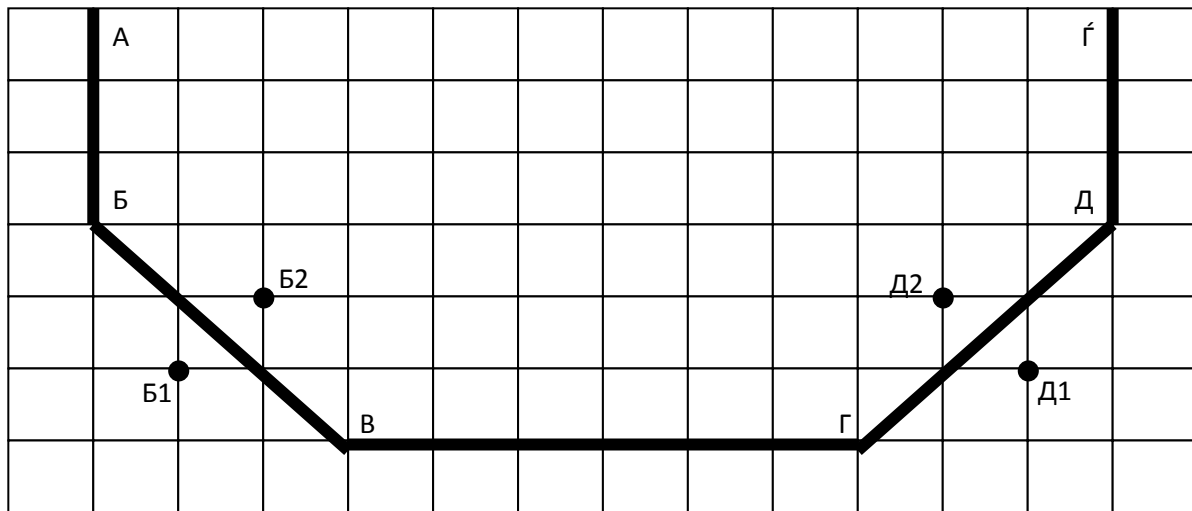
3.9 Контактот, рефлексија и рефракција на бран

Едни од првите автори кои го истражувале однесувањето на бранот во контактот се *Alterman* и *Karal* [8]. Слично како решението за слободната површина, нивното решение се добива со воведување на фиктивни точки. Овој ред дополнителни точки во моделот, го усложнуваат моделот. За да може да се примени решението предложено од *Alterman* и *Karal*, мора да се дополни брановата равенка со два додатни услови, чија интерпретација со конечни разлики подразбира напуштање на потполно експлицитниот модел.

Min et al [51], во своите истражувања воведоа идеја која се покажа дека е соодветна за дефинирање на граница помеѓу материјален и нематеријален слој, односно за граница која раздвојува два материјални слоја со различни материјални карактеристики. Покрај тоа што моделот на *Min et al* [51] се формира без фиктивни пресметковни јазли, во овој начин на моделирање не се бара воведување на различни услови и дефиниции за различни точки од границата. Едноставноста на оваа формулација посебно доаѓа до израз при моделирање на точките во аглиите на темелот. Во овие точки во три од четирите ќелии се јавува потреба од дефиниција на почва, темел и воздух. Овие точки користат потполно иста формулација како и точките кои се дел од вертикалниот или хоризонтален меѓуслој.

Шестоаголниот облик на темелот е избран затоа што оваа форма е блиска до кружниот облик на темелот користен во аналитичкото решение со кои се врши верификација на резултатите (Поглавје 5). Димензиите на темелот се избрани така што површината на шестоаголниот темел треба да биде приближно иста со површината на

полукружниот темел. За примена на ова форма на темел потребно е да се дефинираат неколку карактеристични точки (Gicev[24]) (Слика 3.10)



Слика 3.10 Дефиниција на карактеристични точки кај шестоагилен темел

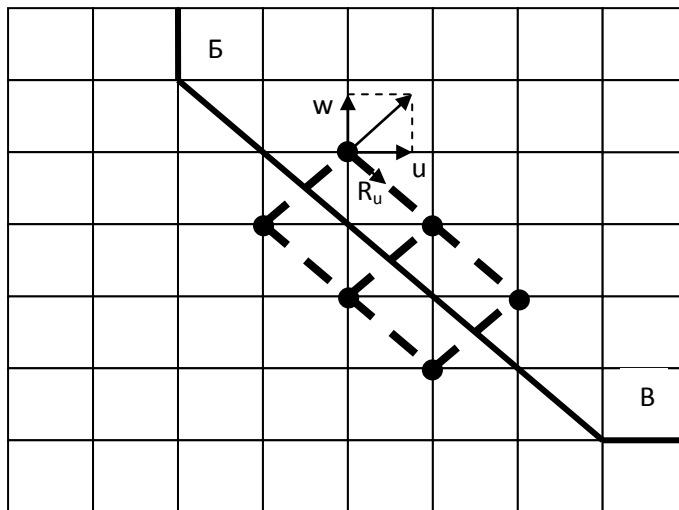
Точките A и Γ првично се наоѓаат помеѓу три материјали: почва - темел - воздух. Потоа, со додавањето на објектот, во овие точки ќе постојат четири различни материјали. Во моделот од втората фаза, систем почва - темел, како и кај останатите точки од слободната површина, и кај овие две точки, ќелиите 1 и 3 (слика 3.4) ќе се со густина еднаква на нула ($\rho = 0$), а долните две ќелии со материјалните карактеристики на темелот и почвата лево и десно соодветно.

Границата помеѓу точките A и B , како и помеѓу D и Γ , определена е со точките од вертикалниот меѓуслој каде ќелиите 1 и 3, се дефинирани со материјалните карактеристики на почвата, додека ќелиите 2 и 4 со материјалните карактеристики на темелот.

Точките во аглиите: B , B , Γ и D , се разликуваат од точките од вертикалниот меѓуслој по тоа што една од нивните долни ќелии е поделена со закосен меѓуслој (Слика 3.8). За да се поедностави нумеричкото решение, во тие ќелии материјалните карактеристики се земаат како средната вредност од материјалните карактеристики на темелот и почвата. Оваа апроксимација се покажа како нумерички стабилна. Од друга страна се добива решение кое како краен резултат, дава задоволително точни резултати за поместувањата. Покрај точките од меѓуслојот оваа апроксимација на пресметковниот модел е искористена и за првиот ред точки кои се наоѓаат над и под косиот меѓуслој (пр. $B1$, $B2$, $D1$, $D2$...).

Јазлите од мрежата кои се наоѓаат помеѓу точките B и Γ се пресметковни јазли од хоризонталниот меѓуслој. Кај нив, долните ќелии (ќелиите 2 и 4, Слика 3.4) се дефинирани со материјалните карактеристики на почвата, а горните (ќелиите 1 и 3, Слика 3.4) со материјалните карактеристики на темелот.

За да може да се примени пресметковниот шаблон на *Min et al* [51] на косите контури од темелот, ќелиите мора да се ротираат за аголот на закосување на меѓуслојот (Слика 3.11).



Слика 3.11 Трансформација од глобални во локални координати кај косиот меѓуслој

Со ротацијата се добива пресметковен модел со јасно раздвоени ќелии над и под меѓуслојот, така што горните ќелии се дефинираат со материјални карактеристики на темелот, а долните ќелии со материјални карактеристики на почвата. Притоа треба да се внимава дека ротацијата на шаблонот значи и ротација и на локалниот координатен систем на шаблонот. Со тоа се оневозможува во пресметките на поместувањата директно да се заменат вредностите за хоризонталните (u) и вертикалните (w) поместувања во точките на јазлите. Најнапред тие треба да се пресликаат во локалниот, ротиран, координатен систем на ќелиите, т.е. да се пресликаат $u \rightarrow R_u$ и $w \rightarrow R_w$. Откако ќе се пресметаат хоризонталните и вертикалните поместувања во јазлите од меѓуслојот, за да може да бидат применливи во понатамошните пресметки за другите јазли, тие мора да се трансформираат назад во координатниот систем на моделот $R_u \rightarrow u$, $R_w \rightarrow w$.

3.3. Почва - конструкција

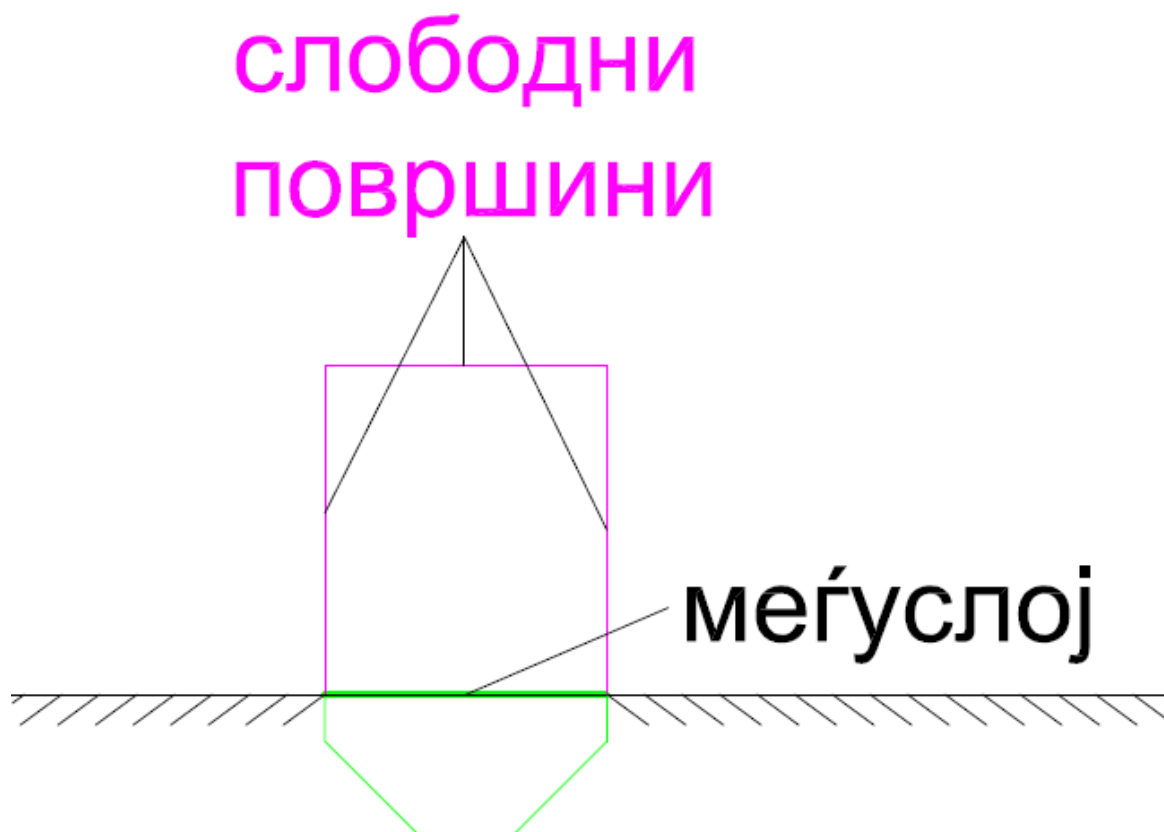
Нумеричкиот модел својата конечна форма ја добива со додавање на надземната конструкција. Таа се апроксимира како хомогено тело со материјални карактеристики кои се разликуваат од материјалните карактеристики на почвата и темелот. Брзината на брановото пропагирање низ реална комерцијална зграда се менува по спратовите. Кај конструкцијата во нумеричкиот модел брзината е константна во секоја точка. Таа се усвојува според 3.24 како просечна брзина од реален комерцијален објект (Todorovska, Trifunac[25])

$$\beta = \frac{H}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{\beta_i}} \quad (3.24)$$

каде

- H е висината на објектот
- n е бројот на компоненти, се добива како збир на бројот на спратовите, меѓукатните плочи и крвната плоча
- h_i е висина на i - тата компонента
- β_i е брзината на бранот во i - тата компонента

Објектот, е ограничен со хоризонтална и две вертикални слободни површини, кои од физичка гледна точка носат различни услови за напрегањата (Слика 3.12). Бидејќи пресметковниот шаблон на *Min et al* [51] е универзален при пресметувањето на поместувањата на хоризонталните и вертикалните слободни површини, од нумеричка гледна точка, вметнувањето на објектот не бара дополнителна техника која веќе не е искористена во претходните две фази. На тој начин се добива пресметковен модел кај кој контурите на објектот, трите слободни површини и меѓуслојот со темелот се претставени со шемата на *Min et al* [51], додека распростирањето на брановите низ централниот дел од објектот е симулирано со претсетковната шема на *Kelly et al*[44].



Слика 3.12 Конструкција како хомогено еластично тело



Поглавје 4

Аналитичко решение

4.1 Опис на моделот

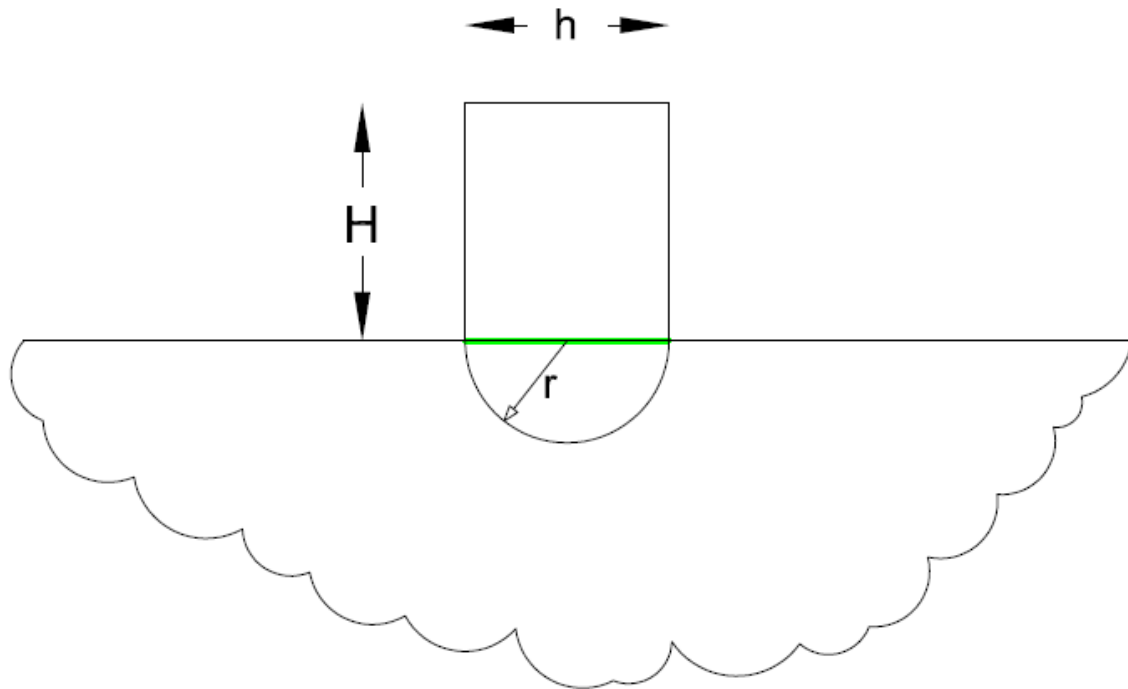
Предложената нумеричката анализа е базирана на одредени апроксимации со кои се упростува и поедноставува математичкиот модел. Поради тоа пред да добие практична и научна примена, предложената нумеричка анализа треба да се калибрира, односно верификува со соодветен аналитички модел (ако таков постои). На овој начин се потврдува веродостојноста на резултатите кои произлегуваат од нумеричките методи користени во дисертацијата. Воедно се врши критичка оценка за точноста на применетиот модел и големината на неговите отстапувања од точните вредности.

Во ова поглавје најнапред се изнесени теориските основи на кои е базирано аналитичкото решение на интеракција почва-темел-конструкција. Потоа е анализиран пример и извршена е споредба на резултатите добиени со аналитичкиот и нумеричкиот модел, за исти влезни параметри. Во аналитичкото решение, кое се користи за споредба, влезните, рефлектираните и резидуалните бранови се претставени со редови од цилиндрични Беселови и Хенкелови функции..

Соодветно на моделот разгледуван во поглавје 3, и тука ќе биде анализирана интеракцијата на хомоген еластичен полупростор, темел и конструкција, во кој има линиски извор на хармониски бран. Материјалните карактеристики на секој од конструктивните делови на моделот: почва, темел и конструкција, ќе бидат индиректно дефинирани преку брзините на распространување на P - и SV - бранот низ нив. Карактеристично за аналитичкиот модел е тоа што темелот се усвојува да биде бескрајно крут. Тоа значи дека брзините на пропација на брановите низ него тежат кон бескрајност.

На слика 4.1 е даден графички приказ на моделот користен во аналитичката анализа. Моделот е дводимензионален. Истиот се состои од конструкција со ширина на основа $h = 2*r$, и висина H . Темелот е во форма на полукруг со радиус r . Геометријата и поместувањето на темелот и конструкцијата се опишани со два координатни системи: x - y - z поставен во центарот на полукругот и X - Y - Z , поставен во средината на горната страна од објектот. За двата координатни системи важи правилото на десна рака.

Изворот на бранот се наоѓа на оската на симетрија. Се претпоставува дека изворот е на голема оддалеченост од темелот. Во анализата е усвоено дека при контактот со темелот брановиот фронт е рамнински.



Слика 4.1 Дводимензионален модел за аналитичко решение

4.2 Поместување во почвата

4.2.1 Влијанието на почвата врз темелот

Формирањето на аналитичкиот модел започнува со дефинирање на изворот, т.е. математичкиот израз со кој се опишува карактерот на влезниот бран. Се работи за хармониски бран кој се движи во вертикален правец нагоре, спротивно на позитивната z -оска

$$u^{(i)} = Ae^{-i(k_\alpha z + \omega t)} \quad (4.1)$$

каде е:

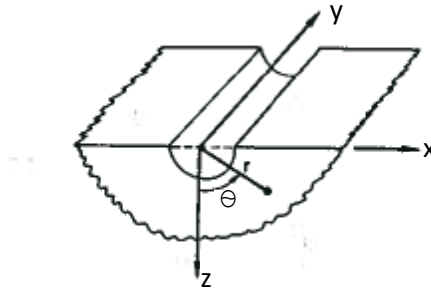
- k_α е бранов број $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$ за P – бран,
- ω е кружна фреквенција
- $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ се брзината на P-бранот и SV-бранот соодветно

Вкупното поместување на почвата од влезниот P-бран ќе се добие како сума од поместувањето на почвата предизвикано од влезниот $u^{(i)}$ и рефлектираниот бран $u^{(ir)}$ за случај кога во моделот не постои темел, т.н. слободно поле, и на расејаниот бран кој произлегува од вибрациите од темелот $u^{(fr)}$ (Liso [48]).

$$u_z = u^{(i)} + u^{(ir)} + u^{(fr)} \quad (4.2)$$

Вака усвоеното вкупно поместување мора да ја задоволи брановата равенка во секоја точка од почвата ($r \geq h/2$ и $|\theta| \leq \pi/2$)

$$\frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left(r \frac{\delta u_z}{\delta r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 u_z}{\delta \theta^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\delta^2 u_z}{\delta t^2} \quad (4.3)$$



Слика 4.2 Картезиски и цилиндрични координати за изведување на аналитичко решение

Во точките од почвата кои се наоѓаат на слободната површина ($r > h/2$ и $|\theta| = \pi/2$, Слика 4.2), брановата равенка, покрај вкупното поместување, мора да ги задоволи и граничните статички услови:

$$\sigma_{\theta z} = -\frac{\mu_s}{r} \frac{\delta u_z}{\delta \theta} = 0 \quad (4.4)$$

Во точките од почвата кои се во контакт со темелот ($r = h/2$ и $|\theta| \leq \pi/2$), мора да бидат задоволени условите за континуитет на поместувањата:

$$u^{(i)} = \Delta e^{-i\omega t} \quad (4.5)$$

каде Δ е амплитудата на поместувањето која треба да се одреди со аналитичкиот модел.

Збирот на поместувањата предизвикани од влезниот бран и поместувањата од рефлексијата на влезниот бран од слободната површина, без присуство на темелот, се нарекува поместување на слободно поле:

$$u^{(ff)} = u^{(i)} + u^{(ir)} = A e^{-i\omega t} (e^{-ik_\alpha z} + e^{ik_\alpha z}) \quad (4.6)$$

Ако се земат во предвид релацијата на *Euler* [20], врските помеѓу експоненцијалните и тригонометриските функции се добиваат во облик:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{-i\theta} + e^{i\theta}) \quad (4.7)$$

како и $z = r \cos \theta$

Ако изразот (4.6) се замени во (4.7) се добива:

$$(e^{-ik_\alpha z} + e^{ik_\alpha z}) = 2\cos(k_\alpha r \cos\theta) \quad (4.8)$$

Во добиениот израз 4.8 се воведува *Jacobi-Anger* (*Abramowitz* [4]) развивање во ред

$$\cos(y \cos\theta) = J_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(y) \cos(2n\theta) \quad (4.9)$$

На тој начин вкупното поместување на слободното поле ќе биде изразено со помош на *Беселовите* функции од прв вид (*Bowman* [12])

$$u^{(ff)} = Ae^{-i\omega t} \left[2J_0(k_\alpha r) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_\alpha r) \cos(2n\theta) \right] \quad (4.10)$$

Беселовите функции се канонични решенија на Беселовите диференцијални равенки за произволен комплексен број α

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (4.11)$$

Решението на оваа диференцијална равенка од втор ред мора да е во облик на две линеарни независни решенија

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x) \quad (4.12)$$

каде

- A и B се произволни константи,
- J_ν е Беселова функција од прв тип,
- Y_ν е Беселова функција од втор тип, а
- ν е степенот на Беселовата функција кој може да биде било која вредност од минус до плус бескрајност.

За цилиндрични проблеми, како што е и решението опфатено со равенките 4.9 и 4.10, за ν се зема позитивна целобројна вредност поголема или еднаква на 0, ($\nu=0, 1, 2, \dots$).

Формулата со која се пресмета Беселовата функција од прв тип и ν -ти ред може да се добие со развивање на истата во бесконечен ред (*Abramowitz* [4])

$$J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(1+\nu)} \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2(2+\nu)} \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3(3+\nu)} (1-\dots) \right) \right) \right\} \quad 4.13$$

Поради осетливоста на нумеричката анализа и нејзините специфичности зависни од проблемот врз кој се применува, се поставува прашање колку членови од оваа бесконечна низа ќе бидат доволни за грешката создадена од испуштањето на останатите членови не влијае значително на точноста на решението. Истражувањето спроведено во оваа дисертација покажа дека бројот на членови кај Беселовата функција од прв тип зависи од нивниот аргумент x . За аналитичкото решение како аргумент се користи производот набрановиот број и радиусот на темелот $k_\alpha r$. Истиот варира во граници од $0 \leq k_\alpha r \leq 2\rho$. Резултатите од параметарските анализи се прикажани во Табела 4.1. Како што се гледа од табелата, занемарувањето на членовите на редот со помалите вредности на $k_\alpha r$, конкретно за $k_\alpha \leq r2\pi/400$, не влијаат во голема мера на крајната вредност на J_ν .

Бр. $k_\alpha r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	J_ν
0.01571	1	-6.1685E-05	9.51261E-10	-6.51984E-15	2.5136E-20	-6.20207E-26	1.06271E-31	-1.33782E-37	1.28943E-43	-9.81955E-50	6.0572E-56	-3.08792E-62	1.32277E-68	-4.8281E-75	0.999938

Табела 4.1 Вредноста на првите 13-те члена од експанзија на редот на $J_0(0.01571)$

Во Табела 4.2 се прикажани првите тринаесет члена од редот, за вредност на $k_\alpha r = 2\pi$. Од резултатите прикажани во табелата јасно се гледа дека за последните три члена се добиваат незначителни вредности, па со тоа нивното испуштање нема да влијае значително на вредноста на редот.

Бр. $k_\alpha r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	J_ν
0.01571	1	-9.869604401	24.35227276	-26.70525538	16.47314413	-6.50333663	1.782926662	-0.359117976	0.055380506	-0.006747947	0.000665996	-5.43233E-05	3.72326E-06	-2.17438E-07	0.220277

Табела 4.2 вредноста на првите 13-те члена од експанзија на редот на $J_0(6.28318)$

За поедноставување на пресметката, усвоен е унифициран пристап при пресметката на Беселовата функција од прв тип за сите вредности на $0 \leq k_\alpha r \leq 2\rho$.

