Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2015

Aufgabe 1344. Es sei n eine positive ganze Zahl und

$$a_n = \frac{(n!\,\omega_n)^{1/n}}{2},$$

wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bedeuten soll. Man zeige, dass $a_n < \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2$.

René Ellenberger, Gümligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 15 Lesern eingegangen: Ulrich Abel (Friedberg, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Fribourg, CH), Martin Lukarevski (Skopje, MK), Volkhard Schindler (Berlin, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser drücken das Volumen durch die Gammafunktion aus und arbeiten dann mit der Stirlingformel um die Ungleichung zu zeigen. Wir folgen der Lösung von *Gerhard Wanner*, der diese Idee sehr klar aber etwas weniger formal darlegt.

Das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, das man am besten durch Induktion $n \to n+2$ berechnet, hat jedes zweite Mal eine um eins höhere Potenz von π. Da Euler 1729 entdeckte, dass $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist, kann man alle Formeln für die Einheitskugel einheitlich als

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}!}$$

schreiben. Da wir bequem sind, benützen wir sowohl für $n!$ als auch für $\frac{n}{2}!$ die Stirlingsche Formel $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ und brauchen nur alles einzusetzen und zu vereinfachen. Wir erhalten

$$a_n \approx \sqrt[2n]{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \cdot \sqrt{n}.$$

Da $\sqrt[2n]{2}$ sehr schnell gegen 1 konvergiert und $\sqrt{\frac{\pi}{2e}} = 0.76017\ldots$ weit von 1 entfernt ist, haben wir keine Sorgen, die geforderte Abschätzung nötigerweise mit dem Fehlerglied $e^{1/12n}$ der Stirlingschen Formel auch rigoros zu machen.

Bemerkung: Einige Löser fügen an, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$, wie man das auch oben mühelos sehen kann.

Aufgabe 1345. Man bestimme alle 5-Eckzahlen, die auch 6-Eckzahlen sind.

Janny C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 13 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr