УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП

Факултет за информатика

Катедра за математика и статистика

Елизабета Гигова

Прилози кон теоремата на Hahn-Banach, Паретова оптимална алокација и примена во економијата

-МАГИСТЕРСКИ ТРУД-

Штип, ноември 2016

Комисија за оценка и одбрана:

Проф. д-р Александра Милева, Факултет за информатика при УГД – претседател

Проф. д-р Татјана Атанасова - Пачемска, Факултет за информатика при УГД – ментор, член

Проф. д-р Билјана Јолевска -Тунеска, Факултет за електротехника и информациски технологии при УКИМ, Скопје – член

Научно поле: Природно-математички науки

Научна област: Применета математика, математичка анализа

Датум на одбрана: 10.11.2016г.

Елизабета Гигова

Прилози кон теоремата на Hahn-Banach, Паретова оптимална алокација и примена во економијата

Верата ни е неопходна за да раснеме во познанието, за нешто да сфатиме. Математичарот верува во аксиоми и на нив ги заснова математичките докази на различните теореми. Секој човек верува во постулатите на моралниот живот и тие се јавуваат како основа на неговиот живот и дејност.

Овој магистерски труд го посветувам на моите родители и мојата сестра Лидија. Им изразувам благодарност за целата нивна поддршка!

АПСТРАКТ

Без Хан-Банаховата теорема, структурата на функционалната анализа би била многу поинаква од онаа што денес ја знаеме. Меѓу другото, за аналитичарите се докажа дека таа може да биде соодветна форма на *Аксиомата на изборот*. (Не е еквивалентна на *Аксиомата на изборот*). Riesz и Helly ги поставиле постулатите, на кои претходи теоремата во турбулентниот математички свет во раните години на 1900-тите. Хан и Banach независно ја докажаа теоремата во 1920-тите.

Во оваа статија, ќе разговараат за математичкиот свет во кој теоремава влегла, да ја испита нејзината врска со аксиомата на избор, поглед на некои претходници, спомнување на некои од нејзините последици и разгледување на некои од нејзините главни варијации.

Исто така ја спомнуваме Парето оптималноста и Парето анализата.

Според Парето оптималноста ниту еден поединец не може да ја подобри својата положба, а притоа некој друг поединец да не доживее влошување на својата положба.

Парето анализата е техника која помага во донесувањето на одлуки при селекција на ограничен број на задачи кои даваат значително севкупен ефект. Се користи Парето принципот познат како *правило 80/20*) така што 20% од работата дава 80% од бенефитот на севкупната работа. Односно, поголем број од проблемите (80%) се предизвикани само од 20% од вкупните причинители.

Клучни зборови: Hahn-Banach-ва теорема, функционална анализа, аксиома на изборот, екстензија Парето оптималност, Парето анализа, Парето принцип.

ABSTRACT

Without the Hahn-Banach theorem, functional analysis would be very different from the structure we know today. Among other things, it has proved tobe a very appropriate form of the Axiom of Choice for the analyst. (It is not equivalent to the Axiom of Choice.) Riesz and Helly obtained forerunners of the theorem in the turbulent mathematical world of the early 1900's. Hahn and Banach independently proved the theorem for the real case in the 1920's.

In this article, we discuss the mathematical world into which the theorem entered.
Also we mention Pareto optimality and Preto analysis.
Pareto optimality is a state of allocation of resources in which it is impossible to make any one individual better off without making at least one individual worse off.

Pareto Analysisis a technique in decision making that is used for the selection of a limited number of tasks that produce significant overall effect. It uses the Pareto Principle (also know as the 80/20 rule) the idea that by doing 20% of the work you can generate 80% of the benefit of doing the whole job. Or in terms of quality improvement, a large majority of problems (80%) are produced by a few key causes (20%)

KEYWORDS: Hahn-Banach theorem, functional analysis, Axiom of Choice, extension, Pareto optimality, Pareto Analysis, Pareto Principle.

Содржина

ВОВЕД (INTRODUCTION)

Едни од најважните резултати во економијата секако се две од фундаменталните теореми за економската благосостојба. Заедно тие објаснуваат зошто слободните пазари се добри и како можеме да ги направиме уште подобри. Првата теорема е формализирање на „невидливата рака“ на Адам Смит. Од тоа подразбираме дека конкурентните пазари ги алоцираат ресурсите на ефикасен начин, притоа *еквилибриумскиот* резултат да биде оптималот на Парето. Паретоовата оптималност е само: - „*Состојба во која што не може да се направи какви било промени при алокацијата, така што некој ќе биде подобар без притоа на никој да не му биде полошо, односно според Парето оптималноста ниту еден поединец не може да ја подобри својата положба, а притоа некој друг поединец да не доживее влошување на својата положба “*.

Целта на овој магистерски труд е преку една сеопфатна анализа да се соберат доволна количина на информации и да се испитаат сите ограничувања и фактори кои влијаат на одлуките на компаниите, државните институции и поединци при изборот на најсоодветното решение за нив.

Овој магистерски труд е поткрепен и со математичка основа и теорија.

Во **првиот дел** од овој труд даден е приказ на теоремата на Хан и Банах, запознавајќи се со историскиот пат во функционананата анализа, така да се наведува во неколку форми и нивните докази.

Во **вториот дел** се запознаваме со Паретовата ефикасност, според која ниту еден поединец не може да ја подобри својата положба, а притоа некој друг поединец да не доживее влошување на својата положба.

Во **третиот дел** е применета Hahn-Banach-овата теорема во подобрувањето на пазарот, со посебен осврт кон втората фундаментална теорема за економската благосостојба.

Четвртиот дел е посветен на Парето принципот или АБЦ правилото, притоа изнесувајќи практични примери и применувајќи го Парето дијаграмот со оригинални научни истражувања од едно економско претпријатие во Р. Македонија.

На крајот, донесени се заклучоци, како и препораки и мерки кои би можеле да помогнат во намалувањето на проблемот на алокација на ресурси.

1 Hahn-Banach-ова теорема

1.1 Кратко резимирање на Hahn-Banach-овата теорема низ времето

1.2.1 Што е тоа?

Со својата елеганција и моќ, теоремата на Хан и Банах е омилена речиси на секој аналитичар. Таа уште е наречена и „*Скапоцена круна на Функционалната анализа*". Нејзините главни формулации се: *екстензионалната теорема* и *теоремата за сепарација* . Ја наведуваме основата врз која се прават разни проширени верзии:

Теорема 1: Нека $M(M \neq \{0\})$ е *потпростор* од нормиран простор *X* над полето R и нека p е сублинеарен (т.е. субадитивен и позитивно хомоген) функционал на *X* и нека $f: M \to R$ е линеарна форма на *M* доминиран од p $(f \leq p)$, за која важи $f(x) \leq p(x)$. Тогаш постои линеарена екстензија *F* од f на сите од *X*, така што *F* е доминирана од p насекаде $(f \leq p)$, $(F: X \to R$ така што $F|_{\mathrm{M}} = f, F(x) \leq p(x), \forall\ x \in X$.

$F|_{\mathrm{M}}$ е рестрикција на функцијата F на M.)

$$\begin{tikzcd} F:\ X \arrow[dr] & & F \leq p \\ f:\ M \arrow[u, dash] \arrow[r] & \boldsymbol{R} & f \leq p \end{tikzcd}$$

За комплексните простори, воглавно ни се потребни некои апсолутни вредности: Ако X е комплексен векторски простор, а p е *полунорма* таква што $|f| \leq p$ на M тогаш$|F| \leq p$.

Нормирана верзија: Ако X е нормиран простор на $K = \boldsymbol{R}$ или $f: M \longrightarrow K$ е континуирана линеарна функција, тогаш постои континуирана линеарна функција F ширејќи го f на а сите од X, така што $\|F\| = \|f\|$.

1.1.2 Зошто е значајна?

Теоремата на Хан и Банах е силно *екстензивна* теорема чија форма е особено значајна во апликацијата на линеарните проблеми. Во функционалната анализа таа се претставува преку :

- теорија на дуалитетот – *дуална теорија*;
- кошиевата интегрална теорема за векторско вредносни аналитички функции $x: D \to X,$ каде X е Банахов простор, а D е доменот на комплексната рамнина *C*;
- критериумот на Helly за решавање на линеарните равенства во рефлексивните нормирани простори итн.

1.1.3 Кратка историја на анализата

Во деветнаесеттиот век, под вектор се подразбирало “$n - \text{торка}$“*. Кон крајот на истиот век, за некои делокругот беше проширен со вклучување на „*низата*“. Воглавно, постоеја само менливи контакти помеѓу геометриските идеи, анализите и докажувањата. За стилот на докажување со геометриската теорема, која што денес е најопшта во повеќето подрачја на математиката, требало да се чека на согледувањата на Peano и Hilbert & Co. Да се „докаже“ нешто се подразбира да се наведе конкретен случај и да се аргументира за неговата веродостојност.

Во периодот 1890 – 1945 г. во анализата се појави геометриската перспектива и поимите за структурата, кои притоа биле усвоени, а со тоа стандардите за ригорозност биле значително подобрени.

1.1.4 Структура

Математиката созреала до точката каде што сличностите меѓу манипулативните различни конкретни објекти станале воочливи. Бил потребен начин за да може да се изрази оваа индиферентност за вистинскиот идентитет. Ултимативната рамка била да се каже дека *објектите се точки на произволно множество чии интеракции беа управувани од множество на правила*. Најпрво, тоа се случило во алгебрата. Peano (1888г.)[1] го дефинирал векторскиот простор и аксиомата на линеарното пресликување. Повеќе векторите не беа “$n-$торка“[2] или „низи“ или поинаку кажано сега не можело да се знае што всушност биле „векторите“. Значително е тоа што ова го отвори патот до векторските простори со произволна димензија, а особено на просторите на функциите.

Иако Pincherle напишал книга за линеарните простори во 1901 г., воглавно идејата на Peano била игнорирана. Сепак, идејата за апстрактно дефинирање на просторите како „објекти“ кои се *покоруваат* на одредени правила, беше една од оние идеи чие време сé уште не беше дојдено. *Групите* (термин измислен од страна на Galois) биле дефинирани произволно за првпат од страна на Weber во 1895 г., а *полето* во 1903 г.

За да се вкорени идејата за структурата, во анализата требало да помине подолг временски период, отколку во алгебрата. Овде, конкретни објекти беа функциите. Но и понатаму постоела конфузијата за тоа што всушност биле функциите. Dirichlet (1837 г.) дефинирал дека: „*Нумерички вреднуваната функција на вистинска променлива (варијабла) е табела или пресликување или поврзување меѓу две множества од броеви*“. Riemann (1854 г.) го согледал проблемот на интуитивното разбирање на функцијата. За да покаже дека нашето разбирање било премногу примитивно, тој ја измислил *функцијата дефинирана со тригонометриска низа, која што е непрекината за ирационалните вредности на независната променлива, а ограничена за рационалните вредности*. Со класичниот пример на Weierstrass (1874 г.), за тоа дека никаде не е диференцијална, непрекинатата

---

[1]Peano, G. [1888] *Calcologeometrico secondo l’Ausdehnungslehre di H. Grassmann precedutodalleoperazionidellalogicadeduttiva*, Torino.

[2](“$n-$торка“(engl. tuple) е конечна низа (истотака позната како “уредена листа“) од n –објекти, од кои секој е од специфичен вид.)

функција се покажа уште подраматична. Како резултат на овие откритија, Dedekind, Weierstrass, Meray и Cantor на различни начини ја направиле $\epsilon - \delta$ *техниката* како дел на стандардната *математичка анализа*.