Присуството на темелот во полупросторот значи препрека на движењето на P -бранот. Со тоа се нарушува распространувањето на бранот опишано со брановите потенцијали за слободно поле. Бидејќи материјалните карактеристики на почвата и темелот се разликуваат, кога бранот ќе дојде во контакт со темелот, дел од него се

рефлектира и атенуира во бесконечност, а другиот дел се рефрактира. Имајќи во предвид дека се работи за идеално крут темел, делот од влезниот P -бран кој треба да биде рефрактиран, всушност не постои. Бранот кој настанува со рефлексija од телото на темелот покрај тоа што мора да ја задоволи брановата равенка, мора да ги задоволи и *Sommerfeld*-условите за атенуација во бесконечност. Тоа значи дека во изразите за пресметување на поместувањата во точките од почвата кои се резултат на дејството на P бранот, ќе треба да бидат вклучени Хенкеловите функции од прв тип:

$$u^{(fr)} = e^{-i\omega t} \left[a_0 H_0^{(1)}(k_\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n H_{2n}^{(1)}(k_\alpha r) \cos(2n\theta) \right] \quad (4.14)$$

Со замена на 4.5 во 4.14, и со земање во предвид само на еден член, за $n = 0$, се добива вредноста на коефициентот a_0

$$a_0 = [\Delta - 2J_0(k_\alpha r)A] \frac{1}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \quad (4.15)$$

Вака пресметаниот коефициент a_0 се заменува во 4.14 за да се добијат останатите коефициенти a_n

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{4J_{2n}(k_\alpha r)}{H_{2n}^{(1)}(k_\alpha r)} A, n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.16)$$

Хенкеловите функции кои се јавуваат во 4.14 се нарекуваат уште и Беселови функции од трет тип. Изразите по кои се пресметуваат истите може да се напишат во облик (*Abramowitz* [4])

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iY_v(x); \quad H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iY_v(x) \quad (4.16)$$

каде $Y_v(x)$ е Беселова функција од втор тип. Ова функција се појавува во изразот 4.12 како второто линеарно независно решение на Беселовата диференцијална равенка.

Формулата за пресметка на вредностите на Беселовата функција од втор тип ја инволвира Беселовата функција од прв тип

$$Y_v(x) = \frac{J_v(x)\cos(v\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} \quad (4.18)$$

Овој тип на Беселови функции, со изразот 4.19 е развиен во ред е бесконечен ред.

$$\begin{aligned}
 Y_v(x) &= \frac{2}{\pi} J_v(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{v-1} \frac{(v-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-v} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+v} \right) \right]}{k! (k+v)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+v}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

каде $\gamma=0,577215665$ е Ојлеровата константа.

Во продолжението на ова поглавје даден е конечниот облик на аналитичкото решение. Како што може да се види од 4.41, тоа се Беселовите функции од трет тип кои се појавуваат само во нулти и прв ред. Затоа за овој конкретен проблем доволно ќе биде во бесконечниот ред 4.19 да се применат нулти и прв ред на Беселовата функција од втор тип

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_0(x) + \frac{2}{1} J_2(x) - \frac{2}{2} J_4(x) + \frac{2}{3} J_6(x) - \dots \right] \tag{4.20}$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_1(x) - \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} J_1(x) + \frac{9}{4} J_3(x) - \dots \right] = -\frac{d}{dx} [Y_0(x)]$$

За практична примена на 4.20 треба да се направи анализа колку членови од Беселовите функции од прв тип треба да бидат вклучени во редот со кој се разложени Беселовите функции од втор тип. Во Табела 4.3 се прикажани вредностите за Беселовите функции од прв тип за привите 10 члена од редот, за вредност $k_\alpha r = 2\pi/400$.

Бр. $k_\alpha r$	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0.01571	0.999938	0.007854	3.08E-05	8.07E-08	1.59E-10	2.49E-13	3.26E-16	3.66E-19	3.59084E-22	3.1336E-25	2.46112E-28

Табела 4.3 Вредности на $J_n(0.01571)$ за $0 \leq n \leq 10$

Табелата јасно покажува дека првите три вредности, се значително поголеми од останатите осум вредности. Тоа значи дека при пресметувањето на Беселовата функција од втор, тип нулти и први ред, доволните е да се вклучат само првите 4 члена од бесконечниот ред 4.20.

Слично на споредбата на вредностите од табелите 4.1 и 4.2, со споредба на вредностите од табелите 4.3 и 4.4, може да се заклучи дека при разложувањето во редови, кај Беселовите функции со поголемите аргументи потребно е да се воведат повеќе членови отколку кај Беселовите функции со помалите аргументи.

Бр. $k_\alpha r$	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}
6.283185	0.220328	-0.21237	-0.28788	0.029113	0.31568	0.372825	0.277688	0.157521	0.073295326	0.029123884	0.010138457	0.003147825

Табела 4.4 Вредности на $J_n(6.283185)$ за $0 \leq n \leq 10$

И покрај тоа што за помалите аргументи на Беселовите функции задоволителната точност може да се постигне со помал број на членови, усвоено е дека при пресметката на Хенкеловите функции, редот на разложената Беселова функции од прв тип ќе содржи тринаесет члена за сите аргументи $0 \leq k_\alpha r \leq 2p$, додека редот на Беселовата функција од втор тип ќе ги вклучува Беселовите функции од прв тип од нулти до десетти ред за сите аргументи $0 \leq k_\alpha r \leq 2p$.

За да се добијат поместувањата на темелот под влијание на брановата пропагација, се разгледува состојба на рамнотежа на силите кои делуваат на темелот. Три сили предизвикуваат поместување на темелот. Тоа се:

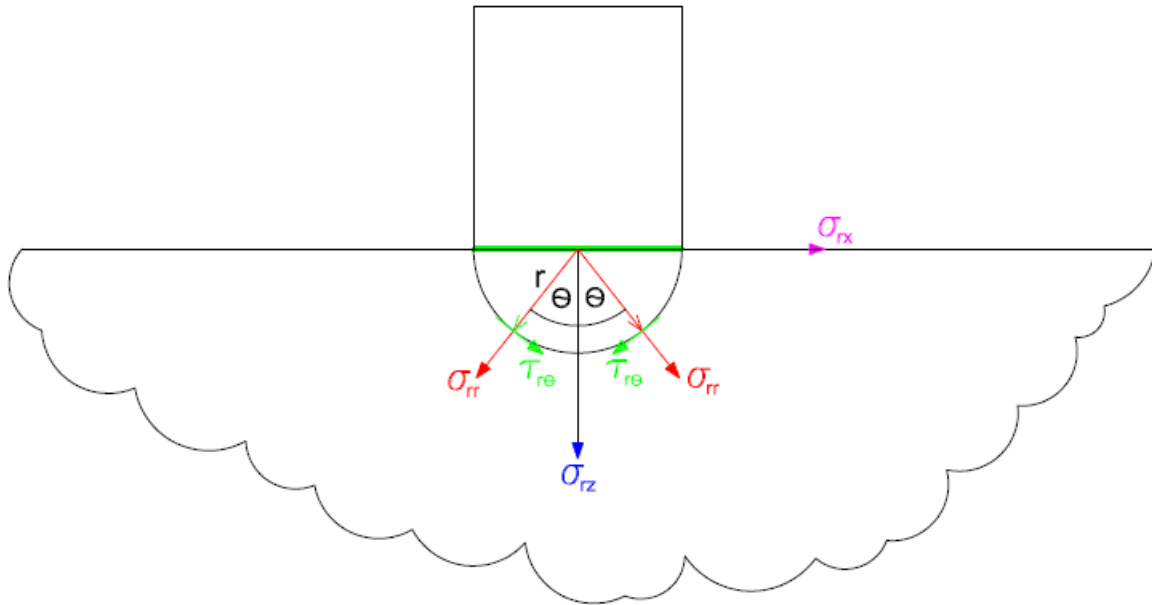
- вертикална сила како реакција од објектот врз темелот,
- хоризонтална сила како дејство на почвата врз темелот и
- вертикална сила од влијанието на почвата врз темелот.

Овие сили треба да биде во рамнотежа со инерцијалната сила на темелот која е резултат на неговото поместувањето.

$$-\omega^2 M_0 \Delta e^{-i\omega t} = (f_z^s + f_z^b), \quad -\omega^2 M_0 \Delta e^{-i\omega t} = f_x^s \quad (4.21)$$

Силата со која почвата настојува да го помести темелот во x -правец, се добива со интегрирање на напрегањата кои се јавуваат на контактот помеѓу почвата и темелот, проектирани во соодветниот правец.

$$f_x^s = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rx} a^2 \sin\theta d\theta, \quad f_z^s = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_{rz} a^2 \sin\theta d\theta \quad (4.22)$$



Слика 4.3 Радијални напрегања во цилиндричен координатен систем

Од сликата 4.3, се гледа дека напрегањата σ_{rx} и σ_{rz} се добиваат од хоризонталните и вертикални проекции на напрегањата σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$. Ако се разгледа зависноста на хоризонталната проекција на напрегањата од аголната координата θ , може да се види дека во едната половина од интервалот проекциите се во позитивната x -насока, додека во другата половина се во негативната насока. Затоа интегрирањето на силата f_x е извршено по целиот интервал. Од друга страна, кај вертикалната проекција не постои зависност на насоката на проектираното напрегање од аголната координата и може да се искористи симетријата, односно да се интегрира само половина интервал. Врските помеѓу напрегањата моѓе да се претстават во следниот матричен облик

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rx} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Кога 4.23 се заменат во 4.22, се добиваат изразите по кои се пресметуваат хоризонталната и вертикалната сила кои делуваат од почвата на темелот

$$f_x^s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma_{rr} \sin\theta - \tau_{r\theta} \cos\theta) r d\theta = 0, \quad (4.24)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 0$$

$$f_z^S = 2 \int_0^{\pi/2} (\sigma_{rr} \cos\theta + \tau_{r\theta} \sin\theta) r d\theta \quad (4.25)$$

каде е:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \left(\frac{\delta u_r}{\delta r} + \frac{\delta u_\theta}{2\delta\theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\delta u_y}{\delta r} \right) + 2\mu \left(\frac{\delta u_r}{\delta r} \right) \tau_{r\theta} \\ &= \mu \left(\frac{\delta u_\theta}{\delta r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\delta u_r}{r\delta\theta} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$u_r = u_z \cos\theta, u_\theta = u_z \sin\theta$$

Вкупното поместување во z -праец се добива со замена на 4.10 и 4.14 во 4.2

$$\begin{aligned} u_z &= e^{-i\omega t} \left(A \left[2J_0(k_\alpha r) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(k_\alpha r) \cos(2n\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[a_0 H_0^{(1)}(k_\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n H_{2n}^{(1)}(k_\alpha r) \cos(2n\theta) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_r}{\delta r} &= \frac{\delta u_z}{\delta r} \cos\theta = \\ &= e^{-i\omega t} \left[-\Delta \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right. \\ &\quad \left. + 2A \frac{J_0'(k_\alpha r) H_0^{(1)}(k_\alpha r) - J_0(k_\alpha r) H_0'^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right] \cos\theta \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ако изолирано се анализира броителот на вториот собирок

$$\begin{aligned} J_0'(k_\alpha r) H_0^{(1)}(k_\alpha r) - J_0(k_\alpha r) H_0'^{(1)}(k_\alpha r) \\ = -J_1'(k_\alpha r) H_0^{(1)}(k_\alpha r) - J_0(k_\alpha r) (-1) H_1'^{(1)}(k_\alpha r) \end{aligned} \quad (4.29)$$

и се примени правилото за вкрстен производ на Беселовите функции (*Bowman*[12])

$$J_{n+1}'(x) H_n^{(1)}(x) - J_n(x) H_{n+1}'^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x} \quad (4.30)$$

се доаѓа до финалната форма на парцијалниот извод

$$\frac{\delta u_r}{\delta r} = e^{-i\omega t} \left[-\Delta \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} - A \frac{4i}{\pi k_\alpha r H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right] \cos\theta \quad (4.31)$$

Постапката со која е разложен парцијалениот извод $\frac{\delta u_r}{\delta r}$, во комбинација со табличните изводи од тригонометриските функции, е применета за разложување и на останатите три парцијални изводи од 4.18

$$\frac{\delta u_r}{\delta \theta} = \frac{\delta u_z}{\delta \theta} \cos\theta = u_z \frac{\delta}{\delta \theta} \cos\theta = -u_z \sin\theta \quad (4.32)$$

$$\frac{\delta u_\theta}{\delta r} = \frac{\delta u_z}{\delta r} \sin\theta = e^{-i\omega t} \left[-\Delta \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} - A \frac{4i}{\pi k_\alpha r H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right] \sin\theta \quad (4.33)$$

$$\frac{\delta u_\theta}{\delta \theta} = \frac{\delta u_z}{\delta \theta} \sin\theta = u_z \frac{\delta}{\delta \theta} \sin\theta = u_z \cos\theta \quad (4.34)$$

Крајните изрази за пресметување на нормалното напрегање во радијален (r) правец и тангенцијалното напрегање, се добиваат со замена на 4.31 до 4.34 во 4.26. Придонесот на овие напрегања во вкупното поместување на темелот е изразен преку интегралот од 4.25. Имајќи во предвид дека поместувањето во z -правец е изразено со Беселовите функции со аргумент различен од променливаната по која се интегрира, решението на интегралот се сведува на следниве таблични интеграли

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \quad (4.35)$$

Откако ќе се интегрира и ќе се среди изразот се добива равенката по која се пресметува силата со која почвата влијае врз темелот

$$f_z^s = -\frac{M_s k_\alpha e^{-i\omega t} w^2}{r_0} \left(\frac{1}{k_\alpha^2} + \frac{1}{k_\beta^2} \right) \left[-\Delta \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} - \frac{4Ai}{\pi k_\alpha r H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right] + \frac{2M_s w^2}{r_0^2} \left(\frac{3}{k_\beta^2} - \frac{1}{k_\alpha^2} \right) \Delta e^{-i\omega t} \quad (4.36)$$

Равенката 4.36 во себе ја содржи масата на почвата која е отстранета за да биде вкопан темелот: $M_s = \frac{r_0^2 \pi}{2} \rho_s$, како и брановите броеви: $k_\alpha = \frac{w}{\alpha}$, $k_\beta = \frac{w}{\beta}$

4.2.2 Влијанието на конструкцијата врз темелот

Силата со која конструкцијата делува врз темелот се добива многу едноставно. Таа се определува како производ од нормалното напрегање и површината на контакт

$$\begin{aligned}
 f_z^b &= 2r\sigma_z^z = 2rE_o \left. \frac{\delta u_z}{\delta z} \right|_{z=H} = 2r\Delta \bar{k}_\alpha \operatorname{tg}(\bar{k}_\alpha H) \\
 &= \omega^2 M_b \left(\frac{\operatorname{tg}(\bar{k}_\alpha^b H)}{k_\alpha^b H} \right) \Delta e^{-i\omega t}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

каде е:

$$\bar{k}_\alpha = \frac{\omega}{\alpha_o} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{E_o}{\rho_o}}}, M_b = 2r_o H \rho_b$$

4.2.3. Интеракција

Со дефинирање на силите во 4.2.1 и во 4.2.2 познати се сите сили кои ја сочинуваат равенката за рамнотежа, 4.21. Со нивна замена се добива следниот израз

$$\begin{aligned}
 &-\omega^2 M_o \Delta e^{-i\omega t} \\
 &= -\frac{M_s k_\alpha e^{-i\omega t} \omega^2}{r_o} \left(\frac{1}{k_\alpha^2} + \frac{1}{k_\beta^2} \right) \left[-\Delta \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\operatorname{Ai}}{\pi k_\alpha r H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \right] + \frac{2M_s \omega^2}{r_o^2} \left(\frac{3}{k_\beta^2} - \frac{1}{k_\alpha^2} \right) \Delta e^{-i\omega t} \\
 &+ \omega^2 M_b \left(\frac{\operatorname{tg}(\bar{k}_\alpha^b H)}{k_\alpha^b H} \right) \Delta e^{-i\omega t}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Изразите 4.21, односно 4.38 се зависни од една непозната. Нивното решение го дава одговор на темелот под влијание на почвата и објектот.

$$\begin{aligned}
 \Delta \left[\frac{M_o}{M_s} + \frac{2}{r_o^2} \left(\frac{3}{k_\beta^2} - \frac{1}{k_\alpha^2} \right) + \frac{M_b}{M_s} \left(\frac{\operatorname{tg}(\bar{k}_\alpha^b H)}{k_\alpha^b H} \right) - \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \left(\frac{1}{k_\beta^2} + \frac{1}{k_\alpha^2} \right) \right] \\
 = \frac{4\operatorname{Ai}}{\pi r_o^2 H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \left(\frac{1}{k_\beta^2} + \frac{1}{k_\alpha^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

P -бранот кога доаѓа во контакт со идеално крутиот темел, се рефлектира назад. Бранот кој се рефлектира е исто така P -бран. Бидејќи дојдовниот и рефлектираниот бран се во иста фаза, настанува амплификација на амплитудата на сумарниот бран во точката на рефлексија. Бескрајната крутост на темелот подразбира подеднакво поместување во сите негови точки. Оттука произлегува потребата поместувањето во точката која се анализира, изразено преку 4.39, да се нормализира со удвоената амплитуда на P -бранот.

$$\frac{\Delta}{2A} = \Omega \tag{4.40}$$

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{i\pi r_0^2 H_0^{(1)}(k_\alpha r)}{2} \frac{k_\alpha^2 k_\beta^2}{k_\alpha^2 + k_\beta^2} \left[\frac{M_0}{M_s} + \frac{2}{r_0^2} \left(\frac{3}{k_\beta^2} - \frac{1}{k_\alpha^2} \right) + \frac{M_b}{M_s} \left(\frac{\tan(k_\alpha^b H)}{k_\alpha^b H} \right) - \frac{H_1^{(1)}(k_\alpha r)}{H_0^{(1)}(k_\alpha r)} \left(\frac{1}{k_\beta^2} + \frac{1}{k_\alpha^2} \right) \right] \quad (4.41)$$

4.3. Анализа

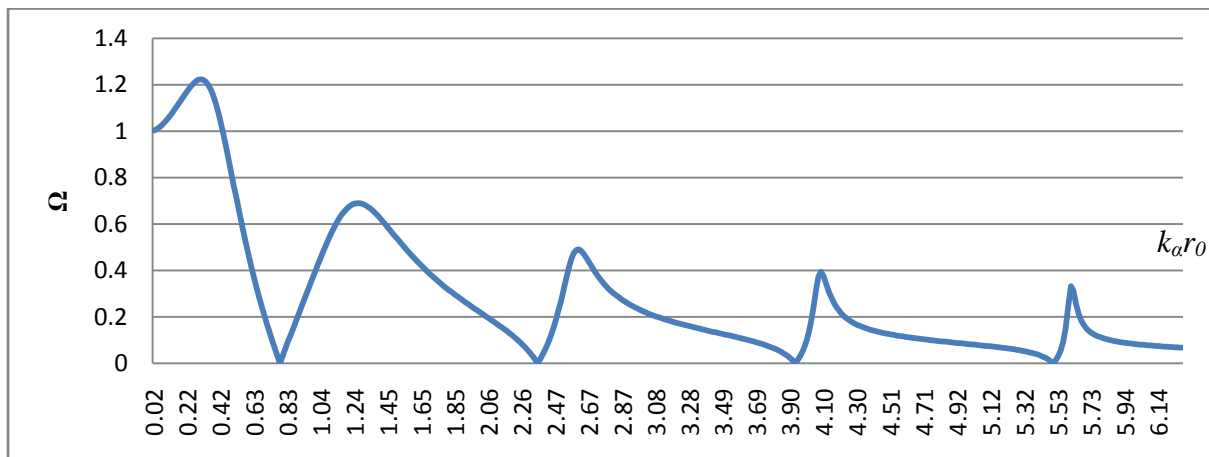
Со равенката 4.41 отвараат можности за анализа на голем број проблеми предизвикани од дојдовен бран создаден од сеизмичка побуда или подземна човечка активност. Со промена на соодносите на масите на зградата и масата на темелот во однос на почвата, може на брз и едноставен начин да се дојде до информација за однесувањето на различни видови на објекти (станбен, деловен, столб од вијадукт...) ослонети на различни видови на темели (самци, лентовидни, плочи...) под влијание на дојдовен бран генериран од подземни активности.

Покрај материјалните карактеристики, на крутоста на објектите влијаат и нивните геометриски димензии. Висината и ширината на објектот се содржани во изразот 4.41. Со промена на вредностите на овие два параметра може брзо да се добијат сопствени фреквенци на објектите.

Изразот 4.41 е решение на комплетен систем на интеракција почва-конструкција. Погоден е за параметарки анализи со кои би се проучувало влијанието на разни фактори дефинирани типот на почвата. Промена на масата на почвата, при постојан волумен, значи промена на нејзината густината. Со тоа се добива можност да се даде анализира однесувањето на конструкцијата во различни средини, од растресити до карпести почви.

H=8,0	$\alpha_s=346,41$	$\beta_s=200$	$\rho_s=1000$	$M_s=100530,9649$
$r_0=8,0$	$\alpha_b=346,41$	$\beta_b=200$	$\rho_b=1000$	$M_b=201061,9298$
A=0,5	$\alpha_f=346,41$	$\beta_f=200$	$\rho_f=1000$	$M_0=100530,9649$

Табла 4.5 Параметри за пресметка на аналитичко решение



Дијаграм 4.1 Аналитичко решение за параметри од Табела 4.5

На дијаграмот 4.1 се прикажани резултатите од пример во кој е извршен произволен избор на параметрите со кои е дефиниран интегриран систем почва-конструкција. на апцисната оска се нанесени вредностите на бездимензионална фреквенца $k_a r_0$, која го определува спектарот на бранови под чие влијание е извршено побудување на конструкцијата. На ординатата се нанесени поместувањата пресметани за вредност на Ω определена со равенката 4.40.

Почетокот на графикот е $\Omega = 1$. Тоа се случува кога на објектот му приоѓа бран со фреквенција 0. Тоа практично значи статичко оптоварување на конструкцијата. Статичкото оптоварување, во изразот 4.41 аналитички се дефинира со делот кој се наоѓа надвор од заградите, за кој може да се докаже дека тежи кон еден, кога $k_a r_0$ тежи кон нула. Дека овој фактор не зависи од соодносот на масите на темелот и објектот покажува Графикот 4.2. Кога од моделот ќе се изостават објектот и темелот се добива аналитичкиот модел на полупростор. Како и кај комплетниот (График 4.1), така и кај моделот на полупростор (График 4.2) кривата во графикот започнува од 1 со што се покажува дека на тоа не влијае изразот кој се наоѓа во заградата.

