Универзитет ,,Св.Кирил и Методиј"-Скопје

Природно-математички факултет

Школа за докторски студии

Студиска програма: Математички науки и примена

Докторска дисертација

НОВИ ПРИЛОЗИ ВО НЕУТРИКС СМЕТАЊЕТО

м-р Лимонка Коцева Лазарова

Скопје, декември 2016

МЕНТОР:

Проф. д-р Билјана Јолевска - Тунеска, редовен професор,
Факултет за електротехника и информациски технологии, Скопје

РЕЦЕНЗЕНТСКА КОМИСИЈА:

Д-р Никита Шекутковски, редовен професор,
Природно-математички факултет, УКИМ, Скопје

Д-р Билјана Јолевска - Тунеска, редовен професор,
Факултет за електротехника и информациски технологии, УКИМ, Скопје

Д-р Арпад Такачи, редовен професор,
Природно-математички факултет, Универзитет во Нови Сад

Д-р Катерина Хаџи - Велкова Санева, вонреден професор,
Факултет за електротехника и информациски технологии, УКИМ, Скопје

Д-р Весна Манова - Ераковиќ, редовен професор,
Природно-математички факултет, УКИМ, Скопје

Содржина

АПСТРАКТ

Во оваа докторска дисертација предмет на истражување се оние парови на дистрибуции за кои не може да се пресмета композиција и конволуциски производ во обична смисла. Основната цел на докторската дисертација е со примена на основните дефиниции во неутрикс сметањето, да се збогати множеството на парови дистрибуции за кои можат да се пресметаат овие видови на производи.

Најпрво се дадени основните дефиниции, својства и операции со дистрибуции од теоријата на дистрибуции, а потоа е направена детална разработка на основните поими, дефиниции и теореми во неутрикс сметањето, кои се користат при пресметувањето на композициите и конволуциските производи во неутрикс смисла.

Направено е обопштување на резултатите на Fisher и Kilicman во [2, 3], со тоа што се пресметани конволуциски производи во обична и неутрикс смисла на обопштениот Френелов синусен интеграл и обопштениот Френелов косинусен интеграл со дистрибуцијата $x^r, r = 0, 1, 2, \ldots$.

Пресметана е композицијата на дистрибуциите x^{-m} и x_+^μ за $m = 1, 2, \ldots,\ \mu > 0$ и $m\mu \in \mathcal{Z}^+$, со цел да се направи подобрување на резултатите добиени во [15, 30, 40].
Пресметана е композицијата на дистрибуциите x_+^μ, $|x|^\mu$, x^{-s} и $x^{-s}\ln|x|$, за $\mu > 0,\ s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s \in \mathcal{Z}^+$, со цел да се прошират

добиените резултати во [14, 20]. Исто така, композицијата на $x^{-s}\ln|x|$ и x_+^r е дефинирана за $r, s \in \mathcal{Z}^+$. Дефинирана е композицијата $(x_+^\mu)_-^{-s}$ за $\mu > 0$, $s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s \in \mathcal{Z}^+$, како и композицијата $(|x|^\mu)_-^{-s}$ за $\mu > 0$, $s = 1, 2, \ldots$ кога μs непарен и кога μs е парен број.

ABSTRACT

In this doctoral dissertation a research subject are those pairs of distributions for which the composition and the convolution product can not be calculated in normal sense. The main objective of the doctoral dissertation is the application of the basic definitions in the neutrix calculus, in order to calculate composition and convolution product of distributions which not exist in usual sense. On this way the set of pairs of distributions for which these types of products can be calculated, is extended.

Firstly, the basic definitions, properties and operations of distributions are given. Then, the basic notations and concepts, definitions and theorems in the neutrix calculus are analyzed in details, because of their application for calculation of neutrix composition and neutrix convolution product.

Is obtained a generalization of the results of Fisher and Kilicman in [2, 3]. The convolution products in usual and neutrix sense of generalized Fresnel sine and generalized Fresnel cosine integral with the distribution $x^r, r = 0, 1, 2, \dots$ are calculated.

The composition of distributions x^{-m} and x_+^μ for $m = 1, 2, \dots, \mu > 0$ and $m\mu \in \mathcal{Z}^+$ is calculated, in order to make improvement of the obtained results in [15, 30, 40].

The composition of the distributions x_+^μ, $|x|^\mu$, x^{-s} and $x^{-s}\ln|x|$, for $\mu > 0$, $s = 1, 2, \dots$ and $\mu s \in \mathcal{Z}^+$ is defined, in order to extend the obtained results in [14, 20]. Also, the composition of distributions $x^{-s}\ln|x|$ and x_+^r is defined for $r, s \in \mathcal{Z}^+$. The composition $(x_+^\mu)_-^{-s}$ for $\mu > 0$, $s = 1, 2, \dots$ and $\mu s \in \mathcal{Z}^+$, and the composition $(|x|^\mu)_-^{-s}$ for $\mu > 0$, $s = 1, 2, \dots$ when μs is odd and when μs is even number are calculated.

Глава 1

ДИСТРИБУЦИИ: ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Физичарите долго време користеле т.н. сингуларни функции и покрај тоа што тие не можеле да бидат правилно и целосно дефинирани во рамките на класичната теорија на функции. Наједноставната од тие сингуларни функции била делта функцијата $\delta(x-x_0)$. Според дефиницијата која била дадена и користена од страна на физичарите, "делта функција е еднаква на нула секаде, освен во x_0, каде што е еднаква на бесконечност и нејзиниот интеграл е еднаков на 1", т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)dx = 1.$$

Но според дефинициите за функција и несвојствен интеграл кои се користат во класичната теорија на функции, овие услови се противречни. Во решавањето на одредени проблеми во математичката физика, делта функцијата (и другите сингуларни функции) се појавуваат во меѓуфазите. Ако сингуларната функција се јавува во крајниот резултат, таа е само интегранд и притоа е помножена со друга доволно "добра" функција. На овој начин, неопходноста од објаснување на сингуларните функции била избегната и било доволно да се даде значење на интегралот од производот на сингуларната функција и "добрата" функција. На пример, наместо да се каже што всушност претставува делта функцијата, било доволно да се заклучи дека за доволно "добра" функција $\varphi(x)$ важи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x-x_0\right)\varphi\left(x\right)dx = \varphi\left(x_0\right).$$

Со други зборови, за секоја сингуларна функција постои функционал, којшто на секоја "доволно добра" функција придружува број. Така за делта функцијата, за секоја "доволно добра" функција $\varphi(x)$, бројот е $\varphi(x_0)$. На овој начин концептот на сингуларни функции може да биде заменет со нова проширена дефиниција, која што ќе ги опфаќа "доволно добрите" функции. Поради тоа неопходно е да се даде дефиниција на т.н. "добра функција", за која што може да се дефинира функционал, види [39].

Неопходноста за проширување на класичната теорија на функции се појавила уште во средината на дваесеттиот век, кога барањата и очекувањата на многумина математичари и физичари не можеле да бидат исполнети во рамките на класичната теорија на функции, која што била премногу тесна. Прв математичар кој се соочил со ваков проблем бил S.L. Sobolev во 1936 година, кога ја проучувал единственоста на решенијата на Кошиевиот проблем за линеарни хиперболични равенки. Инспирирани од најразлични проблеми во класичната анализа и во областа на диференцијалните равенки, математичарите сакале да ја прошират можноста за диференцирање на функции, но и да дадат смисла на одредени дивергентни интеграли.

Во 1950-1951 година, францускиот математичар Laurent Schwartz ја објавува својата монографија "Theories des Distributions", види [44], во која што биле систематизирани обопштените функции, се оправдале формалните пресметки што се јавувале во инженерската литература и било дадено широко поле за понатамошно истражување во многу области од математиката, посебно во делот на парцијалните диференцијални равенки. Слична ваква разработка на обопштените функции била направена од Gelfand и неговиот соработник Shilov во [39]. Обопштените функции се основа на парцијалните диференцијални равенки кои посебно биле проучувани и имале доминантно место во теоријата на квантните полиња, аеродинамиката и аероакустиката, [33]. Појавата на оваа нова теорија на дистрибуции во математиката, понатаму била користена во многу полиња од науката и инженерството.

Овој концепт на обопштени функции (или дистрибуции како што ќе ги нарекуваме) којшто бил развиен од Schwartz обезбедува подобар механизам за анализирање на физичките феномени отколку функциите во класична смисла, бидејќи различни ентитети како δ (Dirac-делта) функцијата кои природно се јавуваат во повеќе математички науки можат да бидат опишани со дистрибуции, но не и со функции. Исто така секоја физичка величина која што може да биде претставена со функција, истовремено може да биде опишана и со дистрибуција.

1.1 Просторот $\mathcal{D}$ од тест функции

Прво ќе го дефинираме множеството од оние функции кои претходно беа споменати како "доволно добри" функции и за кои што ќе бидат дефинирани функционалите.

Во [4] и [39] се дадени следните дефиниции:

Дефиниција 1.1.1. Нека f е непрекината функција, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Затварачот на множеството $\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}$ се означува со *suppf* и се нарекува *носач на функцијата* f.

Дефиниција 1.1.2. Нека $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ е бесконечно дифренцијабилна функција со компактен носач. Тогаш за функцијата φ велиме дека е *тест функција*.

Множеството од сите тест функции, со вообичаено дефинираните операции на собирање и множење со скалар е векторски простор и се означува со $\mathcal{D}$.

Пример 1.1.1. [4], Тест функција во $\mathcal{D}$ е

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & , |t| \geq 1 \\ \exp \frac{1}{1-t^2}, & |t| < 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Оваа функција е бесконечно диференцијабилна и вредноста на секој од изводите во точката $t = \pm 1$ е 0. Уште повеќе оваа функција има непрекинати изводи од произволен ред по t и сите тие се еднакви на 0 за $|t| \geq 1$.

Секоја реална функција $f(t)$ која е непрекината за сите вредности на t и има вредност 0 надвор од конечен интервал, може да биде апроксимирана со тест функции, т.е. за секое $\epsilon > 0$, ќе постои тест функција $\varphi(t)$ во просторот од тест функции $\mathcal{D}$, така што $|f(t) - \varphi(t)| < \epsilon$, за сите вредности на t.

За да се покаже ова, ќе конструираме низа од тест функции $\{\varphi_\alpha(t)\}$ која што рамномерно конвергира кон $f(t)$ кога $\alpha \to 0$. Нека

$$\gamma_\alpha(t) = \frac{\xi\left(t/\alpha\right)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi\left(t/\alpha\right) dt}, \tag{1.2}$$

каде $\alpha > 0$ и $\xi(t)$ е дадена со (1.1). Оваа тест функција е 0 за $|t| \geq \alpha$ и е позитивна за останатите вредности на t и го задоволува условот

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\alpha(t)dt = 1. \tag{1.3}$$

Бараната тест функција е дадена со:

$$\varphi_\alpha(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\gamma_\alpha(t-\tau)d\tau. \tag{1.4}$$

$\varphi_\alpha(t) \in \mathcal{D}$, бидејќи имајќи во предвид дека $f(t)$ е 0, надвор од интервалот (a, b) и бидејќи $\gamma_\alpha(t)$ е 0 за $|t| \geq \alpha$, следува дека $\varphi_\alpha(t)$ е 0 надвор од интервалот $(a-\alpha, b+\alpha)$. Уште повеќе, десната страна на (1.4) е интеграл со конечни граници, чијшто интегранд е непрекината функција во однос на (t, τ) и за неа постои парцијалниот извод во однос на t, којшто исто така е непрекинат во однос на (t, τ). Значи може да се диференцира под знакот на интегралот во однос на t. Бидејќи $\gamma_\alpha(t)$ е тест функција, интегралот ги задоволува истите услови. Оттука $\varphi_\alpha(t)$ е бесконечно глатка функција и следува дека $\varphi_\alpha(t) \in \mathcal{D}$. Ако разгледаме,

$$\begin{aligned} |f(t) - \varphi_\alpha(t)| &= \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f(t) - f(\tau)\right] \gamma_\alpha(t-\tau)d\tau \right| \leq \\ &\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(\tau)| \, \gamma_\alpha(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

$f(t)$ е непрекината на затворениот интервал $[a-\alpha, b+\alpha]$, следува дека е рамномерно непрекината. Од рамномерната непрекинатост и од својството (1.3) следува дека за $(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)$, така што за ($\forall t, \tau \in [a-\alpha, b+\alpha]$) за кои важи $|t-\tau| < \eta$, следува дека $|f(t) - \varphi_\alpha(t)| \leq \epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\alpha(t-\tau) d\tau = \epsilon$, со што е покажано претходното тврдење.

Дефиниција 1.1.3. За низата од тест функции $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ велиме дека *конвергира во $\mathcal{D}$ кон 0* ако за сите тест функции $\varphi_n(t)$ кои се од $\mathcal{D}$ важи дека се еднакви на 0 надвор од фиксен конечен интеграл I, и ако за фиксен ненегативен број k, низата $\left\{\varphi_n^{(k)}(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира рамномерно кон 0 за $t \in \mathbb{R}$.

Множеството од тест функции $\mathcal{D}$ е затворено во однос на конвергенцијата.

1.2 Дистрибуции

Функционал е пресликување со кое на секој член од дадено множество со функции му се придружува број. Ќе го разгледуваме множеството од тест функциите $\mathcal{D}$ и функционалите кои придружуваат број на секоја тест функција од $\mathcal{D}$. Нека f е линеарен функционал од множеството тест функции $\mathcal{D}$ во $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Вредноста од тест функцијата $\varphi \in \mathcal{D}$ ја означуваме со $\langle f, \varphi \rangle$.

Дефиниција 1.2.1. Нека f е линеарен функционал на просторот од тест функции $\mathcal{D}$. За f велиме дека е непрекинат линеарен функционал на $\mathcal{D}$, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$, каде што $\{\varphi_n\}$ е низа од тест функции во $\mathcal{D}$ која конвергира кон 0.

Непрекинат линеарен функционал на просторот од тест функции $\mathcal{D}$, се нарекува *дистрибуција или обопштена функција*.

Еден од начините за генерирање на дистрибуција е следниот:

Ако $f(x)$ е локално интеграбилна функција, тогаш нејзината соодветна дистрибуција се дефинира со конвергентниот интеграл:

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx \tag{1.5}$$

каде φ е тест функција.
Дистрибуциите кои можат да бидат генерирани со помош на (1.5) се *регуларни дистрибуции*, додека сите други (вклучувајќи ја и делта функцијата) се *сингуларни дистрибуции*.

Две дистрибуции F и G се еднакви ако и само ако $\langle F, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle$ за секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$.

Важноста на дистрибуциите произлегува од фактот дека не само што во оваа теорија се овозможува репрезентација на локално интеграбилните функции (регуларните дистрибуции), но исто така во оваа теорија се содржани и други ентитети кои не се регуларни дистрибуции. Уште повеќе многу операции, како што се интегрирање, диференцирање кои се применуваат за функциите, исто така можат да бидат проширени и за дистрибуциите. Од друга страна, некои операции како што се производ на функции $f(t)g(t)$, композиција на функции $f(g(t))$, конволуција на функции и смена на променливи не можат да бидат проширени за сите дистрибуции. Еден таков пример за дистрибуција, која што не е регуларна дистрибуција е т.н. делта функција, δ, која била воведена од страна на Dirac, [6]. Оваа дистрибуција не може да биде дефинирана со локално интеграбилна функција, со примена на (1.5). Ако претпоставиме дека постои таква функција $\delta(t)$, тогаш би имале:

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

за сите $\varphi(t)$ во $\mathcal{D}$. Ако $\varphi(t)$ е еднаков на $\xi(t/a)$, каде $a > 0$ и $\xi(t)$ е дадена со (1.1), тогаш (1.6) го добива обликот

$$\frac{1}{e} = \int_{-a}^{a} \delta(t) \exp \frac{1}{a^2 - t^2} dt. \tag{1.7}$$

Ако $\delta(t)$ е локално интеграбилна функција, со користење на лемата на Лебег за доминантна конвергенција ќе следува дека десната страна на (1.7) конвергира кон 0, кога $a \to 0$, со што се добива контрадикција.

Оттука следува дека δ не е регуларна дистрибуција. Поточно, терминот "делта функција" е погрешен и несоодветен, па поради тоа ќе го користиме називот делта функционал. Теоријата на дистрибуции на Schwartz не можела да ги задоволи сите барања на физичарите. Така на пример не можело да се пресмета δ^2 или $\sqrt{\delta}$, што значи дека во оваа теорија не можело да се пресмета композиција за било кои две произволни дистрибуции. Невозможноста за дефинирање на операциите: производ, композиција, конволуциски производ и смена на променливи се слабостите на теоријата на дистрибуции. На пример, ако го разгледаме стационарниот оператор на Schrodinger, $\delta u + a \cdot \delta \cdot u$, каде δ е Dirac-делта функцијата и a е константа, го дава моделот за расејување на честичка од изворот, [1]. Во овој модел, производот δu не може да се пресмета во теоријата на дистрибуции. Вакви слични примери можат да се најдат во [26], каде што се разгледува интеракција на два делта бранови во модел определен со равенката на Burgers за пертурбација, или пак равенката која ја вклучува δ дистрибуцијата како коефициент, [29].

1.3 Псевдофункции, конечен дел на Хадамард

Само сингуларните дистрибуции го користат делта функционалот и неговиот прв и втор извод. Сингуларните дистрибуции се генерирани од конечниот дел на Hadamard од дивергентен интеграл.

На пример, да ја разгледаме функцијата $(t^{-\frac{3}{2}})_+$. Оваа функција не дефинира регуларна дистрибуција, бидејќи интегралот

$$\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}\phi(t)dt, \ \ \phi \in \mathcal{D} \tag{1.8}$$

е дивергентен интеграл. Hadamard предложил техника за одделување на конечниот дел од такви дивергентни интеграли, [42], стр.133-141. Овој конечен дел на Hadamard дефинира сингуларна дистрибуција.

Постапката за одделување на конечниот дел на Hadamarad е следната:

$$\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t). \tag{1.9}$$

Бидејќи $\phi(t)$ е бесконечно диференцијабилна функција, $\psi(t)$ е непрекината функција за $t \neq 0$ може да биде проширена така што ќе биде непрекината дури и во $t = 0$. Ова може да се види од Тејлоровата формула. Ако b е реален број, толку голем така што $\phi(t) = 0$ за $t > b$, тогаш (1.8) станува:

$$\left\langle (t^{-\frac{3}{2}})_+, \phi(t) \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^b t^{-\frac{3}{2}}\phi(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0+} \left[\frac{2\phi(0)}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{2\phi(0)}{\sqrt{b}} + \int_\epsilon^b \frac{2\psi(t)}{\sqrt{t}}dt \right]. \tag{1.10}$$

Ако $\phi(0) \neq 0$ тогаш првата дропка во заградата дивергира кога $\epsilon \to 0+$, но последниот израз останува како конечен бидејќи $\psi(t)$ е непрекината во $t = 0$. Дивергентниот израз го отстрануваме. Резултатот којшто се добива е конечниот дел на Hadamard од дивергентниот интеграл (1.8) и го означуваме со:

$$k.d. \int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}\phi(t)dt = \int_0^b \frac{2\psi(t)}{\sqrt{t}}dt - \frac{2\phi(0)}{\sqrt{b}}. \tag{1.11}$$

Особено значајно е тоа што (1.11) означува непрекинат линеарен функционал во $\mathcal{D}$.

Оваа дистрибуција може да ја означиме со

$$(t^{-\frac{3}{2}})_+ \tag{1.12}$$

и ѝ се доделува вредноста (1.11) за секое ϕ во $\mathcal{D}$. Според Schwartz (1.12) се нарекува *псевдо-функција.*

1.4 Операции со дистрибуции

Дефиниција 1.4.1. *Собирање на дистрибуции.* Нека f и g се две дистрибуции. Нивниот збир $f+g$ е дефиниран како дистрибуција која на секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$ придружува вредност

$$\langle f+g, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \langle g, \varphi\rangle. \tag{1.13}$$

Дефиниција 1.4.2. *Множење на дистрибуција со скалар.* Нека $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Множење на дистрибуцијата f со α е дефинирано со:

$$\langle \alpha f, \varphi\rangle = \alpha \langle f, \varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{D} \tag{1.14}$$

Множеството од сите дистрибуции е векторски простор во однос на операциите собирање и множење со скалар и се означува со $\mathcal{D}'$. Просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'$ е дуален простор на просторот од тест функции $\mathcal{D}$.

Дефиниција 1.4.3. *Транслација на дистрибуција.* Нека $f(t)$ е дистрибуција и нека τ е точка од просторот на којшто е дефинирана дистрибуцијата f. Дистрибуцијата добиена со транслација на дистрибуцијата $f(t)$ е дефинирана со

$$\langle f(t-\tau), \varphi(t)\rangle = \langle f(t), \varphi(t+\tau)\rangle, \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.15}$$

Ова следува директно од можноста за смена на променливите во интегралот со којшто е дефинирана дистрибуцијата, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t+\tau)dt.$$

Дефиниција 1.4.4. *Транспозиција* $f(-t)$ *на дистрибуцијата* $f(t)$ е дефинирана со:

$$\langle f(-t), \varphi(t)\rangle = \langle f(t), \varphi(-t)\rangle, \varphi \in \mathcal{D}. \tag{1.16}$$

Според ова својство, може да се каже дека парна дистрибуција е дистрибуцијата за која важи $f(t) = f(-t)$, а непарна дистрибуција е дистрибуцијата за која важи $f(t) = -f(-t)$.

1.5 Конвергенција на низи од дистрибуции (Конвергенција во просторот $\mathcal{D}'$)

Моќта на анализата на дистрибуциите произлегува од фактот дека за секоја дистрибуција постојат изводите од секој ред и дека во оваа теорија диференцирањето е непрекината операција. Како последица на ова, операцијата диференцирање на дистрибуции комутира со различни гранични процеси, како бесконечниот збир и интегрирањето, што не е случај во класичната теорија на функции.

Дефиниција 1.5.1. Низата од дистрибуции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ велиме дека *конвергира во просторот од дистрибуции* $\mathcal{D}'$, ако за секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$, низата од броеви $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира како низа од реални броеви. Границата на низата $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ дефинира функционал f на просторот од тест функции $\mathcal{D}$ и ќе ја означуваме со $\langle f, \varphi\rangle$.

Во овој случај можеме да кажеме дека f е граница на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ во $\mathcal{D}'$ и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Во Gelfand и Shilov на стр.416, [39], е докажана следната теорема:

Теорема 1.5.1. Ако низата од дистрибуции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во просторот од дистрибуции $\mathcal{D}'$ кон функционалот f, тогаш f е исто така дистрибуција. Со други зборови, просторот $\mathcal{D}'$ е затворен во однос на конвергенцијата.

Под одредени услови, конвергенцијата по точки скоро секаде на низа од локално интеграбилни функции, се рефлектира и во теоријата на дистрибуции со конвергенција во $\mathcal{D}'$ на соодветната низа од регуларни дистрибуции. Дел од условите при кои се појавува ова се дадени во следната теорема која е докажана во [4], стр.41.

Теорема 1.5.2. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа од локално интеграбилни функции која што конвергира по точки скоро секаде кон функцијата $f(t)$ и нека функциите $f_n(t)$ се ограничени со некоја локално интеграбилна функција. Тогаш $f(t)$ е локално интеграбилна функција и соодветната низа од регуларни дистрибуции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во $\mathcal{D}'$ кон регуларна дистрибуција $f(t)$.

Според оваа теорема следува дека ако низа од тест функции конвергира во $\mathcal{D}$, тогаш таа конвергира и во $\mathcal{D}'$. Ова се однесува на тест функциите и на соодветните регуларни дистрибуции. На овој начин следува дека конвергенцијата по точки скоро секаде има аналогна конвергенција во $\mathcal{D}'$. Но од друга страна, можно е дадена низа од регуларни дистрибуции да конвергира кон регуларна дистрибуција во $\mathcal{D}'$, но соодветната низа од функции да не конвергира по точки никаде.

Дека врската помеѓу точкастата конвергенција и конвергенцијата во $\mathcal{D}'$ е посложена, потврдуваат и примерите, кои се разработени во [4], стр.42.

Пример 1.5.1. Нека

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{1}{n} \\ \\ \frac{n}{2}, & |t| < \frac{1}{n} \end{cases}.$$

За секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$, важи:

$\langle f_n, \varphi \rangle = \frac{n}{2} \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t) dt \to \varphi(0)$, кога $n \to \infty$.

Според ова, регуларните дистрибуции f_n конвергираат во $\mathcal{D}'$ кон делта функционалот, но соодветните функции конвергираат кон 0 скоро секаде (освен во $t = 0$, каде што границата не постои). Значи границата на точкастата конвергенција соодветствува на нула дистрибуција. Овде и покрај тоа што постојат двете конвергенции: конвергенција по точки и конвергнецијата во $\mathcal{D}'$, сепак двете граници не се соодветни една на друга.

Пример 1.5.2. Нека

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq \frac{1}{n} \\ \\ n^2, & |t| < \frac{1}{n} \end{cases}.$$

За секоја тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$, важи дека $\lim\limits_{n \to \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$ нема да постои и $\varphi(0) \neq 0$. Но функциите ќе конвергираат кон 0, секаде, освен во $t = 0$, каде што граничната функција не постои. Овој пример покажува дека низата од интеграбилни функции конвергира скоро секаде кон интеграбилна функција, но соодветната низа од регуларни дистрибуции нема граница во $\mathcal{D}'$.

Овие примери покажуваат дека постоењето на конвергенцијата по точки не мора да значи дека постои и конвергенцијата во $\mathcal{D}'$. Исто така можно е да постојат двете конвергенции, но двете граници да не се соодветни.

Концептот на конвергенција на дистрибуции во $\mathcal{D}'$, овозможува разгледување на несвојствени интеграли кои дивергираат во класичната теорија на функции. Нека $f(\omega, t)$ е локално интеграбилна функција во однос на еднодимензионалните променливи ω и t. Да го разгледаме конвергентниот интеграл: $g_b(t) = \int\limits_a^b f(\omega, t)d\omega$, каде што a е конечна граница, а b е променлива. Кога $b \to \infty$, се добива несвојствен интеграл. Притоа возмоожно е несвојствениот интеграл којшто се дефинира преку гранична вредност да не постои во класичната теорија на функции, но соодветните регуларни дистрибуции да конвергираат во $\mathcal{D}'$ кон сингуларна дистрибуција.

Пример 1.5.3. [4]. Нека

$$g_b(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^b \cos\omega t d\omega = \frac{\sin bt}{\pi t}$$

каде ω и t се еднодимензионални. За секое t овој интеграл дивергира кога $b \to \infty$. Додека соодветната регуларна дистрибуција конвергира кон $\delta(t)$, бидејќи за $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{b\to\infty}\langle g_b(t), \varphi(t)\rangle = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin bt}{t}\varphi(t)dt = \varphi(0).$$

Оттука може да се запише $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\omega t d\omega = \delta(t)$.

Следната теорема се однесува на специјален случај на конвергенција во $\mathcal{D}'$ и покажува дека низа од регуларни дистрибуции ќе конвергира во $\mathcal{D}'$ кон делта функционалот, под одредени услови, [4].

Теорема 1.5.3. Нека $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа од локално интеграбилни функции, за кои што важи:

i) Сите интеграли $\int\limits_{|t|<T} |f_n(t)|dt$ се непрекинато ограничени со некоја константа K за сите вредност на n и T е фиксен позитивен број.

ii) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира рамномерно кон нула на секое ограничено множество од облик $0 < \tau \leq |t| \leq \frac{1}{\tau} < \infty$.

iii) За секоја позитивна вредност на τ низата од броеви $\left\{ \int\limits_{|t|\leq\tau} f_n(t)dt \right\}_{n=1}^{\infty}$ ковергира кон 1. Тогаш низата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон $\delta(t)$ во $\mathcal{D}'$.

Од претходната теорема е изведена следната последица:

Последица 1.5.1. Ако $f(t)$ е апсолутно интеграбилна функција на $\mathbb{R}^n$ и ако важи $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)dt = 1$ и ако $|f(t)|$ опаѓа кон 0, побрзо од $\frac{1}{|t|^n}$ кога $|t| \to \infty$ (т.е. $|f(t)| = o(1/|t|^n)$ кога $|t| \to \infty$), тогаш множеството од регуларни дистрибуции $\{n^n f(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира во $\mathcal{D}'$ кон $\delta(t)$ кога $n \to \infty$.

Со користење на овие низи кои се спомената во претходната последица 1.5.1, делта функционалот за првпат бил спомнат и искористен во физиката, [6].

1.6 Конволуциски производ на дистрибуции

Конволуцискиот производ на две функции е даден во следнава дефиниција, [53].

Дефиниција 1.6.1. Нека f и g се две функции. *Конволуцискиот производ* $f * g$ е дефиниран со

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \tag{1.17}$$

за сите точки x за кои интегралот постои.

Директно од дефиницијата следува дека ако $(f * g)(x)$ постои, тогаш и $(g * f)(x)$ постои и притоа важи дека:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x). \tag{1.18}$$

Уште повеќе ако постојат $(f * g)'(x)$ и $(f * g')(x)$ или $((f' * g)(x))$, тогаш

$$(f * g)'(x) = (f * g')(x) \;\; ((f' * g)(x)). \tag{1.19}$$

Да претпоставиме дека конволуцискиот производ $(f * g)(x)$ постои за сите вредности на x и нека ϕ е произволна тест функција од просторот $\mathcal{D}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\langle (f * g)(x), \phi(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dtdx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(y+t)dtdy,\end{aligned}$$

поради тоа можеме да запишеме

$$\langle (f * g)(x), \phi(x)\rangle = \langle g(y), \langle f(x), \phi(x+y)\rangle \tag{1.20}$$

иако за бесконечно диференцијабилната функција $\langle f(x), \phi(x + y)\rangle$ не е неопходно да има ограничен носач.

Ова води до следнава дефиниција, дадена во [39].

Дефиниција 1.6.2. Нека f и g се дистрибуции кои ги задоволуваат условите:

(i) и f и g имаат ограничен носач;

(ii) носачите на f и g се ограничени од иста страна.

Тогаш $f * g$ е дефиниран со

$$\langle (f * g)(x), \phi(x) \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \phi(x+y) \rangle \rangle$$

за произволна тест функција $\phi \in \mathcal{D}$.

Ако конволуцискиот производ $f * g$ постои тогаш равенствата (1.18) и (1.19) секогаш важат.

Дефинициите 1.6.1 и 1.6.2 се премногу рестриктивни и можат да бидат искористени само за мала класа на дистрибуции. Во следната глава ќе биде даден еден од начините за проширување на оваа дефиниција за пресметување конволуциски производ на дистрибуции на поширока класа дистрибуции.

Глава 2

НЕУТРИКС СМЕТАЊЕ

Во 1932 година, францускиот математичар Jacques Hadamard го разгледувал дивергентниот интеграл

$$\int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}dx, \tag{2.1}$$

каде p е позитивен цел број, а $A(x)$ е бесконечно диференцијабилна функција. Тој го поделил интегралот $\int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}dx$, $\epsilon > 0$ на два дела:

$$\int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}dx = F(\epsilon) + I(\epsilon),$$

каде што:

$$F(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{A(x) - B(x)}{x^{p+1/2}}dx,$$

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{B(x)}{x^{p+1/2}}dx,$$

и

$$B(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!}x^i.$$

Интегралот $F(\epsilon)$ тежи кон конечна граница $F(0)$ кога ϵ тежи кон 0, со оглед на фактот дека $I(\epsilon)$ дивергира кога ϵ тежи кон 0. Како резултат на тоа Hadamard го дефинирал $F(0)$ како *конечен дел* на интегралот (2.1) и се пишува:

Конечен дел
$$F(0) = k.d. \int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}} dx.$$

Покрај тоа имајќи во предвид дека $I(\epsilon)$ може да се запише како:

$$I(\epsilon) = -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!\left(p-i-\frac{1}{2}\right)} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)\epsilon^{-p+i+\frac{1}{2}}}{i!\left(p-i-\frac{1}{2}\right)} = K + I_1(\epsilon),$$

ќе следува дека и дивергентниот интеграл

$$\int_0^1 \frac{B(x)}{x^{p+1/2}} dx$$

има свој конечен дел K и дивергентен дел $I_1(\epsilon)$. Па за неговиот конечен дел може да се запише

$$K = k.d. \int_0^1 \frac{B(x)}{x^{p+1/2}}.$$

Дали Hadamard требало да напише

$$k.d. \int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}} dx = F(0) + K?$$

Во своите асимптотски проучувања, холандскиот математичар Johannes Gualtherus Van der Corput(1890-1975) се соочил со слични вакви проблеми. Тој забележал дека одредени изрази кои што ги имал при пресметките се поништиле и биле непотребни. Овие изрази ги нарекол занемарливи функции. Van der Corput го искористил Hadamard-овиот конечен дел за

да го дефинира и развие неутрикс сметањето. Основите на неутрикс сметањето биле поставени во 1959 година од страна на Van der Corput во неговото дело *Introduction to the neutrix calculus, J.Analyse Math.,7*, [41].
Во основата на оваа нова теорија освен Dirac делта функцијата, е и концептот на одделување на конечните делови од дивергентните интеграли, [28], користејќи ја техниката за занемарување на бесконечните вредности, [42]. Општиот принцип за одделување на конечните делови од дивергентните интеграли, бил многу проучуван од англискиот математичар Fisher и неговите соработници во [10, 18, 19].

Одредени операции, како собирањето и множењето со скалар лесно можеле да се прошират од класата глатки функции на класата од произволни дистрибуции, но производот и конволуцискиот производ не можеле да се дефинираат за одредени дистрибуции. Во 80-тите години на минатиот век, Fisher го користел неутрикс сметањето за проширување на дефинициите за производи на дистрибуции, [13], конволуциски производи на дистрибуции, [8, 9, 12] и композиции на дистрибуции, [22]. Исто така неутрикс сметањето било искористено при смената на променливи кога дистрибуциите биле сингуларни, [4, 11, 27].

Неутрикс сметањето било применето од Jack Ng и van Dam во теоријата на квантните полиња со цел да добијат конечни резултати за коефициентите во редовите на пертурбација. Тие исто така, користејќи го неутрикс сметањето во теоријата на квантните полиња добиле конечни ренормирања во анализата на струјните кола, [55, 56].

2.1 Дефиниција на неутрикс

Во [41], стр. 282-284, се дадени дефинициите на неутрикс.

Нека доменот N' е непразно множество. Рангот N'' е непразна комутативна адитивна група, т.е. за било кои два произволни елементи α и β во N'', збирот $\alpha + \beta$ и разликата $\alpha - \beta$ се еднозначно дефинирани елементи во N'', каде собирањето и одземањето ги имаат вообичаените својства.

Да ја разгледаме комутативната адитивна група N чии елементи се функции $\nu(\xi)$, дефинирани за секој елемент $\xi \in N'$, така што за секој елемент ξ во доменот N', $\nu(\xi)$ означува елемент од рангот N''.

Ако $\nu(\xi)$ означува функција која припаѓа на N, тогаш оваа група исто така ја содржи и функцијата која е нула функција т.е. $\nu(\xi) - \nu(\xi)$.

Дефиниција 2.1.1. Нека N' е непразно множество, N'' е комутативна адитивна група и нека N е комутативна адитивна група од функции од N' во N''. Ако N го има својството дека единствена константна функција во N е нула функцијата, тогаш за N велиме дека е *неутрикс* и функциите во N велиме дека се *занемарливи функции.* Условот дека единствена константна функција во N е нула функцијата се нарекува *неутрикс услов.*

Неутрикс условот може да биде формулиран и на следниот начин:
Ако одредена функција во N за сите вредности на $\xi \in N'$ има иста вредност γ, тогаш γ е нула елемент во N'', т.е.
Ако $f \in N$ и ако $f(\xi) = \gamma$, за сите вредност на $\xi \in N'$ тогаш, $\gamma = 0$ во N''.
Од оваа дефиниција следува дека збир и разлика на две занемарливи функции е исто така занемарлива функција.

Пример 2.1.1. Нека N' е затворен интервал $[0, 1] = \{\xi : 0 \leq \xi \leq 1\}$ и нека N е множество од функции дефинирани на N' со форма $a \sin \xi + b\xi^2$, каде a и b се произволни реални броеви. Тогаш N е неутрикс, бидејќи ако

$$a \sin \xi + b\xi^2 = c$$

за сите ξ во N', тогаш $a = b = c = 0$.

Дефиниција 2.1.2. За два неутрикси велиме дека се *еднакви* ако и само ако имаат ист домен и исти занемарливи функции.

Ако два неутрикси N и P се еднакви, тогаш секоја занемарлива функција го има својството дека за секој елемент ξ од доменот $N' = P'$, $\nu(\xi)$ припаѓа и во рангот на неутриксот N и во рангот на неутриксот P, т.е. во пресекот $N'' \cap P''$. Неутриксот не се менува ако рангот го замениме со поголем ранг.

Неутрикс со носач ∞ е неутрикс за којшто е можно да се најде реален број b, така што доменот на неутриксот е формиран за сите точки $\xi > b$. Неутрикс со носач $-\infty$ е неутрикс за којшто е можно да се најде реален број b, така што доменот на неутриксот е формиран за сите точки $\xi < b$. Неутрикс со носач $a+$ каде a е реален број, е неутрикс за којшто е возможно да се најде реален број $b > a$, така што доменот на неутриксот е интервалот $a < \xi < b$. Неутрикс со носач $a-$ каде a е реален број, е неутрикс за којшто е возможно да се најде реален број $b < a$, така што доменот на неутриксот е интервалот $b < \xi < a$.

2.2 Неутрикс граници

Нека N' е потпростор од тополошкиот постор X. Нека b е гранична точка на N', која што не е содржана во N'. Нека N'' се реалните броеви и нека N е комутативна, адитивна група која се состои од функции од N' во N'' со својство ако N ја содржи функцијата $f(\xi)$ која конвергира кон конечната граница l кога ξ тежи кон b, тогаш $l = 0$.
N е неутрикс бидејќи ако f е во N и $f(\xi) = l$ за сите вредности на ξ во N', тогаш $f(\xi)$ конвергира кон конечната граница l кога ξ тежи кон b и $l = 0$.

Дефиниција 2.2.1. Нека $f(\xi)$ е реална функција дефинирана на N' и нека е можно да се најде константа l, таква што $f(\xi)-l$ е занемарлива во N. Тогаш за l велиме дека е *неутрикс граница* или *N-граница на $f(\xi)$ кога ξ тежи кон b* и пишуваме

$$N - \lim_{\xi \to b} f(\xi) = l.$$

Забелешка: Ако неутрикс границата l постои, тогаш таа единствена, бидејќи ако $f(\xi)-l$ и $f(\xi)-l'$ се во N, тогаш константната функција $l-l'$ е исто така во N, т.е. $l-l'=0$, т.е. $l=l'$.
Ако неутриксот N ги содржи сите функции кои конвергираат кон нула во обична смисла, кога ξ тежи кон b, тогаш важи дека:

$$\lim_{\xi \to b} f(\xi) = l \Rightarrow N - \lim_{\xi \to b} f(\xi) = l.$$

Забелешка: Нека N' е множество и нека N е множество функции дефинирани на N' кои конвергираат кон 0 во вообичаена смисла кога ξ тежи кон b. Тогаш N е неутрикс и неутрикс границата е иста со граничната вредност во обична смисла кога ξ тежи кон b.