Pincherle инсистирал на правење разлика меѓу функцијата и претпоставените вредностите. Тој рекол дека математичарите треба да го користат f наместо $f(x)$, за да се мисли на самата функција како ентитет којшто е раздвоен од нејзините вредности. Тој и другите ја критикувале конфузијата помеѓу линеарното пресликување и матрицата на пресликување, така што тоа го претставил во одреден координатен систем, а тоа е проблем што за жал сé уште не е целосно решен. Истовремено, со сфаќањето дека функциите се ентитети сами во себе, Volterra [1888 г.][3] предложил дека треба да се размислув на начин, таков што функциите треба да се одредуваат на нови *домени*, како на сите непрекинати криви внатре во *квадратот*, притоа правејќи анализи на нив. Овој нов вид на функции, тој ги нарекол *functions de ligne*, а притоа *ligne,* да биде непрекината крива во квадрантот.

Но што е крива? – протестирал Peano. Под овој термин се подразбира нешто како *непрекината слика на [0,1] во единичниот квадрант (со координати (0, 0), (1, 0), (0, 1), и (1, 1)*). Кривата на Peano што, елоквентно ги демонстрира различните можности што ги допушта таквото дефинирање. Hadamard бил заинтригиран од ставот на Volterr. Во 1903 г. тој ги нарекол новите функции на функциите, *функционали*, а нивната анализа, *функционална анализа.* Дел од оваа не беше новина. Во раните 1800-ти години исто така постоело разгледување на функциите чии домени *биле функциите - изводите*. Laplace трансформирал со воведувањето на смена (како опртатор), но радикалноста во ова било во тоа што биле применувани алгебарски правила, а тоа било нешто што порано се применувало само врз броевите. Сега дошло времето за разгледување на аналитичките својства на таквите оператори.

Fréchet (1904 г.)[4] предложил идеи за ограниченоста и непрекинатоста во множествата кои не се составени од броеви. Во неговите тези од 1906 г.[5], тој ја дефинирал сегашната нотација за метричките простори. Тој инцидентно не го измислил терминот метрички *простор*, туку тоа го сторил Hausdorff кој во 1913 г. ја

---

[3]Volterra, V.,[l954-l962.] Operematematiche, 5 vol., Acc. deiLincei,

[4]Fr´echet, M. [1904] *Generalisation d' un th´eor`eme de Weierstrass*, C. R. Acad. Sci. 139, 848-850.

[5]Fr´echet, M. [1906] *Sur quelques points du calculfonctionnel*, Rend. Circ. mat. Palermo 22, 1-74

претставил номенклатурата, која звучела *погеометриски*. Fréchet истражувал конкретни метрички простори во коишто „*елементите*“ биле функции. Тој ја согледал и истакнал важноста од комплетноста, компактноста и сепарабилноста.

1.1.5 Гледна точка од геометриска перспектива

Геометријата била „*алгебаризирана*“ во почетокот на XVII век од страна на Decardes и Fermat. Тоа било време за реванш на геометријата. Периодот кон крајот на деветнаесеттиот и почетокот на дваесеттиот век е време за "*геометризација*" на анализата. Schmidt (1908г.)[6] и Fréchet (1908г.)[7] го претставиле јазикот на геометријата во Хилбертовиот простор ℓ_2, така што првпат се зборувало за нормата (со сегашна ознака$\|x\|$) и за неравенството на триаголник кај нормата. Во 1913 г. Riesz го опишал решението на системите на хомогените равенки

$$f_x(x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = 0, 1 \le i \le n$$

како обид да се пронајде $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ортогоналното (најкраткото) од линеарното растојание $[f_1, \ldots, f_n]$ каде што $f_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, односно, тој го увидел решавањето на равенките како обид да се идентификува ортогоналниот комплемент на линеарниот простор $[f_1, \ldots, f_n]$ на $f_1, \ldots, f_n$. Значително е тоа што „*равенките*“, $f_i -$ те, добија статус на вектори и застанаа на исто рамниште со „*променливите-варијаблите*“. Хилберт и неговите ученици, исто така, зборуваа за *ортогонални екстензии*. Потпирајќи се на претходната работа на Minkowski [1896г.], Helly и другите математичари вовеле идеи за *конвексноста* во основата на анализата. Овие идеи се присутни и ден денес.

[6]Schmidt, E. [1908] ¨ *Uber die Aufl¨osunglinearerGleichungenmitunendlichvielen Unbekannten*, Rend. Palermo XXV, 53-77.
[7]Fr´echet, M. [1908] *Essai de g´eom´etrieanalytique `a uneinfinit´e de coordonn´ees*, Nouv. Ann. de Math. (4) 8, 97-116 and 289-317.

1.1.6 Прецизност

Едни од најголемите недостатоци на математичката анализа во XVII век биле нејзината каприциозна интуитивност и нејзината формална манипулација со симболите. Како пример за оваа интуитивност, ја разгледуваме мистичната догма на Johann Bernoulli (1693 г.) дека „*количество кое е зголемено или намалено од страна на значително мала количество, не е ниту зголемено, ниту намалено“.* Bishop Berkeley дал најдобри објаснувања за симболите преку цитатот: „*Тие можеа да го набљудуват овој шизофреничен* т.н. *дух на умртвената количина, како нешто до последниот чекор на аргументирањето, односно докажувањето, а потоа да се отфрли тоа како **ништо**” („Аналитичарот “ – 1734 г.)*[8].

Денес, некои математичари ја задржуваат „*малата нула*“ dx, но ги отфрлаат членовите од „*повисок ред*“ dx^2, dx^3, итн., а тоа е очигледно дека на моменти еповеќе од практични причини отколку од строго претцизноста.

Euler беше господар за „*чиста манипулација“* на симболите во низите и производите, без оглед на конвергенцијата. Да го разгледаме неговиот „доказ“ дека $e^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$, притоа со земање на лимесот како гранична вредност $n \to \infty$ во биномниот развој

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

Ова очигледно не ја вознемирило неговата математичка совест. И покрај протестот на Lagrange, Furier не била подеднакво потисната во неговото дело од 1822 г. „*La theorie analytique de la chaleur“ („Аналитичка теорија на топлина“)*.[9] Имајќи развиено експанзија на одредена функција во низи на синус и косинус, тој вели: „*Ние може да ги прошириме истите резултати на сите функции, дури и на оние кои не се конечни и целосно произволни* ". Тој формално манипулирал со симболите, оставајќи ја конвергенцијата сама на себе, притоа добивајќи израз на *произволна* непарна функција во синусната низа.

[8] *BishopBerkeley [1734] TheAnalyst*

[9] Jean Baptiste Joseph ***Fourier***.[1822]*Théorieanalytique de la chaleur*.

Под влијание на работата на Cauchy, Riemann и Weierstrass ги подигнале стандардите, а работата на Hilbert и на неговото училиште за темелите на геометријата, ги подигнале стандардите на строго птртцизноста толку многу што да се споредува поранешната математичка работа изгледало невозможно, бидејќи таа веќе била „*излитена*“ за споредување.

1.1.7 Нови алатки: (интеграли)

Бил потрошен голем напор во 19-тиот век во врска со проблемите за решавање на системите на бесконечно многу равенства со бесконечно многу непознати. Во врска со линеарноста кај проблемите на симултаните линеарни равенства може да се каже дека: *За линеарните функционали* f_i *и скалари* c_i, *се бара* x *такво што* $f_i(x) = c_i$. Сепак постоеја многу такви f и c, а тоа е всушност бројот на координати што x треба да ги има. Кога има бескрајно многу такви f и c, x мора да има бескрајно многу компоненти или координати – мора да биде низа*, наместо n-торка.* Беше постигнат значителен напредок во решавањето на бескрајните системи на линеарните равенства, со паметно генерализизирање на детерминантите. Основната идеја беше да се скрати бескрајниот систем на линеарни равенства, притоа земајќи го лимесот. Сериозна слабост на овој пристап беше неговата зависност од бесконечните производи кои конвергираат под мошне ограничувачки околности. Новите теории за интеграли на Lebesgue и Stieltjes, овозможија да се обединат проблемите од кои следниве се поспецифични:

1. *Низите на Fourier.* Со оглед на дадената низа (g_n) од косинус и (a_n) од броеви, принудени од ℓ_2, да се најде функцијата x за која што овие беа Fourier-ови коефициенти, т.е., такви што $\int t^n\, x\,(t)\, dt = a_n$ за секое $n \in N$. Дали x е единствено?
2. *Тековни проблеми*. Со оглед на дадената низа $(a_n\ )$ од броеви, да се најде функција таква што $\int t^n\, x(t) dt = a_n$ за секое $n \in N$.

1.1.8 Што сторил Riesz

Позајмувајќи некои работи веќе направени во Хилбертовиот простор, Riesz [1910 – 1911][10] одлучил да ги реши следниве проблеми: За $p > 1$(така, тој ги користи нееднаквостите на Hőlder и Minkowski, коишто само ги генерализирал).

(P) Со оглед на бесконечно многу y_s во $L_q = [a, b]$ и скалари c_s, пронајди го x во $L_q = [a, b]$, така што

$$\int_a^b x(t) y_s(t) dt = c_s$$

Неговото решение не даде никаква сличност со претходните решенија. За да постои такво x, тој покажал дека мора да постои потребниот и доволен услов:

(*) за кое било конечно множество на индекси s и кои било скалари a_s, би требало да постои $K > 0$, такво што

$$\left|\sum a_s c_s\right| \leq K\left(\int_a^b \left|\sum a_s y_s\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Од (*), произлегува дека ако $\sum a_s y_s$=0, исто така и $\sum a_s c_s = 0$. Така, ако ние дефинираме линеарен функционал f ограничен со M на $y -$те во $L_q = [a, b]$ земајќи дека $f(y_s)$=c_s, тогаш вака определениот f е добро дефиниран. Но, не само тоа, туку за кое било y во M, $|f(y)| \leq K\|y\|_q$, така што со денешен јазик, ние би рекле дека f е *ограничен* или *непрекинат* функционал на M. Доколку постои x во L_p што го решава

[10]Riesz, F. [1910] *Sur certain syst`emesd’’equationsfonctionelles et l’approximation des fonctions continues*, Acad´emie des Sciences, Paris, ComptesRendus
Riesz, F. [1911] Sur certain syst`emessinguliersd’’equationsint´egrales, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.

(P), тогаш ние покажуваме дека f непрекинато се проширува во целиот простор. Од умеењето да се решат линеарните равенства, со други зборови, подразбираме дека тоа значи да се биде во можност постојано да се проширува ограничен линеарен функционал во целиот простор. Така решението на Riesz за (P), претставува посебен случај во теоремата на Hahn-Banach.

Тогаш Riesz ги променил просторите и се свртел кон следнава варијанта на проблемот.

(Q) Со оглед на тоа дека $y_s \in C[a,b]$, и скаларите c_s, да се пронајде $x \in BV\,[a,b]$(bounded variation - ограничена варијација) така што

$$\int_a^b y_s\,(t)dx(t) = c_s$$

Адаптирајќи ги неговите поранешни методи, тој тоа го решил на сличен начин како во случаите на ограниченост. Тој ја сфатил важноста на условот и докажал дека кое било *„дополнително непрекинато“* пресликување задоволува таков услов, и обратно, кога под „*непрекинато*“ тој мислел на последователно непрекинато во контекст на *субнормите*. Секако, тој докажал посебен случај на теоремата на Hahn-Banach и идентификувал непрекинат дуалитет на нормираниот простор.