H=0	$\alpha_s=346,41$	$\beta_s=200$	$\rho_s=1000$	$M_s=100530,9649$
$r_0=8,0$	$\alpha_b=346,41$	$\beta_b=200$	$\beta_b=1000$	$M_b=0$
A=0,5	$\alpha_f=346,41$	$\beta_f=200$	$\rho_f=1000$	$M_0=0$

Табла 4.6 Параметри за пресметка на аналитичко решение на полупростор

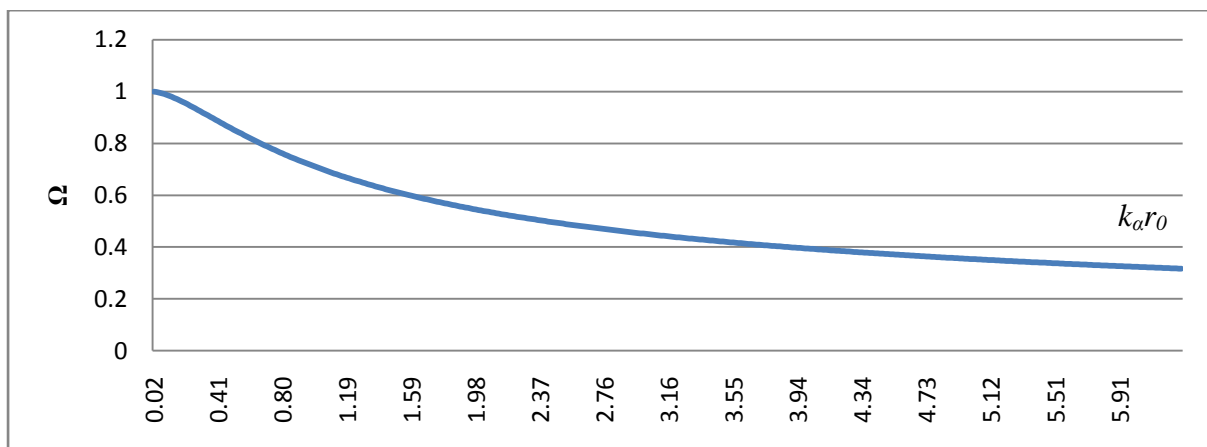
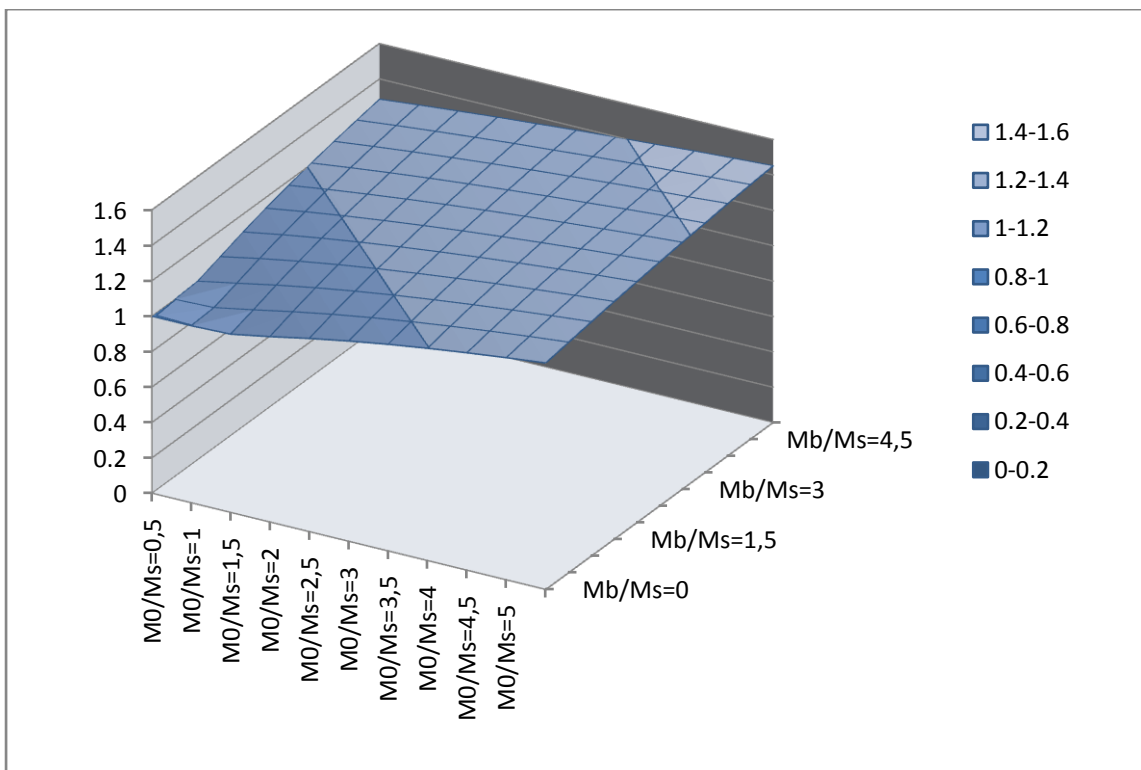


График 4.2 Аналитичко решение за полупростор

Графикот 4.1 од почетната вредност 1 продолжува со нагорна траекторија и достигнува свој максимум пред да започне да паѓа кон 0. Првиот пик го дава максималното поместување на темелот. Големината на овој пик како и фреквенцијата на бранот под чие влијание ќе се појави варираат во зависност од параметрите со кои се опишани компонентите од системот. На Слика 4.4 прикажана е промената на пикот во зависност од промената на крутоста (менувајќи ја густината) на темелот и конструкцијата. Слика 4.4 ни укажува дека со зголемување на крутоста, се зголемува и пикот, па така пикот има најмала амплитуда во случајот кога масата на темелот и објектот е половина од масата на тлото, а најголема кога масата на темелот и објектот се по пет пати поголеми од масата на тлото.

Промената на крутоста на објектот, покрај влијанието брз амплитудата на максималното поместување, влијае и на фреквенцата кога тоа поместување ќе се појави. На *График 4.3* се прикажани 6 различни комбинации на крутоста на објектот во однос на крутоста на тлото. Графикот ја потврдува претходната теза за порастот на амплитудата со порастот на крутоста. Дополнително кривите од графикот покажуваат дека објектот кој се карактеризира со најголема крутост максималното поместување го достигнува за повисоки фреквенции во однос на објектите кои се со помали крутости. Спротивно на ова, кај вториот пик, кој се наоѓа помеѓу двете нули на графикот, зголемената крутост допринесува максималното поместување да се јави во пониските фреквенции, споредено со објектите со помала крутост.



Слика 4.4 Промена на вредноста на пикот во зависност од односот на масите

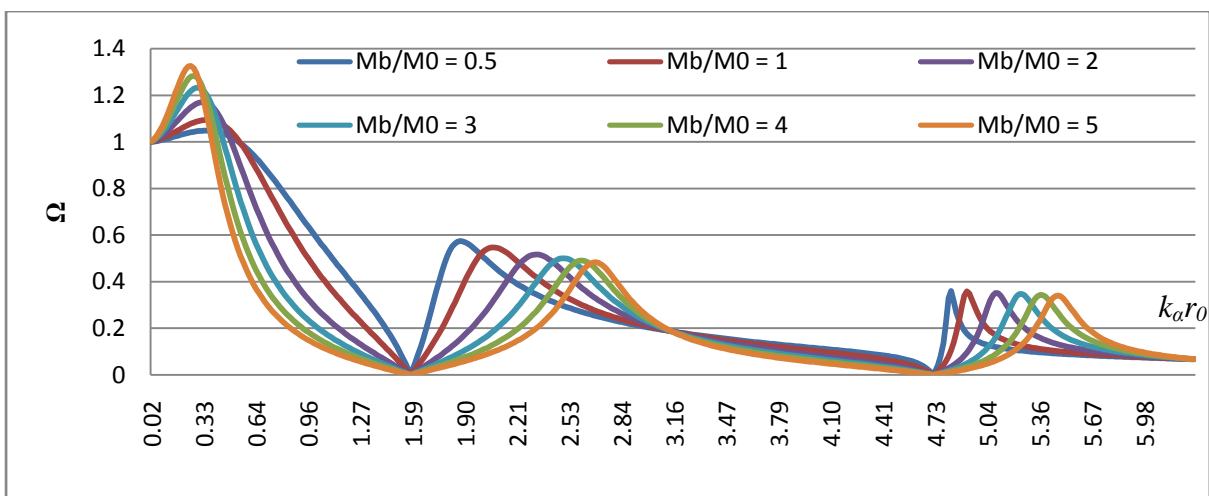


График 4.3 Влијанието на крутоста врз максималните поместувања

Покрај максималното поместување *График 4.1* дава дополнителни информации од кои може да се изведат важни заклучоци за секој систем на интеракција гло-конструкција. Од равенката 4.41 може да се заклучи дека доколу за влезна фреквенција се земе некоја од природните фреквенци на објектот на крута подлога, поместувањето опишано со 4.41 ќе биде еднакво на нула. Со други зборови, точката од апцисата во која кривите од *Графикот 4.1* и 4.3 има вредност нула, ја откриваат сопствената природна фреквенца на објектот на крута подлога. Првата природна сопствена фреквенција за примерот од *График 4.1* се јавува на $\pi/2$, а втората на $3\pi/2$. Помеѓу овие две нули во графикот повторно се јавува пик, односно втор пик. Амплитудата на вториот е помала во однос на првиот пик. Тенденцијата на намалување на поместувањата во пиковите продолжува и во третиот и секој следен пик. Тоа укажува дека со зголемување на фреквенцијата на брановите се намалува амплитудата на максималните поместувања на објектите.

$H=16$	$\alpha_s=346,41$	$\beta_s=200$	$\rho_s=1000$	$M_s=100530,9649$
$r_0=8,0$	$\alpha_b=346,41$	$\beta_b=200$	$\beta_b=1000$	$M_b=201061,9298$
$A=0,5$	$\alpha_f=1732,05$	$\beta_f=1000$	$\rho_f=1000$	$M_0=100530,9649$

Табла 4.7 Параметри за пресметка на аналитичко решение

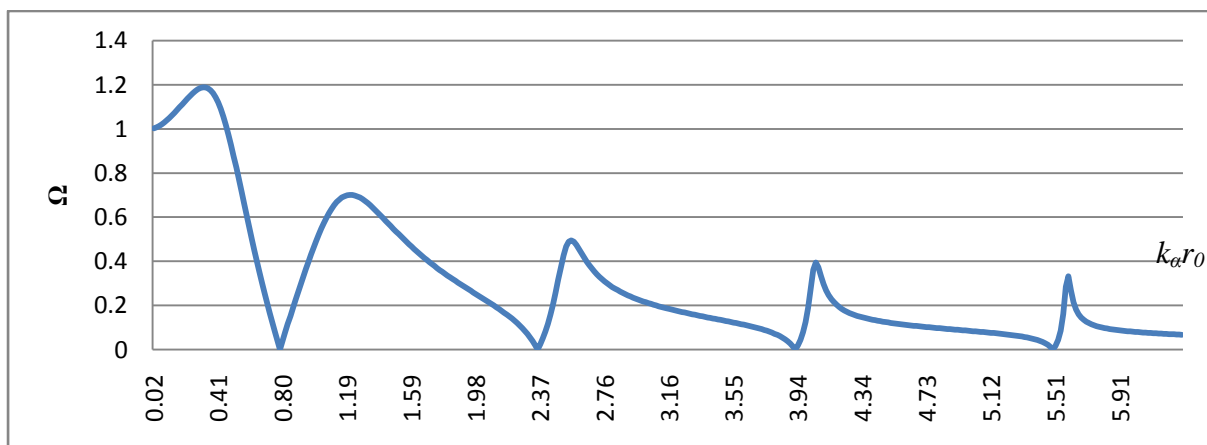
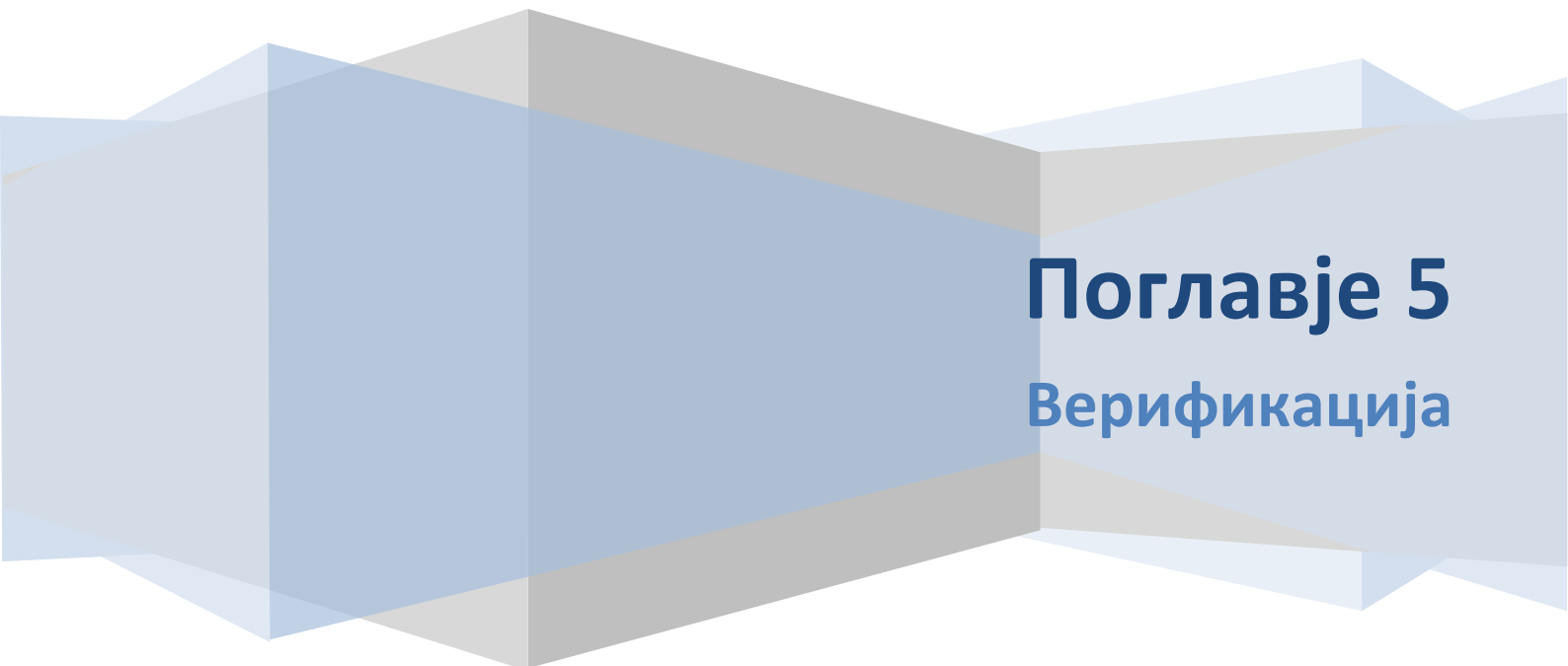


График 4.4 Аналитичко решение за параметри од Табела 4.7

График 4.4 ни прикажува дијаграм на поместувања на темелот кога конструкцијата има два пати поголема висина од радиусот на темелот. Промената на пропорциите на објектот значат промена на неговата динамичка крутост. На вака дефинираниот објект сега природните сопствени фреквенции се на $\frac{(2n+1)\pi}{4}$, каде $n=0,1,2,3\dots$



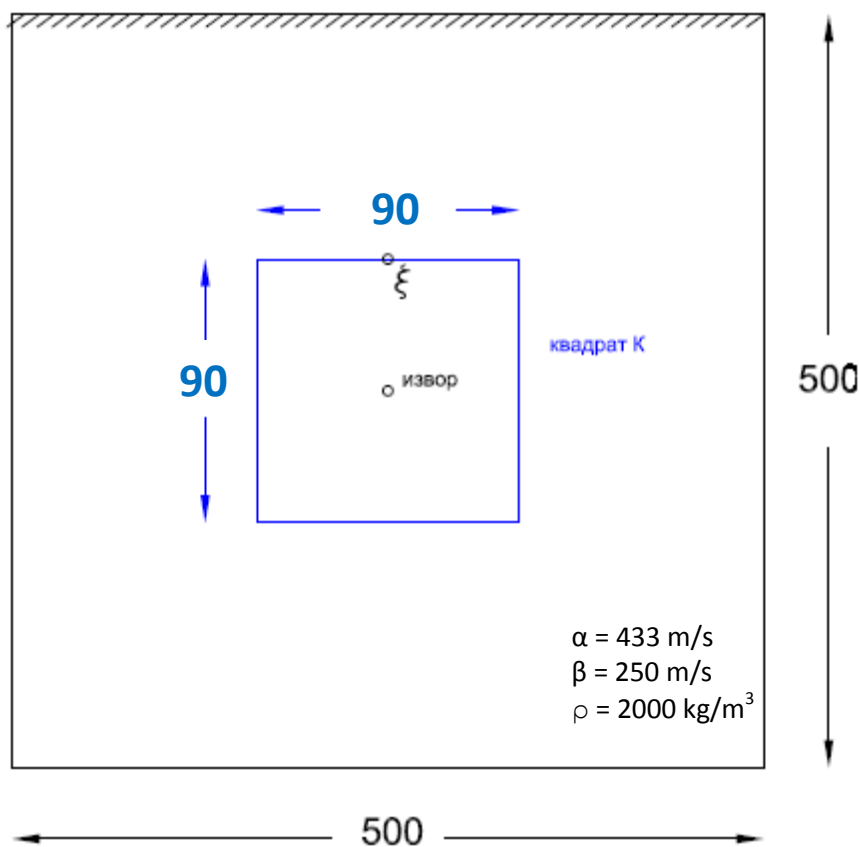
Поглавје 5

Верификација

5.1 Споредба на нумеричкиот со аналитичкиот модел

Нумеричкиот модел, презентираан во докторската дисертација, содржи одреден степен на апроксимации кои влијаат на точноста на резултатите. Вештачките локални граници, применети во нумеричкиот модел, не се егзактни и нивната примена резултира со грешка. Границите на Stacey[61], кои се користат во овој модел, се формирани на база на параксијална апроксимација на брановата равенка. Со цел да се добие претстава за големината на грешката, односно да се утврди, дали добиените резултати се доверливи, извршена е верификација на нумеричкиот модел. Заклучоците од верификацијата се показател за степенот и доменот на применливост на нумеричкиот модел во практични цели. Нумерички модел мора да биде верификуван според основните закони од физиката со кои се објаснува ширењето на брановите.

Покрај квантификацијата на вештачките граници, веродостојноста на резултатите зависи и од повеќе останати компоненти на нумеричкиот модел, како што се контакти, слободните површини, аглите, густината на мрежата и т.н. Проверката на резултатите добиени со целиот нумерички модел, не може да даде јасна слика за влијанието на апроксимациите за поединечните компоненти, на вкупната точност на моделот. Затоа анализите со нумеричкиот и аналитичкиот модел се направени за бранови со иста фреквенција. За да се елиминира влијанието на темелот, најнапред е анализиран модел на полупростор без присуство на темел и објект. На тој начин се добиени информации за прецизноста на границите дефинирани според Stacey.



Слика 5.1 Нумерички модел за еластичен полупростор

Користејќи го законот за постојаност на енергијата, добиени се информации за пропустливоста на параксијалните граници. Според овој закон, енергијата која се создава во изворот на бранот, треба да биде еднаква со измерената енергијата која ја носи бранот, откако ќе го напушти моделот. Изворот емитира пулсо во облик на полусинусоида. Влезната енергија е мерена непосредно покрај изворот во точки кои оформуваат квадрат K со страни 90м (720 точки). Изворот на бранот се наоѓа во пресекот на дијагоналите на квадратот. Излезната енергија на бранот е мерена на точките кои ги сочинуваат вештачките граници (Слика 1).

Пресметката на влезната енергија е објаснета во *Поглавје 3*. За конкретниот нумерички модел, равенката (3.10) ја добива следната форма:

$$E = \rho \alpha A \int_0^{t_p+t_d} v_{i,k}^2 dt \quad (5.1)$$

каде

- ρ е густината на почвата
- α е брзината на Р-бранот
- A е површината нормална на пропагацијата на бранот
- $v_{i,k}$ е брзината пресметана во i -тата точка од квадратот, во k -тата итерација
- t_p е времето потребно бранот да пристигне во i -тата точка
- t_d е траењето на пулсот

За да може нумерички да се пресмета интегралот од 5.1, истиот е заменет со сума на радијалните брзини пресметани по целата површина на квадратот K (Слика 5.1). Сумата на радијалните брзини се пресметува во цело времетраење на нумеричката симулација од 2.4s. (десната сума од 5.2). Временскиот интервал од 2.4s е времето потребно бранот, во форма на полусинусоидата, да стигне до слободната површина, и рефлектиран да го напушти почвениот исечок низ трите параксијални граници.

$$E = \rho \alpha \sum_{i=1}^{720} \sum_{k=1}^{\frac{(t_p+t_d)}{\Delta t}} A_i \cdot v_{i,k}^2 \Delta t \quad (5.2)$$

Од пресметковни причини вкупната површина нормално од бранот на пропагација се дели на парцијални површини A_i . Секоја од тие површини е припадната површина на секоја од точките кои го оформуваат квадратот. Преку сума на поединечните површини за секоја од 720-те точки се добива вкупната површина нормално на пропагацијата на бранот (левата сума во 5.2).

Поради апроксимацијата на кружниот фронт на бранот со квадрат, се очекува дека во резултатите ќе постои одредена грешка. За да се верификуваат енергиите користени се периоди на полусинусоидата чии поместувања во анализата од

Поглавјето 4 се покажаа како точни при ширина на квадратот со кој се симулира изворот од 90м.

Изразот дефиниран со 5.2 може дополнително да се модификува знаејќи дека брзината се добива како прв извод од поместувањето. Во точките кои лежат на вертикалната оска на симетрија, под дејство на бранот се јавуваат само вертикални поместувања. Доколку се претпостави дека бранот осцилира хармониски со амплитуда A , тогаш поместувањето може да се претстави како

$$w = A \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{t_d}\right) \quad (5.3)$$

каде t_d е периодатата на синусоидата.

Брзината на честичката во дадениот јазол може да се изрази како прв извод на поместувањето по време.

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{A\pi}{t_d} \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{t_d}\right) \quad (5.4)$$

Ако равенката за радијалната брзина 5.4 се замени во равенката за нумеричко пресметување на енергијата 5.4. се гледа дека брзината е обратно пропорционална од периодата на бранот. Со намалувањето на периодата t_d , реципрочно се зголемува брзината на честичката во дадената точка. Бидејќи брзината е право пропорционална со енергијата на бранот, произлегува дека брановите со пократки периоди имаат поголема енергија.

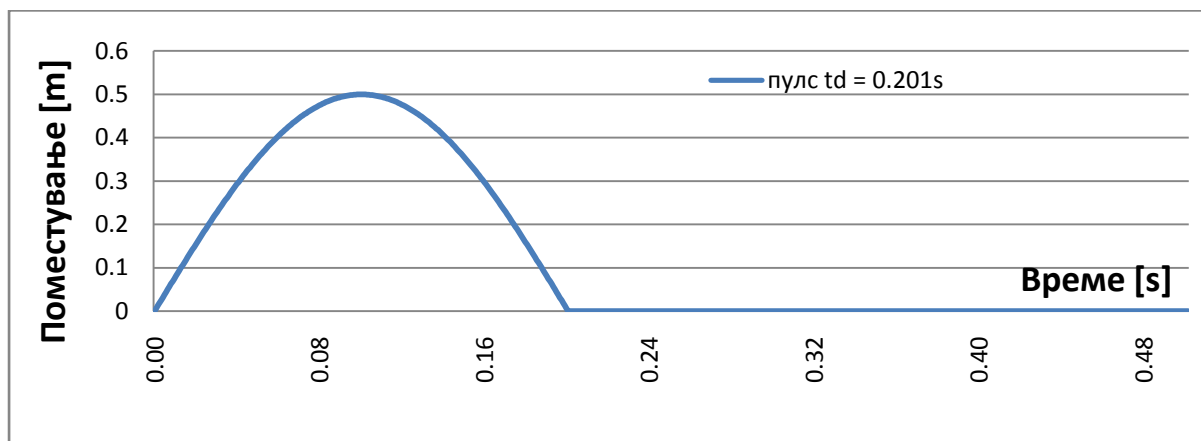


График 5.1 Влезен пулс со траење $t_d = 0.201s$

Заклучокот изведен врз база на 5.4 е искористен како првиот контролен параметар за верификација на прикажаниот нумеричкиот модел. На Графикот 5.2 се прикажани пресметаните енергии за четири различни периоди. Точката x во која се пресметани енергиите се наоѓа на 50 метри над изворот, и лежи на вертикалната оска на симетрија. Најмалата полупериода е со времетраење од 0.0296 секунди, додека најдолгата полупериода за овој случај на верификација е 0.201 секунди. Изборот на

периодите е направен така да времето кое е потребно за бранот да стигне до слободната површина и да се врати назад во точката каде се пресметуваат енергиите е помало од периодата.

Изворот на брановите е претставен со квадрат со димензии 90x90м. За полесна интерпретација на графициите наместо хармониски влезен бран, искористена е полусинусоида со амплитуда од 50см.