Пример 2.2.1. Нека N' е интервалот $(0,1) = \{\xi : 0 < \xi < 1\}$, $y=0$ и N е множество функции дефинирани на N' од облик

$$a \ln \xi + b\xi^{-1} + o(\xi),$$

каде a и b се произволни реални броеви и $o(\xi)$ е произволна функција која конвергира кон 0 кога ξ тежи кон 0. Ќе ја пресметаме неутрикс границата за функцијата $f(\xi)$. Имаме:

$$f(\xi) = \ln \xi + 2\xi^{-1} - \cos \xi - 1 = \ln \xi + 2\xi^{-1} - (\cos \xi - 1) - 2,$$

каде

$$\ln \xi + 2\xi^{-1} - (\cos \xi - 1)$$

е занемарлива функција. Оттука следува дека неутрикс границата на $f(\xi)$, кога ξ тежи кон 0 постои и дека

$$N - \lim_{\xi \to 0} f(\xi) = -2.$$

Во [41], Van der Corput го разгледува потпросторот N' од тополошкиот постор X со гранична точка b која што не е содржана во N', како и N'' со својство дека за секој елемент $\alpha \in N''$ и за секој позитивен цел број n, постои единствен елемент $\beta \in N''$, така што α може да се запише како збир од n елементи од кои секој е еднаков на β. Потоа запишал дека $\beta = \frac{\alpha}{n}$ и за секој елемент $\alpha \in N''$ и за секое $k \in \mathbb{Q}$, со $k\alpha$ означувал единствено дефиниран елемент во N''. Изборот на топологијата во N'' бил направен така што секоја функција $g(\xi)$ со домен N' и ранг N'' која има конечна гранична вредност l', кога $\xi \to b$, го има својството за секое $k \in \mathbb{Q}$, $kg(\xi)$ да тежи кон kl' кога $\xi \to b$.
Од страна на Van der Corput, во [41], стр.286 е докажано дека:

Теорема 2.2.1. За секоја функција $f(\xi)$ со домен N' и ранг N'' е возможно да се конструира неутрикс N со домен N' и ранг N'' така што функцијата $f(\xi)$ ќе има конечна N-граница, кога $\xi \to b$.

Ова е возможно имајќи во предвид дека секоја функција која има конечна граница l' кога $\xi \to b$ во согласност со топологијата, го има својството да нејзината N-граница постои и е еднаква на l'.

Понатаму во [41], авторот го исклучува случајот кога $f(\xi)$ тежи кон конечна граница, кога $\xi \to b$, во согласност со топологијата.
Тој со l означил произволен број и со N означил неутрикс, чијшто домен е N' и чии занемарливи функции се функциите од облик $k(f(\xi) - l) + o(1)$, каде k е произволен рационален

број и $o(1)$ е функција од ξ за која важи дека тежи кон 0, кога ξ тежи кон b. Докажал дека N е неутрикс, т.е. дека е задоволен неутрикс условот за единственост на константната нула функција користејќи:

$$k(f(\xi)-l)+o(l)=\gamma,$$

каде γ е независна од ξ. Во овој случај $k=0$, бидејќи во спротивно $\lim\limits_{\xi\to b} f(\xi)=l+\frac{\gamma}{k}$. Оттука следувало дека $\gamma=0$.

Бидејќи секоја функција $f(\xi)$ може да се претстави како

$$f(\xi)=l+(f(\xi)-l),$$

каде $f(\xi)-l$ е занемарлива функција во неутриксот N, за неутрикс границата следува дека $N-\lim\limits_{\xi\to b} f(\xi)=l$.

Поради тоа произволна функција $g(\xi)$ која во согласност со дадена топологија имала конечна граница l' кога ξ тежи кон b, Van der Corput ја претставувал како

$$g(\xi)=l'+o(1),$$

каде што $o(1)$ е занемарлив израз во неутриксот N и неутрикс границата за $g(\xi)$ постои во точката b и е еднаква на l'.

Во [37], стр.11 авторите ја нарекле неутрикс границата l' на функцијата $g(\xi)$ кога ξ тежи кон b, *неутрализирана вредност на функцијата $g(\xi)$ од неутриксот N.*

Неутриксот N конструиран од страна на Van der Corput, погоре, го задоволувал условот дека ако некоја функција $\nu(\xi)$ е занемарлива функција во N, тогаш за секој рационален број k и функцијата $k\nu(\xi)$ е занемарлива функција во N.

Уште повеќе во [41], стр.287 е докажано следното обопштување:

Теорема 2.2.2. Ако се дадени множество точки N' со гранична точка b која не припаѓа на N', ранг N'' и бесконечно многу функции $f_h(\xi), h = 1, 2, 3 \ldots$, со домен N' и кодомен N'', тогаш возможно е да се конструира неутрикс N со домен N', така што секоја од овие функции $f_h(\xi)$ која има конечна граница l_h кога $\xi \to b$ во согласност со дефинираната топологија, го има својството дека нејзината неутрикс граница постои и е еднаква на l'.

2.3 Дистрибуции во неутрикс сметањето

Во [41], Van der Corput во второто поглавје ги разработил дистрибуциите во неутрикс сметањето.

Со цел да дефинира дистрибуција во неутрикс сметањето, зема позитивен цел број, $s \in \mathbb{Z}^+$.
Се разгледуваат s неутрикси $N_1, N_2, \ldots, N_s$ со ист кодомен N'' и со различни променливи $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Се воведува функција $f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ дефинирана за произволен избор на $\xi_\sigma \in N'_\sigma, (\sigma = 1, \ldots, s)$, така што за секој избор од $\xi_1, \ldots, \xi_s$, $f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ е елемент од рангот N''.

Дефиниција 2.3.1. Множеството d формирано од функциите од облик:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_s) + \nu_1(\xi_1) + \cdots + \nu_s(\xi_s),$$

каде $\nu_\sigma(\xi_\sigma), (\sigma = 1, \ldots, s)$ означува произволна функција која е занемарлива во N_σ, се нарекува *дистрибуција со неутрикси* $N_1, \ldots, N_s$, генерирана од функцијата $f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ и ја означуваме со $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$. Секоја функција која се појавува во дистрибуцијата d се нарекува *генераторна функција.*

Било кои две генераторни функции кои се јавуваат во дистрибуцијата d се еднакви без разлика на занемарливите функции во неутриксите $N_1, \ldots, N_s$.

Нека со r е означен најмалиот позитивен цел број, така што $0 \leq r \leq s$ и генераторната функција на дистрибуцијата d зависи само од r од променливите $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Притоа:

$r = 0$, во случајот кога дистрибуцијата d е генерирана од константа.
$r = 1$, во случајот кога дистрибуцијата не може да биде генерирана од константа, но постои позитивен цел број $\alpha \leq s$, така што дистрибуцијата може да биде генерирана од функција која зависи од променливата ξ_α.

Ако r е позитивен број, тогаш може да се најдат r различни позитивни броеви $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, сите помали или еднакви од s, така што дистрибуцијата d може да биде генерирана од функција $\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r})$ од r променливи $\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}$.

Ако дистрибуцијата d е дадена, тогаш овие r броеви $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ се еднозначно определени. Ако има две генераторни функции $\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r})$ и $\psi(\xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r})$, тогаш

$$\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}) - \psi(\xi_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r}) = \sum_{\sigma=1}^{s} \nu_\sigma(\xi_\sigma), \tag{2.2}$$

каде $\nu_\sigma(\xi_\sigma)$ е занемарлива во N_σ.

Дефиниција 2.3.2. Редот r на дистрибуцијата е позитивен цел број којшто е најмногу еднаков на бројот на неутрикси кои се појавуваат во дистрибуцијата. $N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_r}$ се *базични неутрикси на дистрибуцијата, а* $\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r})$ *е базична функција на дистрибуцијата.*

Ако дистрибуцијата е дадена, тогаш редот и базичните неутрикси се еднозначно определени, но не и нејзините базични функции. Две базични функции се еднакви и покрај изразите кои се сметаат за занемарливи во базичните неутрикси и обратно: ако $\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r})$ е базична функција, тогаш секоја функција која е еднаква на φ, и покрај занемарливите изрази во базичните неутрикси, е исто така базична. Ако φ и χ се базични функции, тогаш

$$\varphi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}) - \chi(\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}) = \sum_{\sigma=1}^{s} \nu_\sigma(\xi_\sigma),$$

каде $\nu_\sigma(\xi_\sigma)$ е занемарлива во N_σ.

Дефиниција 2.3.3. Две дистрибуции $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ и $\langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle$ *се еднакви* ако и само ако имаат ист ред, исти базични неутрикси и исти базични функции.

Секоја дистрибуција $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ може да биде запишана во неупростена форма $\langle \varphi; N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_r} \rangle$, каде r е редот на дистрибуцијата, $N_{\alpha_1}, \ldots, N_{\alpha_r}$ се базични неутрикси на дистрибуцијата и $\varphi = \varphi(\xi_{\alpha_1} \ldots \xi \alpha_r)$ е базична функција на дистрибуцијата.

Пример 2.3.1. Ако $N_1, \ldots, N_{s+1}$ се $s+1$ неутрикс со $s+1$ различни променливи $\xi_1, \ldots, \xi_{s+1}$ и ако $f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ е независно од ξ_{s+1} тогаш

$$\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle = \langle f; N_1, \ldots, N_{s+1} \rangle.$$

На стр.295 во [41], Van der Corput го разгледува следниот пример:

Пример 2.3.2. Ако дистрибуцијата може да биде генерирана од константа γ и ако b е гранична точка на доменот N' на неутриксот N, која не припаѓа на N', тогаш за секоја генераторна функција $f(\xi)$ на дистрибуцијата, ќе важи:

$$N - \lim_{\xi \to b} f(\xi) = \gamma,$$

бидејќи $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$, каде $\nu(\xi)$ е занемарлива функција во неутриксот N.

2.3.1 Собирање и одземање на дистрибуции

Освен што ги дефинирал дистрибуциите во неутрикс сметањето Van der Corput дефинирал и некои основни операции со нив. На стр.295 во [41] ја дал дефиницијата за збир и разлика на две дистрибуции.

Дефиниција 2.3.4. Нека $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ и $\langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle$ се две дадени дистрибуции. Нека со $Q_1, \ldots, Q_\nu$ се означени различни неутрикси кои се појавуваат во системот $(N_1, \ldots, N_s, P_1, \ldots, P_t)$, така што важи дека

$$max(s, t) \leq \nu \leq s + t.$$

Тогаш збирот на дистрибуциите $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ и $\langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle$ се дефинира со:

$$\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle + \langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle = \langle f + g; Q_1, \ldots, Q_\nu \rangle, \tag{2.3}$$

додека разликата на дистрибуцијата $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ со дистрибуцијата $\langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle$ се дефинира со

$$\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle - \langle g; P_1, \ldots, P_t \rangle = \langle f - g; Q_1, \ldots, Q_\nu \rangle. \tag{2.4}$$

Van der Corput покажал дека збирот и разликата на две дистрибуции дефинирани со оваа дефиниција се независни од изборот на претставниците на дистрибуциите. Имено покажал дека ако двете дистрибуции се напишани во нивните неупростени форми $\langle \varphi; M_1, \ldots, M_u \rangle$ и $\langle \chi; R_1, \ldots, R_w \rangle$, тогаш $f = \varphi + \mu$ и $g = \chi + \rho$, каде што μ е занемарлива функција во неутриксите $N_1, \ldots, N_s$ и ρ е занемарлива функција во $P_1, \ldots, P_t$, па $\mu + \rho$ е занемарлива функција во неутриксите $Q_1, \ldots, Q_\nu$. Последователно следува дека $f + g$ е еднакво на $\varphi + \chi$, независно од занемарливите функции во $Q_1, \ldots, Q_\nu$.
За збирот на дистрибуциите во неутрикс сметањето важи комутативниот и асоцијативниот закон. Со вака дадената дефиниција за збир и разлика на дистрибуции, може да се каже дека множеството од сите дистрибуции формира комутативна адитивна група.

Во неутрикс сметањето било прифатено дека за означување на дистрибуција може да се користи и ознаката $f(N_1, \ldots, N_s)$, поточно било направено изедначување на

$$\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle = f(N_1, \ldots, N_s).$$

Ова означување на дистрибуцијата $\langle f; N_1, \ldots, N_s \rangle$ е добиено со користење на ознаката за функција $f(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ која зависи од променливите $\xi_1, \ldots, \xi_s$, со замена на променливите $\xi_1, \ldots, \xi_s$ со $N_1, \ldots, N_s$.

Согласно овој договор за означување на дистрибуции следува дека дистрибуцијата која што е генерирана од константа γ може да биде означувана само со γ. Во овој случај $f(\xi_1, \ldots, \xi_s) = \gamma$ за секоја генераторна функција f и се вели дека f ја прима неутрализираната вредност γ во $(N_1, \ldots, N_s)$. На стр.297 во [41] е даден следниот пример:

Пример 2.3.3. Нека N е неутрикс со домен $N' = \mathbb{Z}^+$ и занемарливи функции од облик $c \log \xi + o(1)$, каде $c \in \mathbb{R}$ и $o(1)$ се сите функции кои тежат кон 0, кога $\xi \to \infty$.
Тогаш

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

е дистрибуција со неутрикс N и е генерирана од

$$\sum_{k=1}^{\xi} \frac{1}{k} = \log \xi + \mathrm{e} + o(1),$$

каде **e** е константата на *Euler*. Бидејќи $\log \xi$ и $o(1)$ се занемарливи функции во неутриксот N, може да се каже дека оваа дистрибуција е генерирана од константата **e**, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \mathrm{e}.$$

Ако M е неутрикс со домен $N' = \mathbb{Z}^+$ и занемарливи функции од облик $c \log 5\xi + o(1)$, каде $c \in \mathbb{R}$,тогаш

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k} = \mathrm{e} - \log 5.$$

2.4 Неутрикс композиции на дистрибуции

За разлика од одредени операции како што се собирање, одземање кои можат да бидат дефинирани за произволни дистрибуции, постојат и такви операции кои по дефиниција можат да бидат извршени само кај одредена класа на регуларни дистрибуции. Така во теоријата на дистрибуции, многу често не може да се даде никакво значење на изрази од облик $F(f(x))$ каде што F и f се произволни дистрибуции. Така, теоријата на Schwartz за дистрибуции, [44], не можела да овозможи пресметување на одредени изрази кои биле важни за физичарите, како на пример δ^2 или $\sqrt{\delta}$, каде δ е Dirac-овата делта функција. Во [51, 52], авторот покажал дека композицијата на две функции, поточно композицијата на дистрибуција и бесконечно диференцијабилна функција може да биде проширена по непрекинатост, на композиција на дистрибуции доколку изводот на бесконечно диференцијабилната функција е различен од 0. Во [38] била дефинирана композиција на дистрибуција F и локално интеграбилна функција f која има единствен корен на интервалот (a, b) и дури било направено обопштување кога f е дистрибуција. Композициите на дистрибуциите и функциите биле разгледувани во [49]. За да дефинира композиција на две дистрибуции, Antosik користи регуларна низа од функции која конвергира кон δ функцијата.

Користејќи бесконечно диференцијабилна функција ρ, која ги задоволува својствата:

(i) $\rho(x) = 0$ за $|x| \geq 1$;

(ii) $\rho(x) \geq 0$;

(iii) $\rho(x) = \rho(-x)$;

(iv) $\int\limits_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1$;

Се дефинира регуларна низа од бесконечно диференцијабилни функции $\{\delta_n(x)\}$ со $\delta_n(x) = n\rho(nx)$ за $n = 1, 2, \ldots$, за која важи дека конвергира кон Dirac-овата делта функција. Уште повеќе ако F е дистрибуција во $\mathcal{D}'$ и ако $F_n = F * \delta_n = \langle F(x-t), \delta_n(x)\rangle$, тогаш $\{F_n(x)\}$ е регуларна низа од бесконечно диференцијабилни функции која конвергира кон $F(x)$.
Во [25], Li и Li ја користат δ - низата $\delta_n = \left(\frac{n}{\pi}\right) e^{-nx^2}, x \in \mathbb{R}$ за да ги дефинираат степените на дистрибуциите $\delta^k(x)$ и $(\delta')^k$ за $k \in \mathbb{R}$.

Во [50], Antosik со следната дефиниција дефинирал композиција на две дистрибуции:
Дефиниција 2.4.1. Нека $f, g \in \mathcal{D}'$. Се вели дека дистрибуцијата $g(f(x))$ постои и еднаква на $h(x)$ на $\mathbb{R}$, ако низата од композиции $\{g_n(f_n)\}$ конвергира кон дистрибуцијата $h(x)$, каде што $f_n = f * \delta_n$ и $g_n = g * \delta_n$ се низи од бесконечно диференцијабилни функции кои конвергираат кон дистрибуциите f и g, содветно.

Користејќи ја оваа дефиниција се дефинирани следните композиции:

(i) $\sqrt{\delta} = 0$

(ii) $\sqrt{\delta^2 + 1} = 1 + \delta$

(iii) $\log(1 + \delta) = 0$

(iv) $\sin \delta = 0$

(v) $\cos \delta = 1$

(vi) $\frac{1}{1+\delta} = 1.$

Но за многу парови дистрибуции оваа дефиниција не може да се искористи за да биде дефинирана нивната композиција. Користејќи го неутрикс сметањето, Fisher во [11] ја дал следната дефиниција со која се дефинира неутрикс композиција на дистрибуции.

Дефиниција 2.4.2. Нека F е дистрибуција во $\mathcal{D}'$ и нека f е локално интеграбилна функција. Се вели дека *неутрикс композицијата* $F(f(x))$ постои и еднаква на h на отворениот интервал (a,b) ако

$$N-\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_n(f(x))\varphi(x)dx = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

за сите тест функции φ во $\mathcal{D}[a,b]$, каде N е неутрикс со домен $N' = \mathbb{Z}^+$, ранг $N'' = \mathbb{R}$ занемарливи функции од облик

$$n^\lambda \ln^{r-1} n, \ln^r n : \lambda > 0, r = 1, 2, \ldots$$

и сите функции кои конвергираат кон 0 во вообичаена смисла кога n тежи кон бесконечност.

Специјално, се вели дека композицијата $F(f(x))$ постои и е еднаква на h на отворениот интервал (a,b) ако

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_n(f(x))\varphi(x)dx = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

за сите тест функции φ во $\mathcal{D}[a,b]$.

2.5 Неутрикс конволуциски производ на дистрибуции

Со цел да се прошири конволуцискиот производ на поголема класа дистрибуции, во [27] е дадена следнава дефиниција:

Дефиниција 2.5.1. Нека f и g се дистрибуции и нека τ е бесконечно диференцијабилна функција која ги задоволува условите:

(i) $\tau(x) = \tau(-x)$;

(ii) $0 \leq \tau(x) \leq 1$;

(iii) $\tau(x) = 1$ за $|x| \leq \frac{1}{2}$;

(iv) $\tau(x) = 0$ за $|x| \geq 1$.

Нека $f_n(x) = f(x)\tau\left(\frac{x}{n}\right)$, $g_n(x) = g(x)\tau\left(\frac{x}{n}\right)$ за $n = 1, 2, \ldots$. Тогаш конволуцискиот производ $f * g$ е дефиниран како граница h на низата $\{f_n * g_n\}$, како

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n * g_n, \phi \rangle = \langle h, \phi \rangle \tag{2.5}$$

за сите тест функции $\phi \in \mathcal{D}$.

Ако границата на низата $\{f_n * g_n\}$ постои, т.е. ако конволуцискиот производ $f * g$ постои, тогаш сигурно важи равенството (1.18). Равенството (1.19) не мора секогаш да важи. Така Jones во [27] докажал дека:

$$1 * sgnx = x = sgnx * 1$$

и

$$(1 * sgnx)' = 1, \;\; 1' * sgnx = 0, \;\; 1 * (sgnx)' = 2.$$

Со следната дефиниција се дефинира некомутативен конволуциски производ на дистрибуциите f и g и е дадена во [21].

Дефиниција 2.5.2. Нека f и g се две дистрибуции и нека f_n е дефинирана како во дефиницијата 2.5.1. Тогаш конволуцискиот производ $f * g$ е дефиниран како граница на низата $\{f_n * g\}$ со

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi \rangle = \langle h, \phi \rangle \tag{2.6}$$

за сите тест функции $\phi \in \mathcal{D}$.