1.1.9 Влез на Helly

Riesz не ги гледал нештата во смисла на дефинирање и проширување на бесконечните линеарни форми. Но, како и да е, Banach (1923 г.)[11] го решил проблемот на мера со употреба на *трансфинитна* индукција за проширување на *ненегативните* линеарни функционали. Всушност, (Saccoman (1992г.)[12]) од аргументот на Banach произлегува следниов посебен случај на проширената теорема на Krein-Rutman [1948 г.][13]: *Нека M е линеарен потпростор на подреден векторски*

[11]Banach, S. [1923b] *Sur le probl`eme de la mesure*, Fund.Math.4, 7-33.
[12]Saccoman, J. [1992] *Extension theorems and the problem of measure*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1, 287-293.
[13]Kreĭn, M.G.; Rutman, M.A. (1948). "Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space"

простор X со неутрален елемент $e \in M$ и f е ***позитивен*** *линеарен функционал на M. Тогаш постои позитивен линеарен функционал F на X, таков што $F(x) = f(x)$ на M.*

Helly [1912] ги гледал нештата во смисла на проширување на бесконечните линеарни форми , па така станал претходник на аргументот којшто подоцна Hahn (1927) и Banach (1929) независно еден од друг го докажаа во Hahn-Banach-овата теорема. Имено, со редуцирање на проблемот, покажувајќи дека бесконечните линеарни форми на *потпросторот* M од нормиран простор, можат да бидат проширени со додавање на еден вектор во $[M[\{x\}]$ без зголемување на својата норма. Девет години подоцна (1921 г.), тој дал поинаков доказ (во меѓувреме, бил затвореник во војната во Русија како австриски војник). Наместо, со посебните простори $\ell_p, L_p[a,b]$, и $C[0,1]$, тој се занимавал со општите норми (иако, тој не ги нарекувал така, ниту пак ја користел ознаката $\|x\|$) на општиот простор со низи – поточно, секој векторски потпростор од C^{N}. Ова секако го покрива ℓ_p просторот и многу други како $, L_2$ коишто можат да се идентификуваат со ℓ_2. Во врска со конвексноста, Helly ја поврзал својата општа норма со некои од поранешните идеи на Minkowski[14]. Minkowski веќе ги имал набљудувано врските меѓу „*нормите*“ и *потпросторот* на R^n и „*симетричните конвексни тела*“ (затворени, симетрични, ограничени и конвексни множества кои што ја имаат нулата-0 како внатрешна точка), а тоа е идеја која повторно се појавила неколку декади покасно кога биле развиени локалните конвексни простори.

Со оглед на нормиран *потпростор* X од C^N, Helly[15] го разгледал *потпросторот*

$$X' = \left\{(u_n) \in C^N: \sum_{n\in N} x_n u_n < \infty\right\} \text{ за сите } (x_n) \in X$$

т.е. (u_n) е такво што $(u_n x_n)$ е *сумабилно (адитивно)* за сите $(x_n) \in X$. На пример, ако $X = c$ или c_0, тогаш X'=ℓ_1; ако $X = \ell_1$ тогаш X'=ℓ_∞. Секако дека секогаш не се добива бесконечен дуалитет од X на овој начин, не се добива на пример кога X =ℓ_∞. Во секој

---

[14]Minkowski, H. [1896], *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig
[15]Helly, E. (1912), "ÜberlineareFunktionaloperationen", *Wien.Ber.*

случај $x = (x_n) \in X$ и $u = (u_n) \in X'$, Helly дефинирал линеарна форма на X (билинеарна форма на X x X', правејќи го (X, X') дуален пар) со земање на

$$\langle x, u\rangle = \sum_{n\in N} x_n u_n$$

Користејќи ја идејата на Minkowski, го нормирал X', земајќи

$$\|u\| = \sup\left\{\frac{|\langle x,u\rangle|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

Дуалната норма на X добиена со ова техника ја дава оргиналната норма на X. Во денешно време таквите парови со *апсолутна конвергентност* на $\sum x_n\, u_n$ се наречени *простори од непрекинати низи на Kőthe* или *Kőthe-овите дуалитети*. Според *неравенството* на Cauchy-Schwarz, $|\langle x, u\rangle| \leq \|x\|\|u\|$, линеарните функционали добиени на овој начин се или непрекинати или ограничени (eng.=bounded) или „beschränkt“ како што ги нарекувал Riesz.

Helly потоа си задал задача да реши:

(R) Со оглед на тоа дека $u_i \in X'$, $(c_i) \in C^N$, да се најде $x \in X$, така што

$\langle x, u_i\rangle = c_i$ за секое $i \in N$.

Тој го поделил проблемот на два дела:

(A) Да се најде линеарно пресликување $f: X' \to C$ така што $|f(u)| \leq k\|u\|$ за некое $k > 0$ и uво X', со $f(u_i) = c_i$и.

(B) Штом ќе се најде f (доколку може да се најде), да се најде $x \in X$ така што

$\langle x, u\rangle = f(u)$ за сите $u \in X'$.

По пат на индукција, Helly го решил проблемот (A) и како резултат на неговите конвексни множества, открил дека x (B) не може да се најде секогаш. Тој и Riesz први го експонирале *нерефлексниот* Банахов простор.

Сумирано, придонесот на Helly, бил следниов:

- ги дефинирал и работел на обопштените простори, кои поседуваа норма;

- ги искористил различните дефиниции за конвексноста;
- ја поставил основата за дуалната теорија;
- го сфатил поопшто условот на непрекинатоста на Riesz (*) и го дефинирал *инфимумот* на *K* што го задоволува (*) како *Maximalzahl*, т.е. она што денес го нарекуваме *норма* на линеарниот функционал.

1.1.10 Хан и Банах

Hahn (1927 г.)[16] и Banach (1929 г.)[17], направиле уште поопшт пристап. Иако и двајцата користеле иста техника што претходно ја користел Helly – (редуцирање на проблемот како во случај кога се зголемува доменот на функционалот со само еден вектор) – не се препишува на Helly централната идеја за доказ на теоремата на Хан и Банах. Но, сепак Banach упатува на печатените забелешки на Helly од 1912 г., за првата примена на теоремата, односно за резултат на Riesz што бил докажан од страна на Helly. Независно од сето тоа, Хан и Банах поминале долг пат за да ја обликуваат функционална анализа како што ја знаеме денес. Тие:

- Го дефинирале општиот нормиран простор. Хан (1922 г.)[18] и Банах (1923 г.)[19] го направиле тоа независно еден од друг. Секој од нив бара комплетност. Банах подоцна [I932 г.][20] го отстранил тоа од својата книга, правејќи разлика помеѓу нормираните и Банаховите простори. (Општата нотација на нормата беше „*во воздух*“. Истовремено Wiener, сам (1922 г.)[21]го дефинирал тоа).

- Го напуштиле системот на линеарни равенства и сметале дека општиот проблем на екстензијата на непрекинатата линеарна форма е дефинирањето на општиот нормиран простор, а не на општите простори од непрекинати низи,

---

[16]Hahn, H. [1927] ¨ *UberlinearerGleichungssysteme in linearerR¨aumen*, J. Reine Angew.Math.157, 214-229.
[17]Banach, S. [1929] *Sur les fonctionelleslin´eaires*, Studia Math. 1, 211-216 and 223-229.
[18]Hahn, H. [1922] ¨ *UberFolgenlinearerOperationen*, Monatsh.Math.und Phys. 32, 1-88
[19]Banach, S. [1923] *Sur les op´erationsdans les ensembles abstraits et leur application aux ´equations int´egrales*, Fund. Math.
[20]Banach, S. [1932] *Th´eorie des op´erationslin´eaires*, Chelsea, New York.
[21]Wiener, N. [1922] *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. Fr. 50, 119-134.

како што тоа го сторил Helly. Така, тие ја формулирале теоремата каква што ние денес ја знаеме;

- Го дефинирале дуалниот простор на општо комплетен нормиран простор и докажале дека тоа е исто така комплетен нормиран простор во однос на стандардната норма;
- Ја дефинирале рефлексивноста и увиделе дека нормираниот простор *X* е општо вграден во неговата втора дуалност X'' $X \subseteq X''$;
- Користеле *трансфинитна* индукција (Helly користел обична индукција).

Уште од тоа време *начинот* на којшто се користело тоа, станал суштинска алатка за анализата, па сé до денес.

Во 1927 г. Хан се потпрел на резултатот на Helly од 1921 г. во контекст на општите Банахови простори. Го поедноставил и генерализирал доказот на Helly со *трансфинитна* индукција, наместо со обичната. Иако *трансфинитна* индукција била користена и претходно од страна на аналитичарите, сепак не била употребена на овој начин. Хан ја претпочитал подреденоста, наместо формулацијата на Лемата на Zorn за *трансфинитна* индукција. Настрана од фактот што поранешниот проблем строго се третирал како проширување на линеарните функционали, Хан за првпат во тоа време официјално го вовеле поимот на дуален простор (*polare Raum*), истакнувајќи притоа забелешка дека X е вграден во својот втор дуалитет X'' ($X \subseteq X''$ – X е вистинско подмножество на X'') и ја дефинирал регуларноста (regularität). Во тоа време, теоријата на дуалитетот ја достигнала својата зрелост. Несвесен за работата на Хан, Банах, исто така ја користел подреденоста и трансфинитната индукција за докажување на теоремата на Хан Банах во 1929 г. Во неговата книга го признал приоритетот на Хан и направил мало обопштување на резултатот: „Наместо линеарната форма f да биде нормирана од страна на содржателот на нормата, тој сметал дека f треба да е нормирана од страна на сублинеарен функционал“. Сепак, тој не направил поголемо воопштување. А, тоа никој не го сторил, сé додека не биле воведени *локално-конвексните* простори. Тогаш воопштениот резултат на Банах бил доста корисен. Од нивната работа следуваат следниве последици :

1.Нормирано проширувања

Даден е бесконечен линеарен функционал *f* дефиниран на потпростор од нормиран простор. Тогаш постои бесконечно линеарно проширување *F* дефинирано врз целиот простор такво што $\|f\| = \|F\|$.

2. Нетривијални непрекинати линеарни форми

Линеарната форма *f* на локалниот конвексен простор *X* е непрекинато, ако и само ако постои непрекината полунорма *p* на *X* таква што $|f| \leq p$.

Освен тоа, ако *X* е Hausdorff-ов, и $x \neq 0$, мора да постои непрекината полунорма *p* на *X* таква што $p(x) \neq 0$. Од теоремата на Хан и Банах произлегува дека за секој *ненулти* вектор x, постои линеарен непрекинат функционал *f* на *X* таков што $f(x) = p(x) \neq 0$. Последователно на тоа, ако секој непрекинат линеарен функционал $f(x)=0$ на некој вектор x, тогаш $x = 0$ ($f(x)=0 \Rightarrow x = 0$).

1.1.11 Единственост

Во стандардниот доказ (на пример, Банаховиот) на *Лемата на* теоремата на Хан и Банах, *се покажува постоењето на доминантна екстензија на иста норма која постои на линеарен потпростор* $[M \cup \{x\}]$ *за* $x \notin M$, *а бројот* c *е произволно избран број.* Тука лежи не-уникатноста на проширувањето. И Taylor (1939г.)[22] и Foguel (1958г.)[23] ги карактеризираат нормираните простори *X* при што, секој непрекинат линеарен функционал на кој било потпростор на *X* има единствено линеарно продолжување (екстензија) на истата норма: тие се оние *X* кои се со строго конвексен дуалитет. Ако се фокусираме само на еден потпростор *M* на *X* тогаш непрекинатите линеарни форми на *M* имаат единствени проширувања на истата норма, ако и само ако *анихилаторот* $M^{\perp}$ од *M* има уникатно најдобро приближувања со X'

[22] Taylor, A. [1939] *The extension of linear functionals,* Duke Math. J. 5, 538-547.
[23] Foguel, S. [1958] *On a theorem by A. E. Taylor,* Proc. Amer. Math. Soc. 9, 325

Теорема 2: [Phelps 1960][24] *„Ако M е линеарен потпростор на нормиран простор X, тогаш $f \in M'$ (непрекинат дуалитет на M) има уникатно продолжување на истата норма во X'ако и само ако за секој $g \in X'$ постои единствено h, при што е задоволен следниов приказ:*

$h \in M^{\perp} = \{u \in X' : u_{|M} \ = 0\}$

така што

$\|g - h\| = \inf \{\|g - u\| : u \in M^{\perp}$

Овој резултат е воопштен во делото на Парк (1993)[25].