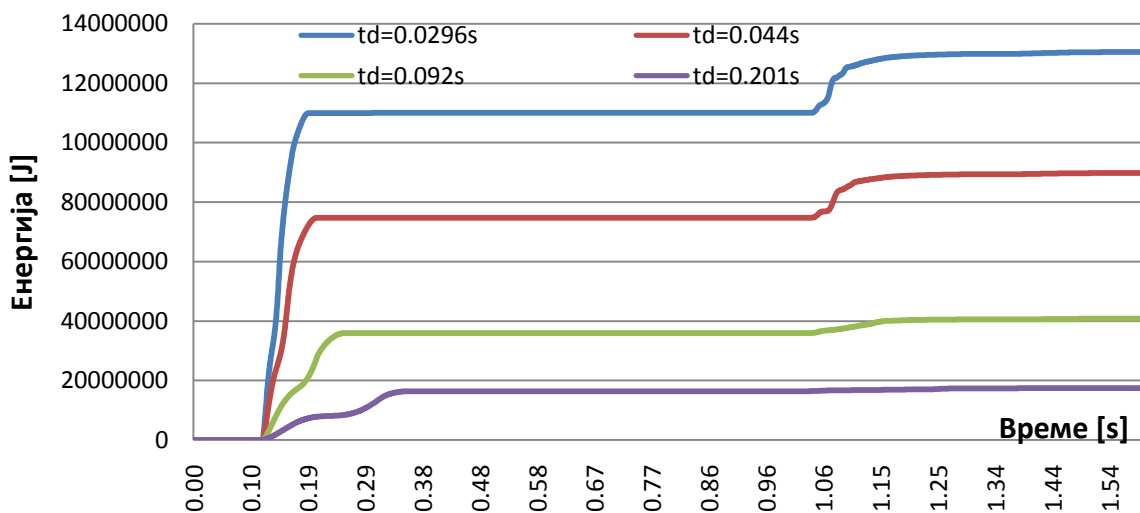


График 5.2 Верификација со помош на енергии кај бранови со различни периоди

Графикот 5.2 е потврда дека нумеричкиот модел ги задоволува физичките закони за односот на периодата и енергијата, т.е. со намалување на периодата на бранот се зголемува брзината на честичката, а со тоа и енергијата која ја носи бранот.

Енергиите прикажани на Графикот 5.2 се користат за дополнителна верификација на нумеричкиот модел. Сите прикажани енергии започнуваат да растат од нула во временски интервал ~ 0.11 секунди. Тоа е времето кое е потребно бранот, кој се движи со брзина од $\alpha = 250\sqrt{3}m/s$, да стигне од изворот до најблиската точка од квадратот x :

$$t_1 = \frac{L}{v} = \frac{50}{250\sqrt{3}} \cong 0.11s \quad (5.5)$$

Времето потребно енергијата од нула да ја достигне првата максимална вредност е временскиот период што поминал откако фронтот на пулсот пристигнал до најблиската точка и откако пулсот комплетно излегол од најдалечната точка. Од Графикот 5.2 се гледа дека енергијата пресметана за пулсот со најкратката периода го достигнува првиот максимум по $\sim 0.14s$. Тоа е времето потребно бранот да стигне и да помине со целата должина на полусинусоида, низ целиот квадрат. До истата констатација може да се дојде и кај останатите три криви на енергии.

Откако пулсот ќе помине со целата должина низ точката x , поместувањата во неа ќе бидат нула. Во тој момент брзината и енергијата треба да бидат нула. Тоа значи дека во секој следен временски чекор членот од равенката за пресметување на енергија (5.2), $\sum_{i=1}^{560} v_{i,k}^2 \Delta t$, ќе има вредност нула. Вкупната енергија останува непроменета се до моментот кога повторно низ точката не помине бран. По достигнување на првиот максимум, па се до временскиот интервал $\sim 1.04s$, енергијата на бранот останува константна. Временскиот интервал $\sim 1.04s$ е времето кога пристига рефлектираниот бран. Константната вредност на енергијата во овој временски период, на *Графикот 5.2* може да се препознае со хоризонталниот сегмент помеѓу двата порастакај сите криви. Ова е потврда дека нумеричкиот модел ги исполнува законите на пропагацијата на брановите.

Откако бранот ќе помине низ точката x , патува уште 200 метри додека не дојде до слободната површина. Слободната површина го рефлектира бранот назад во еластичниот полупростор. Рефлектираниот бран повторно проаѓа низ точката и потоа низ вештачките граници го напушта моделот. Вкупното растојание кое бранот го поминува од изворот до слободната површина и назад до точката ќе 450 метри. Време потребно бранот да го помине тој пат иснесува

$$t_2 = \frac{L}{v} = \frac{450}{250\sqrt{3}} \cong 1.04s \quad (5.6)$$

Ова е уште една потврда дека моделот коректно ја спроведува пропагацијата на брановите.

Од *Графикот 5.2*, може да се заклучи дека порастот на енергијата од рефлектираниот бран (временскиот интервал од $\sim 1.04s$) е значително помал споредено со порастот на енергијата од влезниот бран (временскиот интервал од ~ 0.11 секунди). Ова се објаснува со пригушувањето на бранот и намалувањето на неговата амплитуда со изминатиот пат (5.6). Пригушената амплитуда на бранот значи дека се намалуваат поместувањата, а со тоа брзината и енергијата на бранот.

Пригушувањето на бранот зависи од растојанието од изворот до точката во која се пресметува амплитудата. Зависноста на амплитудата од растојанието не е линеарна и истата се пресметува според изразот

$$A = a \sqrt{\frac{r}{R}} \quad (5.7)$$

каде

- A е амплитудата на бранот на растојание R растојание од изворот,
- a е амплитудата мерена на растојание r од изворот

Оваа физичка законитост поврзана со законот на рефлексива на брановите, може да се искористи за верификација на точноста на нумеричката шема за дефинирање на слободната површина, дадена од *Min*[51]. Според *Achenbach*[5], соодносот на

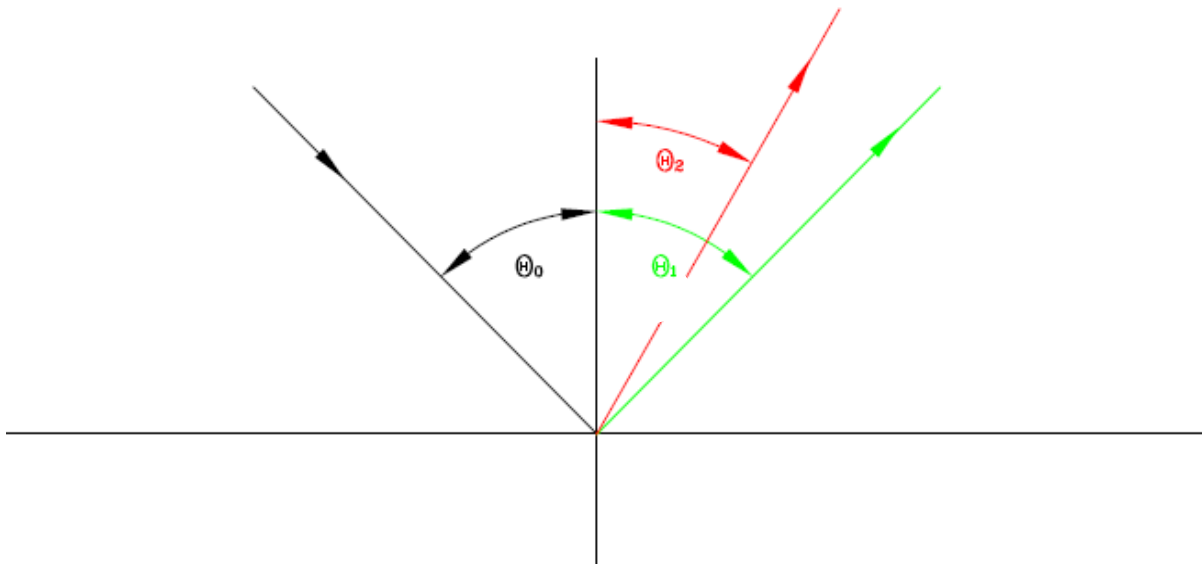
амплитудите на дојдовниот P-бран (A_0) и рефлектираните P- (A_1) и SV-бранови (A_2) даден е со изразите

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - k^2 \cos^2(\theta_2)}{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + k^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (5.8)$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2k^2 \sin(2\theta_0) \cos(\theta_0)}{\sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + k^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (5.9)$$

каде

- Θ_0 е аголот помеѓу фронтот на дојдовниот P-бран и вертикалната оска,
- Θ_1 е аголот помеѓу фронтот на рефлектираниот P-бран и вертикалната оска,
- Θ_2 е аголот помеѓу фронтот на дојдовниот SV-бран и вертикалната оска,
- $k = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$ е материјална константа.



Слика 5.2 Рефлексија на дојдовен P - бран

Наједноставната рефлексија е кога дојдовниот бран приоѓа под агол $\theta_0 = 0$. Тоа значи дека рефлектираниот P - бран се одбива под истиот агол т.е. $\theta_1 = 0$. Со замена на вредностите на овие агли во равенките 5.8 и 5.9 се добива

$$\frac{A_1}{A_0} = -1 \text{ и } \frac{A_2}{A_0} = 0 \quad (5.10)$$

Овие изрази покажуваат дека при нормална рефлексија, P - бранот се рефлектира само во P - бран. Според Achenbach[5] рефлектираниот P - бран ќе биде во иста фаза со влезниот P - бран. Со нивната суперпозиција се формира т.н. стоечки бран. Вкупната амплитуда на овој бран ќе биде збирот од двете поединечни амплитуди, т.е. удвоена амплитуда на влезниот бран.

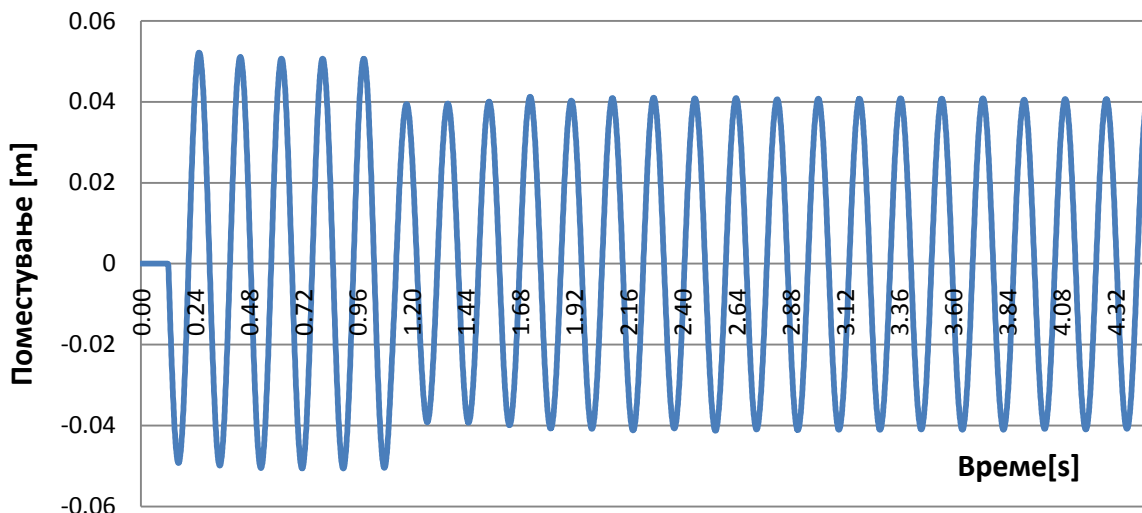


График 5.3 Поместување во тек со време на точка x близу изворот

На *График 5.3* е прикажано временската историја на поместувањето на точката x , при побуда на хармониски бран со периода од $T = 0,171s$. Амплитуда пресметана на почетокот на осцилациите е еднаква на $0,052m$. Откако рефлетируваниот бран ќе стаса до точката x , бранот кој доаѓа од изворот се интерферира со рефлетируваниот бран. Амплитудата на интерферируваниот бран е $0,0409m$.

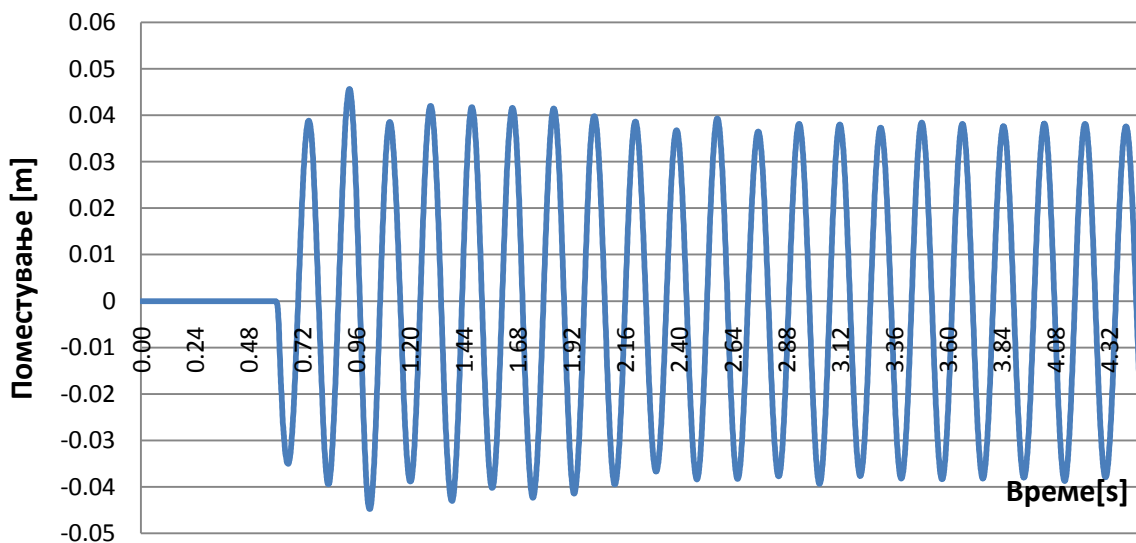


График 5.4 Поместување на точка со тек на време на меѓуслојот темел - конструкција

На *График 5.4* е прикажана временската историја на поместувањата на точка која се наоѓа на средина од контактот помеѓу темелот и објектот. Поместувањата се од истиот тип на побуда како кај поместувањата во точката x .

Од *График 5.4* може да се забележи дека поместувањата во првите три секунди поминуваат низ т.н. транзиентна фаза. Меѓутоа по приближно $3.5s$ доаѓа до стабилизација на вредноста на амплитудата и се добива хармониско осцилирање на точката со амплитуда $0,0384m$. Бидејќи во првите $3.5s$ амплитудите не се константни,

верификацијата на амплитудите во точката на рефлексija извршена е со амплитудата пресметана по 3.5s.

Верификацијата е направена според изразот 5.7. Имајќи во предвид дека амплитудата во точката на рефлексija ќе има двојно поголема амплитуда од пригушената амплитуда пресметана со равенката 5.7 се добива

$$A = 2 \left(0,0409 \sqrt{\frac{50}{250}} \right) = 2 \cdot 0,0183 = 0,0366\text{m} \cong 0,0384 \quad (5.11)$$

Енергетскиот пристап може да се искористи за определување на влијанието на ширината на квадратот со кој е дефиниран изворот (дискутиран во *Поглавје 3*) на точноста на резултатите.

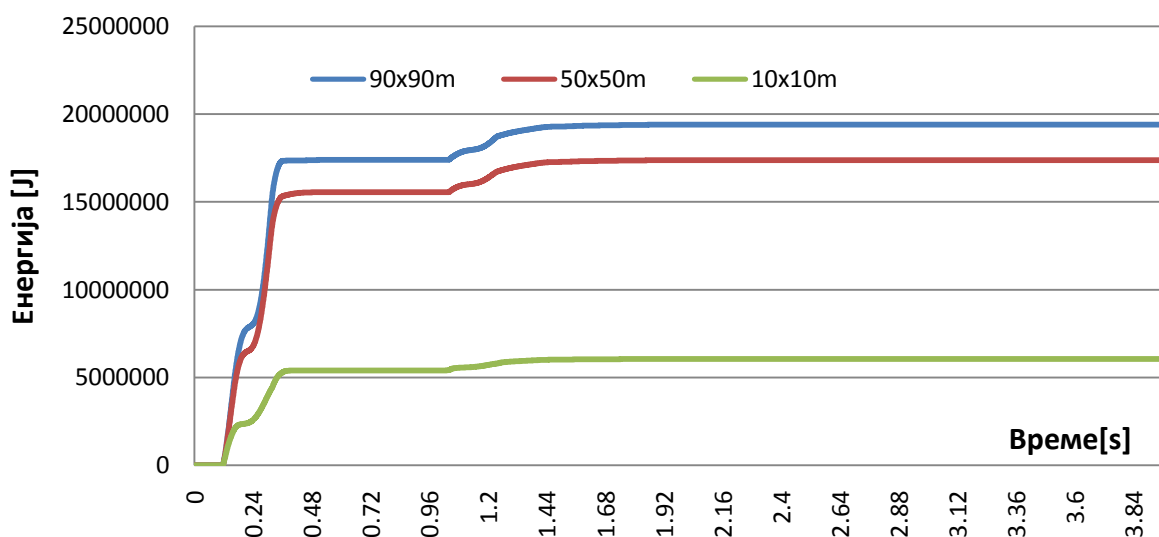


График 5.5 Влезна енергија во зависност од ширината на квадратот околу изворот

График 5.5 ги илустрира влезните енергии за бран со периода $T=0.401\text{s}$, за различни димензии на квадратот. Во поглавјето 3 беше констатирано дека димензиите на квадратот имаат ефект на бранот кој се создава во него. Со графиците 3.6-3.10 се покажува дека зголемувањето на димензиите на квадратот води до поточни резултати. Истото се потврдува и со *Графикот 5.3*. На тој график јасно се гледа дека енергијата која ја создава бран формиран од извор во форма на квадрат со димензии 10x10m, има поголемо отстапување од енергијата од бранот со истата периода но создаден од извор со димензии 50x50m. Од друга страна разликата во вредностите на влезните енергии помеѓу брановите создадени со извори со димензии од 50x50 и 90x90m, не е толку голема. Зголемувањето на димензиите на изворот (квадратот) значи дополнително зголемување на димензиите на моделот. Тоа би резултирало во потреба од сметачки машини со посилни перформанси и значително зголемување на времето потребно за

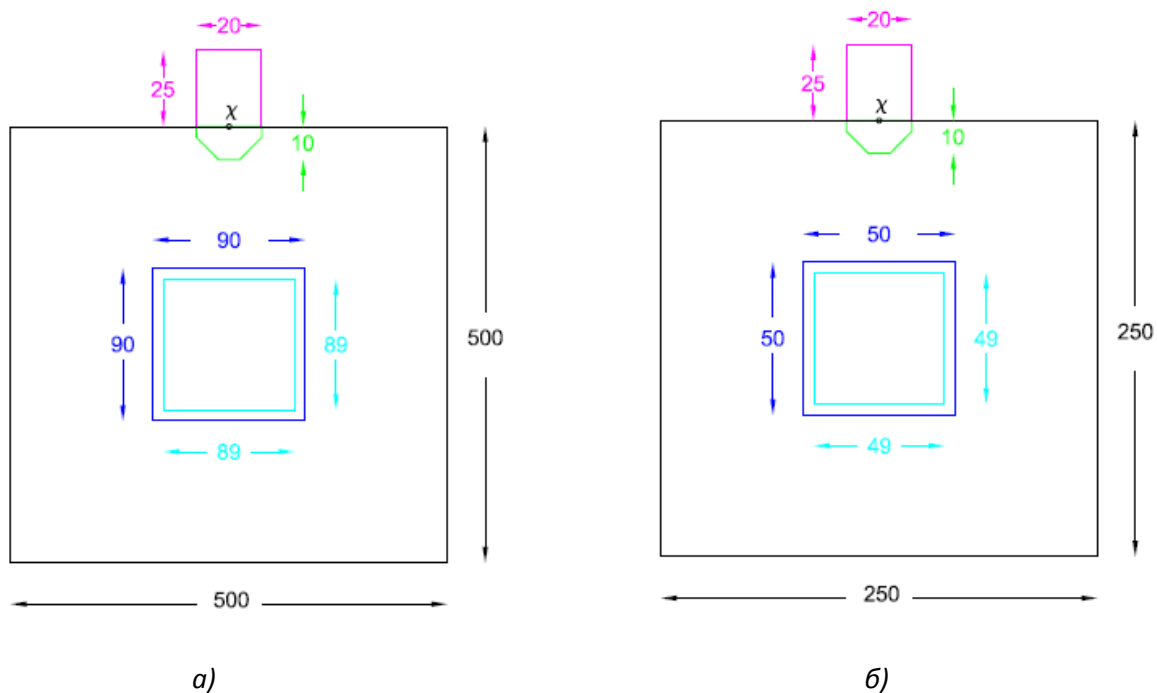
извршување на анализата. Од тие причини усвоен е извор со димензии 90x90, кој се смета како оптимален за разгледуваниот пример.

Заклучоците добиени со анализа на *Графикот 5.3* и граfiците 3.6-3.10, покажуваат дека нумеричкиот модел со параметрите дефинирани во *Поглавјето 3*, не може да соодветно да се споредува со резултатите од аналитичкиот модел добиени за системот почва – конструкција, за целиот спектар на фреквенции.

Споредено со *Liso*[48], која се користи како основа за изведувањето на аналитичкото решение, темелот во примерот кој се анализира во оваа докторска дисертација се разликува во две основни работи. Првата разлика е во формата. Во истражувањата спроведени во рамките на дисертацијата, темелот е земен со форма од половина шестоаголник, додека во аналитичкото решение на *Liso*[48] (*Поглавје 4*) темелот е со кружна форма. Димензиите на темелот во нумеричкиот модел се така дефинира да површината на темелот соодветствува со површината на темелот од аналитичкото решение. Ако површината на полукружниот темел $P = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{10^2\pi}{2} = 160m^2$ се изедначи со површината на шестоаголен темел со ширина $a = 2r$ се добива

$$h = \frac{a\pi}{8}, \text{ т.е. } a=20m, \text{ а } h = 8m.$$

Втората разлика е во крутоста на темелот. Додека аналитичкото решение е базирано на бескрајна крутост на темелот, кај нумеричката анализа сите параметри, а со тоа и темелот мора да бидат конечни. Изборот на параметрите во нумеричкиот модел е направен така што тие се блиски до некој реален објект. Аналитичкото решение е добиено со параметрите прикажани во *табела 5.1*.



Слика 5.3 б) Модел 1 и а) Модел 2

A=0,5 m	$\alpha_b=346,41$ m/s	$\alpha_s=433,01$ m/s	$\alpha_r=1732,05$ m/s
$r_0=8,0$ m	$\beta_b=200$ m/s	$\beta_s=250$ m/s	$\beta_r=1000$ m/s
H=25,0 m	$\rho_b=2000$ kg/m ³	$\rho_s=300$ kg/m ³	$\rho_r=2000$ kg/m ³

Табела 5.1 Влезни параметри за Модел 1 и 2 (Слика 5.3)

Нумеричкиот модел е дефиниран со истите параметри, со исклучок на брзината во темелот. Во разгледуваниот нумерички пример е усвоено дека бранот низ темелот се движи со компресивната брзина, $\alpha = 519,62$ m/s и трансверзалната брзина, $\beta = 300$ m/s.

Со помош на нумеричкиот модел може да се одредат сопствените фреквенции на објектите. Во *Поглавјето 4* е прикажано аналитичкото решение кое овозможува пресметка на сопствените фреквенции на објектите. Добиените фреквенции од аналитичкото решение се споредени со фреквенциите добиени со нумеричкиот модел. Од претходно изнесените заклучоци, дека споредбата на нумеричкиот модел, базиран на методот на конечни разлики, со аналитичкото решение, не може да се изврши за целиот спектар на фреквенции, усвоено е да се изврши споредба на резултатите добиени за фреквенции кои се во близината пред и после сопствената фреквенција на објектот.

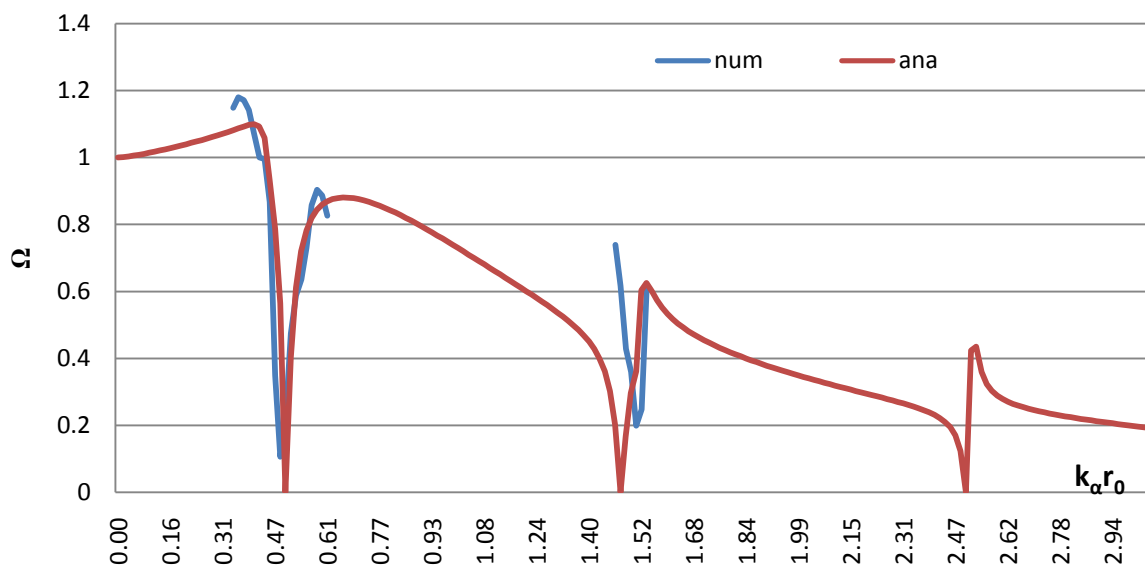


График 5.6 Верификација на сопствените фреквенции

На *Графикот 5.6* се прикажани резултатите добиени од нумеричкото, односно аналитичкото решение. Прикажаните резултати се нормализиран одговор на системот почва – конструкција, објаснет во *Поглавје 3*. На подолжната оска се нанесени вредностите на $k_a r_0$, (r_0 е радиусот на полукружниот темел и $k_a = \frac{\omega}{\alpha}$), а на ординатата се нанесени нормализираните поместувања добиени со равенката (4.41) (црвена линија) и од нумеричките симулации (сина линија).