Во оваа дефиниција конволуцискиот производ $f_n * g$ е со исто значење како во дефиницијата 1.6.2 во глава 1 т.е. дистрибуцијата f_n мора да има ограничен носач. Конволуцискиот производ дефиниран со оваа дефиниција не е комутативен поради недостаток на симетрија. Fisher покажал во [7] дека секогаш важи:

$$(f * g)' = f' * g \ \ (f * g'),$$

но дека $f' * g$ не мора да биде еднакво на $f * g'$.

Ако даден конволуциски производ постои според дефиницијата 1.6.2 во претходната глава, тогаш сигурно постои и според дефиницијата 2.5.1 и дефиницијата 2.5.2.

Но и со последните две дефиниции голем број на конволуциски производи на дистрибуции не можат да бидат пресметани. Поради тоа во [7] било дадено проширување на дефиницијата 2.5.2.

Дефиниција 2.5.3. Нека f и g се дистрибуции и нека τ_n е бесконечно диференцијабилна функција дефинирана со:

$$\tau_n = \begin{cases} 1, & |x| \leq n, \\ \tau\left(n^n x - n^{n+1}\right), & x > n, \\ \tau\left(n^n x + n^{n+1}\right), & x < -n. \end{cases} \tag{2.7}$$

за $n = 1, 2, \ldots$, каде τ е дефинирана како во дефиниција 2.5.1. Нека

$$f_n(x) = f(x)\tau_n(x) \tag{2.8}$$

за $n = 1, 2, \ldots$. Тогаш *неутрикс конволуцискиот производ* $f \circledast g$ е дефиниран како неутрикс граница на низата $\{f_n * g\}$, т.е.

$$f \circledast g = N - \lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi \rangle = \langle h, \phi \rangle \tag{2.9}$$

за сите тест функции $\phi \in \mathcal{D}$, каде N е неутриксот со домен $N' = \{1, 2, \ldots, n \ldots\}$, рангот се сите реални броеви, а занемарливи функции се конечните линеарни суми на функциите:

$$n^\lambda \ln^{r-1} n, \ \ln^r n$$

за $\lambda > 0$ и $r = 0, 1, 2, \ldots$, и сите функции $f(n)$ за кои важи дека $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$.

Конволуцискиот производ $f_n{*}g$ во оваа дефиниција е дефиниран со исто значење како во дефиницијата 1.6.2 во глава 1, дистрибуцијата f_n има ограничен носач, додека носачот на τ_n се содржи во интервалот $(-n - n^{-n}, n + n^{-n})$.

Во општ случај неутрикс конволуцискиот производ дефиниран со претходната дефиниција е некомутативен.

Во [7], со следната теорема Fisher покажал дека дефиницијата 2.5.3 е проширување на дефиницијата 1.6.1 во глава 1.

Теорема 2.5.1. Нека f и g се функции во $L^p(-\infty, \infty)$ и $L^q(-\infty, \infty)$ соодветно, каде $1/p+1/q = 1$. Тогаш конволуцискиот производ $f \circledast g$ постои и притоа важи

$$f * g = f \circledast g.$$

Доказ. За $\epsilon > 0$ е произволно, следува:

$$| f * g - f_n * g | = | \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)[1 - \tau_n(t)]dt | \leq$$

$$\leq \int_{|t|\geq n} |f(t)g(x-t)|dt < \epsilon \quad (2.10)$$

за сите вредности $n > n_0$. Ако $\phi \in \mathcal{D}$, тогаш:

$$|\langle f * g, \phi\rangle - \langle f_n * g, \phi\rangle| \leq sup\{|\phi(x)|\}\epsilon,$$

за $n > n_0$ следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi\rangle = \langle f * g, \phi\rangle = N - \lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi\rangle$$

т.е. дека

$$f * g = f \circledast g.$$

Со теоремата која што следува, во [7] било покажано дека дефиницијата 2.5.2 е проширување на дефиницијата 1.6.2 од грлава 1.

Теорема 2.5.2. Нека f и g се дистрибуции кои ги задоволуваат двата услови од дефиницијата 1.6.2 во глава 1. Тогаш конволуцискиот производ $f \circledast g$ постои и

$$f * g = f \circledast g.$$

Доказ. Се претпоставува прво дека носачот на f е ограничен. Тогаш $f = f_n$ за доволно големо n и

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi\rangle = \langle f * g, \phi\rangle = N - \lim_{n\to\infty}\langle f_n * g, \phi\rangle$$

за сите тест функции $\phi \in \mathcal{D}$.

Со претпоставка дека носачот на g се содржи во интервалот (a, b) и за ϕ произволна тест функција во $\mathcal{D}$ со носач којшто се содржи во интервалот (c, d) следува дека:

$$\langle f * g - f_n * g, \phi\rangle = \langle g(y), \langle f(x) - f_n(x), \phi(x+y)\rangle\rangle =$$
$$= \int_a^b g(y) \int_{c-y}^{d-y} f(x)[1 - \tau_n(x)]\phi(x+y)dxdy = 0, \quad (2.11)$$

за доволно големо n.

Конечно ако се претпостави дека f и g се ограничени од иста страна, пример од лево, ќе следува дека носачите на f и g се содржани во интервалите (a, ∞) и (b, ∞), соодветно. Тогаш за произволна тест функција ϕ во $\mathcal{D}$ со носач којшто се содржи во интервалот (c, d) се добива дека

$$\langle f * g - f_n * g, \phi\rangle = \int_b^\infty g(y) \int_{c-y}^{d-y} f(x)[1 - \tau_n(x)]\phi(x+y)dxdy.$$

$f(x) = 0$ ако $x < a$, па следува дека

$$\int\limits_{c-y}^{d-y} f(x)[1 - \tau_n(x)]\phi(x+y)dxdy = 0$$

ако $y > d - a$. Оттука

$$\langle f * g - f_n * g, \phi\rangle = \int\limits_{b}^{d-a} g(y) \int\limits_{c-y}^{d-y} f(x)[1 - \tau_n(x)]\phi(x+y)dxdy = 0.$$

за доволно големо n.

Од страна на Fisher во [7] на стр.127-128 со конкретни дистрибуции е покажано дека доколку даден конволуциски производ постои во неутрикс смисла, според 2.5.3, не мора да постои според претходно дадените дефиниции за конволуциски производ, 1.6.1, 1.6.2 од глава 1 и дефинциите 2.5.1 и 2.5.2.

Исто така од негова страна е дадено обопштувањето во следната теорема во [7], кое важи за конволуциските производи пресметани според дефиницијата 2.5.2, во теорема 3 во [23]. Ова обопштување не важи за конволуциските производи кои се пресметани според дефиницијата 2.5.1, во [27].

Теорема 2.5.3. Нека f и g се дистрибуции и нека постои неутрикс конволуцискиот производ $f \circledast g$.Тогаш постои и неутрикс конволуцискиот производ $f \circledast g'$ и важи дека

$$(f \circledast g)' = f \circledast g'.$$

Доказ. Бидејќи конволуцискиот производ $f_n * g$ постои според дефиниција 1.6.2 во глава 1, следува дека ќе важи

$$(f_n * g)' = f_n * g'.$$

Па за произволна тест функција $\phi \in \mathcal{D}$ ќе важи:

$$\langle\langle f \circledast g\rangle, \phi\rangle = -\langle f \circledast g, \phi'\rangle = -\,N - \lim_{n\to\infty} \langle f_n * g, \phi'\rangle =$$
$$= N - \lim_{n\to\infty} \langle (f_n * g)', \phi\rangle = N - \lim_{n\to\infty} \langle (f_n * g', \phi\rangle. \quad (2.12)$$

Оттука следува дека $f \circledast g'$ постои и притоа важи дека

$$(f \circledast g)' = f \circledast g'.$$

Глава 3

НЕУТРИКС КОМПОЗИЦИИ НА ОДРЕДЕНИ ДИСТРИБУЦИИ

Оваа глава опфаќа нови резултати кои веќе се објавени. Главата содржи пресметани неутрикс композиции на дистрибуции кои се добиени со моја и заедничка работа со соработниците, т.е. во оваа глава се презентирани резултатите од следниве трудови:

1. **L.Lazarova**, B.Jolevska-Tuneska, I.Akturk, E.Ozcag, *Note on the distribution composition* $(x_+^\mu)^\lambda$, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, Springer, (2016), pp.1-13, IF=0,586.

2. E.Ozcag, **L.Lazarova**, B. Jolevska-Tuneska, *Defining compositions of* $x_+^\mu, |x|^\mu, x^{-s}$ *and* $x^{-s}\ln|x|$ *as a neutrix limit of regular sequences*, Communications in Mathematics and Statistics, Volume 4, Issue 1, Springer Berlin Heidelberg, (2016): pp. 63-80.

3.1 Неутрикс композиција на дистрибуциите x^{λ} и x_+^{μ} за $\lambda = -1, -2, \ldots, \mu > 0$ и $\lambda\mu \in \mathbb{Z}^-$

Нека $\mathcal{D}$ е просторот од сите тест функции, нека $\mathcal{D}[a,b]$ е просторот од сите тест функции со компактен носач којшто се содржи во интервалот $[a,b]$ и нека $\mathcal{D}'$ е просторот од дистрибуции којшто е дефиниран над $\mathcal{D}$.

Локално интеграбилните функции x_+^{λ}, x_-^{λ} и $|x|^{\lambda}$ се дефинирани за $\lambda > -1$ со:

$$x_+^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \; x_-^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, |x|^{\lambda} = x_+^{\lambda} + x_-^{\lambda}. \tag{3.1}$$

Дистрибуциите x_+^{λ}, x_-^{λ} и $|x|^{\lambda}$ се дефинирани индуктивно за $\lambda < -1$ и $\lambda \neq -2, -3, \ldots$ со

$$(x_+^{\lambda})' = \lambda x_+^{\lambda-1}, (x_-^{\lambda})' = -\lambda x_-^{\lambda-1}, |x|^{\lambda} = x_+^{\lambda} + x_-^{\lambda} \tag{3.2}$$

соодветно.

Тогаш за произволна тест функција $\varphi \in \mathcal{D}$ и за позитивен број s за кој важи $-s-1 < \lambda < -s$,

$$\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x) \rangle = \int_0^{\infty} x^{\lambda} \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx.$$

Доколку тест функцијата φ има носач којшто е содржан во интервалот $[-1, 1]$, тогаш

$$\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x) \rangle = \int_0^{1} x^{\lambda} \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda + k + 1)}.$$

За разлика од дефиницијата која што ја даваат Gelfand и Shilov во [39] дистрибуцијата x_+^{-s} ја дефинираме со:

$$x_+^{-s} = \frac{(-1)^{s-1} (\ln x_+)^{(s)}}{(s-1)!}$$

за $s = 1, 2, \ldots$.
На тој начин за произволна тест функција φ која има носач којшто е содржан во интервалот $[-1, 1]$, добиваме

$$\langle x_+^{-s}, \varphi(x)\rangle = \int_0^1 x^{-s}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]dx - \\ - \sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{(s-k-1)k!} - \frac{\phi(s-1)}{(s-1)!}\varphi^{(s-1)}(0) \quad (3.3)$$

за $s = 1, 2, \ldots$, каде што

$$\phi(s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{s}\frac{1}{k} & s \geq 1 \\ 0 & s = 0 \end{cases}.$$

Nicholas и Fisher во [40] ја дефинирале композицијата $(x_+^r)^{-s}$ како неутрикс граница на регуларната низа $[(x_+^r)^{-s}]_n$ за $r, s = 1, 2, \ldots$. Понатаму, во [31], Ozcag и останатите автори го разгледале случајот кога $r = 0$, т.е. s-тиот степен на функцијата на Heaviside, $H(x)$ дефинирана со $[H(x)]^{-s} = H(x)$. Композициите $(|x|^{r-1/2})^{-4s}$ и $(|x|^{\mu})^{-s}$ се дефинирани во [15, 30], соодветно.

За да ја дефинираме композицијата, $(x_+^{\mu})^{\lambda}$ за $\lambda = -1, -2, \ldots, \mu > 0$ и $\lambda\mu \in \mathbb{Z}^-$, ќе ја искористиме следната лема, [24].

Лема 3.1.1. Нека $\rho(x)$ е бесконечно диференцијабилната функција која беше дефинирана во глава 2, со цел да се дефинира регуларна низа од бесконечно диференцијабилни функции во дефиницијата 2.4.1 за композиција на дистрибуции. За $s \in \mathbb{Z}^+$ имаме:

$$\int_{-1}^{1} v^i \rho^{(s)}(v)dv = \begin{cases} 0, & 0 \leq i < s \\ (-1)^s s!, & i = s \end{cases}, \quad (3.4)$$

бидејќи $v^s\rho^(s)$ е парна функција, следува дека е

$$\int_{-1}^{0} v^s\rho^{(s)}(v)dv = \int_{0}^{1} v^s\rho^{(s)}(v)dv = \frac{1}{2}(-1)^s s! \tag{3.5}$$

$$\int_{-1}^{0} v^s \ln|v|\rho^{(s)}(v)dv = \int_{0}^{1} v^s \ln|v|\rho^{(s)}(v)dv = \frac{1}{2}(-1)^s s!\phi(s) + (-1)^s s! c(\rho) \tag{3.6}$$

$$\int_{0}^{1} v^s \ln(1-v)dv = -\frac{\phi(s)}{s}. \tag{3.7}$$

за $s = 0, 1, 2, \ldots,$ каде $c(\rho) = \int\limits_0^1 \ln t\rho(t)dt$.

Ќе ја докажеме следната теорема, [47]:

Теорема 3.1.1. Дистрибуцијата $(x_+^\mu)^{-m}$ постои и

$$(x_+^\mu)^{-m} = x_+^{-s} - (-1)^s \frac{(-1)^m m![2c(\rho) + \phi(m-1)] + s\phi(s-1)}{s!}\delta^{(s-1)}(x) \tag{3.8}$$

за $\mu > 0$, $m = 1, 2, \ldots$ и $\mu m = s (s \in \mathbb{Z}^+)$.

Доказ. Најпрво:

$$(-1)^{m-1}(m-1)![(x_+^\mu)^{-m}]_n = \begin{cases} \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|x^\mu - t|\delta_n^{(m)}(t)dt, & x \geq 0, \\ \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|t|\delta_n^{(m)}(t)dt, & x < 0 \end{cases}. \tag{3.9}$$

Тогаш следува дека

$$(-1)^{m-1}(m-1)!\int\limits_{-1}^{1}[(x_+^{\mu})^{-m}]_n dx = \int\limits_{-1}^{1} x^k \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|x_+^{\mu}-t|\delta_n^{(m)}(t)dtdx =$$

$$= \int\limits_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(m)}(t) \int\limits_{0}^{n^{-1/\mu}} x^k \ln|x^{\mu}-t|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(m)}(t) \int\limits_{n^{-1/\mu}}^{1} x^k \ln|x^{\mu}-t|dxdt + \int\limits_{-1}^{0} x^k \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|t|\delta_n^{(m)}(t)dxdt =$$

$$= \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu}\int\limits_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int\limits_{0}^{1} y^{-1+(k+1)/\mu}\ln|y-v|dydv +$$

$$+ \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu}\int\limits_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/\mu}\ln|y-v|dydv +$$

$$+ \frac{n^{m-(k+1)/\mu}}{\mu}\ln n\int\limits_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int\limits_{0}^{n} y^{-1+(k+1)/\mu}\ln|y-v|dy +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}n^m}{k+1}\int\limits_{-1}^{1}\ln|v/n|\rho^{(m)}(v)dv = I_1+I_2+I_3+I_4, \quad (3.10)$$

користејќи ги смените $y = nx^{\mu}$ и $v = nt$.
Имајќи ги во предвид занемарливите функции во неутриксот дадени во дефиницијата за неутрикс композиција, 2.4.2 од глава 2, следува дека:

$$N-\lim_{n\to\infty} I_3 = 0, \quad N-\lim_{n\to\infty} I_4 = 0 \qquad (3.11)$$

за $k = 0, 1, \ldots$ и

$$N - \lim_{n\to\infty} I_1 = 0 \tag{3.12}$$

за $k = 0, 1, \ldots, s-2$. Понатаму,

$$\int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln|y-v|dy = \int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln|y|dy +$$

$$+ \int_1^n y^{-1+(k+1)/\mu} \ln|1-v/y|dy = I_2' + I_2'' \tag{3.13}$$

каде што:

$$I_2' = \frac{\mu n^{(k+1)/\mu} \ln n}{(k+1)} + \frac{\mu^2[1-n^{(k+1)/\mu}]}{(k+1)^2} \tag{3.14}$$

и

$$I_2'' = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i} \int_1^n y^{-1-i+(k+1)/\mu} dy = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i \mu[n^{-i+(k+1)/\mu} - 1]}{i(k+1-\mu i)} \tag{3.15}$$

за $k = 0, 1, \ldots, s-2$. Од лема 3.1.1 и од равенствата (3.13),(3.14) и (3.15), следува дека

$$N - \lim_{n\to\infty} I_2 = \frac{(-1)^m (m-1)!}{s-k-1} \tag{3.16}$$

за $k = 0, 1, \ldots, s-2$., а потоа од равенствата (3.10),(3.11), (3.12) и (3.16) следува дека

$$N - \lim_{n\to\infty} \int_1^1 x^k \left[(x_+^{\mu})^{-m}\right]_n dx = -\frac{1}{s-k-1} \tag{3.17}$$

за $k = 0, 1, \ldots, s-2$. Кога $k = s-1$, тогаш:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\mu}\int\limits_{-1}^{1} \rho^{(m)}(v) \int\limits_{0}^{1} y^{m-1} \ln|y-v| dy dv = \\
&= \frac{1}{\mu}\int\limits_{0}^{1} \rho^{(m)}(v) \left[\int\limits_{0}^{v} y^{m-1}\ln|y-v|dy + \int\limits_{v}^{1} y^{m-1}\ln|y-v|dy\right] dv + \\
&+ \frac{1}{\mu}\int\limits_{-1}^{0} \rho^{(m)}(v) \left[\int\limits_{0}^{-v} y^{m-1}\ln|y-v|dy + \int\limits_{-v}^{1} y^{m-1}\ln|y-v|dy\right] dv = \\
&\qquad = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \quad (3.18)
\end{aligned}
$$

Користејќи ја замената $y = uv$ имаме:

$$
J_1 = \frac{1}{\mu}\int\limits_{0}^{1} v^m \rho^{(m)}(v) \int\limits_{0}^{1} u^{m-1}[\ln v + \ln(1-u)] du dv \qquad (3.19)
$$

и користејќи ја лема 3.1.1 имаме:

$$
\int\limits_{0}^{1} v^m \rho^{(m)}(v) \ln v \int\limits_{0}^{1} u^{m-1} du dv = (-1)^m (m-1)! [c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(m)] \qquad (3.20)
$$

и

$$\int_0^1 v^m\rho^{(m)}(v)\int_0^1 u^{m-1}\ln(1-u)dudv =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\int_0^1 \ln(1-u)d(u^m-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\int_0^1 \frac{u^m-1}{1-u}du =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^{m-1}(m-1)!\phi(m). \quad (3.21)$$

па користејќи ги равенствата (3.20), (3.21) и (3.22) се добива дека неутрикс границата:

$$N-\lim_{n\to\infty} J_1 = \frac{(-1)^m(m-1)!c(\rho)}{\mu}. \quad (3.22)$$

Сосема слично, користејќи ја замената $y = uv$ имаме:

$$J_3 = -\frac{1}{\mu}\int_{-1}^0 v^m\rho^{(m)}(v)\int_{-1}^0 u^{m-1}[\ln|v| + \ln(1-u)]dudv, \quad (3.23)$$

Оттука:

$$\int_{-1}^0 v^m\rho^{(m)}(v)\ln|v|\int_{-1}^0 u^{m-1}dudv = \frac{(-1)^{m-1}}{m}\int_{-1}^0 v^m\rho^{(m)}(v)\ln|v| =$$

$$= -(m-1)![c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(m)] \quad (3.24)$$