1.1.12 Аксиома на избор

Неколку збора за Аксиомата на избор (Axiom of Choice – AC)_која најмногу се користи при докажувањето на теоремата на Хан и Банах во варијантата со примена на лемата на Zorn. Во 1968 г. Garnir, De Wilde_и Schmets ја користат само Аксиомата на зависен избор (*Axiom of Dependent Choices* - ADC) за доказ на теоремата на Hahn и Banach за разделените простори.

Аксиома на зависен избор[26]: „ Дадено е множество X, кое што не е празно и $R \subset X$x, такво што, за секое $x \in X, |\{y \in X : (x, y) \in R\} \neq \emptyset,$ тогаш за секое $w \in X$, постои низа (x_n) од X , таква што x_1=w и $(x_n, x_{n+1}) \in R$ за секое $n \in N$."

1.1.13 Комплексен случај

Комплексната верзија на теоремата се потпира на откритието на релацијата меѓу реалните и комплексните делови на комплексен линеарен функционал, имено:

$Re\ f(x) = -Im\ f(ix)$

[24]Phelps, R. [1960] *A generalization of the Hahn-Banach theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 238-255

[25]Park, S. [1993] *A little generalization of the Hahn-Banach extension property*, J. Korean Math. Soc. 30, 139-150.

[26]Garnir, de Wilde and Schmets [textbook -1968]

Со редукција на комплексниот во реален случај , комплексната верзија беше прво докажана од F. Murray (1936) , за $L_p[a,b], p > 1$. Овој метод за првпат беше генерализиран и признаен од страна на Bohnenblust и Sobcyzk (1938г.) кои го докажале за произволните комплексни нормирани простори. Тие биле првите кои ја третираа теоремата на Хан и Банах како теорема.

1.1.14 Поврзани прашања

1.1.14.1 Опсег-ранг

Од успехот на теоремата на Хан и Банах произлегува преиспитувањето на прашањето за непрекинатото проширување на непрекинатите линеарни пресликувања. Една варијанта е да се замени полето **K** со нормираниот простор **Y** . Да претпоставиме дека за реалните нормирани простори *X* и*Y*, *A* е непрекинато линеарно пресликување на потпросторот *M* од *X* во *Y* . Да се пронајде непекинато линеарно проширување $\bar{A}$ на A во *X* со иста норма. Велиме дека *Y* е *екстензионален,* ако за кој било *потпростор M* од кој било нормиран *потпростор X*, постои такво $\bar{A}$.

$$\begin{tikzcd} \bar{A}: X \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \\ A : M \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

$$\|\bar{A}_x\| \leq k\|x\|$$

$$\|\bar{A}\| = \|A\|$$

$$\|A_x\| \leq k\|x\|$$

Banach и Mazur [l933.г], набрзина демонстрирале дека постојат примери во кои што не постои такво $\bar{A}$. Но, разгледувајќи го специјалниот случај кога

$Y = \boldsymbol{R}^n, \qquad n > 1$.

со која било од нормите $\|\cdot\|_p$, тогаш $1 \leq p \leq \infty$.

Иако топологијата е иста во секој случај $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ е екстензионален, додека пак ниту еден друг $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|_p)$ не е. Како што Nachbin (1950 г.) и Goodner (1950 г.) откриле дека реалниот нормиран простор *Y* е *екстензионален* ако има *својство на бинарна интерсекција*.

Еден е*кстензионален* простор што се проширува мора да е Банахов простор, бидејќи мора да биде во можност да го прошири пресликувањето на единечното пресликување 1 : $Y \rightarrow Y$ во $\bar{1}$ во комплетирањето на нормата $\bar{Y}$ од Y. Ако (y_n) е Кошиев во Y, тогаш е конвергентен, во случај кога $y \in \bar{Y}$. Како што $\bar{1}$ е непрекинато (континуирано),

$$\bar{1}y_n = y_n \bar{1}_y \in Y$$

(според дефиницијата за проширувањето-екстензијата, рангот на $\bar{1}$ е ист како и на 1,Y).

Друг квалитет којшто мора да го имаат екстензионалните простори Y е *проектибилноста*. Ако *X* е кој било нормиран простор којшто содржи Y, тогаш мора да постои непрекината проекција *E* од *X* во Y со норма 1. Еквивалентно, Y е тополошки комплементарен во секој простор вокој што е дефинирана норма. Доколку не постои непрекината проекција од ℓ_∞, во c_0, тогаш c_0 не е екстензионален.

Накратко, принципите на проширувањето, односно екстензијата на Банаховиот простор ги сумираме во следово:

Теорема 3: (Nachbin 1950[27], Goodner 1950[28], Kelley 1952[29]) : *За еден реално нормиран простор* Y, *важи следново:*

а) Y е екстензионален

б) Y е *проектибилен*

в) Y има својство на *бинарна интерсекција (било кои две подмножества од Y имаат непразен пресек)*

[27] Nachbin, L. [1950] *A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 68, 28-46.

[28] Goodner, D. [1950] *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 69, 89-108.

[29] Kelley, J. [1952] *Banach spaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 323-326

г) $Y = C(T, \boldsymbol{R})$ со *поднорма (субнорма)*, каде што *Т* е компактно и екстремно *дисконектиран* Хаусдорфов простор

д) Y е комплетно Архимедово подредено векторско поле

1.1.14.2 Прашање во врска со доменот

Го разгледуваме проблемот на идентификувањето на оние нормирани простори X кои што имаат својство такво што секое непрекинато линеарно пресликување А од кој било *потпростор* М во кој било нормиран простор Y, има линеарно проширување со иста норма.

$$\begin{tikzcd} \bar{A}\colon X \arrow[d, dash] \arrow[dr] & \text{фиксно} & \|\bar{A}\| = \|A\| \\ A\colon M \arrow[r] & Y & \|A_x\| \leq k\|x\| \end{tikzcd}$$

Проблемот бил решен од страна на Kakutani (1941 г.) за реален случај и Bohnenblust (1942 г.) при комплексен случај. *X*-овите за кои што ова важи се оние *X* за кои $X \leq 2$ или *X* е Хилбертов простор.

1.1.14.3 Супер-простори

Го издвојуваме Banach-овиот простор *M*. За кое *M* секој потпростор *X* од *M* и секое непрекинато линеарно пресликување *A* од *M* во било кој нормиран простор Y има непрекинато проширување - екстензија во *X*?

$$
\begin{tikzcd}
\bar{A}: X \arrow[d, dash] & X \arrow[dr] & & \text{произволно} & \|\bar{A}\| = \|A\| \\
A: M \arrow[rr] & & Y & & \text{фиксно}
\end{tikzcd}
$$

Произлегува дека класата на таквото *M* е класа на *екстензионални* простори.

1.1.15 Подредена верзија

Да претпоставиме дека *X* и *Y* се реални претходно подредени простори, за разлика од нормираните простори и дека $p: X \to Y$е функционал на *X*.

$$
\begin{tikzcd}
\bar{A}: X \arrow[d, dash] \arrow[dr] & & \bar{A} \leq p \\
A: M \arrow[r] & Y & A \leq p
\end{tikzcd}
$$

Идејата е сега да се окарактеризираат оние *Y* за кои секогаш постои линеарна екстензија $\bar{A}$ генерирана од p на сите *X*. Како што е покажано во (Ioffe 1981г.), Y е *проширен*. *Y* е проширен ако секое мајорирано подмножество *Y* има супремум. Со јазикот на подредените простори, таквите простори се наречени *подредени и комплетни*.

1.1.16 Геометриска форма

Рамнините го делат тродимензионалниот простор R^3 на три конвексни делови: на самата рамнина и на двете „страни“ на рамнината. Хиперрамнините прават иста работа: тие го разделуват произволниот реален векторски простор на конвексни *субдивизии* : $\{x: f(x) = a\}, \{x: f(x) > a\}$ и $\{x: f(x) < a\}$.Освен тоа, ги имаме (суштински) следниве 1-1 \`коресподенции:

Линеарни функции f $\leftrightarrow$ Хиперрамнини $H = f^{-1}$ (1)

Топки B(отворено конвексно множество) $B = U_p = \{x: p(x) < 1\}$.

Каде p е непрекината полу – норма.

$$H \cap U_p = \emptyset \qquad \leftrightarrow \qquad |f| \leq p$$

Поради ова може да се усвојат различни перспективи за Hahn-Banach-овата теорема. Да ги гледаме, не како тврдење за проширувањето, туку за разделувањето (сепарацијата) како во следниов исказ:

Ако една права (линеарен потпростор) не се пресече со топка (конвексно множество) тогаш постои рамнина (хиперрамнина) што ја содржи правата (линеарен потпростор) што не ја пресекуваа топката (конвексно множество).

Теоремата, вака обликувана, за првпат била докажана од Mazur во 1933 г. Последователно на ова, Bourbaki го нарекол ова геометриска форма на Hahn-Banach-овата теорема:

Теорема 4: *Геометриската форма - во секој тополошки векторски простор X при K, ако линеарниот подпростор M не го пресече отвореното конвексно множество G , тогаш постои затворена хиперрамнина H во која се содржи M што исто така не го пресекува G.*

1.1.17 Резултати на разделувањето

Нека со X' се означува непрекинат дуалитет на локалниот конвексен простор X. За одделните подмножества *A* и *B* од *X* и f (реална нетривијална линеарна форма на *X)*, нека $H = f^{-1}(t)$ за некое $t \in \boldsymbol{R}$. Велиме дека A и B се разделени од страна на хиперрамнината H ако за сите a во *A* и b во *B*, $[f(a) < t < f(b)] f(a) \leq t \leq f(b)$.:

a) за различните вектори x и y постои $f \in X'$ такво што $f(x) \neq f(y)$; ако x и y се линеарно независни, тогаш постои f такво што $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$.;
b) ако $x \notin$ *M*, а *M е затворен потпростор од X* тогаш постои непрекинат линеарен функционал f на *X* , така што $f(x) \notin$ *M ;*
c) ако векторот $x \notin \mathrm{cl}\{0\}$постои непрекинат линеарен функционал f на *X* така што $f(x) \neq 0$.;
d) ако *A* и *B* не се празни и отворено одделни конвексни множества во реалниот векторски простор *X,* тогаш *A* и *B* и се строго разделени од страна на затворена хиперрамнина;
e) ако *A* и *B* не се празни и одделни конвексни множества од *X* при што *A* е затворено и *B* е компактно, тогаш тие се стриктно раздвоени од страна на затворена хиперрамнина.

Како пример на ова се спомнува резултатот на Holmes (1975 г., стр. 161)[30]:
„Вистинскиот Banach-ов простор е рефлексивен ако и само ако секое од одделните затворени конвексни подмножества, од кои едното е ограничено, може да бидат строго разделени *од страна на затворена хиперрамнина“.*

[30]Holmes, R. [1975] *Geometric functional analysis and its applications*, GTM 24, Springer-Verlag, New York.

1.2 Теореми и докази

Hahn-Banach-овата теорема знаеме дека е уште и наречена „*Скапоцена круна на Функционалната анализа".*

Во ова поглавје ќе дадеме преглед на основната и модифицираните теореми на Хан-Банах и нивните докази. Меѓутоа, во доказите ќе се користат различни симболи, поради различните извори.

1.2.1 Хан-Банахова теорема - реален случај[31]

Во секој Банахов простор пресликувањето идентично (еднакво) на нула, претставува еден ограничен линеарен функционал. Се поставува прашањето дали постојат други нетривијални функционали на произволниот Банахов простор? Доколку постојат, дали може однапред да им се препишат (и во која мера,) одредени особини? Односно, дали постои ограничен линеарен функционал еднаков на нула на некој прав потпростор во Банаховиот простор, а притоа да не исчезнува во целиот простор? На ова прашање за егсистенцијата, одговор ни дава теоремата на Хан и Банах. Без оваа теорема денешната Функционална анализа би била поинаква.

Теорема 1: (Хан Банах-ова теорема, **реален случај**) Нека X е реален Банахов простор и нека L е линеарен потпростор (*линеал*) во X. Нека на L е дефиниран (одреден) ограничен линеарен функционал f. Тогаш постои ограничен линеарен функционал f^*, дефиниран (одреден) на целиот X, таков што

- $(\forall x \in L) f^*(x) = f(x)$ и
- $\|f^*\| = \|f\|$.

Доказ: Нека на L е дефиниран ограничен линеарен функционал f. Случајот кога $L = X$ е тривијален, затоа претпоставуваме дека L е вистински потпростор од X. Тогаш постои $x_0 \in X$, такво што $x_0 \neq L$. Со L_0 го означуваме линеалот генериран со елементот x_0, т.е.

$L_0 = \{x \in X | x = \lambda x_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

[31]www.pmf.untz.ba/.../FF**Operatori**Funkcionali.pdf

Нека е сега $L_1 = L \oplus L_0$, којшто поради конечните димензии на линеалот L_0, исто така потпростор од X. Прво покажуваме какао нашиот функционал може да се продолжи на L_1, без промена на нормата.

Секој елемент $x \in L_1$, може на едноставен начин да се запише во следниов облик:

$x = l + \lambda x_0,\ l \in L, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Без губење на општоста, претпоставуваме дека $\|f\| = 1$. Тогаш за произволните $x, y \in L$ имаме:

$$f(x-y) \leq |(x-y)|$$
$$\leq \|f\|\|x-y\| = \|x-y\| = \|x - x_0 + x_0 - y\|$$
$$\leq \|x - x_0\| + \|x_0 - y\|.$$

Поради линеарноста на функционалот, т.е. $f(x-y) = f(x) - f(y)$, од погоре изнесеното заклучуваме дека:

$f(x) - \|x - x_0\| \leq f(y) + \|x_0 - y\|$.

Овде, земајќи го прво супремумот од левата страна, а потоа инфимумот од десната, добиваме дека:

$\sup\{f(x) - \|x - x_0\| | x \in L\} \leq \inf\{f(y) + \|x_0 - y\| | y \in L\}$.

Поради густината на множеството $\mathbb{R}$, постои $k \in \mathbb{R}$, така што:

$\sup\{f(x) - \|x - x_0\| | x \in L\} \leq |k \leq \inf\{f(y) + \|x_0 - y\| | y \in L\}$.

Го одредуваме сега функционалот $f_1 : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, на следниов начин: за $x = l + \lambda x_0 \in L_1$, па нека е

$f_1(x) = f(l) + \lambda \cdot k$.

За $x^{'} = l^{'} + \lambda^{'} x_0$ и $x^{''} = l^{''} + \lambda^{''} x_0$ од L_1 и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тогаш важи

$$f_1(\alpha x^{'} + \beta x^{''}) = f_1\left((\alpha l^{'} + \beta l^{''}) + (\alpha\lambda^{'} + \beta\gamma^{''})x_0\right)$$
$$= \alpha f(l^{'}) + \beta f(l^{''}) + (\alpha\lambda^{'} + \beta\lambda^{''})k$$

$$= \alpha f_1(x^{'}) + \beta f_1(x^{''}),$$

Значи, f_1е линеарен функционал. Освен тоа, како што $L \subset L_1$, при што $x \in L$, согледуваме дека $x = x + 0 \cdot x_0$ а, со тоа

$f_1(x) = f(x) + 0 \cdot k = f(x)$,

па, заклучуваме дека функционалите f и f_1се поклопуват на L, f_1е продолжение на функционалот f.

Ни останува уште да покажеме дека при тоа продолжување е зачувана нормата. Нека $x \in L_1$ е произволен. Тогаш за единствените $l \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = l + \lambda x_0$, а притоа $f_1(x) = f(l) + \lambda k$. Сега нека е $\lambda > 0$. Поради начинот на изборот на бројот k, важи:

$f_1(x) = f(l) + \lambda k \leq f(l) + \lambda(f(y) + \|y - x_0\|) = f(l) + f(\lambda y) + \|\lambda y - \lambda x_0\|$, за произволно $y \in L$. Избираме y такво што $\lambda y = -l$. Тогаш имаме:

$f_1(x) \leq \|-l - \lambda x_0\| = \|l + \lambda x_0\| = \|x\|$. (1)

Од друга страна поради изборот на бројот k, важи:

$f_1(x) = f(l) + \lambda k \geq f(l) + \lambda(f(y) - \|y - x_0\|) = f(l) + f(\lambda y) - \|\lambda y - \lambda x_0\|$,

за сите $y \in L$. Потоа, повторно одбираме дека $\lambda y = -l$, добиваме:

$f_1(x) \geq -\|-l - \lambda x_0\| = -\|l + \lambda x_0\| = -\|x\|$. (2)

Од (1) и (2) заклучуваме дека:

$|f_1(x)| \leq \|x\|$, за сите $x \in L_1$.

Сé што е покажано погоре е за случај ако $\lambda > 0$. Ако е $\lambda < 0$, тогаш ќе го набљудуваме :

$-x = l' + \lambda' x_0$, каде што $\lambda' = \lambda$, а$l' = -l$, па, тогаш според доказите би имале:

$|f_1(x)| = |f_1(-x)| \leq \|-x\| = \|x\|$.

Ако на крај $\lambda = 0$, тогаш $x \in L$, па поради совпаѓањето на функционалот добиваме:

$|f_1(x)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|$.

Од сé што беше изнесено заклучуваме дека секое$x \in L_1$, важи $|f_1(x)| \leq \|x\|$, т.е.

$$\|f\| \leq 1. \qquad (3)$$

Од друга страна, поради особините на нормата на функционалот и особините на супремумот имаме:

$$\|f_1\| = \sup_{x \in L_1 \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\| = 1,$$

т.е. важи

$\|f_1\| \geq 1.$ (4).

од (3) и (4) заклучуваме дека

$\|f_1\| = 1$,

при што добивме продолжение на функционалот без промена на нормата.

Ја набљудуваме сега фамилијата F, на сите продолжувања на функционалот f, без промена на нормата. Врз основа на фактот дека $F \neq \emptyset$, во F ги воведуваме следниве релации за $f_1, f_2 \in F$

$$f_1 \preceq f_2 \Leftrightarrow f_2 \text{ е екстензијата на функцијата } f_1.$$

Тривијално се покажува дека со воведената релација, F е парцијално уредено множество. Покажуваме сега дека во F се исполнети условите за примена на лемата на Zorn. Нека е F_0 произволен ланец во F (сите елементи во F_0 се споредливи со воведената релација). Означуваме со:

$$L' = \bigcup_{i \in I} L_i \ ,$$

каде што се L_i $(i \in I)$ линеали на кои се дефинирани (одредени) функционалите $f_i \in F_0$и којшто претставува проширување на линеалот L. Бидејќи F_0 е верига, тогаш за произволните $f_1, f_2 \in F_0$ или $f_i \preceq f_j$ или $f_j \preceq f_i$, односно за соодветните линеали, важи или $L_i \subseteq L_j$ или $L_j \subseteq L_i$. Користејќи го ова, лесно докажуваме дека L' е линеал во X и дека $L \subseteq L'$, а исто така за секое $i \in I$ е $L_i \subseteq L'$.

Го одредуваме сега $f_0 : L' \to \mathbb{R}$ на следниов начин: за произволно $x \in L'$, постои $i \in I$, такво што $x \in L_i$, и добиваме:

$$f_0(x) = f_i(x).$$

Избираме $x \in L'$ и нека е $i \in I$, онаа за кое $x \in L_i$. Ако е L_j некој друг линеал којшто го содржи x, тогаш за соодветните функционали ќе важи

$$f_i \preceq f_j \text{ или } f_j \preceq f_i.$$

Избираме $f_i \preceq f_j$. Ова всушност значи дека функционалот f_j е проширување на функционалот f_i , па тогаш нивните вредности се софпаѓаат на L_i, т.е.

$f_0(x) = f_i(x) = f_j(x),$

така што вредностите на функционалот f_0 не зависат од тоа кои од функционалите ги бираме, туку само од x, па тогаш f_0 е добро дефиниран функционал.

Ако се $x, y \in L'$ произволни, тогаш постои L_iи L_j , такви што $x \in L_i$ и $y \in L_j$, но притоа поради уреденоста на ланецот важи уште на пример и $L_i \subseteq L_j$. Значи, $x, y \in L_j$, а бидејќи е тој линеал , имаме:

$f_0(x+y) = f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y) = f_0(x) + f_0(y)$.

На сличен начин се покажува дека за произволното $\lambda \in \mathbb{R}$, важи:

$f_0(\lambda x) = \lambda f(x).$

Значи f_0 е линеарен функционал.

Како што за произволниот $f \in F$, важи $\|f\| = 1$, тогаш за произволното $x \in L^{'}$ важи:

$$|f_0(x)| = |f_i(x)| \leq \|x\|,$$

односно , $\|f_0\| \leq 1$. Од друга страна имаме:

$$\|f_0\| = \underset{x \in L \setminus \{0\}}{\text{sub}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} \geq \underset{x \in L_i \setminus \{0\}}{\text{sub}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \underset{x \in L_i \setminus \{0\}}{\text{sub}} \frac{|f_i(x)|}{\|x\|} = \|f_i\|,$$

за произволно $i \in I$, а тоа значи дека $\|f_0\| \geq 1$. *Значи* важи:

$\|f_0\| = 1.$

Од сé што произнесовме, може да заклучиме дека f_0 е проширување на функционалот f, без промена на нормите, но и проширување на секој од функционалите $f_i \in F_0$. Значи,

$$(\forall f_i \in F_0) \; f_i \preceq f_0 \,,$$

што не значи ништо друго, туку дека до ланецот F_0 има барем едно горно ограничување. Поради произволноста на ланецот, а на основа на лемата на Zorn[32], заклучуваме дека во F постои максимален елементи, означен со f^*. Како прво имаме дека f^* е проширување на функционалот f, без промена на нормата, а како второ ни преостанува да видиме дека овој функционал е дефиниран (одреден) на целото X. Кога не би било тоа, т.е. $D_{f^*} \subset X$, би постоел $z \in X,$ такво што $\notin D_{f^*}$. Тогаш функционалот f^*, врз основа на првиот дел од доказот би можел да се прошири без промена на нормите на линеалот

$$L_1^* = D_{f^*} \oplus L_1 \,,$$

каде што $L_1 = \{x \in X | x = \lambda_z, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Меѓутоа, ова би значило дека f^* не е максимален елемент во F, па спрема тоа оваа можност отпаѓа т.е. мора да важи

$$D_{f^*} = X \;\; ,$$

со што теоремата е докажана.

Хан Банаховата теорема е една „огромна“ теорема, а тоа го потврдуваат многу последици, т.е. искази кои се докажани со користење на оваа теорема. Ќе наведеме само неколку од нив:

---

32 Лема на Zorn: Ако е $(P, \leq)$ (не празно) парцијално уредено множество во кое секој ланец има горно ограничување, тогаш во P постои максимален елемент.
Лемата на Zorn најмногу се користи во докажувањето на Хан-Банаховата теорема, дека постои “максимална екстензија“ .

Теорема 2: Нека x_0 е произволен (различен од нула) елемент во просторот X. Тогаш на X постои линеарен функционал$\|f^*\|$, таков за којшто важи:

- $\|f^*\| = 1$
- $f^*(x_0) = \|x_0\|$.

Доказ *:* Нека е $0 \neq x_0 \in X$ произволно. Го набљудуваме линеалот

$$L = \{x(x|x = \lambda x_0, \quad \lambda \in \Phi)\} .$$

Одредуваме $f: L \longrightarrow \Phi$, на следниов начин , за $x = \lambda x_0 \in L$

$$f(x) = \lambda \|x_0\| .$$

За $x^{'}, x^{''} \in L$ и $a, b \in \Phi$, имаме

$$f\left(ax^{'} + bx^{''}\right) = f\left(a\lambda^{'}x_0 + b\lambda^{''}x_0\right) = f\left(\left(a\lambda^{'} + b\lambda^{''}\right)x_0\right) = \left(a\lambda^{'} + b\lambda^{''}\right)\|x_0\|$$
$$= af\left(x^{'}\right) + bf\left(x^{''}\right),$$

па fе линеарен функционал. Понатаму имаме:

$$\|f\| = \underset{x \in L\setminus\{0\}}{\mathrm{sub}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \underset{\lambda \in \Phi}{\mathrm{sub}} \frac{|\lambda \|x_0\||}{\|\lambda x_0\|} = 1.$$

Од самата дефиниција за функционалот гледаме дека поради тоа што $x_0 = 1 \cdot x_0$ $f(x_0) = \|x_0\|$.

Повикувајќи се на Хан-Банаховата теорема, дадениот функционал f можеме да го продолжиме на целиот простор до функционалот f^*, којшто ја има истата норма како и f (т.е. важи првата особина) и притоа се поклопува со функционалот f на L (т.е. важи втората особина).

Теорема 3: Нека е X Банахов простор и нека е L вистински потпростор од X. Нека е $x_0 \in X\setminus L$.Тогаш постои ограничен линеарен функционал f^* на X , таков што важи:

- $\|f^*\| = 1$
- $f^*(x_0) = d = d(x_0, L)$
- $(\forall x \in L) f^*(x) = 0.$

Доказ: Нека $x_0 \in X\setminus L$. Го набљудуваме множеството

$$L_1 = \{x \in X | x = \lambda x_0, \quad \lambda \in \Phi\} .$$

L_1 е еднодимензионален потпростор од X, па е потпростор и

$$L^{'} = L \oplus L_1 \quad ,$$

И притоа секој $x \in L^{'}$, на едноставен начин може да се запише во следниов облик

$$x = l + \lambda x_0\,, \qquad l \in L, \qquad \lambda \in \Phi\ .$$

Одредуваме на L функционал f_0 со

$f_0(x) = f_0(l + \lambda x_0) = \lambda d$,

каде што d е оддалеченост на елементот x_0 од потпросторот L, т.е.

$d = d(x_0, L)$. Очигледно за $x \in L$, важи $f_0(x) = 0,$ а исто така и $f_0(x_0) = d$. Ја пресметуваме нормата на овој функционал.

$$\|f_0\| = \operatorname*{sub}_{x \in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \operatorname*{sub}_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|f_0(l + \lambda x_0|}{\|l + \lambda x_0\|}$$

$$= \operatorname*{sub}_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|\lambda d|}{\|l + \gamma x_0\|} = \operatorname*{sub}_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{d}{\left\|x_0 + \frac{l}{\lambda}\right\|}$$

$$= d \operatorname*{sub}_{l' \in L} \frac{1}{\|x_0 + l'\|} = \frac{d}{\inf_{l' \in L} \|x_0 + l'\|}$$

$$= \frac{d}{d} = 1$$

Ни преостанува уште да ја примениме Хан-Банаховата теорема и да се утврди постоењето на овој функционал на целиот простор.

Следната последица често се нарекува теорема во врска со постоењето на доволниот број на непрекинати функционали.

Теорема 4: Нека е X Банахов простор и нека се $x, y \in X$. Ако за секое $f \in X^*$ важи $f(x) = f(y)$, тогаш $x = y$.

Доказ: Ако е $x \neq y$, тогаш е $x - y \neq 0$, па врз основа на првата последица, постои $f \in X^*$, такво што $f(x - y) = \|x - y\|$. Ова значи дека $f(x) \neq f(y)$, па со контрапозиција имаме исказно тврдење.

Ова теорема можевме да ја искажиме и во еквивалентен облик: Ако е $f(x) = 0$ за сите $f \in X^*$, тогаш $x = 0$.

1.2.2 Екстензионална Теорема на Хан Банах[33]

Дефиниција 1: Нека X и Y сe множества, $L \subset X$ е подмножество на X и $f \to L{:}Y$. Велиме дека $\tilde{f} \to X{:}Y$ е продолжение на f, ако $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in L$.

Теорема 1: Нека X е нормиран простор со поле на скалари $\mathbb{R}$. Нека L е линеарен потпростор на X и $l{:}L \to \mathbb{R}$ е непрекинат линеарен функционал. Тогаш постои непрекината екстензија (продолжение) $\tilde{l}{:}X \to \mathbb{R}$ на l, со својство $\|\tilde{l}\| = \|l\|$.

Доказ: Со помош на лемата на Цорн (Zorn)[34] (или со дополнителна претпоставка дека X е сепарабилно), се оправдува суштината на максималниот потпростор на X, во коешто продолжува суштинското барање.

Претпоставуваме дека тоа максимално пространство не е X. Ќе опишеме процедура за добивање на продолжение (екстензија) во потпросторот, уште поголемо од максималното. Претпоставуваме дека L е тој максимален потпростор.

Нека x_0 не припаѓа на L. За произволните $x^{'}, x^{''} \in L$:

1. $l(x^{'}) - l(x^{''}) = l(x^{'} - x^{''}) \leq \|l\|\|x^{'} - x^{''}\| \leq \|l\|(\|x^{'} + x_0\| + \|l\|\|x^{''} + x_0\|)$.
2. Од овде произлегува дека $l(x^{'}) - \|l\|(\|x^{'} + x_0\| \leq l(x^{''}) + \|l\|\|x^{''} + x_0\|)$, $\forall x^{'}, x^{''} \in L$.
3. Тогаш $\exists C \in \mathbb{R}$: $\mathrm{sub}_{x\in L}(l(x) - \|l\|\|x + x_0\|) \leq C \leq \inf_{x\in L}(l(x) + \|l\|\|x + x_0\|)$.
4. Потоа произнесуваме $\hat{l}(x + tx_0) = l(x) - tC$.
5. Од ова може да заклучиме дека: $\|\tilde{l}\| \leq \|l\|$.

Од (3) произлегува дека: $l(x) - C \leq \|l\|\|x + x_0\|$ и $l(x) - C \geq -\|l\|\|x + x_0\|$, т.е. $|l(x + x_0)| \leq \|l\|\|x + x_0\|$, од каде што

[33] [ЛюстСоб, 170-180], [КантАк, 83-88]

[34] Лема на Zorn:Ако е $(P, \leq)$(не празно) парцијално уредено множество во кое секој ланец има горно ограничување, тогаш во P постои максимален елемент.
Лемата на Zorn најмногу се користи во докажувањето на Хан-Банаховата теорема, дека постои "максимална екстензија" .

$|l(x+tx_0)|=|t|\left|l\left(\frac{x}{t}+x_0\right)\right| \leq |t|\,\|l\|\left\|\frac{x}{t}+x_0\right\| = \|l\|\,\|x+tx_0\|.$

Последица 1*:* (i) Нека X е реален нормиран простор и $x_0 \neq 0$. Тогаш постои линеарен функционал $l: X \to \mathbb{R}$ со својствата: $l(x_0) = \|x_0\|$и$\|l\| = 1$. (ii) Ако $x', x'' \in X$и$x_0 \neq x_1$, тогаш постои непрекинат линеарен функционал $l: X \to \mathbb{R}$, за којшто $l(x_0) \neq l(x_1)$ (т.е. линеарните функционали ги разделуваат точките на X).

Последица 2*:* Нека X е реален нормиран простор, а L е линеарен потпростор на X и $x \in X$, така што $d(x, L) = d > 0$.

Тогаш постои линеарен функционал $l: X \to \mathbb{R}$ со својствата $l_{|L} = 0, l(x_0) = 1$ и $\|l\| = \frac{1}{d}$

1.2.3 Теорема за сепарација на Хан-Банах (separation theorems).[35]

Наведуваме дека хипер рамнина во векторски простор X е множество со форма $H = l^{-1}(\alpha)$ каде што $\alpha \in \mathbb{R}$ и $l: X \longrightarrow \mathbb{R}$ е нетривијален линеарен функционал. Да ги разгледаме двата алгебарски затворени полупростори:

$H_+ := \{l(x) \leq \alpha\}, H_- = \{l(x) \leq \alpha\}$

одредено со H . Велиме дека H_+ е спротивно на H_- и vice-versa. Исто така, знаеме дека, ако X е исто тополошки векторски простор, тогаш хипер рамнината H е затворена, ако и само ако функционалот l е непрекинат.

Дефиниција 1:

Ако X е алгебарски простор, тогаш алгебарската внатрешност од $A \subseteq X$ е

$\mathrm{core}(A) := \{x_0 \in A : \forall x \in X, \exists t_x > 0, \forall t \in [0, t_x], x_0 + tx \in A\}$.

Избираме точка x е што припаѓа на алгебарската внатрешност (*algebraic interior : a-int*) од множеството $E \subset X (x \in \mathrm{a-int}(E))$, ако $x \in \mathrm{int}_L(E \cap L)$ за секоја права $L \subset X$ што го содржи x.

Дефиниција 2:

[35] www.mat.unimi.it/users/libor/AnConvessa/HB.pdf

Нека A и B не се празни множества во векторскиот простор X. Велиме дека нетривијалниот линеарен функционал $l: X \rightarrow \mathbb{R}$:

a) *ги разделува* A и B ако: $\mathrm{sub}l(A) \leq \inf l(B)$ или $\mathrm{sub}l(B) \leq \inf l(A)$

b) *ги разделува* A и B ако: $\mathrm{sub}l(A) < \inf l(B)$ или $\sup l(B) < \inf l(A)$

Сега ќе кажеме дека A и B може (силно) да бидат разделени од *хиперрамнина,* ако постои нетривијален линеарен функционал l на X коешто (силно) ги разделува A и B.

Став 1: Нека A биде подмножество од векторски простор *X,* такво што $\mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$.Нека $l: X \rightarrow \mathbb{R}$ биде нетривијален линеарен функционал, $\alpha \in \mathbb{R}$. Следниве тврдења се еквивалентни:

i. $A \subset \{l \leq \alpha\}$;

ii. $\mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A) \subset \{l \leq \alpha\}$;

iii. $\mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A) \subset \{l < \alpha\}$.

Доказ : Импликацијата (i)⟹(ii) е очигледна (ii)⟹(iii). Ако (iii) е лажно, тогаш постои $a \in \mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A)$, такво што $l(a)=\alpha$. Го земаме векторот $v \in X$, таков што $l(v)>0$. Постои $t>0$со$a+tv \in A$, но, притоа е неопходно $a+\frac{t}{2}v \in \mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A)$ и $l(a+\frac{t}{2}v)>\alpha$; така (ii) е лажно тврдење.

(iii)⟹(i). Се претпоставува дека (iii) е *потврдно - вистинито* тврдење, додека (i) лажно. Фиксираме $a \in \mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A)$ и $x \in A$, додека $l(x)>\alpha$. Тогаш релативно отворениот сегмент (a,x) се содржи во $\mathrm{a}-\ \mathrm{int}(A)$ и ја пресекува хипер рамнината $l^{-1}(\alpha)$, што воедно е контрадикција на (iii).

Став 2: Избираме две множества A, B кои се разделени од линеарниот функционал l. Тогаш за секое $v \in X$, множествата $A+v$ и $B+v$ се разделени од l.

Да почнеме со послабата верзија на теоремата за сепарација.