Редоследот на активности потребни да се исцрта сината линија се објаснети во продолжение.

- Чекор 1: се формира бран со кружна фреквенција ω и се анализира временската историја на поместувања за точката на средината од контактот темел – конструкција (точка с слика 5.3)
- Чекор 2: амплитудата од временската историја на поместувањата за точката од чекор 1 се нормализира и се задава како ордината за $\frac{\omega r}{\alpha}$

Направени сеповеќе симулации со нумеричкиот модел за бранови со различна периода. Добиени се временските истории на поместувањата на точката која се наоѓа на средината од контактна темелот и конструкцијата. На *График 5.7* е прикажана една од тие симулации за вредност на $k_{ar0} = 0.47909$.

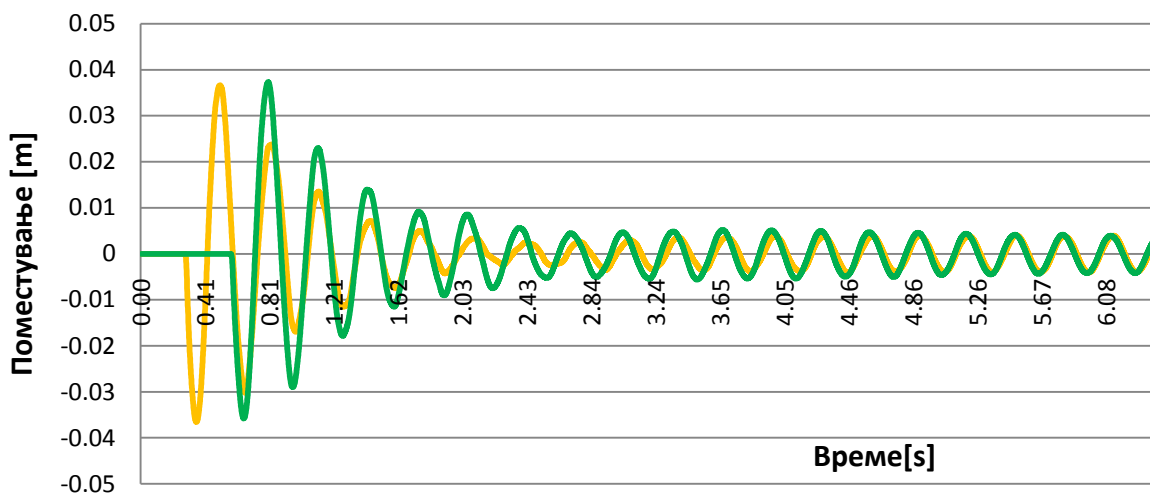


График 5.7 Вертикално поместување на точка од контактот темел-конструкција за бран со фреквенција приближна на првата сопствена фреквенција на конструкцијата

Жолтата крива е добиена со модел (1) со димензии 250 x 250м. За изворот е усвоен квадратот со ширина од 50м. Истиот се наоѓа на растојание од 125м од контактот темел - конструкција. Со зелената линија е претставено поместувањето добиено за модел (2) со димензии 500x500м, ширината на квадратот околу изворот е 90м. Изворот е поставен на 250м од контактот темелот - конструкцијата. Со зголемување на растојанието се зголемува и времето потребно бранот да стигне од изворот до средишната точка на меѓуслојот. Затоа во модел (2) (зелената линија) точката започнува покасно да осцилира. Заедничко за двете криви е дека и двете поминуваат низ трансисентен период на осцилациите на темелот. Потоа амплитудата на осцилациите се стабилизира и останува скоро константна во тек на време. Амплитудата измерена при хармониското осцилирање на точката изнесува 0.0049м за модел (2) и 0.004м за модел (1). Нормализираната амплитуда определува една точка во графикот 5.5 со координати $k_{ar0} = 0.502$ по апсциса, и амплитудата по ордината. Вредноста со која се нормализира е 0.0485, пресметана според 5.11.

Во *Поглавјето 4*, беше покажано дека кога бранот осцилира со фреквенција еднаква на сопствената фреквенција на објектот, аналитичкото решение (4.41) има вредност нула. Бидејќи амплитудите на поместувањата од модел (1) и модел (2) се приближни на 0, се добива дека сопствената фреквенција на објектот е 3,302Hz. Ова е многу блиску до сопствената фреквенција на објектот добиена со аналитичкото решение 3,464Hz (нулата на црвената линија од график 5.6). На овој начин се потврдува дека нумеричкиот модел правилно ја одредува сопствената фреквенција на објектот.

Од *График 5.7* може да се констатира дека при побуда со бран со иста фреквенција како и сопствената фреквенција на објектот, изборот на димензиите на изворот и растојанието на изворот до објектот, не влијаат многу на точноста на резултатите. Ова е уште една потврда на применетата постапка и олеснителна околност при моделирањето.

На сличен начин, со помош на нумеричкиот модел, е одредена и втората сопствена фреквенција на објектот и таа изнесува 10,536Hz (аналитичко 11,024Hz). Во двата случаја се покажува дека добиените вредности со нумеричката анализа се блиски до аналитички добиените вредности (4.41). Одредувањето на втората сопствена фреквенција на објектот е проблем од нумеричка гледна точка. Зголемувањето на фреквенцијата значи намалување на периодата. Од ова произлегува дека за да може да се направат пресметки за две блиски кратки периоди, мора да се намали временскиот чекор. Со намалување на временскиот чекор се зголемува бројот на итерациите и целокупното времето потребно за извршување на симулацијата. Во зоната на втората нула (графикот 5.6 на одговорот на системот почва – конструкција), на средишната точката од контактот темел - конструкција и е потребен поголем временски период за да премине од транзиентна во хармониска фаза на осцилирање (график 5.8). За да може анализата да се спроведе со расположливата опрема, усвоени е поголем временски чекор од потребниот за добивање на решенија со приближна иста точност како кај првата сопствена фреквенција.

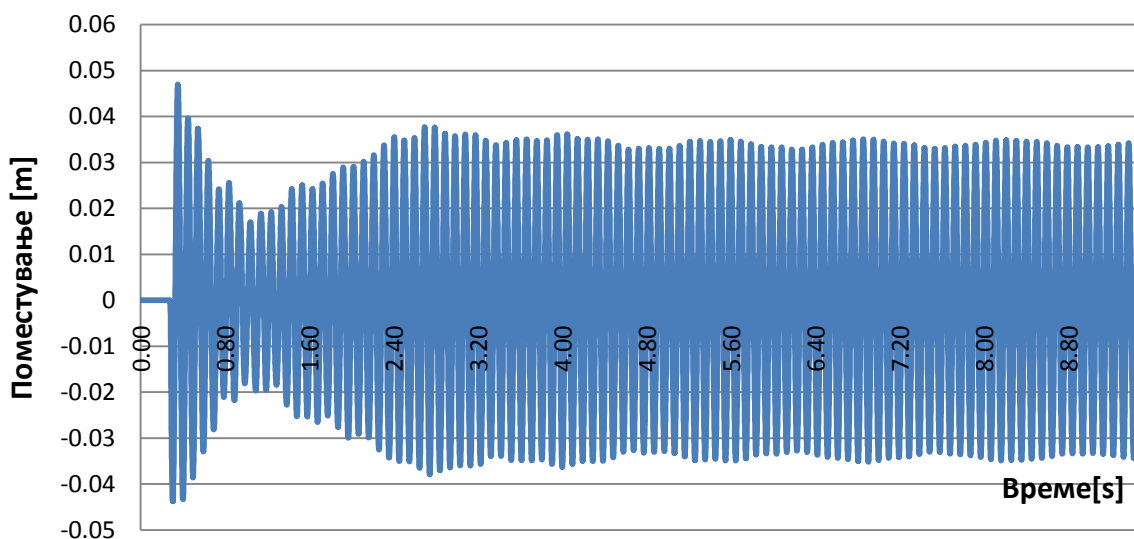


График 5.8 Вертикално поместување на точка од контактот темел-конструкција за бран со фреквенца блиска на втората сопствена фреквенца на контрукцијата

При определување на третата сопствена фреквенција на објектот, транзиентниот период е многу долг. За стабилизирањето на осцилациите потребно е да се извршат голем број на итерации со мал временски чекор. Тоа резултира во потреба од сметачки машини со брзи процесори и голема компјутерска меморија. Во недостаток на расположлива опрема не беше во можност да се пресмета третата сопствена фреквенција на објектот.

Кривата за нормализираното поместување добиена со аналитичкото решение 4.41 (график 5.6, црвена линија) има специфичен облик. За нулта фреквенција ($k_{ar0} = 0$) има вредност 1. Со порастот на фреквенцијата, нормализираното поместување постепено благо расте. По достигнувањето на максималната вредност нагло паѓа до нула. Од нулата, со зголемување на фреквенцијата, нормализираното поместување нагло расте до достигнување на максимум. Потоа следи благонамалување пред повторно нагло да паднат на нула. При понатамошно зголемување на фреквенциите овој циклус се повторува. Максималната ордината пред првата сопствена фреквенција е максималното поместување кое може да се јави кај објектот во целиот спектар на бранови со различни фреквенции. Сопствената фреквенција и максималното нормализирано поместување, се важни показатели за однесувањето на интерактивниот систем почва – конструкција при влезен хармониски P - бран.

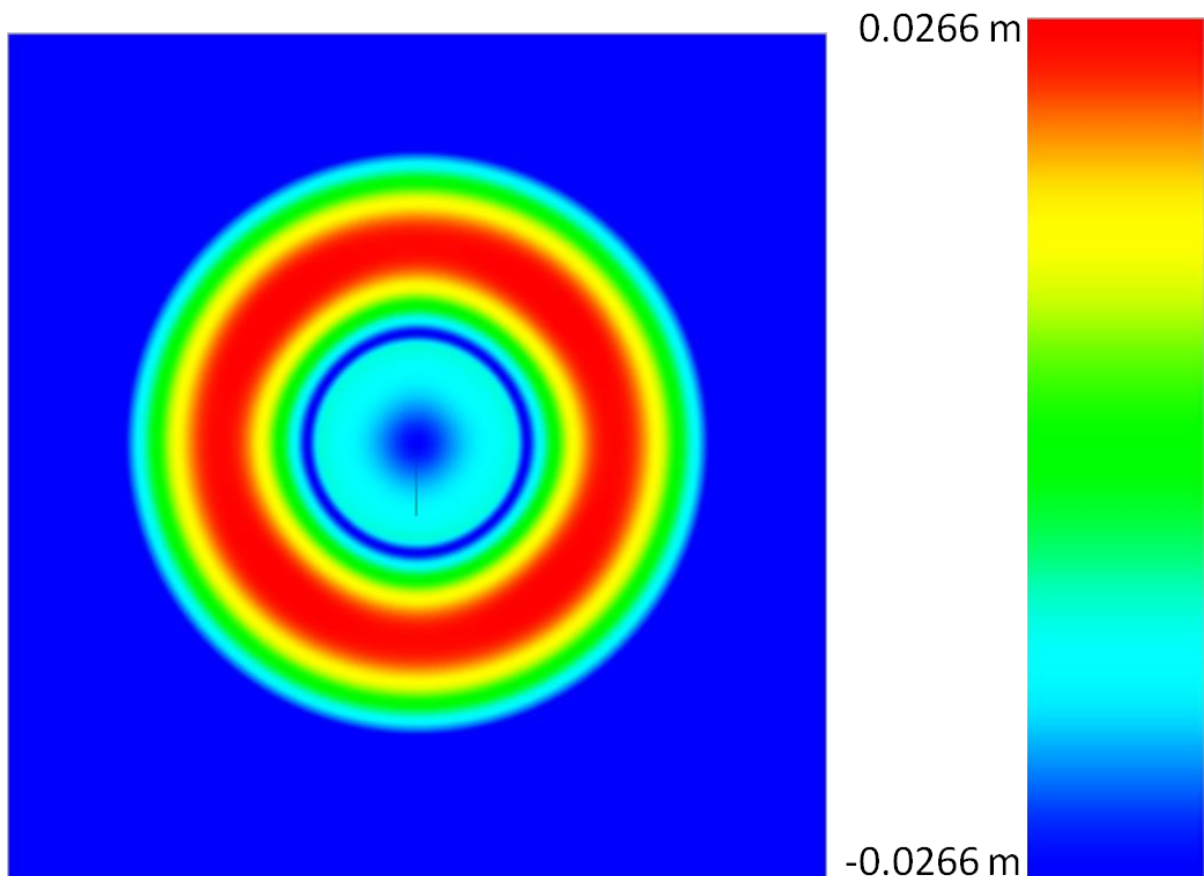
Пред и по секоја нула на нормализираното поместување постои по еден максимум. Од анализата на максималните вредности може да се изведат два заклучока важни за верификацијата на нумеричкиот модел. Првиот е дека максимумот пред првата нула е поголем од максимумот по нулата. Максималните ординати пресметани со нумеричкото решение (сината линија Графикот 5.6) соодветствуваат на резултатите од аналитичкото решение (црвената линија)..

Исто така се забележува дека со порастот на фреквенцијата на бранот максималната вредност на амплитудите опаѓа ($Luco[48]$). Кривата која ги поврзува точките од максимумите се нарекува енvelopа. Пресметката на ординатите на енvelopата помеѓу максималните точки е тешко да се направи заради сложеноста на изразот, па исцртувањето може да се направи со интерполација. И овој услов, кој произлегува од тенденцијата на опаѓањето на енvelopата, е исполнет, затоа што максималната ордината пред првата нула е ~ 1.18 , а пред втората нула е ~ 0.34 .

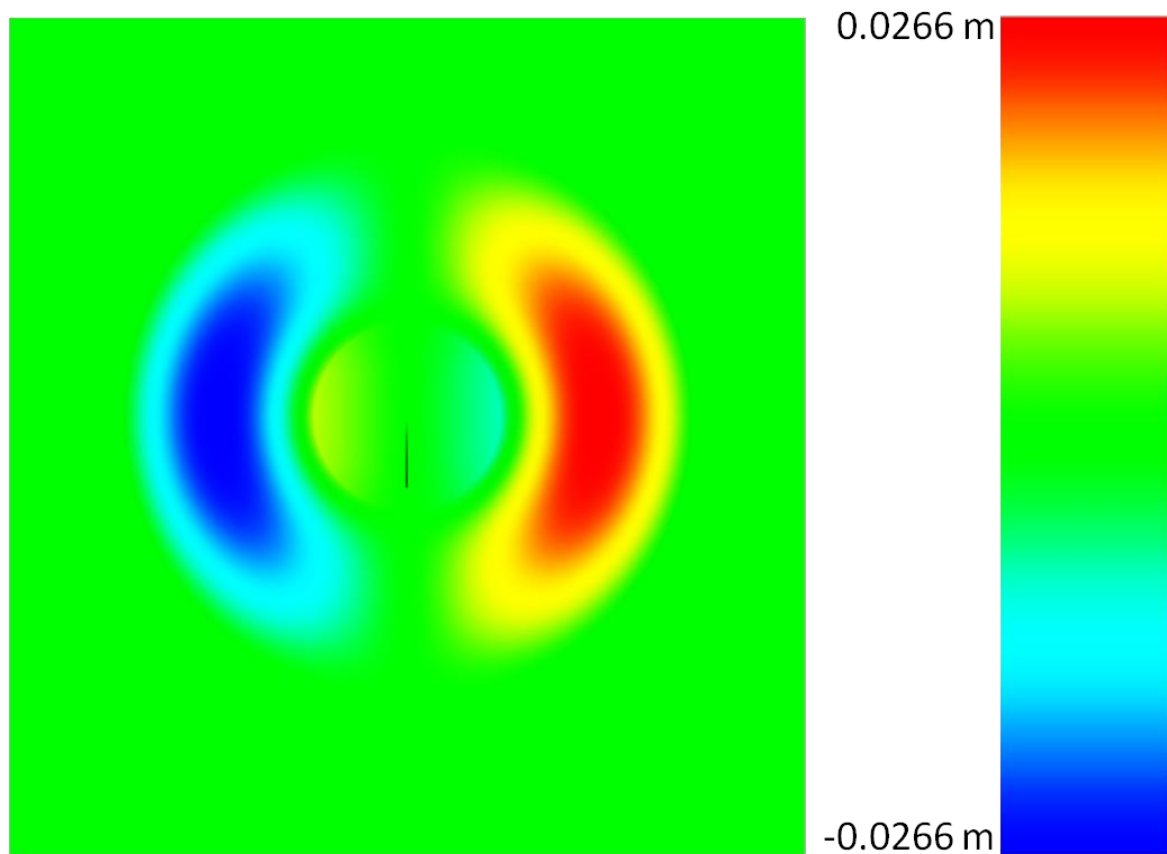
Веродостојноста на нумеричките резултати се проверува и со контролата на симетријата. Моделот е идеално симетричен во однос на вертикална оска. Оската на симетрија проаѓа по средините на почвениот исечок, темелот и објектот. Таа го дели квадратот кој го дефинира изворот на два идентични дела. Затоа бранот се простира симетрично. Од ова произлегува дека и одговорот на моделот треба да биде симетричен. Симетријата во однос на вертикалната оска подразбира дека хоризонталните поместувања пресметани во точки кои се наоѓаат на иста длабина и на

исто растојание лево и десно од оската на симетрија мора да бидат еднакви по вредност и со спротивни знаци, додека вертикалните поместувања треба да бидат исти по вредност и знак. Исто така, поради кружното ширење на бранот, пред истиот да се рефлектира од слободната површина, треба да постои симетрија на поместувањата во однос на хоризонтална оска, која проаѓа по средината на изворот. Симетријата во однос на хоризонталната оска значи дека во точките кои лежат на вертикала и се на еднакво растојание над и под оската треба да имаат хоризонтални поместувања еднакви по вредност и знак и вертикални поместувања еднакви по вредност и спротивни по знак.

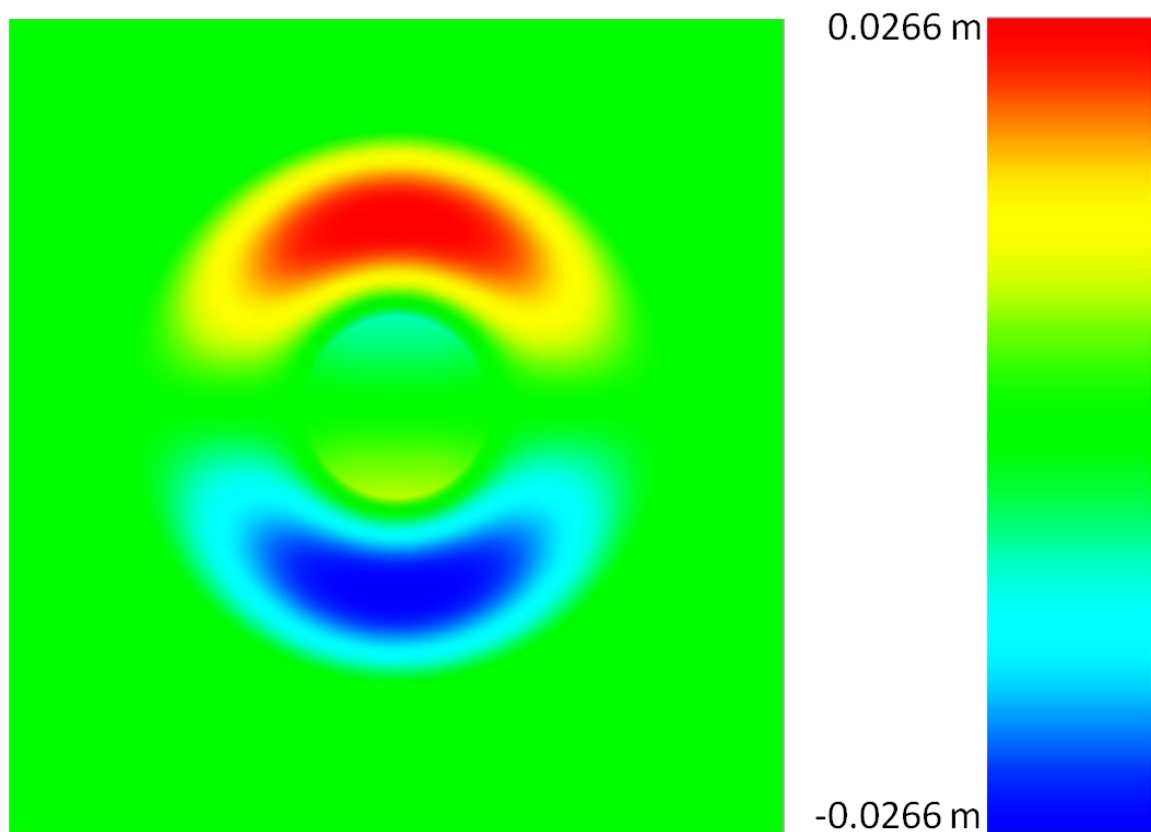
На *Слика 5.4* може да се види антисиметријата на хоризонталните поместувања во однос на вертикалната оска на симетрија и симетријата на во однос на хоризонталната оска. *Слика 5.5* ја прикажува антисиметријата на вертикалните поместувања во однос на вертикалната оска на симетрија и симетријата во однос на хоризонталната оска. Вкупните, радијални, поместувања се секогаш позитивни и симетрични во однос на двете оски (*Слика 5.6*). Сликите 5.4-5.6 се направени за модел 2 со димензии, периода на бранот 0.28s и на временски интервал од 0.416s.



Слика 5.4 Радијални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$



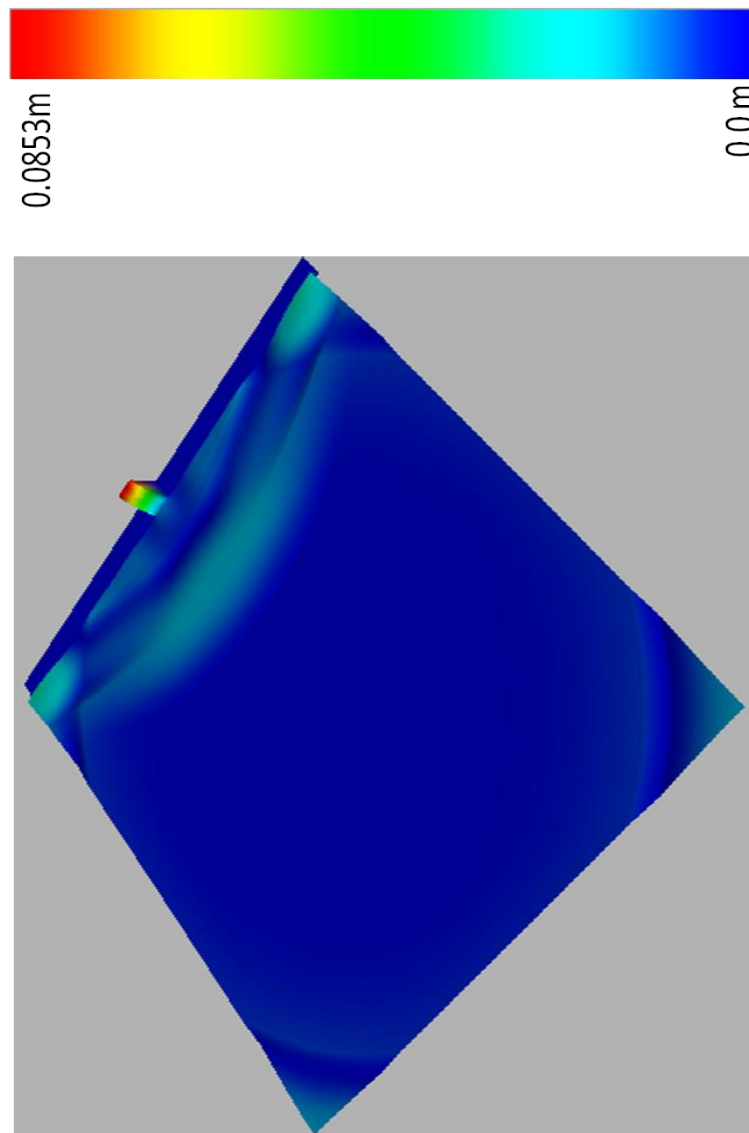
Слика 5.5 Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$



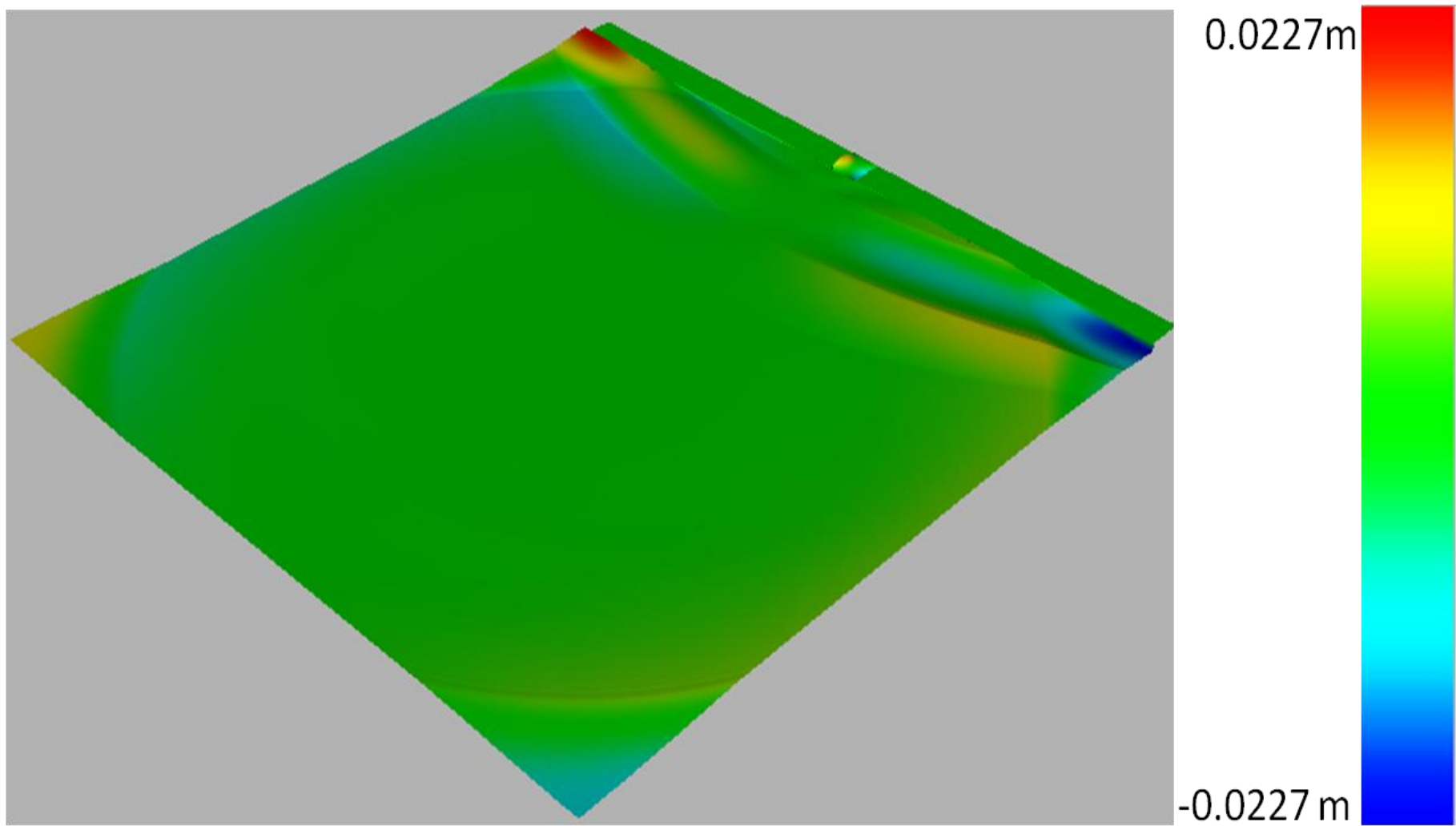
Слика 5.6 Вертикални поместувања во временски интервал $t = 0.416s$

Со рефлексивата на бранот од слободната површина и темелот се нарушува симетријата во однос на хоризонталната оска. Симетријата во однос на вертикалната оска останува.

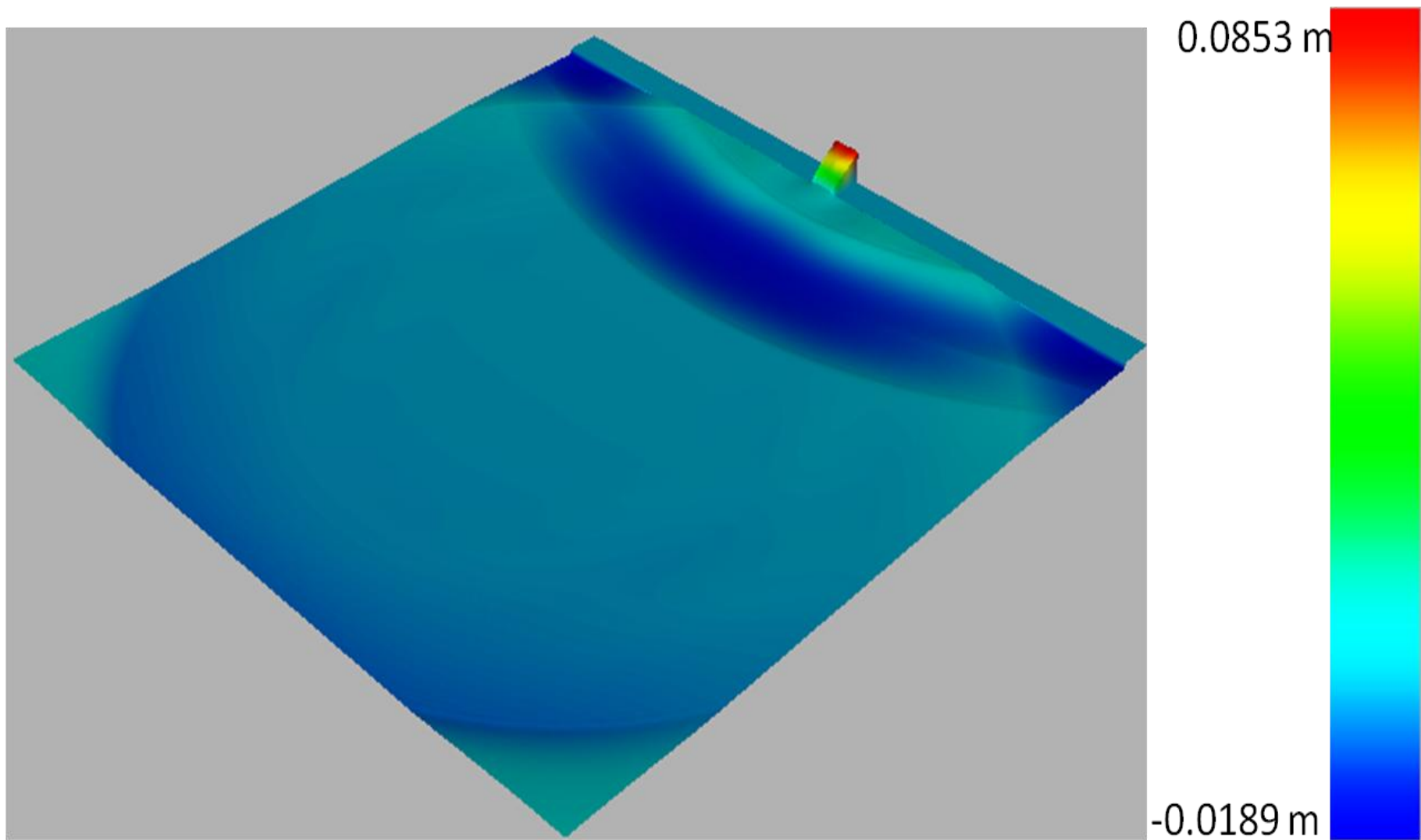
Сликите 5.7 и 5.9 покажуваат дека симетријата на вкупните поместувања во однос на вертикалната оска не се губи за целото време од симулацијата. Од графичкиот излез прикажан на Сликите 5.7 - 5.9 може да се види постоењето на симетријата на радијалните поместувања и антисиметријата на хоризонталните и вертикалните поместувања, предизвикани од рефлектираниот бран. Сликите 5.10-5.12 покажуваат дека моделот ја задржува нумеричката стабилност и откако бранот го напуштил моделот. Поместувањата кои се јавуваат откако бранот го напуштил моделот се резултат на несовершеноста на вештачките граници и рефлексивата што тие ја создаваат. Сликите 5.7 - 5.9 се однесуваат на временски интервали 0.936s, а сликите 5.10 - 5.12 за 2.0s.



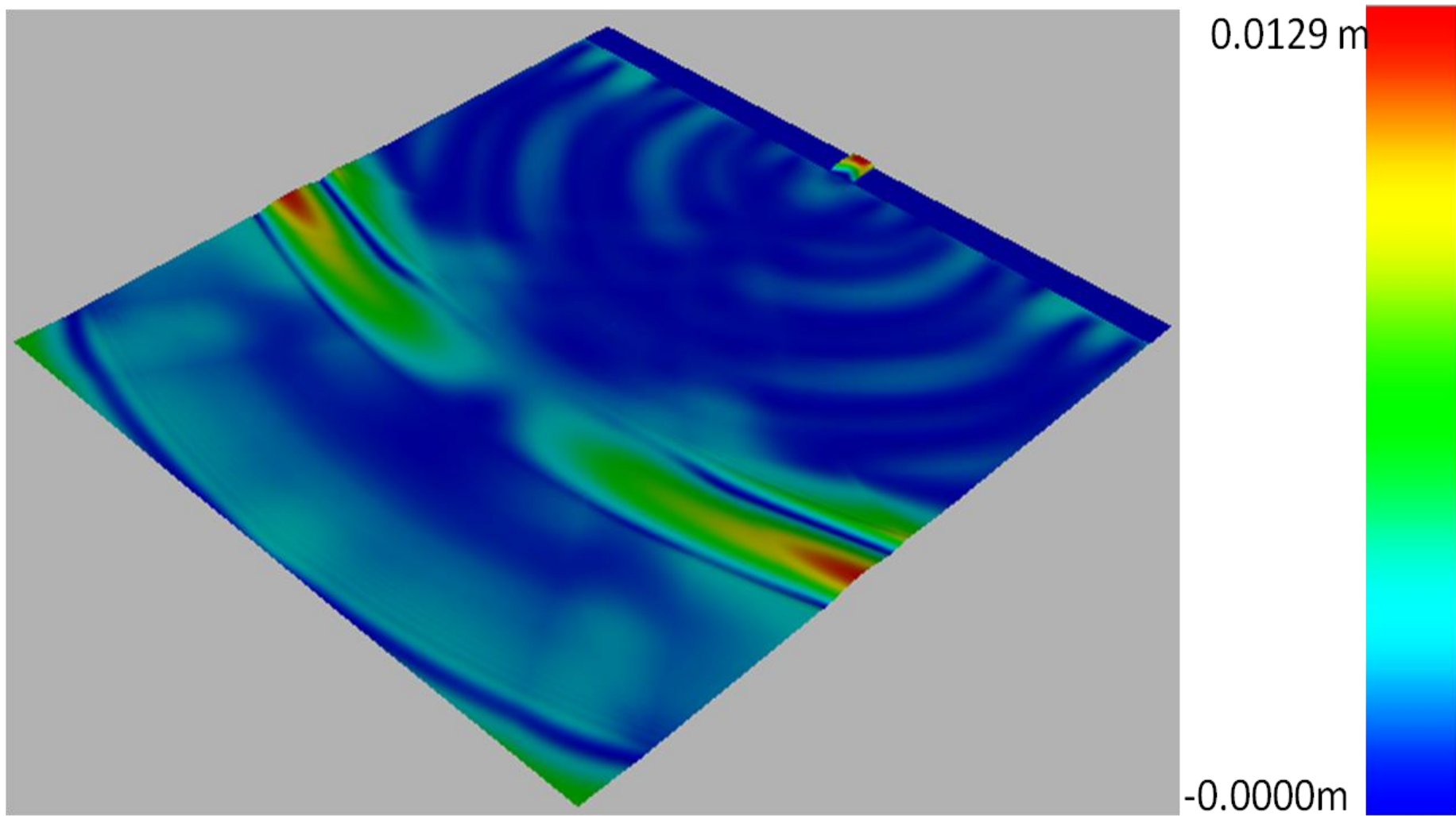
Слика 5.7 Радијални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$



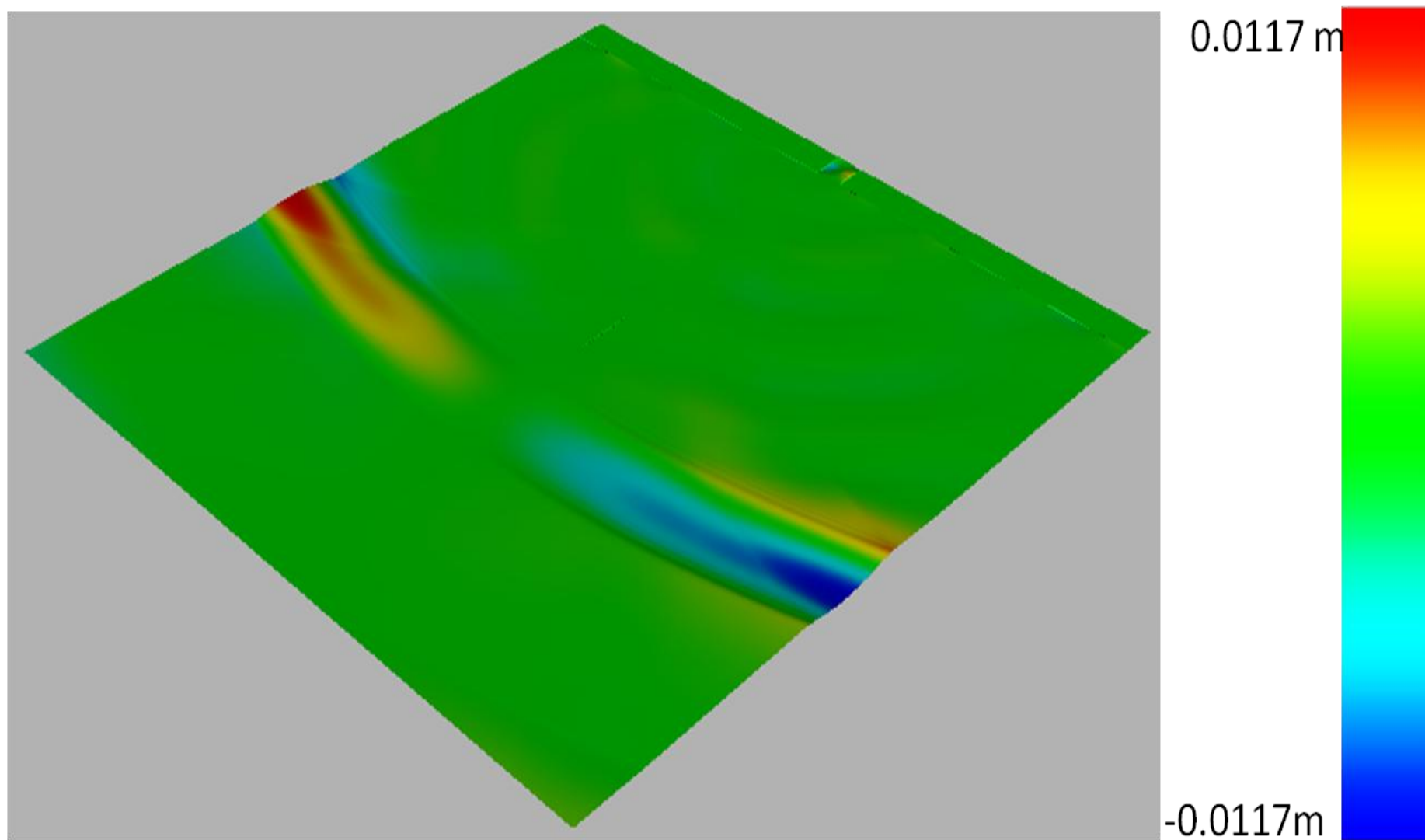
Слика 5.8 *Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$*



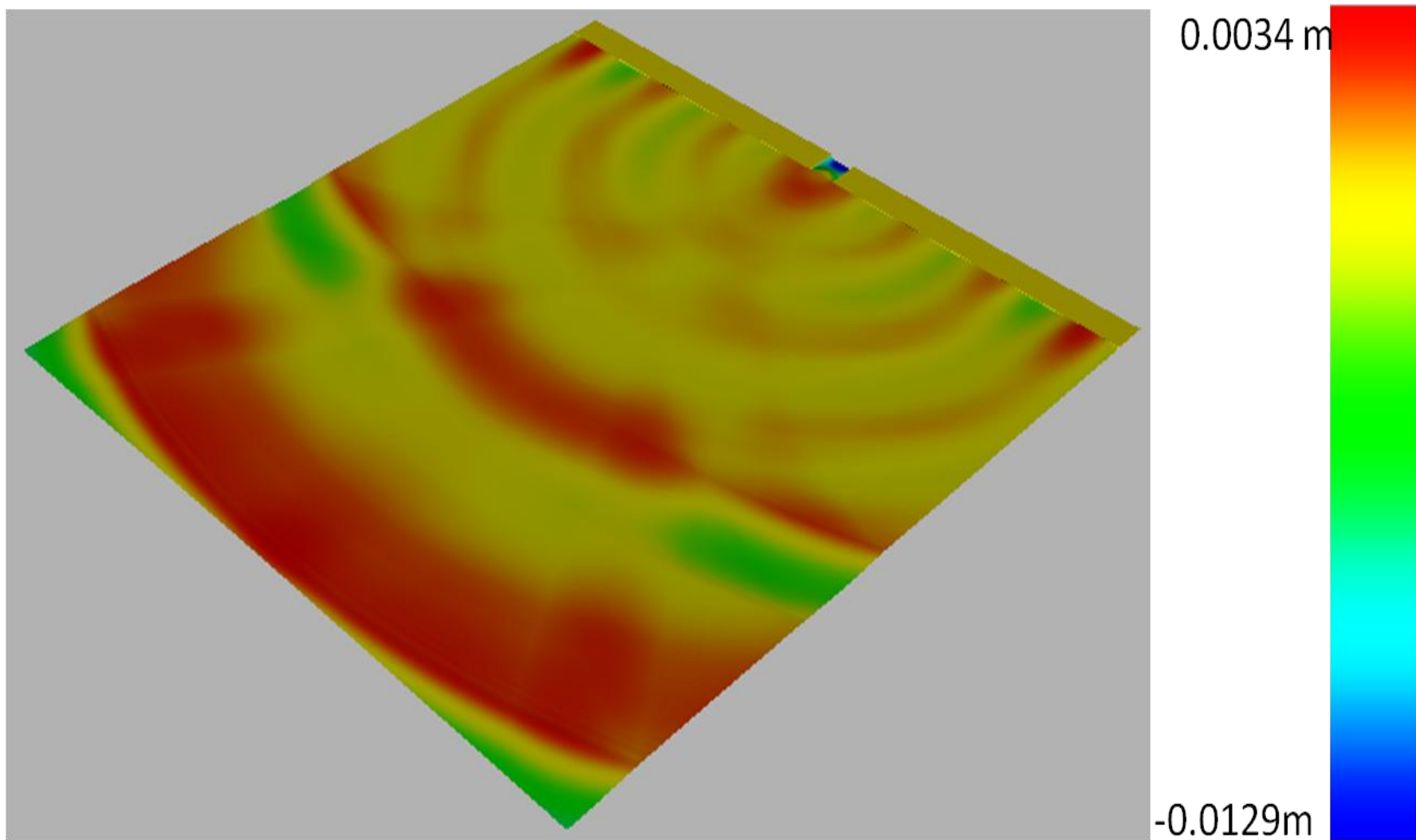
Слика 5.9 Вертикални поместувања во временски интервал $t = 0.936s$



Слика 5.10 Радијални поместувања во временски интервал $t = 2.0s$



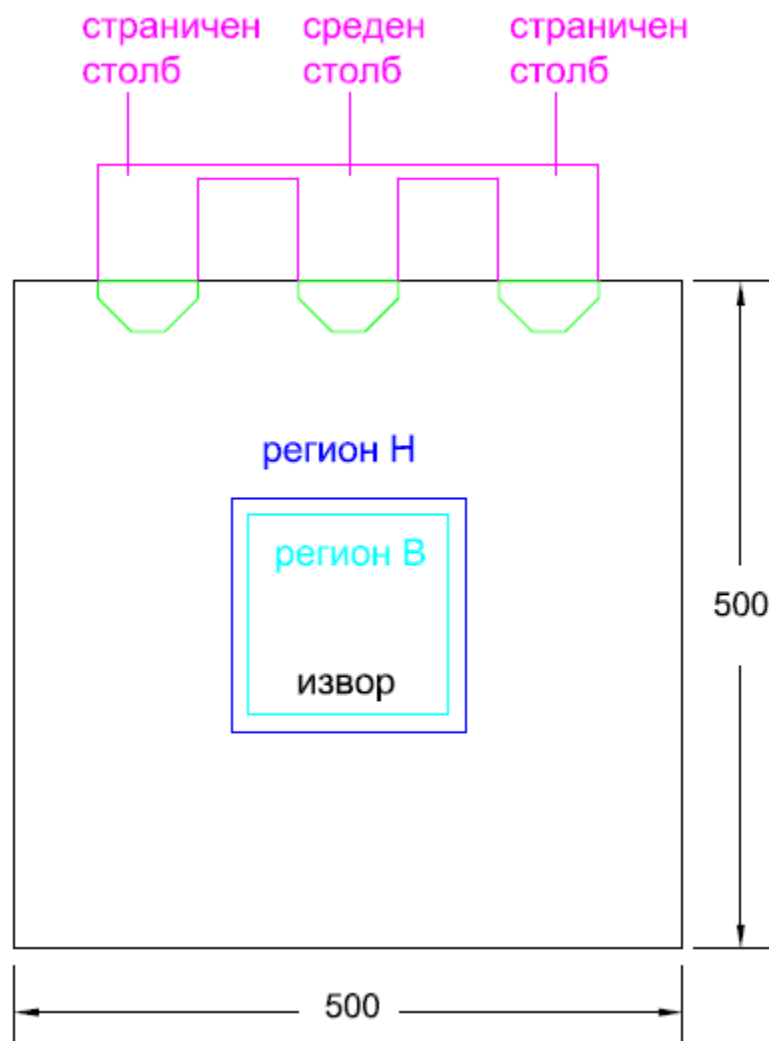
Слика 5.11 Хоризонтални поместувања во временски интервал $t = 2,0s$



Слика 5.12 Вертикални поместувања во временски интервал $t = 2,0s$

5.2. Диференцијални поместувања

Една од целите на истражувањата во докторската дисертација е изработката на нумерички модел, со кој ќе може да се направи анализа на диференцијалните поместувања предизвикани од ефектот на брановиот премин. Бидејќи оваа појава е карактеристична за долги конструкции, направен е нумерички модел за долга мостовска конструкција (Модел 3). Моделот се состои од три столба, поставени на осовинско растојание од 116м. Столбовите се со висина од 15м. Во горниот дел тие се поврзани со конструктивни елементивисоки три метри (Слика 5.13). Столбовите се фундирани на темели самци.