и

$$\int_{-1}^{0} v^m \rho^{(m)}(v) \int_{-1}^{0} u^{m-1} \ln(1-u)dudv =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^m(m-1)! \int_{-1}^{0} \ln(1-u)d(u^m-1) =$$

$$= \frac{1}{2}[(-1)^m-1](m-1)!\ln 2 - \frac{1}{2}(-1)^m(m-1)! \int_{-1}^{0} \frac{u^m-1}{u-1}du =$$

$$= \frac{1}{2}[(-1)^m-1](m-1)!\ln 2 + \frac{1}{2}(-1)^m(m-1)! \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i}{i}. \quad (3.25)$$

Од равенствата(3.24), (3.25) и (3.26) следува дека:

$$N - \lim_{n\to\infty} J_3 = \frac{[(-1)^m-1](m-1)!}{2\mu}\ln 2 + \frac{(m-1)!}{2\mu}\phi(m) + $$
$$+ \frac{(m-1)!}{2\mu} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i}{i} + \frac{(m-1)!}{\mu}c(\rho). \quad (3.26)$$

Уште повеќе

$$J_2 = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^1 \rho^{(m)}(v)\int\limits_v^1 y^{m-1}[\ln y + \ln(1-v/y)]dydv =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int\limits_0^1 \rho^{(m)}(v)\int\limits_v^1 y^{m-1}\ln y dydv - \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int\limits_0^1 v^i\rho^{(m)}(v)\int\limits_v^1 y^{m-i-1}dydv =$$

$$= \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu m} - \frac{1}{\mu m^2}\int\limits_0^1 \rho^{(m)}(v)dv +$$

$$- \frac{1}{\mu}\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int\limits_0^1 (v^i - v^m)\rho^{(m)}(v)dv =$$

$$= \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu m} + \frac{\rho^{(m-1)(0)}}{\mu m^2} + \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu}[2\phi(m-1)-\phi(m)] -$$

$$- \frac{1}{\mu}\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int\limits_0^1 v^i\rho^{(m)}(v)dv =$$

$$= \frac{\rho^{(m-1)}(0)}{\mu m^2} + \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu}\phi(m-1) +$$

$$- \frac{1}{\mu}\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int\limits_0^1 v^i\rho^{(m)}(v)dv \quad (3.27)$$

бидејќи

$$\sum_{i=1,i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)} = \frac{2\phi(m-1)-\phi(m)}{m} = \frac{\phi(m-1)}{m} - \frac{1}{m^2}.$$

Конечно имаме:

$$J_4 = \frac{1}{\mu}\int\limits_{-1}^{0}\rho^{(m)}(v)\int\limits_{-v}^{1} y^{m-1}[\ln y + \ln(1-v/y)]dydv =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int\limits_{-1}^{0}\rho^{(m)}(v)\int\limits_{-v}^{1} y^{m-1}\ln y dydv - \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int\limits_{-1}^{0} v^i\rho^{(m)}(v)\int\limits_{-v}^{1} y^{m-i-1}dydv =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int\limits_{-1}^{0}\left[\frac{(-v)^m-1}{m^2} - \frac{(-v)^m\ln|v|}{m}\right]\rho^{(m)}(v) + \frac{1}{\mu m}\int\limits_{-1}^{0} v^m\ln|v|\rho^{(m)}(v)dv -$$

$$- \frac{1}{\mu}\sum_{i=1, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int\limits_{0}^{1}\left[v^i - (-1)^{m-i}v^m\right]\rho^{(m)}(v)dv =$$

$$= \frac{(m-1)!}{2\mu m} - \frac{\rho^{(m-1)}(0)}{\mu m^2} - \frac{[1-(-1)^m]m!}{2\mu}[\phi(m) + 2c(\rho)] +$$

$$- \frac{1}{\mu}\sum_{i=1, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)}\int\limits_{0}^{1} v^i\rho^{(m)}(v)dv - \frac{(-1)^m(m-1)!}{2\mu m} +$$

$$+ \frac{(m-1)!}{2\mu}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+i}}{i} - \frac{[1-(-1)^m](m-1)!\ln 2}{2\mu} \quad (3.28)$$

бидејќи

$$\sum_{i=1, i\neq m}^{\infty}\frac{1}{i(m-i)} = -\frac{(-1)^m}{m} + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+i}}{i} - \frac{[1-(-1)^m]}{m}\ln 2.$$

Слично добиваме:

$$I_2 = \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-1}[\ln y + \ln(1-v/y)]dydv =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_{-1}^{1}\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-1}\ln(1-v/y)dydv -$$

$$-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(m)}(v)\int_{1}^{n} y^{m-i-1}dydv =$$

$$= -\frac{(-1)^m(m-1)!\ln n}{\mu} - \frac{1}{\mu}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-m)}\int_{-1}^{1}(n^{m-i}-1)v^i\rho^{(m)}(v)dv,$$

па за неутрикс границата ќе имаме:

$$\underset{n\to\infty}{N-\lim} I_2 = -\frac{1}{\mu}\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{i(i-m)}\int_{-1}^{1} v^i\rho^{(m)}(v)dv. \tag{3.29}$$

Од равенствата (3.10), (3.11), (3.18), (3.22) и (3.26)-(3.29), следува дека:

$$\underset{n\to\infty}{N-\lim}\int_{-1}^{1} x^{s-1}[(x_+^{\mu})^{-m}]_n dx = \frac{(-1)^m(m-1)!}{\mu}[c(\rho)+\phi(m-1)] =$$

$$= \frac{(-1)^m m!}{s}[c(\rho)+\phi(m-1)] \tag{3.30}$$

Сега, го разгледуваме случајот кога $k=s$. Ако $x<0$ и ако ψ

е произволна непрекината функција, тогаш:

$$(-1)^{m-1}(m-1)!\int\limits_{-1}^{0} x^s[(x_+^\mu)^{-m}]_n\psi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} x^s\psi(x) \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|t|\delta_n^{(m)}(t)dtdx =$$

$$= n^m \int\limits_{-1}^{0} x^s\psi(x)dx \int\limits_{-1}^{1} \ln|v/n|\rho^{(m)}(v)dv,$$

каде што $v = nt$. Оттука,

$$N - \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{0} x^s[(x_+^\mu)^{-m}]_n\psi(x)dx = 0. \tag{3.31}$$

Ако во I_1, $k = s$, тогаш:

$$\int\limits_{0}^{n^{-1/\mu}} x^s[(x_+^\mu)^{-m}]_n dx = \frac{n^{-1/\mu}}{\mu} \int\limits_{-1}^{0} \rho^{(m)} \int\limits_{0}^{1} y^{m-1+1/mu} \ln|(y-v)/n|dydv$$

и ако ψ е произволна непрекината функција, тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{n^{-1/\mu}} x^s[(x_+^\mu)^{-m}]_n\psi(x)dx = 0. \tag{3.32}$$

Ако $x^\mu \geq \frac{1}{n}$, тогаш ќе имаме:

$$(-1)^{m-1}(m-1)! x^s [(x_+^\mu)^{-m}]_n = \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln|x^\mu - t| \delta_n^{(m)}(t) dt =$$

$$= n^m \int\limits_{-1}^{1} \ln|x^\mu - v| \rho^{(m)}(v) dv =$$

$$= n^m \int\limits_{-1}^{1} \left[\ln|x^\mu| - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i n^i x^{\mu i}} \right] \rho^{(m)}(v) dv =$$

$$= -\sum_{i=m}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \frac{v^i}{i n^{i-m} x^{\mu i}} \rho^{(m)}(v) dv$$

и следува дека:

$$\left|(m-1)! [(x_+^\mu)^{-m}]_n\right| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} \frac{|v|^i}{i n^{i-m} x^{\mu i}} \left|\rho^{(m)}(v)\right| dv$$

$$\leq \sum_{i=m}^{\infty} \frac{\kappa_m}{i n^{i-m} x^{\mu i}}$$

каде што $\kappa_m = \int\limits_{-1}^{1} \left|\rho^{(m)}(v)\right| dv$ за $m = 1, 2, \ldots$.
Ако сега $n^{-1/\mu} < \eta < 1$ тогаш:

$$(m-1)! \int\limits_{n^{-1/\mu}}^{\eta} \left|[(x_+^\mu)^{-m}]_n\right| dx \leq \kappa_m \sum_{i=m}^{\infty} \frac{n^{m-i}}{i} \int\limits_{n^{-1/\mu}}^{\eta} x^{s-\mu i} dx =$$

$$= \kappa_m \sum_{i=m}^{\infty} \frac{n^{-1/\mu}}{\mu i} \int\limits_{1}^{n\eta^\mu} y^{m-i+1/\mu-1} dy =$$

$$= \begin{cases} \kappa_m \sum\limits_{i=m}^{\infty} \frac{n^{-1/\mu}}{\mu i(m-i+1/\mu}[(n\eta^\mu)^{m-i+1/\mu} - 1], & \mu \neq 1 \\ \kappa_m \sum\limits_{i=m, i\neq m+1}^{\infty} \frac{n^{-1}}{\mu i(m-i+1}[(n\eta^\mu)^{m-i+1} - 1] + \frac{\kappa_m n^{-1}\ln(n\eta)}{m+1}, & \mu = 1 \end{cases}.$$

Следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \left|[(x_+^\mu)^{-m}]_n\right| = O(\eta),$$

за $m = 1, 2, \ldots$ и ако ψ е произволна непрекината функција, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{n^{-1/\mu}}^{\eta} x^s[(x_+^\mu)^{-m}]_n \psi(x)dx \right| = O(\eta) \tag{3.33}$$

за $m = 1, 2, \ldots$. Ако $\varphi(x)$ е произволна тест функција од $\mathcal{D}[-1, 1]$, тогаш од теоремата на Taylor имаме:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\varphi^{(s)}(\xi x)}{s!} x^s, \quad 0 < \xi < 1.$$

Тогаш:

$$\langle[(x_+^\mu)^{-m}]_n,\varphi(x)\rangle=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int\limits_{-1}^{1}x^k\left[(x_+^\mu)^{-m}\right]_n dx+$$
$$+\frac{1}{s!}\int\limits_{-1}^{0}x^s\left[(x_+^\mu)^{-m}\right]_n\varphi^{(s)}(\xi x)dx+$$
$$+\frac{1}{s!}\int\limits_{0}^{n^{-1/\mu}}x^s\left[(x_+^\mu)^{-m}\right]_n\varphi^{(s)}(\xi x)dx+$$
$$+\frac{1}{s!}\int\limits_{n^{-1/\mu}}^{\eta}x^s\left[(x_+^\mu)^{-m}\right]_n\varphi^{(s)}(\xi x)dx+$$
$$+\frac{1}{s!}\int\limits_{\eta}^{1}x^s\left[(x_+^\mu)^{-m}\right]_n\varphi^{(s)}(\xi x)dx.$$

Користејќи ги равенствата (3.17), (3.30)-(3.33) и користејќи дека низата $\left\{[(x_+^\mu)^{-m}]_n\right\}$ конвергира рамномерно кон x^{-s} на интервалот $[\eta,1]$, па следува дека:

$$N-\lim_{n\to\infty}\langle[(x_+^\mu)^{-m}]_n,\varphi(x)\rangle=\frac{(-1)^m m!}{s!}[2c(\rho)+\phi(m-1)]\varphi^{(s-1)}(0)-$$
$$-\sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)}+\int\limits_{\eta}^{1}\varphi^{(s)}(\xi x)dx+O(\eta).$$

Бидејќи η може да биде избрано доволно мало, користејќи го равенството (3.3), следува дека:

$$N-\lim_{n\to\infty}\langle[(x_+^{\mu})^{-m}]_n,\varphi(x)\rangle=\frac{(-1)^m m!}{s!}[2c(\rho)+\phi(m-1)]\varphi^{(s-1)}(0)-$$
$$-\sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)}+\int_\eta^1\varphi^{(s)}(\xi x)dx+O(\eta)=$$
$$=\int_0^1 x^{-s}\left[\varphi(x)-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right]dx-\sum_{k=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(s-k-1)}+$$
$$+\frac{(-1)^m m!}{s!}[2c(\rho)+\phi(m-1)]\varphi^{(s-1)}(0)=\langle x_+^{-s},\varphi(x)\rangle+$$
$$+(-1)^s\frac{(-1)^m m![2c(\rho)+\phi(m-1)]+s\phi(s-1)}{s!}\langle\delta^{(s-1)}(x),\varphi(x)\rangle,$$

На овој начин е докажано тврдењето на теоремата, т.е. докажано е равенството (3.8) на интервалот $[-1,1]$. Но тоа е доволно за да се заклучи дека теоремата важи на произволен интервал.

Последица 3.1.1. Дистрибуцијата $(x_-^{\mu})^{-m}$ постои и

$$(x_-^{\mu})^{-m}=x_-^{-s}+\frac{(-1)^m m![2c(\rho)+\phi(m-1)]+s\phi(s-1)}{s!}\delta^{(s-1)}(x),\quad(3.34)$$

за $\mu>0, m=1,2,\dots$ и $\mu m=s\in\mathbb{Z}^+$.

Доказ. Равенството (4.8) следува со замена на x со $-x$ во равенството (3.8).

Следната последица е специјален случај на теоремата 3.2.3.

Последица 3.1.2. Нека со $F_r(x)$ ја означиме дистрибуцијата x_-^{-r}, тогаш дистрибуцијата $F_r(x_+^{1/r})$ постои и

$$\left(x_+^{\frac{1}{r}}\right)^{-r}=x_+^{-1}-(-1)^r r![2c(\rho)+\phi(r-1)]\delta(x)\qquad(3.35)$$

за $r=1,2,\dots$, каде што $\phi(r)$ и $c(\rho)$ се дефинирани во лема 3.1.1.

3.2 Неутрикс композиции на дистрибуциите x_+^μ, $|x|^\mu$, x^{-s} и $x^{-s}\ln|x|$

Локално интеграбилните функции $x_+^\lambda, x_-^\lambda, |x|^\lambda$ за $\lambda > -1$ се дефинирани со (3.1), додека дистрибуциите x_+^λ и x_-^λ и $|x|^\lambda$ се дефинирани за $\lambda < -1, \lambda \neq -2, -3, \dots$ со (3.2) од претходното поглавје.

Дистрибуциите x_+^r и x_-^r се дефинирани соодветно со:

$$x_+^r = \frac{(-1)^{r-1}(\ln x_+)^{(r)}}{(r-1)!}, \quad x_-^{-r} = -\frac{(\ln x_-)^{(r)}}{(r-1)!}$$

за $r = 1, 2, \dots$, и ваквата дефинираност се разликува од Gelfand и Shilov, [34, 39].

Во [40] од страна на Nicholas и Fisher е дефинирана композицијата $(x_+^r)^{-s}$ како неутрикс граница на $\left[(x_+^r)^{-s}\right]_n$. Уште повеќе Ozcag во [31] го има разгледано случајот кога $r = 0$, со други зборови s-тиот степен на функцијата на Heaviside $H(x)$ е дефиниран со $[H(x)]^{-s} = H(x)$, во [31].
Во [20] се пресметани композициите $(x_+^\mu)_+^{-s}$, $(|x|^\mu)_+^{-s}$ за $\mu > 0$ и $\mu s \neq 1, 2, \dots$. Овие резултати се дадени во следната теорема:

Теорема 3.2.1. Композициите на дистрибуциите $(x_+^\mu)_+^{-s}$ и $(|x|^\mu)_+^{-s}$ постојат и

$$(x_+^\mu)_+^{-s} = x_+^{\mu s}, \quad (|x|^\mu)_+^{-s} = (|x|^\mu)_+^{-\mu s} \tag{3.36}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \dots$ и $\mu s \neq 1, 2, \dots$.

Неутрикс композицијата $(|x|^\mu)^{-s}$ за $\mu > 0$, $s = 1, 2, \dots$ и $\mu s \neq 1, 2, \dots$ е дефинирана во [14] од страна на Fisher и Jolevska со $(|x|^\mu)^{-s} = |x|^{\mu s}$. Случајот кога $\mu s = 1, 2, \dots$ е разгледан од страна на Ozcag во [30] и е даден со следната теорема:
Теорема 3.2.2. Композицијата на дистрибуциите $(|x|^\mu)^{-s}$ постои и

$$(|x|^\mu)^{-s} = |x|^{-m} + L_{m,s}\delta^{(m-1)}(x) \tag{3.37}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots,$ и $\mu s = m (m \in \mathbb{Z}^+)$, каде

$$L_{m,s} = [1 + (-1)^{m-1}]\frac{(-1)^s s![2c(\rho) + \phi(s-1)] + m\phi(m-1)}{m!}.$$

и $c(\rho) = \int\limits_0^1 \ln t\rho(t)dt$, $\phi(s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{1}{k} & s \geq 1 \\ 0 & s = 0 \end{cases}.$

Користејќи ја лемата (3.1.1) во следната теорема ги дефинираме композициите $(x_+^\mu)_-^{-s}$ и $(|x|^\mu)_-^{-s}$ кога $\mu s = 1, 2, \ldots,$[32].
Во докажувањето на следните теореми ја користиме дефиницијата за регуларни дистрибуции и Temple - овата δ-низа од регуларни дистрибуции, дадена од Temple во [36].

Теорема 3.2.3. Композицијата на дистрибуции $(x_+^\mu)_-^{-s}$ постои и

$$(x_+^\mu)_-^{-s} = \frac{(-1)^{m+s}c(\rho)}{\mu(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x) \tag{3.38}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots,$ каде $\mu s = m \in \mathbb{Z}^+$.
Специјален случај

$$\left(x_+^{\frac{1}{s}}\right)_-^{-s} = (-1)^{s+1} s c(\rho)\delta(x).$$

Доказ. Нека

$$(x_-^{-s})_n = x_-^{-s} * \delta_n(x) = -\frac{1}{(s-1)!}\ln x_- * \delta_n^{(s)}(x)$$

за $s = 1, 2, \ldots$. Тогаш

$$-(s-1)!(x_-^{-s})_n = \begin{cases} \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln(t-x)\delta_n^{(s)}(t)dt, & x < -1/n, \\ \int\limits_{x}^{1/n} \ln(t-x)\delta_n^{(s)}(t)dt, & |x| \leq 1/n, \\ 0, & x > 1/n \end{cases},$$

па се добива дека

$$-(s-1)![(x_+^\mu)_-^{-s}]_n = \begin{cases} \int\limits_{x^\mu}^{1/n} \ln(t-x^\mu)\delta_n^{(s)}(t)dt, & 0 \le x \le n^{-1/\mu}, \\ \int\limits_0^{1/n} \ln t\delta_n^{(s)}(t)dt, & x < 0, \\ 0, & x > n^{-1/\mu}. \end{cases},$$

за $\mu > 0, s = 0, 1, 2, \ldots$. Следува дека низата од регуларни дистрибуции $[(x_+^\mu)_-^{-s}]_n$ има носач којшто е содржан во $(-\infty, n^{-1/\mu})$. Оттука имаме:

$$-(s-1)! \int\limits_0^{n^{-1/\mu}} [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^i dx = \int\limits_0^{n^{-1/\mu}} x^i \int\limits_{x^\mu}^{1/n} \ln(t-x^\mu)\delta_n^{(s)}(t)dtdx =$$

$$= \int\limits_0^1 \delta_n^{(s)}(t) \int\limits_0^{t^{1/\mu}} \ln(t-x^\mu)dxdt =$$

$$= \frac{n^{s-(i+1)/\mu}}{\mu} \int\limits_0^1 v^{(i+1)/\mu}\rho^{(s)}(v) \int\limits_0^1 [\ln(v-uv) - \ln n]u^{(i+1)/\mu-1}dudv,$$

при што беше искористена смената $x^\mu = tu$ и $nt = v$. Следува дека

$$\int\limits_0^{n^{-1/\mu}} [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^i dx$$

е занемарлив за $i \neq m-1$. Исто така следува дека за $i = m$,

$$\int\limits_0^{n^{-1/\mu}} \mid [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^m \mid dx = O(n^{-1}).$$

Кога $i = m - 1$ имаме дека

$$-\mu(s-1)! \int\limits_0^{n^{-1/\mu}} [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^{m-1} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 v^s \rho^{(s)}(v) \int\limits_0^1 [\ln(v - uv) - \ln n] u^{s-1} du dv.$$