Став 3: Избираме C кое што е конвексно множество во векторски простор X. Ако $\mathrm{a}-\ \mathrm{int}(C) \neq \emptyset$ и $x_0 \in X \backslash \mathrm{a}-\ \mathrm{int}(C)$, тогаш $\{x_0\}$ и C може да бидат разделени од една хиперрамнина. Уште и ако X е тополошки векторски простор и $\mathrm{int}(C) \neq \emptyset$, тогаш $\{x_0\}$ и C може да бидат разделени од една затворена хипер рамнина.

Доказ: Од напомена 1, може да претпставиме дека $0 \in \mathrm{a}-\ \mathrm{int}(C)$. Во овој случај, C не е празно множество и $x \neq 0$. Се разгледува потпросторот $L=\mathbb{R}x_0$. Лесно е да се види дека алгебарската внатрешност (algebraic interior) на интервалот $L \cap C$ ја содржи 0-та, но не x_0 (во спротивно x_0 би припаѓало на $\mathrm{a-\ int}(C)$). Така, линеарниот функционал $l: L \to \mathbb{R}$, $l(tx_0) = t$, при што се задоволува $l(y) \leq l(x_0)$ кога $y \in C \cap L$. Според екстенсионалната теорема, тврдиме дека постои линеарна екстензија $\hat{l}: X \to \mathbb{R}$ од l такво што $\sup \hat{l}(C) \leq l(x_0)$, со што се добива бараното тврдење. Уште и во случај на тополошки векторски простор, ако почнеме со $0 \in \mathrm{int}(C)$, функционалот $\hat{l}$ е исто така непрекинат.

Теорема 1: Теорема за сепарација на Хан-Банах (H-B Separation Theorem): Нека A и B се две непразни конвексни множества во векторскиот простор X. Ако $\mathrm{a-\ int}(A) \neq \emptyset$ и $B \cap \mathrm{a-\ int}(A) \neq \emptyset$, тогаш A, B може да бидат разделени од една хиперрамнина. Уште и во случај кога X е тополошки векторски простор, $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ и $B \cap \ \mathrm{int}(A) \neq \emptyset$, тогаш A, B може да бидат разделени од затворена хиперрамнина.

Доказ: Множеството $A_0 = \mathrm{a-int}(A)$ е конвексно, не е празно и разделено (одделено) од B. Тогаш, конвексното множество $C = A_0 - B$ нема празна алгебарски натрешност и не содржи 0. Според Ставот 1, постои нетривијален линеарен функционал l на X, таков што $l(C) \leq l(0) = 0$. Следи дека
$l(a) \leq l(b)$ кога $a \in A_0$, $b \in B$. Така, $\sup l(A_0) \leq \inf l(B)$. Според ставот 1, $\sup l(A) \leq \inf l(B)$. Доказот на вториот дел е на ист начин со „int“ наместо на „a-int“

.

За да ја објасниме (Hahn-Banach strong separation theorem) Строго сепарабилната теорема на Хан-Банах, да ја земеме следнава Лема:

Лема 1: Нека се A и B две разделени затворени множества, такви што A е компактно. Тогаш, постои околина Vна 0-та, таквошто $(A + V) \cap B = \emptyset$.

Доказ: За секое $a \in A$, фиксираме $U_a \in \mathcal{U}(0)$, такво што $(a + U_a) \cap B = \emptyset$, и отворено $V_a \in \mathcal{U}(0)$ со $V_a + V_a \subset U_a$. Бидејќи множеството $a + V_a (a \in A)$ формира отворен покривач на компактното множество A, постои $a_1, \dots, a_n \in A$ такво што $A \subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_n + V_{ai})$.

Множеството:

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$$

е околина на 0-та, и притоа

$$A + V \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i + V_{a_i} + V\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i + V_{a_i} + V_{a_i}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i + U_{a_i}\right).$$

Тогаш $(A + V) \cap B \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i + U_{a_i}\right) \cap B = \emptyset$.

Наведуваме дека тополошкиот векторски простор е локално конвексен, ако неговата база на околините на 0-та се конвексни множества.

Теорема 2 : (H-B Strong Separation Theorem – Строго сепарабилна теорема): Нека X е локално конвексен тополошки векторски простор, и $A, B \subset X$ се две разделени, непразни, затворени конвексни множества, од кои едното е компактно. Тогаш A и B се строго разделени со затворена *хиперрамнина.*

Доказ: Од Лемата 1, постои отворено конвексно $V \in \mathcal{U}(0)$ такво што $(A + V) \cap B = \emptyset$. Бидејќи множеството $A + V$ е отворено и конвексно, може да ја примениме Теорема 1, за да добиеме $x^* \in X^* \backslash \{0\}$ такво што $x^*(A + V) \leq \inf x^*(B)$. Бидејќи $A \subset A + V = \operatorname{int}(A + V)$, од ставот 1, произлегува дека:

$x^*(a) < \inf x^*(B)$ кога $a \in A$.

Така $\sup x^*(A) = \max x^*(A) < \inf x^*(B)$.

1.2.4 Геометриска Hahn-Banach-ова теорема

Во својата книга „Оптимизација со методите на векторски простор“, David Luenberger ја презентира геометриската Hahn-Banach-ова теорема и нејзиниот доказ.

Теорема1[36]*:* Нека X е реално линеарен нормиран простор, а *p* е непрекинат функционал на *X*. Нека *f* е линеарен функционал на *потпросторот M* од *X* при што се задоволува $f(m) \leq p(m), \forall m \in M$. Тогаш постои (екстензија) проширување *F* од *f*, од *M* до *X* така што *F(x)* ≤*p(x)* на *X*.

[36]Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem – Luenbergerpg. 111)

p(x) на кое упатува теоремата е функционалот на Minkowski дефиниран на следниов начин:

$$p(x) = inf\left\{r: \frac{x}{r} \in K, r > 0\right\}$$

Некои особини на функционалот на Minkowski кои ќе се користат во доказите, а притоа не се докажани овде се:

1. $p(\alpha x) = \alpha p\ (x)$ за $\alpha > 0$.
2. $p(x)$ е непрекинато .
3. $p(x) \geq 0$ и $p(x)$ е конечно(ограничено) за сите x.

Треба исто така да го дефинираме концептот за линеарен вариетет и хиперрамнина:

Дефиниција: ***(***https://web.eecs.umich.edu/~fessler/course/600/l/l02.pdf) Подмножеството *V* од векторскиот простор *X* е наречен линеарен вариетет ако x_0+M *за некое* $x_0 \in X$ и некој подпростор M од X.

Дефиниција: (Luenberger pg. 129)[37]: *Хиперрамнина* во линеарен векторски простор *X* е максимално правилен линеарен вариетет, а тоа значи дека линеарниот вариетет H е таков што $H \neq X$ и ако V е кој било линеарен вариетет што го содржи *H*, тогаш или *V* = *X* или *V* = *H.*

Со теоремава и дефиницијава, можеме да ја докажеме геометриската верзија на Hahn-Banach-овата теорема.

Теорема 2[38](Геометриската верзија на Hahn-Banach-овата теорема-Luenberger стр. 133): Нека *К* е конвексно множество што *нема празна внатрешност* во реално нормиран линеарен векторски простор *X.* Нека *V* е линеарен вариетет во *X,* так а што $X \cap Int\ K = \emptyset$. Тогаш постои хипер рамнина во X што го содржи *V*, но да не содржи ниту една внатрешна точка од *К*, т.е., тогаш постои елемент $x^* \in X^*$и константа c таква што$< v, x^* \geq c, \forall v \in V$ и $< k, x^* >< c, \forall k \in \dot{K}$.

Доказ:

Прво, избираме едно $v_0 \in V$ и множество $f(v_0) = 1$ и $f(n) = 0, \forall n \in N$ каде што $V = v_0 + N$.

---

[37]Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem–Luenbergerpg. 129)

[38]Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem – (Luenbergerpg.133)

Бидејќи во V не се вклучени никакви внатрешни точки од *K*, тогаш знаеме дека $1 = f(v) \le p(v).$ Сега можеме да продолжеме и да покажеме дека $f(x) \le p(x), \forall x \in M$ каде што M е подмножество од *X* генерирано од V.

Ако $\alpha > 0, f(\alpha v) = \alpha f(v) \le \alpha p(v) = p(\alpha v).$ Ако $\alpha < 0, f(\alpha v) < 0,$ (но притоа знаеме од претходно наведеното својство на функционалот на Minkowski дека $p(\alpha v) \ge 0$), затоа $f(\alpha v) \le p(\alpha v).$

Користејќи ја Hahn-Banach-овата теорема за екстензија, можеме да го прошириме овој линеарен функционал$f(x)$ одреден на *M*, до линеарниот функционал $F(x)$ одреден на сите $x \in X.$ Според Hahn-Banach имаме $F(x) \le p(x), \forall x \in X.$

Исто така, бидејќи знаеме дека $p(x)$ е непрекинато и затоа $p(x) \to 0$ како што $x \to \theta,$ а тоа мора да биде случај кога $F(x) \to 0$ како што $x \to \theta$ исто така. Така $F(x)$ е непрекинато во θ и користејќи го фактот дека ограничениот линеарен функционал е непрекинат насекаде доколку е непрекинат во една точка, можеме да заклучиме дека $F(x)$ е непрекинато насекаде.

Хиперрамнината одредена како $H = \{x : F(x)$=1$\}$ исто така е затворена со следниов аргумент: Земаме во предвид дека $x_n \to x. F(x_n)$=1$, \forall n$ и $F(x)$=1 бидејќи F е непрекинато. Затоа, $x \in H$ и H е затворено. Исто така, за H добиваме дека $F(x) \le p(x)$, а тоа е уште еден резултат на Hahn-Banach-овата теорема за екстензија, така $p(x) \ge 1$ бидејќи $F(x)$=1$, \forall x \in H.$ Според дефинирањето на функционалот на Minkowski (погоре наведено), ако $p(x) \ge 1$, тоа мора да е ситуација кога не постојат внатрешни точки на *K* во *H* бидејќи за внатрешната точка важи дека $p(x) \le 1$.

И за крај, сето тоа може да се каже и за членовите на елементот $x^* \in X^*$ што го претставува линеарниот функционал $F(x)$, за кој претходно дискутиравме. Екстензијата на ова затворена и непрекината рамнина за која се задоволени претходно наведените услови, е фактот дека $\exists x^* \in X^*$ такво што $< v, x^* \ge 1 = c, \ \forall v \in H$ и $< k, x^* > \le 1, \forall k \in K$, што воедно е она што сакавме да го покажеме.

2 Паретова ефикасност

2.1 Вовед во Паретовата ефикасност

Состојба на алокација на ресурсите при која што не е можно благосостјбата на еден поединец да се подобри без притоа да се влоши благосостојбата на некој друг поединец. Поимот е именуван по италијанскиот економист ВилфредоПарето, кој концептот го вовел во своите истражувања на економската ефикасност и распределбата на доходот. Паретово множество е множеството во кое што се вбројуваат сите Паретови оптимални вредности. Паретови критериуми, пак, се критериумите врз основа на кои што се утврдува дали одредена состојба може да се подобри со подобрување на некој параметер, т.е. Паретово подобрување, без притоа да се влоши некој друг параметар. Ваквиот параметар Парето го дефинирал поединечно.

Може да кажеме дека : Алокацијата или Парето ефикасноста се јавува кога не постои никаков начин да се преструи производството или потрошувачката, така што се зголемува задоволството на една страна, а за возврат се намалува задоволството на друга страна:

1. Рамнотежа на потрошувачите = односите на граничната корист на добрата или граничната стапка на супституцијата за две добра мора да биде еднаков на односот на нивната цена.
2. Рамнотежа на производителите = односите на граничните трошоци (гранична стапка на трансформацијата) на финалните производи, мора да биде еднаква на односите на нивната цена.
3. Општа конкурентна рамнотежа = максимизација на користите на потрошувачот = максимизација на профитот = минимални трошоци (правило на најмали трошоци).