Слика 5.13 Модел со три столба за пресметка на диференцијалните поместувања

Растојанијата помеѓу столбовите одговара така што времето потребно на бранот да стигне до врвот на средниот столбе помало од времето потребно истиот да стигне до темелот на левиот и десниот столб (график 5.9). На графикот со сина линија е прикажано поместувањето на средниот столб во тек на време, додека со црвената линија се однесува на еден од страничните. И за двата столба поместувањата се

пресметани во средината од контактот темел - столб. Изворот на бранот се наоѓа на 58м под слободната површина. Влезната побуда е бесконечна синусоида со амплитуда 50см и периода $t_d = 0.338s$. Останатите параметри се дадени во *табела 5.2* и важат за сите три столба и нивните темели.

$A=0,5\text{ m}$	$\alpha_b=346,41\text{ m/s}$	$\alpha_s=433,01\text{ m/s}$	$\alpha_r=1732,05\text{ m/s}$
$r_0=8,0\text{ m}$	$\beta_b=200\text{ m/s}$	$\beta_s=250\text{ m/s}$	$\beta_r=1000\text{ m/s}$
$H=15,0\text{ m}$	$\rho_b=2000\text{ kg/m}^3$	$\rho_s=300\text{ kg/m}^3$	$\rho_r=2000\text{ kg/m}^3$

Табела 5.2 Влезни параметри за Модел3



График 5.9 Вертикални поместувања во централниот и страничниот столб

Бидејќи столбовите се со исти материјални карактеристики, значи дека времето потребно бранот да стигнеод контактот до врвот на столбот ќе биде еднакво за сите столбови.

Поради малото растојание од изворот до столбовите,изворната амплитудата на бранот нема да атенуира во голем процент.Со тоа ќе се интензивира ефектот на диференцијалните поместувања. Од *График 5.9* може да се забележи дека вертикалните поместувања во средината на горната страна на средниот столб се движат во рангот од -15 до 20см, додекакај страничниот столбпоместувањата се помеѓу -5 до +10см исто така во средишната точка на горната страна од левиот и десниот столб.

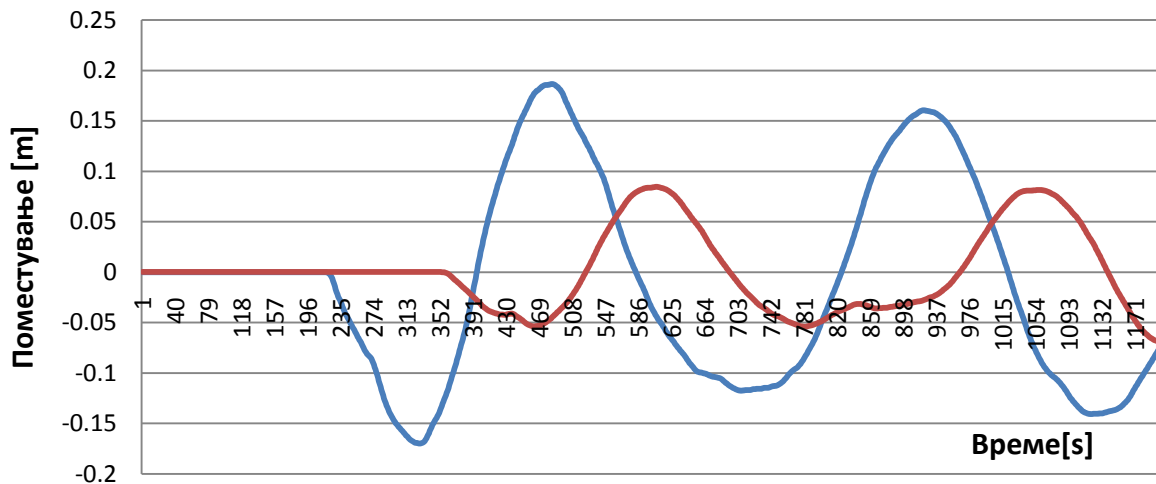


График 5.10 Диференцијални поместувања кај централниот и страничниот столб

За анализата на ефектот од брановиот премин разгледани се два карактеристични моменти. Во првиот, бранот побудува одреден дел од конструкцијата (средниот столб) и предизвикува поместувања во него, додека останатиот дел од конструкцијата (страничните столбови) е во мирување. Првиот пик на сината линија претставена на *график 5.10* го означува тој момент. Диференцијалното поместување пресметано во овој временски интервал изнесува ~ 17 см.

Вториот карактеристичен момент е кога два соседни столба се наоѓаат во антифаза. Тоа предизвикува поместувањата да се во различни насоки. Во овој момент диференцијално поместување е најголемо. Кога средниот столб (сината линија *График 5.10*) го достигнува најголемиот позитивен максимум, страничниот столб се поместува во обратна насока и го достигнува за него најголемото негативно поместување (црвена линија *График 5.10*). Ваквата поставеност на столбовите под ефектот на брановиот премин создава диференцијално поместување кое е збирот на двете поединечни поместувања по апсолутна вредност. За овој пример тоа изнесува ~ 23.5 см.



Поглавје 6

Нишање на

темелот

6.1 Нишање на темелот

Товарите со кои се товари конструкцијата според Методата на еквивалентно статичко товарење, се максимална внатрешна сила која се појавува при цикличен одговор на поместувања во почвата. Доколку конструкцијата, додека е во еластична зона на работа, не може да се спротистави на овие товари, започнува да се деформира пластично се до моментот кога поради цикличната природа на поместувањата, силите не се насочат во спротивен правец. Нишањето не се случува само на конструкцијата. Овој феномен може да се детектира и кај темелите самци. Кога темелот нема да може да се спротистави на моментот на превртување, истиот ќе се подигне и ќе се заротира се до цикличната промена на моментот во спротивна насока.

Ефектот на нишањето на конструкциите прв го документирал *Housner* [36]. Тој го покажал постоењето на интеракцијата на конструкцијата и почвата и нишањето на системот како еден од феномените кои произлегуваат од оваа интеракција. Резултатот на неговото истражување е периода на осцилации на нишање и загуба на енергија при тоа на блок поставен на крути темели. Иако неговиот заклучок е дека ефектот на интеракцијата на почвата и конструкцијата е занемарливо мал, покажал дека нишањето на системот може да биде механизам за дисипација на енергијата внесена во системот преку побудата.

Повикувајќи се на претпоставката на *Housner*, и покрај значењето на нишањето, многу автори го занемарувале постоењето на интерактивниот систем во своите истражувања. Затоа развојот на теоријата одела бавно и не се забележани поголем број трудови во следните 20 години. Позабележителни се заклучоците на *Preistly et al* [55] кои го надополниле трудот на *Housner* за нишање при сизмичка побуда. *Byrne* [13] го анализираше одговорот кога фундаирањето е со мек темел, додека *Yim* и *Chopra*[66] го испитувале подигнувањето на темелот на еластично почви. *Psycharis*[56] го испитувал ефектот на подигнување на темелот преку одговор на тело со еден степен на слобода и предложил некои параметарски правила за да се предвидат деформациите.

И покрај сите показатели за придобивките од вклучувањето на ефектот на нишање на конструкцијата, при димензионирање на истата, прописите наведуваат конструкцијата да се анализира како да е поставена на идеално крута основа. Овој пристап подразбира дека ќе се дозволи појава на пластични зглобови, т.е. оштетувањата, во конструкцијата наместо во фундаментите. Од практична гледна точка на одржување на конструкцијата, овој пристап е поповолен, бидејќи санацијата на пример на столб од мостовска конструкција е полесно, отколку санација на фундаментот на истиот. Од друга страна, овој пристап продуцира неекономични и предимензионирани конструкции. Преку аналитички и експериментални студиини високи столбови со релативно мали самци, истражувачите докажале дека со вклучувањето на подигањето на темелот отпорноста при динамички побуди не се намалува, а се намалува оштетувањето на столбот (*Espinoza* и *Mahin*[19], *Kawashima* и *Nagai*[43]). Други истражувања биле насочени кон испитување на однесувањето на

почвата под темел кој се ниша и нејзината способност да ја расее енергијата преку течењето на почвата (*Harden и Hutchinson*[33], *Negro et al.*[53]).

Една од целите на оваа докторска дисертација е да се развие верификуван нумерички модел со кој ќе се покаже постоењето на нишањето на конструкциите. Истиот понатаму ќе може да послужи за понатамошни анализи со кои ќе се дадат препораки кои би ги корегирале и надополниле важечките прописи за проектирање на конструкциите во сеизмички подрачја.

За да се потенцира интензитетот на нишањето на темелот направен е нумерички модел во кој изворот не лежи на вертикалната оска на симетрија. Од изворот генерирани се пулсеви со различни периоди (*График 6.1*). Периодата се одредува преку бездимензионалната фреквенца η која се пресметува со изразот 6.1

$$\eta = \frac{r_0}{\beta_s \cdot t_d} \quad (6.1)$$

каде

- r_0 е ширината на темелот во метри
- β_s е брзината на пропагација на тангенцијалниот бран низ почва
- t_d е периодата на пулсот

Со цел да се добие појасна слика за одговорот на конструкцијата за бранови кои приоѓаат со агол $\Theta > 0$ (*Слика 6.1*) направени се вкупно 60 симулации. 20 симулации се за агол $\Theta = 30$ и $0.1 \leq \eta \leq 2.5$ (*Модел 4*) и дополнителни 40 за $\Theta = 60$ и истиот оспег на бездимензионалната фреквенца $0.1 \leq \eta \leq 2.5$ (*Модел 5*). Во сите 60 симулации брзината на пропагација на тангенцијалниот бран во почвата е земено да биде 250m/s. Дополнително изворот е поставен на оддалеченост која би одговарала на некои човечки подземни активности (*Слика 6.1*). Релативното мало растојание од изворот до темелот не би ја пригушила амплитудата на бранот, а со тоа ќе се потенцира ефектот на нишање на темелот.

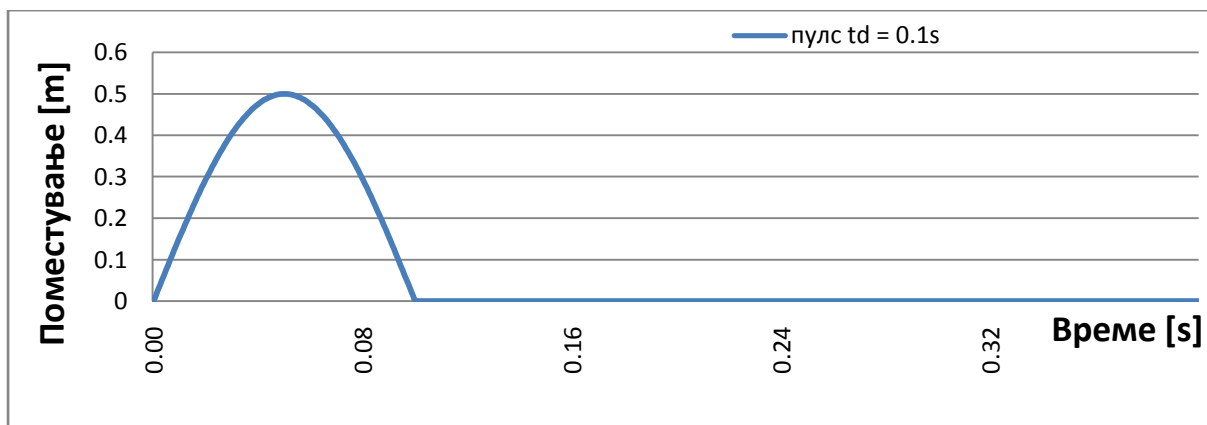
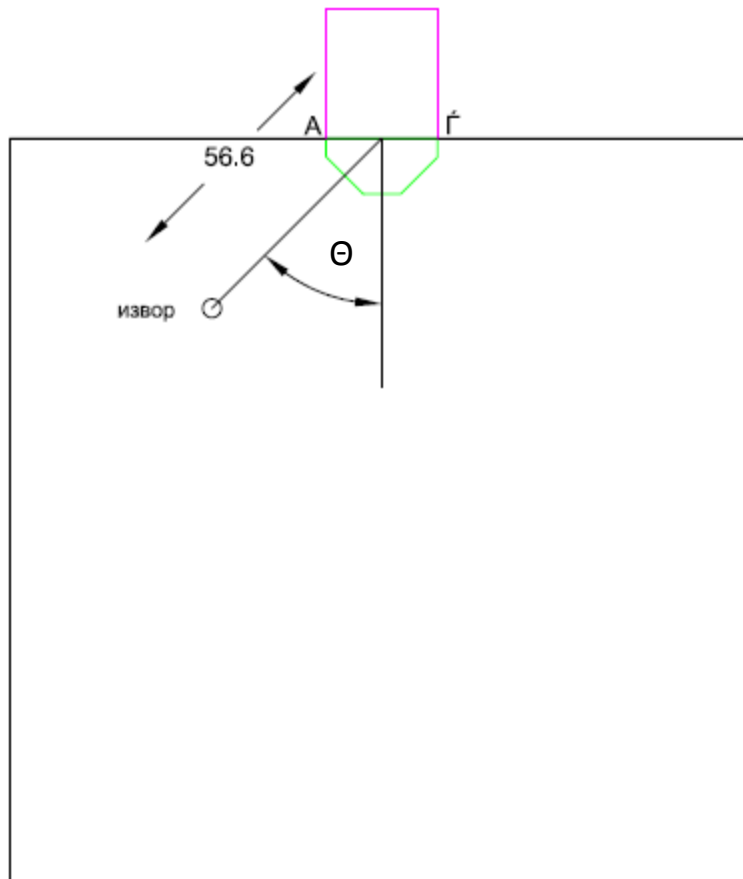


График 6.1 Влезен пулс со траење $t_d = 0.1s$



Слика 6.1 Позицијата на изворот и точките во кои се пресметува вертикалното поместување

На *график 5.12* се прикажани вертикалните поместувања пресметани во точка A (црвена крива) и точка Γ (сина крива) под влијание на краток пулс се траење од $0.033(3)s$, генериран во изворот кој се наоѓа на 56.6 метри од средината на контактот темел - конструкција (Слика 6.1). Поради различното растојание на двете точки до изворот, точката A прва започнува да се поместува, т.е. темелот се подигнува на левата страна, ротирајќи околу точката Γ која сеуште е во мирување затоа што бранот не пристигнал до неа. Кога точката A го достигнува максималното вертикално поместување, ротацијата на темелот е максимална.

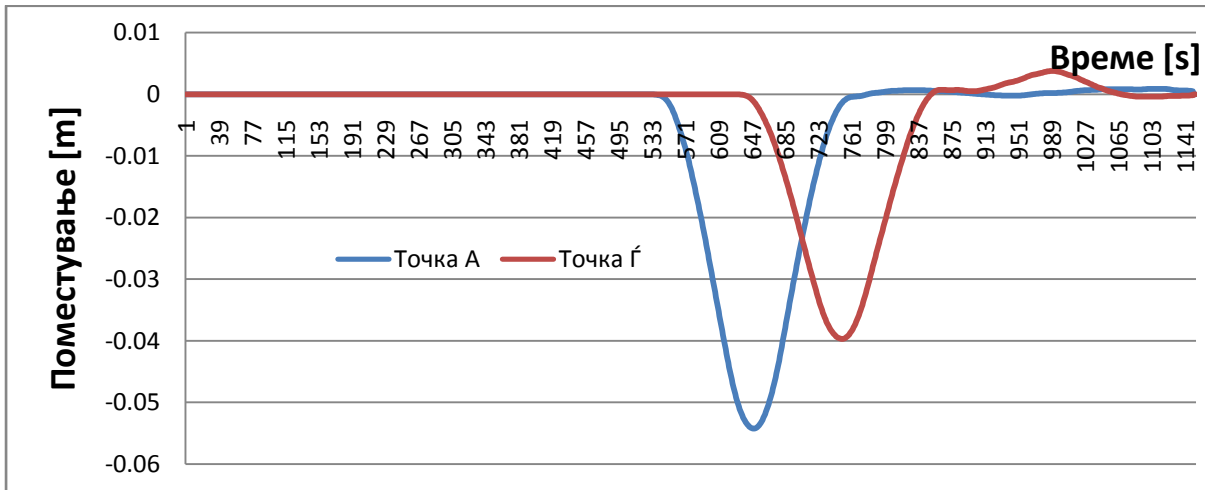


График 6.2 Вертикални поместувања на левиот и десниот горен агол од темелот

Потоа темелот во точката A започнува да се спушта, а во точката Γ да се подигнува. Сега ротацијата е во обратна насока. Со ова се покажува постоењето на феноменот нишање на темелот, а со тоа и нишањето на конструкцијата. Репер преку кој може да се изврши проценка за интензитетот на нишањето е аголот на ротација на темелот

$$\text{atan}(\varphi) = \frac{Z_{A\Gamma}}{X_{A\Gamma}} \quad (5.13)$$

каде $Z_{A\Gamma}$ е вертикалното растојание помеѓу точката A и точката Γ , додека $X_{A\Gamma}$ е хоризонталното растојание помеѓу овие две точки, т.е. ширината на темелот и конструкцијата.

За *Модел 4*, аголот на нишање на темелот пресметан за сите 20 симулации е прикажан на *График 6.3*. На графикот се гледа дека со зголемување на η кривата на нишање расте. Тоа е резултат од намалувањето на периодата на пулсот. Пократката периода значи дека во моментот кога во точката A се пресметани максималните поместувања, во точката Γ има се помали поместувања. Конечно нишањето достигнува максимум за $\eta \sim 1.35$, а тоа е моментот кога во точката A пулсот проаѓа со својот максимум, а во точката Γ има нулто поместување.

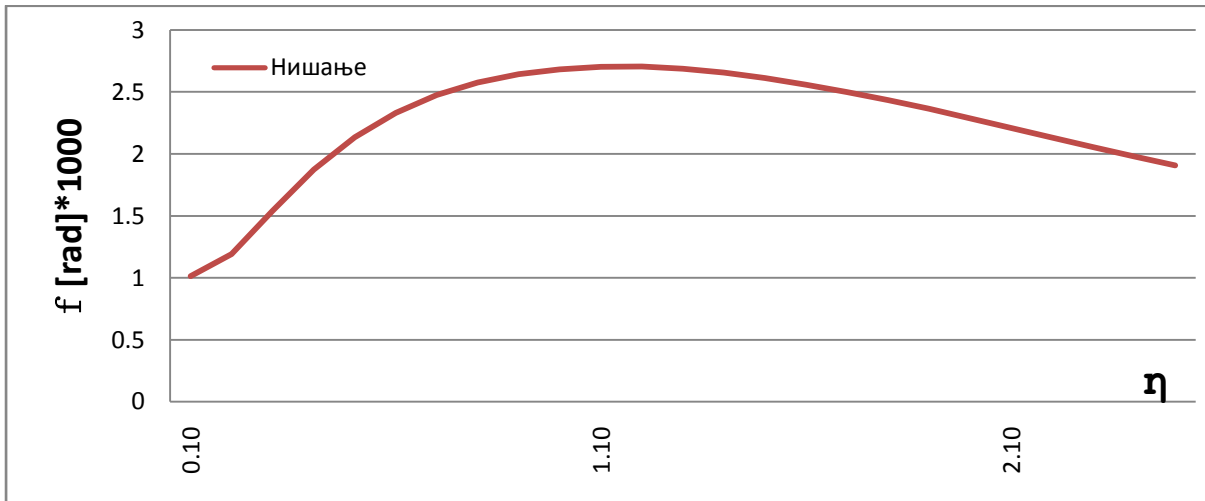


График 6.3 Агол на нишање на темелот за Модел 4

По достигнување на максимумот вредноста на нишањето опаѓа. Намалувањето на аголот на нишање на темелот произлегува од намалувањето на максималните поместувања во точката A во однос на максималните поместувања на точката $\dot{\Gamma}$, кое може да се види од График 5.14.

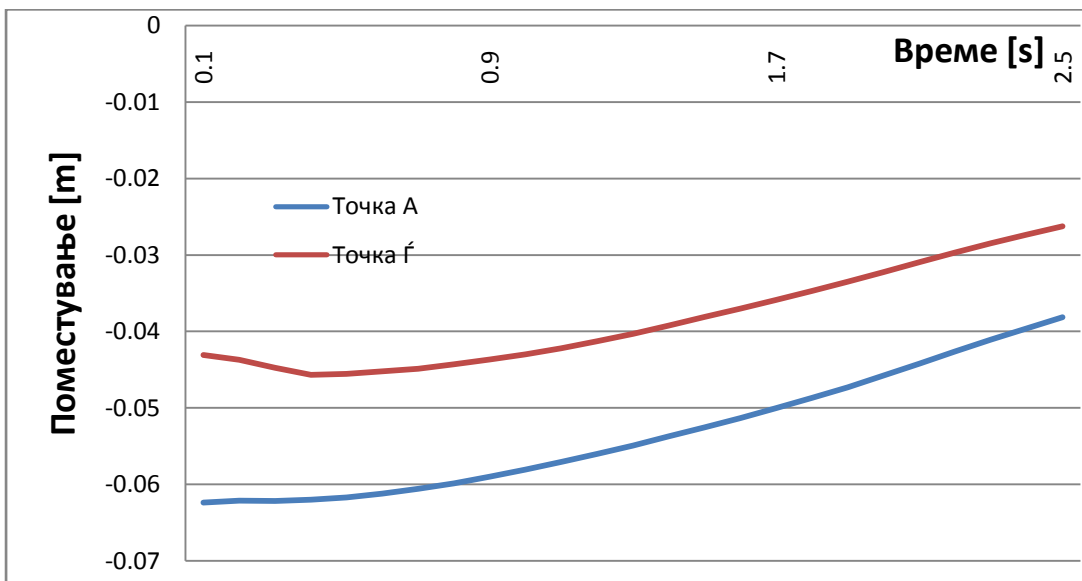


График 6.4 Максимални вертикални поместувања пресметани кај двата краја на темелот кај Модел 4

Спротивно на нишањето кај Модел 4, во Модел 5 максималните поместувањата кај точката A растат со зголемување на η , во однос на максималните поместувања на точката $\dot{\Gamma}$ (График 6.6). Затоа кривата нема максимум како кај Модел 4 (График 6.5).

Кај фреквенциите $\eta < 0.5$, кривата има слична тенденција на пораст како и кај Модел 4. Интервалот на промена на периодите во оваа зона е на $D\eta = 0.02$ и затоа на овој дел кривата нема големи осцилации како на останатиот интервал. Потоа во интервалот $0.5 < \eta < 1.9$ аголот на нишањето има незначителен прираст и останува

скоро непроменета. Од *График 6.6* се гледа дека во овој интервал на левата страна максималните поместувања имаат минимален прираст во однос на максималните поместувања на десната страна. Бидејќи разликата на максималните поместувања сразмерно е многу мала во однос на ширината на темелот, затоа и прирастот на кривата за овој интервал е незначителна. Со понатамошно зголемување на периодата, $\eta > 1.9$, аголот повторно се зголемува. Објаснувањето за овој пораст е во наглото зголемување на максималните поместувања на левата страна од темелот за разлика од десната страна каде тие се речиси константни (*График 6.6*).

Осцилациите на кривата на аголот на нишање кај *Модел 5* може да се резултат на повеќе фактори кои влијаат на точноста на резултатите. Еден од можните извори на грешка е формулацијата на слободната површина која не е испитана дали нејзината точност зависи од аголот на приоѓање на бранот и од растојанието до изворот. Блиската поставеност на изворот до слободната површина условува внатрешниот регион кој го симулира изворот да биде со помали димензии. Во *Поглавје 3* тоа беше илустрирано како извор на грешка во одредени периоди на брановите.