Делот од интегралот којшто содржи $\ln n$ е занемарлив. Имајќи ја во предвид лема 3.1.1 имаме

$$\int\limits_0^1 v^s \rho^{(s)}(v) \int\limits_0^1 [\ln(v - uv) - \ln n] u^{s-1} du dv =$$

$$= s^{-1} \int\limits_0^1 v^s \ln v \rho^{(s)}(v) dv + s^{-1} \int\limits_0^1 v^s \rho^{(s)}(v) dv \int\limits_0^1 \ln(1-u) d(u^s - 1) =$$

$$= s^{-1}(-1)^s s! [c(\rho) + \frac{1}{2}\phi(s)] + \frac{1}{2}(-1)^s s! [-\frac{\phi(s)}{s}] =$$

$$= (-1)^s (s-1)! c(\rho).$$

Оттука

$$\int\limits_0^{n^{-1/\mu}} [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^{m-1} dx = -(-1)^s \mu^{-1} c(\rho).$$

Нека φ е произволна функција со компактен носач којшто се содржи во (a, b), при што можеме да претпоставиме дека $a < 0$ и $b > 1$. Користејќи го Тејлоровиот развој:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{\varphi^{(m)}(\xi x)}{m!} x^m, \quad 0 \le \xi \le 1.$$

Од тоа што веќе го покажавме следува дека

$$| \int_0^1 [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^m \varphi^{(m)}(\xi x) dx | \leq$$

$$\leq \sup_{a<x<b} \{| \varphi^{(k)}(x) |\} \int_0^{n^{-1/\mu}} | [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^{m-1} | dx \to 0$$

кога $n \to \infty$ и за неутрикс границата добиваме

$$N - \lim_{n\to\infty} \int_0^b [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n \varphi(x) dx =$$

$$= N - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x^i \int_0^{n^{-1/\mu}} [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^i dx +$$

$$+ \frac{1}{m!} \int_0^b [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n x^m \varphi^{(m)}(\xi x) dx =$$

$$= -\frac{(-1)^s c(\rho) \varphi^{(m-1)}(0)}{\mu(m-1)!}.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} \int_0^a [(x_+^\mu)_-^{-s}]_n \varphi(x) dx &= \int_0^{1/n} \ln t \delta_n^{(s)}(t) dt \int_a^0 \varphi(x) dx = \\ &= n^s \int_0^1 \ln(v/n) \rho^{(s)}(v) dv \int_a^0 \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

и за неутрикс границата се добива дека

$$N-\lim_{n\to\infty}\int_a^0[(x_+^\mu)_-^{-s}]_n,\varphi(x)dx=0.$$

Оттука,

$$\begin{aligned}N-\lim_{n\to\infty}\langle[(x_+^\mu)_-^{-s}]_n,\varphi(x)\rangle = N-\lim_{n\to\infty}\int_a^b[(x_+^\mu)_-^{-s}]_n\varphi(x)dx &=\\ =-\frac{(-1)^s c(\rho)\varphi^{(m-1)}(0)}{\mu(m-1)!} &=\\ =\frac{(-1)^{m+s}c(\rho)}{\mu(m-1)!}\langle\delta^{(m-1)}(x),\varphi(x)\rangle\end{aligned}$$

со што е докажана теоремата. □

Теорема 3.2.4. [32], Композицијата на дистрибуции $(|x|^\mu)_-^{-s}$ постои и

$$(|x|^\mu)_-^{-s}=\frac{2(-1)^{m+s}c(\rho)}{\mu(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x) \tag{3.39}$$

за $\mu>0, s=1,2,\ldots$, каде $\mu s=m=1,3,5,\ldots$, и

$$(|x|^\mu)_-^{-s}=0 \tag{3.40}$$

за $\mu>0, s=1,2,\ldots$, каде $\mu s=m\neq 1,3,5,\ldots$. Специјален случај,

$$(|x|^{\frac{1}{s}})_-^{-s}=2sc(\rho)\delta(x).$$

Доказ. Имаме,

$$-(s-1)![(|x|_+^\mu)_-^{-s}]_n=\begin{cases}\int\limits_{|x|^\mu}^{1/n}\ln(t-|x|^\mu)\delta_n^{(s)}(t)dt, & 0\le|x|^\mu\le 1/n,\\ 0, & |x|^\mu>1/n.\end{cases}. \tag{3.41}$$

за $\mu s = 1, 3, 5, \ldots$.
Функцијата $(|x|^{\mu})_{-}^{-s}$ е парна и нејзиниот носач е содржан во $(-n^{-1/\mu}, n^{-1/\mu})$. Следува дека

$$\int_{-n^{-1/\mu}}^{n^{-1/\mu}} [(|x|_{+}^{\mu})_{-}^{-s}]_n x^i dx = 0, \tag{3.42}$$

за непарни вредности на i.
За парни вредности на i

$$\int_{-n^{-1/\mu}}^{n^{-1/\mu}} [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n x^i dx = 2 \int_{0}^{n^{-1/\mu}} [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n x^i dx \tag{3.43}$$

и е занемарлив, освен кога $i = m-1$. Оттука ако φ е произволна тест функција со компактен носач, за неутрикс границата важи:

$$N-\lim_{n\to\infty} \langle [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n, \varphi(x)\rangle = 2\, N-\lim_{n\to\infty} \langle [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n, \varphi(x)\rangle.$$

Оттука следува равенството (3.40).

Кога $\mu s = m \neq 1, 3, 5, \ldots, i = \mu s - 1 = m - 1$ е непарен,

$$\int_{-n^{-1/\mu}}^{n^{-1/\mu}} [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n x^i dx$$

е или еднаков на 0 или е занемарлив за $i = 0, 1, 2, \ldots$ и $\mu s \neq 1, 3, 5, \ldots$.
За неутрикс границата следува дека,

$$N-\lim_{n\to\infty} \langle [(|x|^{\mu})_{-}^{-s}]_n, \varphi(x)\rangle = 0 = \langle 0, \varphi(x)\rangle$$

за $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\mu s \neq 1, 3, 5, \ldots$. Оттука и следува равенството (3.41).$\square$

За да добиеме некои резултати ќе ја користиме теоремата која што е докажана во [47].

Теорема 3.2.5. Композицијата $(x_+^\mu)^{-s}$ постои и

$$(x_+^\mu)^{-s} = x_+^{-m} - (-1)^m L_{m,s}^* \delta^{(m-1)}(x) \tag{3.44}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s = m \in \mathbb{Z}$, каде

$$L_{m,s}^* = \frac{(-1)^s s![2c(\rho) + \phi(s-1)] + m\phi(m-1)}{m!}.$$

Во специјален случај имаме:

$$(x_+^{\frac{1}{s}})^{-s} = x_+^{-1} - (-1)^s s![2c(\rho) + \phi(s-1)]\delta(x).$$

Последица 3.2.1. Композицијата на дистрибуциите $(x_+^\mu)_+^{-s}$ постои и

$$(x_+^\mu)_+^{-s} = x_+^{-m} - (-1)^m [L_{m,s}^* + \frac{c(\rho)}{\mu(m-1)!}]\delta^{(m-1)}(x) \tag{3.45}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s = m \in \mathbb{Z}^+$.

Доказ. Равенството (3.45) следува од претходната теорема и теорема 3.2.3 и имајќи во предвид дека $x^{-s} = x_+^{-s} + (-1)^s x_-^{-s}$.
$\square$

Последица 3.2.2. Композицијата на дистрибуциите $(|x|^\mu)_+^{-s}$ постои и

$$(|x|^\mu)_+^{-s} = |x|^{-m} + [L_{m,s} - \frac{2(-1)^m c(\rho)}{\mu(m-1)!}]\delta^{(m-1)}(x), \tag{3.46}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s = m = 1, 3, 5, \ldots$, и

$$(|x|^\mu)_+^{-s} = |x|^{-m} + L_{m,s}\delta^{(m-1)}(x) \tag{3.47}$$

за $\mu > 0, s = 1, 2, \ldots$ и $\mu s = m \neq 1, 3, 5, \ldots$.

Доказ. Равенствата (3.46) и (3.47) следуваат од теорема 3.2.2 и теорема 3.2.4, ако се земе во предвид дека $x^{-s} = x_+^{-s} + (-1)^s x_-^{-s}$. $\square$

Во теоремата која ќе биде докажана ја разгледуваме композицијата на дистрибуциите $x^{-s}\ln|x|$ и x_+^r. Fisher и Tas ја дефинирале композицијата на $x^{-1}\ln|x|$ и x_+^r во [21]. Исто така Fisher ја дефинирал композицијата на $x^{-s}\ln^m|x|$ и x^r во [23]. Композиции на слични дистрибуции биле пресметани во [16] и [17]. За да го докажеме нашиот последен резултат, објавен во[32], ќе ја користиме следната теорема докажана од Fisher и Nicholas во [40].

Теорема 3.2.6. Композицијата на дистрибуциите $(x_+^r)^{-s}$ постои и

$$(x_+^r)^{-s} = x_+^{-rs} + K_{r,s}\delta^{(rs-1)}(x) \tag{3.48}$$

за $r, s = 1, 2, \ldots$, каде

$$K_{r,s} = (-1)^{rs-1}\frac{(-1)^s s![2c(\rho) + \phi(s-1)] + rs\phi(rs-1)}{(rs)!}.$$

Дистрибуциите $x_+^{-1}\ln x_+$ и $x^{-1}\ln|x|$ се дефинирани со:

$$x_+^{-1}\ln x_+ = \frac{1}{2}(\ln^2 x_+)', \quad x^{-1}\ln|x| = \frac{1}{2}(\ln^2|x|)'.$$

Индуктивно следува дека:

$$\begin{aligned} x_+^{-s-1}\ln x_+ &= \phi(s)x_+^{-s-1} + \frac{(-1)^s}{s!}(x_+^{-1}\ln x_+)^{(s)} = \\ &= \phi(s)x_+^{-s-1} + \frac{(-1)^s}{2s!}(\ln^2 x_+)^{(s+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_+^{-s-1}\ln|x| &= \phi(s)x^{-s-1} + \frac{(-1)^s}{s!}(x^{-1}\ln|x|)^{(s)} = \\ &= \phi(s)x^{-s-1} + \frac{(-1)^s}{2s!}(\ln^2|x|)^{(s+1)} \end{aligned}$$

за $s = 1, 2, \dots$.

Во доказот, ќе ја користиме следнава лема, [35].

Лема 3.2.1. Ако φ е произволна функција во $\mathcal{D}$ со носач којшто се содржи во $[-1,1]$, тогаш:

$$\begin{aligned}\langle x_+^{-s}, \varphi(x)\rangle &= \int_0^1 x^{-s}\left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}x^i\right]dx - \\ &- \sum_{i=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(s-i-1)} - \frac{\phi(s-1)\varphi^{(s-1)}(0)}{(s-1)!}\end{aligned}$$

за $s = 1, 2, \dots$, и

$$\begin{aligned}\langle x_+^{-s}\ln x_+, \varphi(x)\rangle &= \int_0^1 x^{-s}\ln x\left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{s-1}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}x^i\right]dx - \\ &- \sum_{i=0}^{s-2}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!(s-i-1)^2} - \frac{\phi_1(s-2)\varphi^{(s-1)}(0)}{(s-1)!}\end{aligned}$$

за $s \geq 2$, каде $\phi_1(s) = \sum\limits_{i=1}^{s+1}\frac{\phi(i)}{i}$.

Теорема 3.2.7. Композицијата на дистрибуциите $x^{-s}\ln|x|$ и x_+^r постои и

$$(x_+^r)^{-s}\ln|x_+^r| = rx_+^{-rs}\ln x_+ + K_{r,s}^*\delta^{(rs-1)}(x), \tag{3.49}$$

за $s = 1, 2, \dots$ каде што $c_1(\rho) = \int\limits_0^1 \ln^2 t\rho^{(s-1)}(t)dt$ и

$$K_{r,s}^* = \frac{(-1)^{rs-1}}{(rs-1)!}\{\frac{[1+(-1)^{s+1}]c_1(\rho)}{2(s-1)!} + \phi(s-1)[K_{r,s} + \phi(rs-1)]\}.$$

Доказ. Ставаме:

$$(x^{-s}\ln|x|)_n = \phi(s-1)(x^{-s})_n + \frac{(-1)^{s-1}}{2(s-1)!}(\ln^2|x|) * \delta_n^{(s)}(x)$$

$$[((x_+^r)^{-s}\ln|x_+^r|)^{(s)}]_n = \phi(s-1)[(x_+^r)^{-s})]_n + \frac{(-1)^{s-1}}{2(s-1)!}[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}]_n. \quad (3.50)$$

Важи дека:

$$[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}]_n = \begin{cases} \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln^2|x^r - t|\delta_n^{(s)}(t)dt & x \geq 0, \\ \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln^2|t|\delta_n^{(s)}(t)dt & x < 0 \end{cases}. \quad (3.51)$$

Тогаш

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}]_n dx = \int\limits_{-1}^{1} x^k \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln^2|x_+^r - t|\delta_n^{(s)}(t)dtdx =$$

$$= \int\limits_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(s)}(t) \int\limits_{0}^{n^{-1/r}} x^k \ln^2|x^r - t|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(s)}(t) \int\limits_{n^{-1/r}}^{1} x^k \ln^2|x^r - t|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(s)}(t)\ln^2|t| \int\limits_{-1}^{0} x^k dxdt =$$

$$= \frac{n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{0}^{1} y^{-1+(k+1)/r} \ln^2 \mid \frac{y-v}{n} \mid dydv+$$

$$+ \frac{n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \ln^2 \mid \frac{y-v}{n} \mid dydv+$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} n^s \int\limits_{-1}^{1} \ln^2 |v/n| \rho^{(s)}(v) dv =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \quad (3.52)$$

користејќи ја замената $y = nx^r$ и $v = nt$. Следува дека

$$N - \lim_{n\to\infty} I_3 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

$$N - \lim_{n\to\infty} I_1 = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.54)$$

Имаме,

$$I_2 = \frac{n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \ln[|1-v/y| + \ln y - \ln n]^2 dydv =$$

$$= \frac{n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \ln^2 |1-v/y| dydv+$$

$$+ \frac{2n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \ln y \ln |1-v/y| dydv+$$

$$- \frac{2n^{(rs-k-1)/r}}{r} \ln n \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \ln |1-v/y| dydv =$$

$$= I_{21} + I_{22} + I_{23}. \quad (3.55)$$

Бидејќи $\int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v)dv = 0$ за $s = 1, 2, \dots,$ од лема 3.1.1, за неутрикс границата следува дека

$$N - \lim_{n\to\infty} I_{23} = 0. \tag{3.56}$$

Имаме,

$$I_{21} = \frac{n^{(rs-k-1)/r}}{r} \int\limits_{-1}^{1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{-1+(k+1)/r} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{iy^i}\right)^2 dydv =$$

$$= \frac{2n^{(rs-k-1)/r}}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi(i)}{i+1} \int\limits_{-1}^{1} v^{i+1} \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{(k+1)/r-i-2} dydv =$$

$$= \frac{2n^{(rs-k-1)/r}}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi(i)}{i+1} \frac{r[n^{(k+1)/r-i-1} - 1]}{k - r(i+1) + 1} \int\limits_{-1}^{1} v^{i+1} \rho^{(s)}(v) dv$$

каде $\ln^2(1 - y/v) = 2 \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\phi(i) v^{i+1}}{(i+1) y^{i+1}}$ и следува дека

$$N - \lim_{n\to\infty} I_{21} = \frac{2\phi(s-1)}{s(rs-k-1)} \int\limits_{-1}^{1} v^s \rho^{(s)}(v) dv =$$

$$= \frac{2(-1)^s (s-1)! \phi(s-1)}{rs-k-1} \tag{3.57}$$

со користење на лема 3.1.1 за $k = 0, 1, 2, \dots, rs-2$.

Конечно

$$I_{22} = -\frac{2n^{(rs-k-1)/r}}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int\limits_{-1}^{1} v^i \rho^{(s)}(v) \int\limits_{1}^{n} y^{(k+1)/r-i-1} \ln y dydv =$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left[\frac{n^{s-i} \ln n}{k - ri + 1} - \frac{r[n^{s-i} - n^{(rs-k-1)/r}]}{(k - ri + 1)^2}\right] \int\limits_{-1}^{1} v^i \rho^{(s)}(v) dv$$

и следува дека

$$N-\lim_{n\to\infty} I_{22} = \frac{2r}{s(rs-k-1)^2}\int\limits_{-1}^{1} v^i\rho^{(s)}(v)dv = \frac{2r(-1)^s(s-1)!}{(rs-k-1)^2} \tag{3.58}$$

за $k=0,1,2,\ldots,rs-2$.
Оттука

$$N-\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1} x^k \int\limits_{-1/n}^{1/n} \ln^2|x_+^r - t|\delta_n^{(s)}(t)dtdx =$$
$$= 2(-1)^s s(s-1)!\left[\frac{\phi(s-1)}{rs-k-1} + \frac{r}{(rs-k-1)^2}\right] \tag{3.59}$$

за $k=0,1,2,\ldots,rs-2$, користејќи ги равенствата (3.52) - (3.58).
Да го разгледаме случајот кога $k=rs-1$.

$$r\int\limits_{-1}^{1} x^{rs-1}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n dx = \int\limits_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int\limits_{0}^{1} y^{s-1}\ln^2|\frac{y-v}{n}|dydv +$$
$$+\int\limits_{-1}^{1}\rho^{(s)}(v)\int\limits_{1}^{n} y^{s-1}\ln^2|\frac{y-v}{n}|dydv +$$
$$+\frac{(-1)^{rs}n^s}{s}\int\limits_{-1}^{1}\ln^2|v/n|\rho^{(s)}(v)dv =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^1 \rho^{(s)}(v) \int\limits_v^n \ln^2(y-v)dydv+\\
&\qquad + \int\limits_0^1 \rho^{(s)}(v) \int\limits_0^v \ln^2(v-y)dydv+\\
&\qquad + \int\limits_{-1}^0 \rho^{(s)}(v) \int\limits_0^n \ln^2(y-v)dydv-\\
&\qquad - 2\ln n \int\limits_{-1}^1 \rho^{(s)}(v) \int\limits_0^n \ln^2 |y-v|dydv+\\
&\qquad + \frac{(-1)^{rs}n^s}{rs} \int\limits_{-1}^1 \ln^2 |v/n|\rho^{(s)}(v)dv =\\
&\qquad\qquad = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5. \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

Очигледно е дека

$$
N-\lim_{n\to\infty} J_4 = N-\lim_{n\to\infty} J_5 = 0. \qquad (3.61)
$$

Понатаму,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_v^n \ln^2(y-v)dy &= (n-v)[\ln(1-v/n)+\ln n]^2 -\\
&- 2(n-v)[\ln(1-v/n)+\ln n]+2(n-v).
\end{aligned}
$$

Следува дека

$$
N-\lim_{n\to\infty} \int\limits_v^n \ln^2(y-v)dy = 2v-2v=0,
$$

и

$$N-\lim_{n\to\infty} J_1 = 0. \qquad (3.62)$$

Понатаму имаме,

$$\int_0^v \ln^2(y-v)dy = v\ln^2 v - 2v\ln v + 2v$$

и

$$N-\lim_{n\to\infty} J_2 = \int_0^1 [v\ln^2 v - 2v\ln v + 2v]\rho^{(s)}(v)dv =$$

$$= -\int_0^1 \ln^2 v\rho^{(s-1)}(v)dv = -c_1(\rho). \qquad (3.63)$$

Конечно за $v < 0$ имаме:

$$\int_0^n \ln^2(y-v)dy = (n-v)[\ln(1-v/n) + \ln n]^2 + v\ln^2|v| -$$

$$-2(n-v)[\ln(1-v/n) + \ln n] - 2v\ln|v| + 2n.$$

Следува дека

$$N-\lim_{n\to\infty} \int_v^n \ln^2(y-v)dy = v\ln^2|v| - 2v\ln|v| + 2v$$

и оттука

$$N-\lim_{n\to\infty} J_3 = \int_{-1}^0 [v\ln^2|v| - 2\ln|v| + 2v]\rho^{(s)}(v)dv =$$

$$= (-1)^{(s+1)}c_1(\rho). \qquad (3.64)$$

Користејќи ги равенстата (3.60)-(3.64) се заклучува дека

$$N-\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} x^{rs-1}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n dx = \frac{(-1)^{s+1}c_1(\rho)-c_1(\rho)}{r}. \qquad (3.65)$$