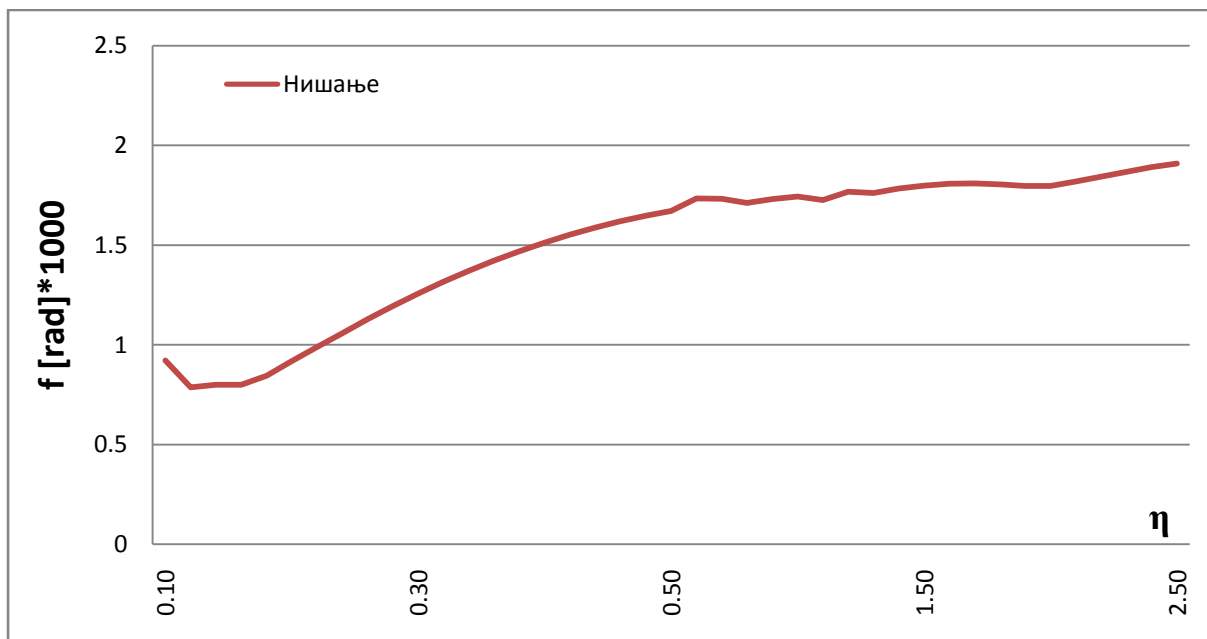


График 6.5 Агол на нишање на темелот за Модел 5

Споредбата на вредностите на кривите на *График 6.4* со *6.6* доведува до заклучок дека кога аголот е помал вертикалните поместувања се поголеми. Тоа произлегува од декомпозицијата на радијалното поместување на вертикално и хоризонтално поместување. Со намалување на аголот се зголемува амплитудата на вертикалното поместување. Поголеми вертикални поместувања значат и поголем агол на нишање. Тоа може да се заклучи и од споредбата на вредностите на кривите на *График 6.3* со *6.5*. Ова подразбира дека зголемувањето на аголот негативно влијае на нишањето на темелот.

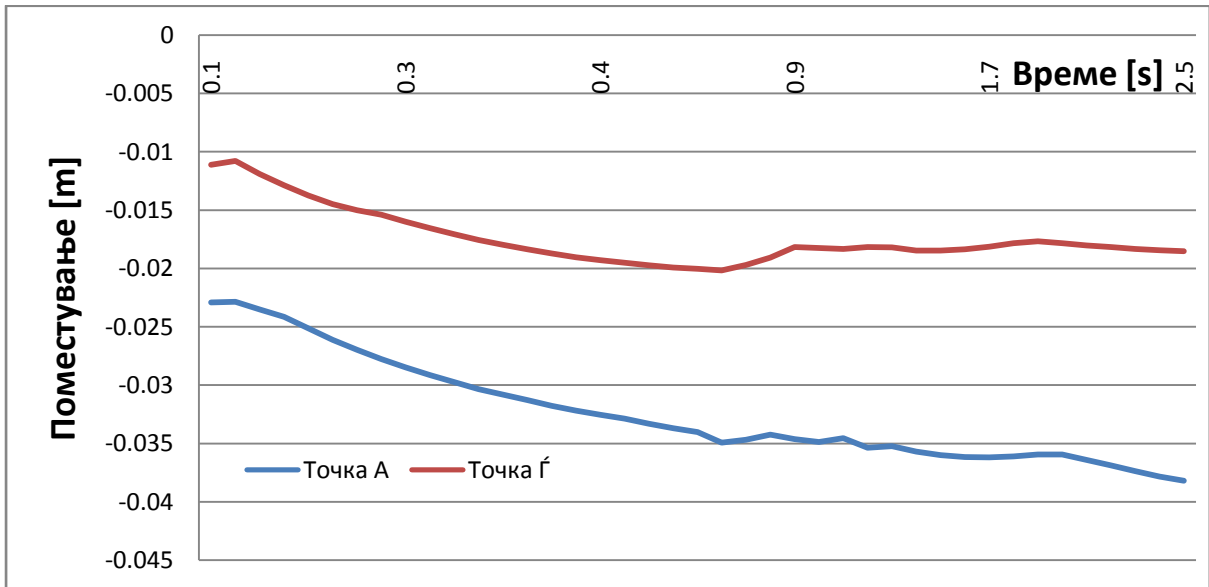


График 6.6 Максимални вертикални поместувања пресметани кај двата краја на темелот кај Модел 5



Поглавје 7

Заклучоци

Голем број на проблеми од областа на динамика на почви вклучуваат модели чија геометрија во некои правци е конечна, додека во останатите завршува во бесконечност. Се препорачува за да се дојде до пореално решението на вака поставените проблеми предност да се даде на методите базирани на ширење на брановите, во однос на решенијата кои ги апроксимираат моделите на просторни поединечни компоненти и го анализираат однесувањето на дистрибуираниот систем, т.н. lumped-parameter методологија (*Josifovski* [38]).

Симулирањето на брановата пропација носи одредени предизвици, пред се моделирањето на вештачките граници. Основно барање е во целост да ги исполнат *Somerfield*[59] условите, енергијата преку нив ќе се расее во бесконечноста, а при тоа решението да останат нумерички стабилни. Глобалните граници ги исполнуваат тие услови. Но од практична гледна точка, бидејќи се дефинирани како бесконечни редови или содржат изводи од повисок ред, нивната имплементација во практични цели наидува на потешкотии. Од тие причини, во литературата, повеќе се застапени истражувања во кои се користат локалните граници или совршено одговарачкиот слој, СОС.

Со истражувањата спроведени во докторската дисертација создаден е параметарски конципиран нумерички модел. Со комбинации на параметрите може да се испита нивното влијание на одговорот на интерактивниот систем почва - темел - конструкција под влијание на динамичка побуда (сеизмички бран, експлозија во почвата и сл.). Низ анализа на составните елементи на нумеричкиот модел се дава критички осврт на истите.

Во истражувањето е нагласена предноста од употребата на параксијалните граници на *Stacey* во однос на други облици на вештачки граници од нивната група. Во два од трите типа (P3 и P4) на граници на *Stacey* [61], кои се вградени и тестирани со нумеричкиот модел, може да се заклучи дека:

- границите се нумерички стабилни контури и при подолги симулации. Покажано на пример во кој е бројот на итерации ја надминува бројката од 20 000, со временски чекор од 0,0008s, севкупно време на симулацијата подолга од 16s;
- пресекот на вертикалните со хоризонталните вештачки граници се јавува како точка на слабост на нумеричките модели. Случајот на ротирана P3 граница е исклучок, докажан со резултатите од енергетската анализа и релативно мал процент на рефлектирана енергија;
- покрај меѓусобната добра поврзаност на границите P3 и P4, двете граници задоволувачки соодејствуваат и со двете дефиниции за слободната површина *Alterman*[8] и *Min*[51]. Тоа е исто така важен предуслов за добивање на доверливи резултати при анализите на модели на еластичен полупростор динамички побудени од движење на бранови.

Како сериозен недостаток на овие граници, посочено во докторската дисертација, е нивната зависност од растојанието на кое изворот е поставен во однос на границите. Доколку изворот е релативно блиску до границите, тогаш тие продуцираат значително поголем процент на рефлексija и стануваат неприменливи. За да се избегне овој недостаток моделите мора да бидат со поголема димензии, а тоа значи употреба на компјутери со поголема меморија за складирање на податоците и поголема потрошувачка на компјутерско време за извршување на симулацијата.

Резултатите добиени од тестирањето на нумеричкиот модел, покажуваат дека при лошо дефинирање на одредени параметри и централниот дел може да биде извор на грешка. Во докторската дисертација се укажува дека кога централниот дел се дели на два региона, димензиите на регионите зависат од периодата на бранот кој треба да го пропагираат. Непочитување на овој услов води до погрешни влезни податоци, а со тоа и погрешен одговор на системот почва - конструкција.

Нумеричкиот модел може да најде практична примена само ако претходно неговата точност се потврди со некоја теориска или практична метода за која се знае дека дава точни резултати. Во дисертацијата, предложениот нумерички модел е верификуван со аналитичко решение на проблемот на распростирање на бранови. За таа цел, во рамките на истражувањата спроведени во дисертацијата, развиен е аналитички модел базиран на теоријата на распростирање на брановите. Аналитичкиот модел дефиниран со истражувањата, може да послужи за проверка и на други нумерички модели формирани за анализа на однесувањето на интеракцијата почва - конструкција при динамичка побуда предизвикана од P - SV бранови.

Со примена на нумеричкиот модел може да се добијат информации за:

- нумеричкиот модел со практично задоволителна точност ги одредува сопствените фреквенции на објектите. Една од основните информации за оценка на динамичките карактеристики на системот почва - конструкција
- иако постојат разлики во геометријата и материјалните карактеристики на елементите дефинирани во аналитичкиот и нумеричкиот модел, нема големи отстапувања во добиените резултати за максималните поместувања на надземниот објект.
- со порастот на фреквенцата на влезните бранови, амплитудите на максималните поместувања опаѓаат и во двата модела

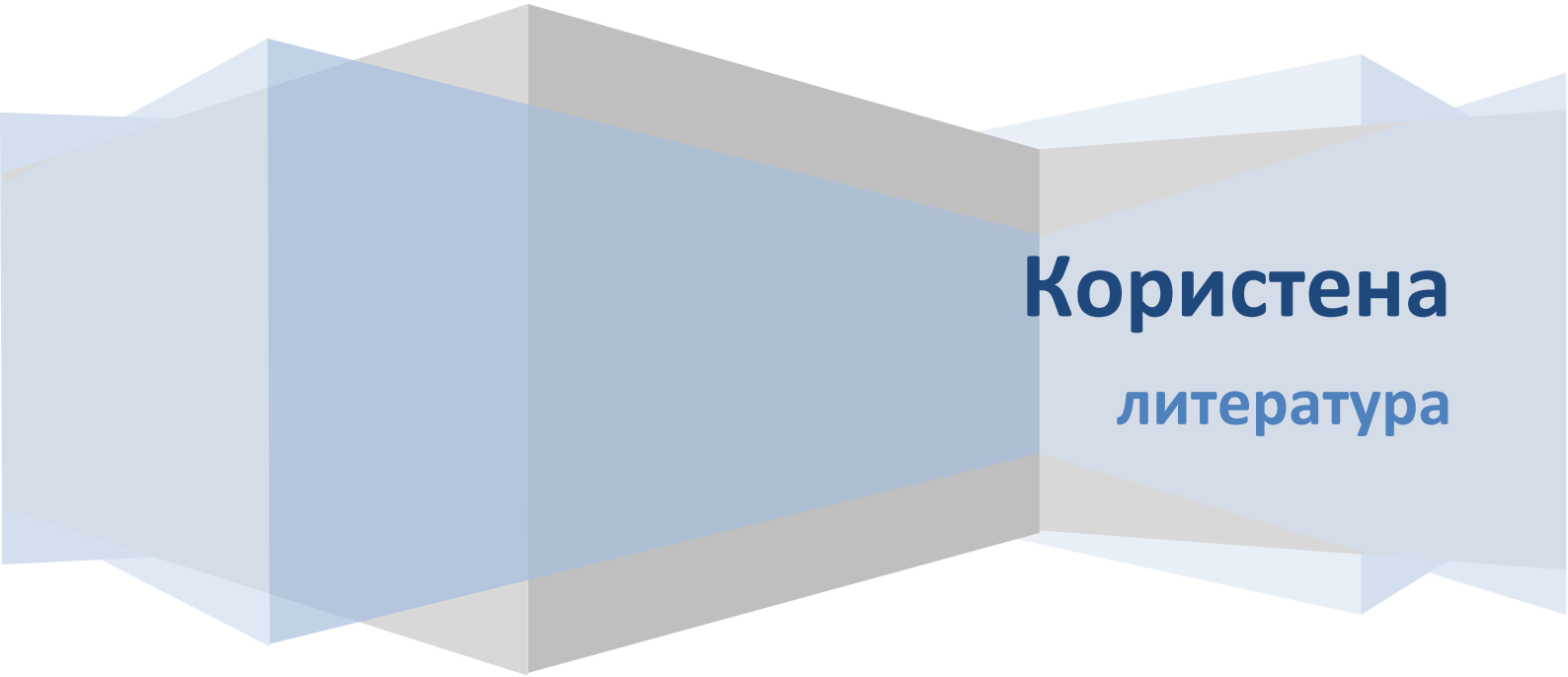
Верификацијата на нумеричкиот модел е потврда дека моделот е добра основа за понатамошни истражувања. Во докторската дисертација посебно внимание е посветено на влијанието на ефектот на бранов премин на однесувањето на долга конструкција. На

конкретен пример се прикажани ефектите од нишањето на темелот, кој се јавува како последица на диференцијалното поместување на пооделните конструктивни елементи. Воведувањето на овој ефект се јавува како потреба при димензионирањето на долги надземни конструкции.

Преку резултатите од серија симулации се потенцирани дел од ефектите и последиците врз темелот и конструкцијата кои прозлегуваат од нишањето на темелот. Со ова се покажува недостатокот на моменталните прописи кои се базирани на претпоставка дека конструкцијата е поставена на идеално крута основа.

Нумеричкиот модел и теориските сознанија стекнати со истражувањата во дисертација, создаваат широки можности за понатамошни истражувања на интеракцијата почва - конструкција неопходно и нејзино однесување на динамичка побуда предизвикана од движење на бранови. Понатамошните истражувања треба да бидат во насока на елиминирање или намалување на ограничувањата на предложениот нумерички модел.

- креирање нумерички модел во кој еластичниот полупростор нема да биде хомоген. Ќе се истражува одговорот на систем формиран од различни почвени слоеви, побуден со бранови со различни фреквенци
- Испитување на ефектите од нишање на темелот при нелинеарни материјални карактеристики на почвата. Со употреба на нелинеарни карактеристики на материјалите ќе може да се добие преглед на појавата на пластични зони во почвата. Исто така ќе се елиминира ефектот на затегнување кој се јавува на контактот почва – темел, а кој е последица на одлепувањето на темелот од почвата.
- Вклучување на SH брановите како влезна побуда
- Изработка на тродимензионален модел
- Зголемување на пресметковната моќ на алгоритмот со помош на паралелно процесирање. Со тоа би се скратило компјутерското време потребно за извршување на симулациите и поефикасно би се користеле сметачки машини поврзани во мрежа.
- Развој на нумерички модел во природни координати. По природа брановите се распростираат радијално. Со воведување на природните координати би се елиминирале ограничувањата добиени при моделирање на изворот на бранот, со квадратна форма. Истовремено моделот ќе може да се формира и со елементи со неправилна форма.



Користена
литература

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

- [1] Privremeni tehnički propisi za opterećenja zgrada (1948);
- [2] Privremeni tehnički propisi za građenje u seizmičkim područjima (1964);
- [3] Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima (1981);
- [4] Abramowitz M. and Stegun I.A. (1965), Handbook of mathematical functions, Dover, New York;
- [5] Achenbach J. D. (1973), Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam;
- [6] Aki K. and Richards P. (1980), Quantitative Seismology, theory and methods, (Publication): W.H. Freeman&Co.;
- [7] Alford R.M, Kelly K.R. and Boore D.M. (1974), Accuracy of finite-difference modeling of acoustic wave equation, Geophysics v.39, 834-842;
- [8] Alterman Z.S and Karal F.C. Jr (1968), Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods, BSSA vol. 58, 367-398;
- [9] Bayliss A. and Turkel E. (1980), Radiation boundary conditions for wave-like equations, Commun. Pure Appl. Math. vol.33 no. 6, 707-725;
- [10] Bergener J.P. (1994), A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, J. Comp. Phys. vol.114 no. 1, 185-200;
- [11] Boore D. M. (1970), Finite-difference solutions to the equations of elastic wave propagation, with applications to Love waves over dipping interfaces; PhD thesis M.I.T.;
- [12] Bowman F. (1965), Introduction to Bessel functions, Dover, New York;
- [13] Byrne P. M. (1980), Seismic response of buildings on soft foundation soils, 7th World conference on earthquake engineering, Vol. 6, 29-96;
- [14] Chew W. C. and Wagner R. L. (1992), A modified form of Liao's absorbing boundary condition, IEEE AP-S/URSI Int. Symp. Dig., Chicago IL, 536-539;
- [15] Clayton R. and Engquist B. (1977), Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, BSSA vol. 67, 1529-1540;

- [16] Clearbout J. F. and Johnson A. (1971), Extrapolation of time dependent wave forms along their path of propagation, *Geophysics J. of Royal Astron. Soc.*, 285-293;
- [17] Ditkowski A. and Gottlieb D., (2002), On the Engquist Majda absorbing boundary conditions for hyperbolic system, *Division of applied mathematics*, 1-23;
- [18] Espinoza A. and Mahin S. (2006), Rocking of bridge piers subjected to multi-directional earthquake loading, *Proceedings, 8th National Conference on Earthquake Engineering*, paper 965;
- [19] Euler L. (1743), *Miscellanea Berolinesia*, 7, 193-242;
- [20] Engquist B., Majda A. (1977), Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comp.* 31, 629-651;
- [21] Ewing W. M., Jardetzky W. S. and Press F. (1957), *Elastic waves in layered media*, McGraw Hill, New York;
- [22] Festa G. and Nielsen S. (2003), PML absorbing boundaries, *BSSA* vol.93, No 2, 891-903;
- [23] Gicev V. (2005), Investigation of soil-flexible foundation-structure interaction for incident plane SH waves, PhD dissertation;
- [24] Gicev V. and Trifunac M. (2007), Energy and power of nonlinear waves in seven story reinforced concrete building, *Soil Journal of Indian Society of Earthquake Technology*, vol.44 (1), 305-323;
- [25] Gicev V. and Trifunac M. (2011), A note on predetermined earthquake damage scenarios for structural health monitoring, *Structural control and health monitoring*, 19, 746-757;
- [26] Givoli D. and Keller j.B. (1990), Non-reflecting boundary conditions for elastic waves, *Wave Motion* 37 (3), 293-311;
- [27] Givoli D. (2001), High-order nonreflecting boundary conditions without high-order derivatives, *Journal of Computational Physics* 170, 849-870;
- [28] Grote M.J. and Keller J.B. (1996), Nonreflecting boundary conditions for time-dependent scattering, *Journal of Computational Physics* 127, 52-65;
- [29] Grote M.J. and Kirsch C (2004), Dirichlet - to - Neumann boundary conditions for multiple scattering problems, *Journal of Comput. Phys* 201 (2), 630-650;

- [30] Grote M.J. and Kirsch C (2007), Nonreflecting boundary condition for time - dependent multiple scattering, *Journal of Comput. Phys* 221 (1), 41-62;
- [31] Gustafsson B. (1988), Far - Field boundary conditions for time - dependent hyperbolic system, *SIAM Sci. Statist. Comput.* 9, 812-888;
- [32] Harden C. W. and Hutchinson (2009), Beam on nonlinear Winkler foundation modeling of shallow, rocking dominated footings, *Earthquake spectra* Vol. 25, 277-300;
- [33] Higdon R.L. (1986), Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation, *Math. Of Comp.* vol.47, no.176, 437-459;
- [34] Higdon R.L. (1991), Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation, *Math. Of Comp.* vol.49, no.179, 65-90;
- [35] Housner G.W. (1963), The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes, *BSSA* Vol.53, No.2, 404-417;
- [36] Johnson S. G. (2010), Notes on perfectly matched layers (PMLs);
- [37] Josifovski J. (2010), Investigation of soil-structure interaction using Perfectly matching layer as an absorbing boundary condition; PhD dissertation;
- [38] Kallivokas L.F and Lee S. (2004), Local absorbing boundaries of elliptical shape for scalar waves, *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.* 193, 4979-5015;
- [39] Kausel E. (1974), Forced vibration for circular foundations on layered media. M. L. T. Research report, Soils publications No. 336;
- [40] Kausel E., Rosset J. M. (1977), Semianalytic hyperelement for layered strata, *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 103, 569-588;
- [41] Kausel E., Rosset J. M. and Waas G (1975) Dynamic analysis of footings on layered media, *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 101, 679-693;
- [42] Kausel E. and Tassoulas J.L (1981), Transmittign boundaries: A close-form comparison, *BSSA Am.*, 71(1), 143 - 159;
- [43] Kawashima K. and Nagai T. (2006), Effectiveness of rocking seismic isolation of bridges, 4th International conference on earthquake engineering, paper 86;

- [44] Kelly R. K., Ward R. W. Treitel S. and Alford R. M. (1976), Synthetic seismograms: a finite - difference approach, *Geophysics* vol. 41 No. 1, 2-27;
- [45] Kouroussis G., Verlinden O. and Conti C. (2011), Finite-dynamic model for infinite media: Corrected solution of viscous boundary efficiency, *J. Eng. Mech.* no 137, 509-511;
- [46] Li Y. and Cendes Z.J. (1993), Modal expansion absorbing boundary conditions for two-dimensional electromagnetic scattering, *IEEE Trans.Magnetic.* 29, 1835-1838;
- [47] Liao Z.P., Wong H.L. (1984), A transmitting boundary for the numerical solution of elastic wave propagation, *Soil Dynamics and Earthquake Eng.* 3, 174-183;
- [48] Luco E. (1969), Dynamic interaction of shear wall with the soil, *J. of Eng. Mech. Div., Am. Soc. Civil. Engers.* 95, 333-346;
- [49] Lysmer J. and G. Waas (1972), Shear waves in plane infinite structures, *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 98, 85-105;
- [50] Lysmer J. and Kuhlemeyer R. L. (1969), Finite-dynamic model for infinite media, *J. Eng. Mech. Div.* 95(4), 859-877;
- [51] Min D.J., Shin C. and Kwon B.D. (200), Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators, *Geophysics* vol. 65 no.3, 884-895;
- [52] Mittra R. and Ramahi O., Kong J.A. and Morgan M. A., (1989), Absorbing boundary conditions for the direct solution of partial differential equations arising in electromagnetic scattering problems, *Differential Methods in Electromagnetic Scattering*, Ch. 4, pp. 133-173;
- [53] Negro P., Verzaletti G., Molina G., Pedretti S., Lo Presti D., and Pedroni S. (1998), Large scale geotechnical experiments of soil-foundation interaction, European commission, Special publication No. I.98.73;
- [54] Premov M. and Spacapan I. (2004), Solving exterior problems of wave propagation based on an iterative variation of local DtN operators, *Appl. Math. Model* 28 (3), 291-304;
- [55] Priestly M. J. N., Evison R. J. and Carr A. J., Seismic response of structures free to rock on their foundations, *Bulletin of the New Zealand National Society of Earthquake Engineering*, Vol.11 No. 3, 141-150;

- [56] Psycharis I. N. (1991), Effect of base uplift on dynamic response of SDOF structures, ASCE Journal of structural engineering, 117 (3), 733-754;
- [57] Sacks Z.S, Kingsland D.M., Lee R. and Lee J.F. (1995), A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition, IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol. 43, no. 12, 1460-1463;
- [58] Smith W.D.(1974), A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems, Journal of Computational Physics 15, 492-503;
- [59] Simmerfield A. (1912), Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jber Deutschen Math. Verein 21, 309-353;
- [60] Stacey R. (1991), An explicit unstable mode in the Clayton and Engquist transparent boundary prescription, BSSA vol.81 no.2, 694-698;
- [61] Stacey R. (1988), Improved transparent boundary formulations for the elastic-wave equation, BSSA vol.78 no.6, 2089-2097;
- [62] Todorovska M, Trifunac M. (2006), Impulse response analysis of the Van Nuys 7-story hotel during 11 earthquakes (1971-1994): one-dimensional wave propagation and inferences on global and local reduction of stiffness due to earthquake damage, Report CE06-01, Dept. of Civil Eng., University of Southern California, Los Angeles, California;
- [63] Tsynkov S.V. (1998), Numerical solution of problems on unbounded domains. A review, Applied Numerical Mathematics 27, 465 - 532;
- [64] Waas G. (1972), Linear two - dimensional analysis of soil dynamic problems in semi - infinite layered media, Phd dissertation;
- [65] Wagner R.L and Chew W.C. (1995), An analysis of Liao's Absorbing boundary condition; journal of Electromagnetic Waves and Applications vol.9 no. 7-8, 993-1009;
- [66] Yim S. C. S. and Chopra A. K. (1985), Simplified earthquake analysis of multistorey buildings with foundation uplift, ASCE Journal of structural engineering, 111(12), 2708-2731;