Конечно го разгледуваме случајот кога $k=rs$ и ψ е произволна непрекината функција. Од равенството (3.52) имаме дека:

$$N-\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{0} x^{rs}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n dx = 0. \qquad (3.66)$$

Понатаму,

$$\int_0^{n^{-1/r}} x^{rs}\psi(x)\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n dx =$$

$$= \frac{n^{-1/r}}{r}\int_{-1}^{1}\rho^{(s-1)}(v)\int_0^1 y^{s-1+1/r}\psi[(y/n)^{1/r}]\ln^2|\frac{y-v}{n}|dydv \qquad (3.67)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-1/r}} x^{rs}\psi(x)\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n dx = 0. \qquad (3.68)$$

Кога $x^r \geq 1/n$, имаме

$$| \left[(\ln^2 |x_+^r|)^{(s)}\right]_n |=| \int_{-1/n}^{1/n} \ln^2 |x_+^r - t|)\delta_n^{(s)}(t)dt |=$$

$$= n^s \mid \int_{-1}^{1} \ln^2 |x^r - v/n| \rho^{(s)}(v)dv |=$$

$$= n^s \mid \int_{-1}^{1} \left[\ln x^r - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{in^i x^{ri}}\right]^2 \rho^{(s)}(v)dv |\leq$$

$$\leq 2rn^s\kappa_s |\ln x| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{in^i x^{ri}} + 2n^s \kappa_s \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi(i-1)}{in^i x^{ri}},$$

каде $\kappa_s = \int\limits_{-1}^{1} |\rho^{(s)}(v)|dv$. Ако сега $n^{-1/r} < \eta < 1$, тогаш

$$\int_{n^{-1/r}}^{\eta} \mid \left[(\ln^2 |x_+^r|)^{(s)}\right]_n \mid dx \leq$$

$$-r\kappa_s \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^{s-i}}{i} \int_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{-ri} \ln x dx + \kappa_s \sum_{i=2}^{\infty} \frac{n^{s-i}\phi(i-1)}{i} \int_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{-ri} dx =$$

$$= -r\kappa_s \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^{s-1-1/r}}{i(-ri+1)} \left[(n\eta^r)^{-i+1/r} \ln \eta + \frac{\ln n}{r}\right] +$$

$$+r\kappa_s \frac{n^{s-1-1/r}}{i(-ri+1)^2} \left[(n\eta^r)^{-i+1/r} - 1\right] +$$

$$+\kappa_s \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\phi(i-1)n^{s-1-1/r}}{i(-ri+1)^2} [(n\eta^r)^{-i+1/r} - 1].$$

Следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{n^{-1/r}}^{\eta} \mid \left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n \mid dx = O(\eta|\ln\eta|)$$

за $r, s = 1, 2, \ldots$. Оттука ако ψ е непрекината функција, тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \mid \int\limits_{n^{-1/r}}^{\eta} x^{rs}\psi(x)\int\limits_{-1/n}^{1/n}(\ln^2(x_+^r - t)\delta_n^{(s)}(t)dtdx \mid = O(\eta|\ln\eta|).$$

Нека φ е произволна функција во $\mathcal{D}$ со носач којшто се содржи во $[-1,1]$. Користејќи го Тејлоровиот развој:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{rs-1}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}x^i + \frac{\varphi^{(rs)}(\xi x)}{(rs)!}x^{rs}, \quad 0 \le \xi \le 1.$$

имаме

$$\langle[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}]_n, \varphi(x)\rangle = \int\limits_{-1}^{1}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n\varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{rs-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\cdot\int\limits_{-1}^{1}x^k[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}]_n dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{n^{-1/r}}\frac{x^{rs}}{(rs)!}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n\varphi^{(rs)}(\xi x)dx +$$

$$+ \int\limits_{n^{-1/r}}^{\eta}\frac{x^{rs}}{(rs)!}\left[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\right]_n\varphi^{(rs)}(\xi x)dx+$$

$$+\int_{\eta}^{1}\frac{x^{rs}}{(rs)!}\Big[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n\varphi^{(rs)}(\xi x)dx+$$

$$+\int_{-1}^{0}\frac{x^{rs}}{(rs)!}\Big[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n\varphi^{(rs)}(\xi x)dx.$$

Низата

$$\frac{(-1)^{s-1}}{2(s-1)!}\Big[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n$$

конвергира рамномерно кон $[rx^{-rs}-\phi(s-1)x^{-rs}]$ на интервалот $[\eta,1]$, па за неутрикс границата следува дека:

$$N-\lim_{n\to\infty}-\frac{(-1)^s}{2(s-1)!}\langle\Big[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n,\varphi(x)\rangle=$$

$$=\sum_{k=0}^{rs-2}\left[-\frac{\phi(s-1)}{rs-k-1}-\frac{r}{(rs-k-1)^2}\right]\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}+$$

$$+O(\eta|\ln\eta|)+\int_{0}^{1}\frac{[r\ln|x|-\phi(s-1)]}{(rs)!}\varphi^{(rs)}(\xi x)dx+$$

$$+\frac{c_1(\rho)+(-1)^{s+1}c_1(\rho)}{2(s-1)!(rs-1)!}\varphi^{(rs-1)}(0).$$

Бидејќи η може да биде избрано доволно мало, следува дека

$$N-\lim_{n\to\infty} -\frac{(-1)^s}{2(s-1)!}\langle\Big[(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n, \varphi(x)\rangle =$$
$$=\sum_{k=0}^{rs-2}\Big[-\frac{\phi(s-1)}{rs-k-1}-\frac{r}{(rs-k-1)^2}\Big]\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}+$$
$$+\int_0^1 \frac{[r\ln|x|-\phi(s-1)]}{(rs)!}\varphi^{(rs)}(\xi x)dx+$$
$$+\frac{[1+(-1)^{s+1}]c_1(\rho)}{2(s-1)!(rs-1)!}\varphi^{(rs-1)}(0)$$

Користејќи ја лема 3.2.1 и теорема 3.2.6 и равенката (3.50) имаме:

$$N-\lim_{n\to\infty}\langle\Big[(x_+^r)^{-s}(\ln^2|x_+^r|)^{(s)}\Big]_n, \varphi(x)\rangle =$$
$$= r\langle x_+^{rs}\ln x_+, \varphi(x)\rangle + K_{r,s}^*\langle\delta^{(rs-1)}(x), \varphi(x)\rangle. \quad (3.69)$$

Со ова е покажано равенството (3.49) на интервалот $[-1,1]$. Но равенството (3.49) важи за произволен интеграл, па теоремата е докажана. □

Глава 4

ОБОПШТЕНИ ФРЕНЕЛОВИ ИНТЕГРАЛИ И НИВНИ КОНВОЛУЦИСКИ ПРОИЗВОДИ

Оваа глава опфаќа резултати за конволуциски производи и неутрикс конволуциски производи на обопштените Френелови интеграли. Поточно во неа ќе бидат прикажани резултати кои се веќе објавени:

1. **L.Lazarova**, B.Jolevska-Tuneska, *On the generalized Fresnel sine integrals and convolution*, Advances in Mathematics: Scientific Journal 1, (2012), no.1, pp.65-71.
2. **L.Lazarova**, B.Jolevska-Tuneska, T. Atanasova-Pachemska *On the generalized Fresnel cosine integrals and convolution*, International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications, Vol.6, No.3, (2014), pp.141-152.

Френеловите интеграли се трансцедентни функции, кои го добиле името по Augustin-Jean Fresnel, кој ги користел во оптиката.
Френеловиот синусен интеграл е дефиниран со $S(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$,

додека Френеловиот косинусен интеграл е дефиниран со $C(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)dt$, [48]. Френеловите интеграли, најпрво биле користени за пресметување на интензитетот на електромагнетното поле кога непровиден објект бил обвиткан со светлина, [5], но подоцна почнале да се користат во градежното инженерство, при конструкцијата на патишта и железници, [54].

Во [48], обопштениот Френелов синусен интеграл е дефиниран со:

$$S_k(x) = \int_0^x \sin(u^k)du, k = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

додека обопштениот Френелов косинусен интеграл е дефиниран со:

$$C_k(x) = \int_0^x \cos(u^k)du, k = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Обопштените Френелови интеграли се користат во дифракцијата на Fraunhfer и во пресметувањето на асимптотските суми на Weyl, во градежното инженерство, но и во симулациите за нараснување на електромагнетни бранови, [43].

4.1 Обопштен Френелов синусен интеграл и негови конволуциски производи

Во [48] обопштениот Френелов синусен интеграл е дефиниран со (4.1), додека функциите поврзани со него $S_{k+}(x)$ и $S_{k-}(x)$ се дефинирани со

$$S_{k+}(x) = H(x)S_k(x), \quad S_{k-}(x) = H(-x)S_k(x)\,, \tag{4.3}$$

за $k = 1, 2, \ldots$ каде што со H е означена функцијата на Heaviside.

Дефинираме функција $L_{r,k}$ со

$$L_{r,k}(x) = \int\limits_0^x u^r \sin(u^k) du \tag{4.4}$$

за $r = 0, 1, 2, ...$ и $k = 1, 2, ...$
Во специјален случај за $r = 0, k = 2$ имаме

$$L_{0,2}(x) = \int\limits_0^x \sin(u^2) du = \frac{\pi}{2} S(x),$$

каде што $S(x)$ е Френеловиот синусен интеграл.

Локално интеграбилната функција x_+^r е дефинирана со

$$x_+^r = \begin{cases} x^r, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \tag{4.5}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$.
Ги дефинираме функциите $\sin_+ x^k$ и $\sin_- x^k$ со

$$\sin_+ x^k = H(x) \sin x^k \qquad \sin_- x^k = H(-x) \sin x^k. \tag{4.6}$$

Во [4] и [39] е покажано дека доколку постои конволуцискиот производ на две дистрибуции, согласно дефинициите 1.6.1 и 1.6.2 во глава 1, тогаш тој конволуциски производ е комутативен.

Од Kilicman во [2] се пресметани следните конволуциски производи:

$$\left(\sin_+ x^2\right) * x_+^r = \sum_{i=0}^r \left(\begin{array}{c} r \\ \end{array} \right) (-1)^{r-i} L_{r-i}(x)\, x_+^i,$$

$$\left(\sin_- x^2\right) * x_-^r = \sum_{i=0}^r \left(\begin{array}{c} r \\ \end{array} \right) L_{r-i}(x)\, x_-^i,$$

$$S_+(x) * x_+^r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(r+1)} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i+1} L_{r-i+1}(x)\, x_+^i,$$

$$S_-(x) * x_-^r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(r+1)} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} L_{r-i+1}(x)\, x_-^i$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Следните две теореми и нивните последици се однесуваат на конволуциски производи на дистрибуции $\sin x^k$ со x^r, и на S_k со x^r, каде $k = 1, 2, \ldots, r = 0, 1, 2, \ldots$. Овие резултати се обопштувања на погоре наведените резултати на Kilicman.

Теорема 4.1.1. Конволуцискиот производ $(\sin_+ x^k) * x_+^r$ постои и

$$(\sin_+ x^k) * x_+^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i,k}(x) x_+^i \tag{4.7}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$

Доказ. Имајќи во предвид (4.5), следува дека:

Ако $x < 0$ тогаш $\left(\sin_+ x^k\right) * x_+^r = 0$.

Ако $x > 0$, тогаш

$$\begin{aligned}\left(\sin_+ x^k\right) * x_+^r &= \int_0^x \sin t^k (x-t)^r dt = \\ &= \int_0^x \sin t^k \sum_{i=0}^{r} \tbinom{r}{i} x^i (-t)^{r-i} dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \tbinom{r}{i} (-1)^{r-i} \int_0^x t^{r-i} \sin t^k x^i dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r} \tbinom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i,k}(x)\, x_+^i .\end{aligned} \qquad \square$$

Последица 4.1.1. Конволуцискиот производ $(\sin_{-} x^k) * x_-^r$ постои и

$$\left(\sin_{-} x^k\right) * x_-^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} L_{r-i,k}\left(x\right) x_-^i. \tag{4.8}$$

за $r = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$

Доказ. Равенството (4.8) се добива со замена на x со $-x$ во равенството од претходната теорема (4.7). □

Теорема 4.1.2. Конволуцискиот производ $S_{k+}(x) * x_+^r$ постои и

$$S_{k+}(x) * x_+^r = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i+1} L_{r-i+1,k}(x) x_+^i \tag{4.9}$$

за $r = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$

Доказ. Од (4.5), ако $x < 0$, тогаш $S_{k+}(x) * x_+^r = 0$.

Ако $x > 0$, тогаш имаме,

$$\begin{aligned}
S_{k+}\left(x\right) * x_+^r &= \int_0^x \left(x-t\right)^r S_k\left(t\right) dt = \\
&= \int_0^x \left(x-t\right)^r \int_0^t \sin\left(u^k\right) du dt = \\
&= \int_0^x \sin\left(u^k\right) \int_u^x \left(x-t\right)^r dt du = \\
&= -\tfrac{1}{r+1} \int_0^x \sin\left(u^k\right) \left(x-u\right)^{r+1} \left(-1\right) = \\
&= \tfrac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+i} \tbinom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} \int_0^x u^{r+1-i} x^i \sin\left(u^k\right) x^i = \\
&= \tfrac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+i} \tbinom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} L_{r-i+1,k}\left(x\right) x_+^i
\end{aligned}$$

□

Последица 4.1.2. Конволуцискиот производ $S_{k-}\left(x\right) * x_-^r$ постои и

$$S_{k-}(x) * x_{-}^{r} = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+i} \binom{r+1}{i} L_{r-i+1,k}(x)\, x_{-}^{i} \tag{4.10}$$

за $r = 0, 1, 2, ...$ и $k = 1, 2, ...$

Доказ. Равенството (4.10) следува од равенството (4.9), со замена на x со $-x$. □

Во глава 2, со дефиницијата 2.5.3 за некомутативен неутрикс конволуциски производ дадена од страна на Fisher во [7], е направено проширување на можноста за пресметување на конволуциски производ на поширока класа на дистрибуции.

Множеството од занемарливи функции во неутриксот во дефиниција 2.5.3 во глава 2 го прошируваме со додавање на конечните линеарни суми од функциите $n^r \sin n^k, n^r \cos n^k, r = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$.

Веќе беше споменато дека доколку постои конволуциски производ на две дистрибуции според дефиницијата 1.6.1 во глава 1, тогаш постои и неутрикс конволуцискиот производ според дефиницијата 2.5.3 во глава 2 и тие меѓусебе се еднакви.

Нека со $L_{r,k}$ ја означуваме неутрикс границата $N - \lim\limits_{n\to\infty} L_{r,k}(n)$,

т.е. $L_{r,k} = N - \lim\limits_{n\to\infty} L_{r,k}(n)$.

Следната теорема и нејзините последици, објавени во [45], се однесуваат на неутрикс конволуциски производи на дистибуциите $\sin x^k$ и x^r, $r = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ и се обопштувања на резултатите објавени во [2].

Теорема 4.1.3. Неутрикс конволуцискиот производ $\left(\sin_{+} x^k\right) \circledast x^r$ постои и

$$\left(\sin_{+} x^k\right) \circledast x^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i,k} x^i \tag{4.11}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Користејќи ја бесконечно диференцијабилната функција τ_n од дефиницијата 2.5.3 од глава 2, дефинираме регуларна низа од дистрибуции:

$$\left(\sin_+ x^k\right)_n = \left(\sin_+ x^k\right)_n \tau_n\left(x\right).$$

Тогаш конволуцискиот производ $\left(\sin_+ x^k\right)_n * x^r$ постои и според дефиницијата 1.6.2 од глава 1 и имаме

$$\left(\sin_+ x^k\right)_n * x^r = \int\limits_0^n \sin t^k (x-t)^r dt + \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n\left(t\right) \sin t^k (x-t)^r dt. \quad (4.12)$$

За првиот интеграл, од (4.7) имаме:

$$\int\limits_0^n \sin t^k (x-t)^r dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i,k}\left(n\right) x^i$$

и за неутрикс границата следува дека:

$$N - \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \sin t^k (x-t)^r dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i,k} x^i \quad (4.13)$$

Понатаму, имајќи ги во предвид занемарливите функции со кои беше дополнет неутриксот N, за фиксно x имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n\left(t\right) \sin t^k (x-t)^r dt = 0\,, \quad (4.14)$$

па равенството (4.11) следува од (4.12), (4.13) и (4.14), со што е докажана теоремата. □

Последица 4.1.3. Неутрикс конволуцискиот производ $\left(\sin_{-}x^k\right) \circledast x^r$ постои и

$$\left(\sin_{-}x^k\right) \circledast x^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i+1} L_{r-i,k} x^i \tag{4.15}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.15) следува од равенството (4.11) со замена на x со $-x$. □

Последица 4.1.4. Неутрикс конволуцискиот производ $\sin(x^k) \circledast x^r$ постои и

$$\sin(x^k) \circledast x^r = 0\,, \tag{4.16}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.16) следува од равенствата (4.15) и (4.11), како и земајќи во предвид дека $\sin x^k = \sin_{-} x^k + \sin_{+} x^k$. □

Следната теорема и нејзините последици, објавени во [45], се однесуваат на неутрикс конволуциски производи на обопштениот Френелов синусен интеграл $S_k, k = 1, 2, \ldots$ и дистрибуцијата $x^r, r = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 4.1.4. Неутрикс конволуцискиот производ $S_{k+}(x) \circledast x^r$ постои и

$$S_{k+}(x) \circledast x^r = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i+1} L_{r-i+1,k} x^i \tag{4.17}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Дефинираме регуларна низа од дистрибуции $(S_{k+})_n$, користејќи ја бесконечно диференцијабилната функција τ_n од дефиницијата 2.5.3 од глава 2, т.е.

$$(S_{k+}(x))_n = S_{k+}(x)\,\tau_n(x)\,.$$

Тогаш конволуцискиот производ $(S_{k+}(x))_n * x^r$ постои според дефиницијата 1.6.2 од глава 1 и имаме:

$$(S_{k+}(x))_n * x^r = \int\limits_0^n S_k(t)(x-t)^r dt + \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n(t) S_k(t)(x-t)^r dt \quad (4.18)$$

Следува:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^n S_k(t)(x-t)^r dt &= \int\limits_0^n (x-t)^r \int\limits_0^t \sin u^k du dt = \\
&= \int\limits_0^n \sin u^k \int\limits_u^n (x-t)^r dt du = \\
&= \int\limits_0^\nu \sin u^k du \left(-\tfrac{1}{r+1}\right)\left((x-n)^{r+1} - (x-u)^{r+1}\right) = \\
= -\tfrac{1}{r+1} \int\limits_0^n \sin u^k du &\left(\sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} x^i \left((-n)^{r+1-i} - (-u)^{r+1-i}\right)\right) = \\
&= -\tfrac{1}{r+1} \int\limits_0^n \sum_{i=0}^{r+1} x^i \left((-n)^{r+1-i} - (-u)^{r+1-i}\right) \sin u^k du
\end{aligned}$$

и за неутрикс границата ќе имаме:

$$N-\lim_{n\to\infty} \int_0^n S_k(t)(x-t)^r dt = -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^{r+1-i} L_{r+1-i,k} x^i . \quad (4.19)$$

За секое фиксно x се добива дека

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n(t) S_k(t)(x-t)^r dt = 0. \quad (4.20)$$

Равенството (4.17) следува од равенствата (4.18), (4.19) и (4.20). □

Последица 4.1.5. Неутрикс конволуцискиот производ $S_{k-}(x) \circledast x^r$ постои и

$$S_{k-}(x) \circledast x^r = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i+1,k} x^i \tag{4.21}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.21) следува од равенството (4.17) со замена на x со $-x$. □

Последица 4.1.6. Неутрикс конволуцискиот производ $S_k(x) \circledast x^r$ постои и

$$S_k(x) \circledast x^r = 0 \tag{4.22}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$. и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.22) следува од равенствата (4.17) и (4.21) и користејќи дека $S_k(x) = S_{k+}(x) + S_{k-}(x), k = 1, 2, \ldots$.□

4.2 Обопштен Френелов косинусен интеграл и негови конволуциски производи

Во [48], обопштениот Френелов косинусен интеграл е дефиниран со (4.2), додека функциите поврзани со него $C_{k+}(x)$ и $C_{k-}(x)$ се дефинирани со:

$$C_{k+}(x) = H(x)\, C_k(x), \quad C_{k-}(x) = H(-x)\, C_k(x), \tag{4.23}$$

за $k = 1, 2, \ldots$ каде H ја означува функцијата на Heaviside.

Дефинираме функција $I_{r,k}$ со

$$I_{r,k}(x) = \int_0^x u^r \cos\left(u^k\right) du \tag{4.24}$$

за $r=0,1,2,...$ и $k=1,2,....$

Во специјален случај имаме:

$$I_{0,2}(x)=\int\limits_0^x \cos\left(u^2\right)du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}C(x).$$

Ги дефинираме функциите $\cos_+ x^k$ и $\cos_- x^k$ со

$$\cos_+ x^k=H(x)\cos x^k \qquad \cos_- x^k=H(-x)\cos x^k, \tag{4.25}$$

каде што H е функцијата на Heaviside.

Следните две теореми и нивните последици се однесуваат на конволуциски производи на $\cos x^k$ и x^r, каде $k=1,2,\dots,r=0,1,2,\dots.$ Со нив е направено обопштување на резултатите на Kilicman и Fisher во [3]. Овие резултати се објавени во [46].

Теорема 4.2.1. Конволуцискиот производ $(\cos_+ x^k)*x_+^r$ постои и

$$(\cos_+ x^k)*x_+^r=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}I_{r-i,k}(x)x_+^i \tag{4.26}$$

за $r=0,1,2,\dots$ и $k=1,2,\dots$

Доказ. Имајќи ја во предвид (4.5), имаме:

Ако $x<0$ тогаш $\left(\cos_+ x^k\right)*x_+^r=0.$

Ако $x>0$, тогаш

$$\begin{aligned}\left(\cos_+ x^k\right)*x_+^r&=\int\limits_0^x\cos t^k(x-t)^r dt=\\&=\int\limits_0^x\cos t^k\sum_{i=0}^{r}\tbinom{r}{i}x^i(-t)^{r-i}dt=\\&=\textstyle\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}\int\limits_0^x t^{r-i}\cos t^k x^i dt=\\&=\textstyle\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}I_{r-i,k}(x)\,x_+^i.\end{aligned}$$

□

Последица 4.2.1. Конволуцискиот производ $(\cos_{-} x^k) * x_{-}^r$ постои и

$$\left(\cos_{-} x^k\right) * x_{-}^r = -\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} I_{r-i,k}\left(x\right) x_{-}^i. \tag{4.27}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$

Доказ. Равенството (4.27) се добива со замена на x со $-x$ во (4.26) и имајќи во предвид дека $I_{r-i,k}\left(-x\right) = (-1)^{r+1} I_{r-i,k}\left(-x\right)$ $\square$

Теорема 4.2.2. Конволуцискиот производ $C_{k+}(x) * x_{+}^r$ постои и

$$C_{k+}(x) * x_{+}^r = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i+1} I_{r-i+1,k}(x) x_{+}^i \tag{4.28}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$

Доказ. Од (4.5) имаме:

Ако $x < 0$, тогаш $C_{k+}(x) * x_{+}^r = 0$.

Ако $x > 0$, тогаш,

$$\begin{aligned}
C_{k+}\left(x\right) * x_{+}^r &= \int_0^x \left(x-t\right)^r C_k\left(t\right) dt = \\
&= \int_0^x \left(x-t\right)^r \int_0^t \cos\left(u^k\right) du dt = \\
&= \int_0^x \cos\left(u^k\right) \int_u^x \left(x-t\right)^r dt du = \\
&= -\tfrac{1}{r+1} \int_0^x \cos\left(u^k\right) \left(x-u\right)^{r+1} \left(-1\right) du = \\
&= \tfrac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+i} \tbinom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} \int_0^x u^{r+1-i} \cos\left(u^k\right) x^i du = \\
&= \tfrac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+i} \tbinom{r+1}{i} (-1)^{r+1-i} I_{r-i+1,k}\left(x\right) x_{+}^i.
\end{aligned}$$

$\square$

Последица 4.2.2. Конволуцискиот производ $C_{k-}(x){*}x_-^r$ постои и

$$C_{k-}(x) * x_-^r = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r+i}\binom{r+1}{i} I_{r-i+1,k}(x)\, x_-^i \tag{4.29}$$

за $r = 0, 1, 2, ...$ и $k = 1, 2, ...$

Доказ. Равенството (4.29) следува од равенството (4.28), со замена на x со $-x$ и користејќи дека
$I_{r-i,k}(-x) = (-1)^{r+1} I_{r-i,k}(-x)$. $\square$

Нека со $I_{r,k}$ ја означиме неутрикс границата $N - \lim_{n\to\infty} I_{r,k}(n)$.

Следната теорема и нејзините последици, [46], се обопштувања на резултатите од [3] и во нив се пресметани неутрикс конволуциски производи на дистрибуциите $\cos x^k$ и x^r, каде $r = 0, 1, 2, ...$ и $k = 1, 2, ...$

Теорема 4.2.3. Неутрикс конволуцискиот производ $\left(\cos_+ x^k\right) \circledast x^r$ постои и

$$\left(\cos_+ x^k\right) \circledast x^r = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-1)^{r-i} I_{r-i,k} x^i \tag{4.30}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Користејќи ја бесконечно диференцијабилната функција τ_n од дефиницијата 2.5.3 од глава 2, дефинираме регуларна низа од дистрибуции:

$$\left(\cos_+ x^k\right)_n = \left(\cos_+ x^k\right)_n \tau_n(x).$$

Тогаш конволуцискиот производ $\left(\cos_+ x^k\right)_n * x^r$ постои според дефиницијата 1.6.2 од глава 1 и имаме

$$\left(\cos_+ x^k\right)_n * x^r = \int\limits_0^n \cos t^k (x-t)^r dt + \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n(t) \cos t^k (x-t)^r dt. \quad (4.31)$$

За првиот интеграл, од (4.26) имаме:

$$\int\limits_0^n \cos t^k (x-t)^r dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} I_{r-i,k}(n)\, x^i$$

и за неутрикс границата следува дека:

$$N-\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \cos t^k (x-t)^r dt = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} I_{r-i,k} x^i \quad (4.32)$$

Понатаму, за фиксно x имаме:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+n^{-n}} \tau_n(t) \cos t^k (x-t)^r dt = 0\,, \quad (4.33)$$

па (4.30) следува од (4.31), (4.32) и (4.33), со што теоремата е докажана. □

Последица 4.2.3. Неутрикс конволуцискиот производ $\left(\cos_- x^k\right) \circledast x^r$ постои и

$$\left(\cos_- x^k\right) \circledast x^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i+1} I_{r-i,k} x^i \quad (4.34)$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.34) следува од равенството (4.30) со замена на x со $-x$. □

Последица 4.2.4. Неутрикс конволуцискиот производ $\cos(x^k) \circledast x^r$ постои и

$$\cos(x^k) \circledast x^r = 0\,, \tag{4.35}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството (4.35) следува од равенствата (4.34) и (4.30) и имајќи во предвид дека $\cos x^k = \cos_+ x^k + \cos_- x^k$. $\square$

Во следната теорема е пресметан неутрикс конволуцискиот производ на обопштениот Френелов косинусен интеграл $C_k, k = 1, 2, \ldots$ и дистрибуцијата $x^r, r = 0, 1, 2, \ldots,$ [46]. На овој начин направено е проширување на резултатите од теорема 12 од [3].

Теорема 4.2.4. Неутрикс конволуцискиот производ $C_{k+}(x) \circledast x^r$ постои и

$$C_{k+}(x) \circledast x^r = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i+1} I_{r-i+1,k} x^i \tag{4.36}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Користејќи ја бесконечно диференцијабилната функција τ_n од дефиницијата 2.5.3 од глава 2, дефинираме регуларна низа од дистрибуции: $(C_{k+}(x))_n = C_{k+}(x)\,\tau_n(x)$. Тогаш конволуцискиот производ $(C_{k+}(x))_n * x^r$ постои според дефиницијата 1.6.2 од глава 1 и имаме:

$$(C_{k+}(x))_n * x^r = \int_0^n C_k(t)\,(x-t)^r dt + \int_n^{n+n^{-n}} \tau_n(t)\, C_k(t)\,(x-t)^r dt \tag{4.37}$$

Понатаму,

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^n C_k(t)(x-t)^r dt &= \int\limits_0^n (x-t)^r \int\limits_0^t \cos u^k du dt = \\
&= \int\limits_0^n \cos u^k \int\limits_u^n (x-t)^r dt du = \\
&= \int\limits_0^n \cos u^k du \left(-\tfrac{1}{r+1}\right)\left((x-n)^{r+1}-(x-u)^{r+1}\right) = \\
= -\tfrac{1}{r+1}\int\limits_0^n \cos u^k du & \left(\sum_{i=0}^{r+1}\begin{pmatrix} r+1 \\ i \end{pmatrix} x^i \left((n)^{r+1-i}-(-u)^{r+1-i}\right)\right) = \\
= -\tfrac{1}{r+1}\int\limits_0^n \sum_{i=0}^{r+1} x^i & \begin{pmatrix} r+1 \\ i \end{pmatrix}\left((-\nu)^{r+1-i}-(-u)^{r+1-i}\right)\cos u^k du
\end{aligned}
$$

и за неутрикс границата добиваме:

$$
N-\lim_{n\to\infty}\int_0^n C_k(t)(x-t)^r dt = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r+1}\begin{pmatrix} r+1 \\ i \end{pmatrix}(-1)^{r+1-i} I_{r+1-i,k}x^i\,. \tag{4.38}
$$

За фиксно x имаме дека

$$
N-\lim_{n\to\infty}\int\limits_n^{n+n^{-n}}\tau_n(t)\,C_k(t)(x-t)^r dt = 0. \tag{4.39}
$$

Оттука равенството (4.36) следува од равенствата (4.37), (4.38) и (4.39). □

Последица 4.2.5. Неутрикс конволуцискиот производ $C_{k-}(x)\circledast x^r$ постои и

$$
C_{k-}(x)\circledast x^r = \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r+1}\begin{pmatrix} r+1 \\ i \end{pmatrix}(-1)^{r-i} I_{r-i+1,k}x^i \tag{4.40}
$$

за $r=0,1,2,\ldots$ и $k=1,2,\ldots$.

Доказ. Равенството (4.40) следува од равенството (4.36) со замена на x со $-x$. □

Последица 4.2.6. Неутрикс конволуцискиот производ $C_k(x) \circledast x^r$ постои и

$$C_k(x) \circledast x^r = 0 \tag{4.41}$$

за $r = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 1, 2, \ldots$.

Доказ. Равенството(4.41) следува од равенствата (4.36) и (4.40) и од $C_k(x) = C_{k+}(x) + C_{k-}(x)$. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] A.Antonevich, *On certain high-order partial differential expressions with δ potential*, Integral Transforms Spec.Funct.22,(2011), pp.255-261.

[2] A.Kilicman, *On the Fresnel sine integrals and the convolution,* IJMMS, 37, (2003) pp.2327-2333.

[3] A.Kilicman, B.Fisher, *On the Fresnel integrals and the convolution,* IJMMS, Hindawi Publishing Corp., 2003:41, pp.2635-2643.

[4] A.H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis,* Dover Publications, INC, 1995,pp. 1-75 pp.122-142.

[5] B. Thomas, *How to evaluate Fresnel Integrals*, FGCU MATH - SUMMER 2013. Retrieved 27 July 2013.

[6] B. Van der Pol, H. Bremmer, *Operational Calculus Based on the two sided Laplace Transform*, Cambridge University Press, New York, 1995, pp.61-64.

[7] B. Fisher, *Neutrices and the convolution of distributions*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., **17**(1987), pp.119-135.

[8] B.Fisher, *Neutrices and convolution products of distributions*, Different aspects of differentiability dissertationes mathematicae 340 (1996), pp.47-53.

[9] B.Fisher, *On defining the convolution of distributions*, Math.Nachr. 106, (1982), pp.261-269.

[10] B.Fisher, S. Yakubovich, M. Telci, *The sine integral and the neutrix convolution*, Makedon.Akad. Nauk. Umetn. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozik, 23-24, (1-2) (2002-2003), pp.57-69

[11] B. Fisher, *On defining the change of variables in distributions*, Rostock. Math. Kolloq., 28 (1985), pp. 7586

[12] B.Fisher, L.C.Kuan, *Commutative neutrix convolution product of distributions*, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser.Mat., **23**(1993), pp.13-27.

[13] B.Fisher, *Neutrices and the product of distributions*, Studia Mathematica, T. LVII, (1976).

[14] B.Fisher and B.Jolevska-Tuneska, *Two Results on the Composition of Distributions*, Thai J. Math., 3 (2005), 17-26.

[15] B. Fisher, B. Jolevska-Tuneska and E. Ozcag, *Further results on the Compositions of Distributions*, Integral Transforms Spec. Funct.,13(2002), 109-116.

[16] B.Fisher, B.Jolevska-Tuneska and A.Takaci, *On the composition of distributions* $x^{-s}\ln|x|$ *and* x^r, Thai. J. Math.,(1)(2003), pp.39-48.

[17] B.Jolevska-Tuneska and E. Ozcag, *On the composition of distributions* $x^{-s}\ln|x|$ *and* x^μ, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, Volume 2007, article ID 60129, 9 pages, doi:10.1155/2007/60129.

[18] B.Fisher, K.Nonlaopon, G.Spitanratana, *Some commutative neutrix convolutions involving the Fresnel integrals*, Saraevo, Journal of mathematics, Vol.2, **14** (2006), pp.11-21.

[19] B.Fisher, E. Al-Sirehy, *On the cosine integral*, Integral Trans. Spec. Funct., 8, (1999), pp.31-42

[20] B. Fisher and K.Tas, *On the composition of distributions* x_+^r *and* x_+^μ, Indian J. Pure Appl. Math., 36(1) (2005), 11-22.

[21] B.Fisher, K. Tas, *On the composition od distributions* $x^{-1}\ln|x|$ *and* x_+^r, Integral transforms and Special Functions, 16(7) (2005), pp.533-543.

[22] B. Fisher, *On defining the distribution* $(x_+^r)_-^{-s}$, Zb. Rad., 15(1), (1985), pp.119-129.

[23] B.Fisher, I.Ege, E.Ozcag, *On the neutrix composition of distributions* $x^{-s}\ln^m|x|$ *and* x^r, Applicable Analysis, 89(3), (2010), pp.365-375.

[24] B. Fisher, E.Ozcag, *Some results on the neutrix composition of the Delta functions*, Filomat, 26:6, (2012), pp.1247-1256.

[25] C. K. Li, C. Li, *On defining the distributions* δ^k *and* $(\delta')^k$ *by fractional derivatives*, Appl. Math. Comput, 246, (2014), pp. 502-513.

[26] C.O.R.Sarico, *Collision od delta-waves ina turbulent model studied via distribution product*, Nonlinear. Anal. 73, (2010), pp.2868-2875.

[27] D.S. Jones, *The convolution of generalized functions*, Quart. J. Math. Oxford (2), **24**(1973), pp.145-163.

[28] D.S. Jones *Hadamard's finite part*, Math. Methods Appl. Sci, 19 (13), (1996), pp.1017-1052.

[29] D. Mitrovic, *On the heat equation involving the Dirac distribution as a coefficient*, Math.Comp.Model.50, (2009), pp.109-115.

[30] E. Ozcag, *Defining distribution composition* x^{-s} *and* $(|x|^\mu)^{-s}$, Asian-European Journal of Mathematics, (2016).

[31] E. Ozcag, I. Ege and H. Gurcay, *On Powers of the Heaviside Function for negative integers*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 101-107.

[32] E.Ozcag, L.Lazarova, B. Jolevska-Tuneska, *Defining compositions of $x_+^\mu, |x|^\mu, x^{-s}$ and $x^{-s}\ln|x|$ as a neutrix limit of regular sequences*, Communications in Mathematics and Statistics, (2016)4: pp. 63-80.

[33] F. Farassat, *Introduction to generalized function with applications in aerodynamics and aeroacoustics*, NASA Technical Paper, 3428 (1996), pp.1-45.

[34] F.R.Hoskins, S.J.Pinto, *Distributions, ultradistributions and other generalized functions*, Ellis Horwood, 1994.

[35] F. A-Sirehy, B. Fisher, *A note on the compositions of distributions*, Indian. J. Pure Appl. Math, 31(7): (2000), pp. 839-848.

[36] G.Temple, *The Theory of generalized Functions*, Proc. Roy. Soc. ser. A 28 (1955), pp.175-190.

[37] G. Halic, E. Halic, *Neutrix calculus*, Budapest University of technology and Economics, (2003).

[38] H. Kou and B. Fisher, *On Composition of Distributions*, Publ. Math. Debrecen, 40(3-4) (1992), 279-290.

[39] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov,*Generalized functions*,Vol. I, Academic Press Chap. 1, 1964.

[40] J.D. Nicholas snd B. Fisher, *The distribution of the composition* $(x_+^r)^{-s}$, J.Math.Anal.Appl.,258 (2001), 131-145.

[41] J.G. van der Corput, *Introduction to the neutrix calculus,* J. Analyse Math., **7**(1959), pp. 291-398.

[42] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1952.

[43] K.D. Reinsch, R. Bulirsch, U, Puschmann, *Numerical calculation of the generalized Fresnel sine and cosine integral*, Rocky Mountain, Journal of mathematics, Vol.32, No.2, Summer, 2002.

[44] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vols. I and II, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann and Cie, Paris, (1959).

[45] L.Lazarova, B.Jolevska-Tuneska, *On the generalized Fresnel sine integrals and convolution*, Advances in Mathematics: Scientific Journal 1, (2012), no.1, pp.65-71.

[46] L.Lazarova, B.Jolevska-Tuneska, Tatjana Atanasova - Pacemska *On the generalized Fresnel cosine integrals and convolution*, International Journal of Functional Analysis, Operator Theory and Applications, Vol.6, No.3, (2014), pp.141-152.

[47] L.Lazarova, B.Jolevska-Tuneska, I.Akturk, E.Ozcag, *Note on the distribution composition* $(x_+^\mu)^\lambda$, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2016), pp.1-13.

[48] M.Abramowitz, I.A.Stegun,*Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables,* Dover Publications,(1964), p.300.

[49] P.Antosik, A.Kaminski and S.Sorek, *On Distributional Compositions Functions and Distributions*, Integral Transforms and Special Functions, 20(3-4)(2009), 247-255.

[50] P.Antosik, *Composition of Distributions*, Technical Report no.9, University of Wisconsin, Madison 1988-89, 1-30.

[51] P.Antosik, *On composition of Distributions*, Труды Математического института ПАХ, (1994) том 203, pp.1-8.

[52] P. Antosik, J. Mikusinski and R. Sikorski, *Theory of distributions, The sequential Approach*, PWN-Elsevier, Warszawa-Amsterdam, 1973.

[53] R.Sikorski, *Advanced calculus*, Polish Scientific Publishers, (1969).

[54] S. James, *Essential Calculus* Belmont, Calif.: Thomson Brooks/Cole. p. 230, (2007).

[55] Y. Jack Ng and H. van Dam. *Neutrix calculus and finite quantum field theory,* J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005), pp. 317-323.

[56] Y. Jack Ng and H. van Dam. *An application of neutrix calculus to quantum field theory,* International Journal of Modern Physics A, Volume 21-2(2006) pp. 297-312.