2.1.1 Услови за Паретова ефикасност

Паретовата ефикасност во една национална економија означува дека факторите на производство се искористени на оптимален начин. Тоа е случај кога се задоволени следните услови:

- **Оптималност на размената**.

Маргиналните корисности на сите добра што ги троши некој поединец се еднакви. Во овој случај, поединецот ги троши добрата со максимална корисност.

- **Оптимални фактори на производство**.

Маргиналните продуктивности на факторите на производство мора да бидат еднакви. Со овој услов се осигурува дека ќе биде произведено најголемото можно количество на добра.

Сепак, во современите национални економии постојат оддалечувања од овие услови. Така, монополите, екстерналиите, асиметричните информации и постоењето на јавни добра може да го нарушат функционирањето на пазарниот механизам. Во овој случај, согласно теоријата на втор најдобар избор е нејасно дали некоја мерка на производството која што не е во согласност со поставените услови може да дејствува кон зголемување на ефикасноста.

2.2 Паретова ефикасност или Паретова оптималност

2.2.1 Дефиницији и поими

Претходно да се повикаме на некои дефиниции и поими за преференционалното подредување. Нека X е множество (множество од алтернативи), ја имаме следнава дефиниција

Дефиниција [39]***:***

1. Релацијата R на X е подмножество од XxX.

Често пишуваме xRy наместо $(x, y) \in R$ и велиме „ x е во релација со y ".

2. Ако R е релација на X, комплементот на R, го означуваме со $\not R$, (наместо $\sim R$, бидејќи $\sim$, ќе дава друго значење). Бидејќи $x \not R y$ би значело дека: x не е во релација со y , $(x, y) \notin R$.
3. Строго подредување на X е транзитивна и антирефлексивна релација P на X. Обично пишуваме $x \succ y$ за $x\ P\ y$, и истотака $y \prec x$. Слаботo подредување на X е транзитивна и рефлексивна релација на X. Обично пишуваме $x \succsim y$ и велиме дека x е слабо приоритетно на y.
4. Ако P е строго подредување, ја означуваме кореспондираната релација со I , дефинирано како $xIy \Leftrightarrow [x \not P y \& y \not P x]$. Исто така пишуваме $x \sim y$ за xIy, и $x \succsim y$ (исто така $y \precsim x$) за $[xPy$ или $xIy]$. Забележуваме дека $\sim$ е и рефлексивно и симетрично, но не треба да биде транзитивно и дека $\succsim$ е комплетно, но не треба да биде транзитивно. Ако $\sim$ е транзитивно, тогаш $\succsim$ е комплетно подредено.
5. Ако $\succsim$ е комплетно подредено, тогаш $\sim$ е транзитивно и ако $[x \succsim y \& y \precsim z]$ тогаш произлегува дека $x \succ z$, за секое $x, y, z \in X$.

[39] https://www.coursehero.com/file/6743229/characterization-of-ParetoEfficiency/

2.2.2 Агрегирање на ранговите во едно рангирање

Нека X е множество од **алтернативи**, означени со x; нека N е множество од n **единки**, означени со i; и нека $\mathcal{P}$ е множество од прифатливи подредувања над X, означено со P. За секоја листа $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}^n$ од индивидуални рангови, би сакале да имаме едно P кое го „сумира" или претставува **P**– на пример, едно единствено P кое би се користело како критериум за одлучување од $P_1, \dots, P_n$. Тоа што го сакаме е всушност „*агрегационо правило*" или функција

$$a: \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}, \text{т.е.}, (P_1, \dots, P_n) \xrightarrow{a} \bar{P}$$

Би сакале да имаме правило според кое би можеле да агрегираме листа $P = (P_1, \dots, P_n)$ на индивидуални рангови во еден единствен „агрегатен" ранг, $\bar{\mathbf{P}}$. Со други зборови, би сакале да имаме агрегатна функција или правило.

Наместо да го третираме проблемот како еден од агрегацијата на листи на ранговите во едно единствено рангирање, може алтернативно да го третираме како еден примерок од агрегацијата од листа од корисни функции во една единствена корисна функција.

2.2.2.1 Примери

Еве неколку примери на X множества на алтернативи, за кои можеме да агрегираме листа на индивидуални рангирања во едно „*репрезентативно*" рангирање:

1. X е множество од алокации $X = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}_+^{nl}$.
2. X е множество од кандидати за работа или за управувачка функција.
3. X е множество од општествени политики.
4. X е множество од екипи (тимови), на пример, X={A,B,C}, A : Вардар, B : Металург, C : Пелистер.

5. X е множество од играчи, на пример, X = {A,B,C}, A : Ѓоковиќ, B : Федерер, C: Надал.

Во последниот пример n индивидуалните рангирања $(P_1, \ldots, P_n)$ може да се рангираат на секој од n-те турнири, а проблемот е да се агрегират резултатите од турнирите во едно единствено рангирање на играчите. Ова е токму она што е всушност е „ATP рангирањето“ во тенисот, а тоа е агрегација (збир) на завршените турнири на кои учествувале играчите во претходната година, во едно единствено рангирање. „ATP рангирањето“ користи едно специфично правило (функција, алгоритам) $a : (P_1, \ldots, P_n) \longrightarrow \bar{P}$ за да се пресмета $\bar{P}$. „ATP[40]рангирањето“ им дава тежина на турнирите, на пример т.н. Grand Slam турнири се со поголема тежина од останатите турнири и носат повеќе бодови.

2.2.3. Парето рангирање

Дефиниција: Нека $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ е листа од подредувања од множество од X алтернативи (множества). Велиме дека $\tilde{x}$ е **Парето подобрување** на x (кое го запишуваме како $\tilde{x}\overline{\mathbf{P}}x$) или дека $\tilde{x}$ е подоминантно од x , ако $\forall i : xPi\tilde{x}$ и $\exists i \not: \tilde{x}Px$. $\overline{\mathbf{P}}$ е наречено Парето рангирање или Парето подредување поврзано со листата $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$.

Забелешка: Како што спомнавме погоре, на алтернативните можности (елементите на X) не им се потребни алокации, тоа може да бидат политички партии, кандидати, спортски екипи итн. и функцијата $(P_1, \ldots, P_n) \longrightarrow \overline{\mathrm{P}}$ е една од многуте можни начини да се агрегира листата $(P_1, \ldots, P_n)$ од рангирања во едно единствено „агрегатно рангирање“ $\overline{\mathbf{P}}$.

Напомена: Ако секое P_i е *транзитивно* и анти*рефлексно*, тогаш е и $\overline{\mathbf{P}}$. Но, дури и ако секое I_i е транзитивно, а исто и секое P_i е *транзитивно или урефлексно*, $\bar{\mathbf{I}}$ може

[40](„ATP рангирањето“ Association of Tennis Professionals.)

да биде транзитивно, како што е демонстрирано подолу во пример 2 и 3, или $\bar{\mathbf{I}}$ може да биде транзитивно но, не и информативно, како во пример 1 подолу.

Во примерите 1 и 2 подолу, постои множество *X={A,B,C}.* Еве две интерпретации на примерите:

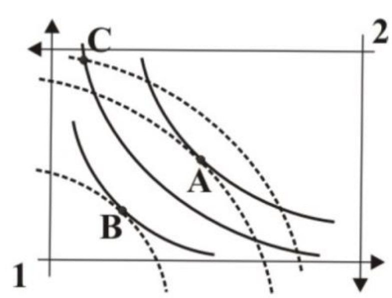
А е Вардар, В е Металург, С е Пелистер. Секое P_i може да биде индивидуални рангирања од овие ракометни тимови, или на нивните економски оддели, или на нивната репутација или како тимови што приредуваат забава, итн.

А е Ѓоковиќ, *В* е Федерер, *С* е Надал. Секое Pi е подредување на завршетоците во турнирите.

Пример 1: $X = \{A, B, C\}$; $A \succ_1 B \succ_1 C$; $B \succ_2 C \succ_2 A$; $C \succ_3 A \succ_3 B$. Затоа $A\bar{\mathbf{I}}B$, $B\bar{\mathbf{I}}C$ и $C\bar{\mathbf{I}}A$. Така, агрегатната индиферентна релација $\bar{\mathbf{I}}$ е транзитивна, но е многу корисна.

Пример 2: $X = \{A, B, C\}$; $A \succ_1 C \succ_1 B$; $B \succ_2 A \succ_2 C$. Затоа $A \backsim B, B \backsim C$, и $A \succ C$. Така, агрегатната индифирентна релација $\bar{\mathbf{I}}$ (или $\backsim$) не е транзитивна.

Пример 3: Сликата 1 е **Еџвортов дијаграм** со двајца потрошувачи, секој со стандардни параметри. Сепак, рангирањата на алокациите *А*, *В* и *С* се исто како во пример 2: $A \succ_1 C \succ_1 B$ и $B \succ_2 A \succ_2 C$, така што Парето рангирањето е исто како во примерот 2: $A \backsim B, B \backsim C$, и $A \succ C$.



Дијаграм 1 (Figure 1)

Еџвортов дијаграм

2.3 Резимирање на Парето ефикасност[41]

Дефиниција: Нека *X* е множество од алтернативни можности, и нека $(\succsim_i)_1^n$ е листа на предности на *X*. Алтернативата $\hat{x}$ е Парето оптимумот, доколку ниту една алтернатива во *X, не* е Парето доминанта над $\hat{x}$.

Често имаме „фундаментално" множество *X* од алтернативни можности (на пример, сите разбирливи и добро дефинирани алтернативи). Но, всушност само подмножеството $F \subseteq X$ од алтернативи е можно или изводливо. Покрај тоа, ние обично сакаме да се овозможи на множеството $\mathcal{F}$ да се согледа разликата и да се види како алтернативите на Парето оптимумот, зависат од $\mathcal{F}$. Нашиот стандарден алокациски проблем е добар пример за ова: велиме дека $X = \mathbb{R}_+^{nl}$ е множество од можни (разумни) алокации и ова е множество преку кои индивидуалните параметри $\succsim_I$ се дефинирани. Но за да потврдиме дали дадената алокација $(x^i)_1^n$ е ефикасна, ние нема да инсистираме дали е доминирана од друга разумна алокација, туку дали не е доминирана од која било изводлива алокација т.е. од која било алокација што може да се постигне со ресурсите што ги имаме.

Дефиниција: Нека $(\succsim_i)_1^n$ е листа од параметри од множеството X, и нека $F \subseteq X$. Алтернативата (можноста) $\bar{x} \in \mathcal{F}$ е Парето ефициент (оптимум) (во однос на $\mathcal{F}$), ако не е Парето доминиран од која било друга алтернатива $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

2.3.1 Карактеризирање на алокацијата на Парето ефициентот (оптимумот)

Да се работи аналитички со Дефиницијата за Парето ефикасноста е прилично непријатно. Би сакале да бидеме во можност да ги окарактеризираме можностите на поаналитички и економско интуитивен начин, на пример како решение на проблемот

[41]https://www.coursehero.com/file/6743229/characterization-of-ParetoEfficiency/

за оптимизација или во однос на маргиналната стапка на супституција. За нашиот економско алокативен проблем, ние всушност може да воспоставиме токму таква карактеризација.

До сега со исклучок на пример 3, се занимававме со апстрактни алтернативи (можности). Дефинирана на оваа ниво, идејата од Парето ефикасноста може да се примени во многу случаи. Но, за економско алокацискиот проблем којшто го проучуваме, можностите што сакаме да ги споредиме се алтернативните *алокации*. Покрај тоа, кога се занимаваме со алокациите, индивидуалните параметри обично се преставувани од корисните функции.

Со структурата каква што е во Евклидовиот простор и со користењето на функциите, многу е лесно да се окарактеризират Парето ефективните алокации како решение на ограничениот *максимизиран* проблем. Прво ќе се разгледа овој проблем, а потоа бидејќи веќе знаеме како да го реформулира (во дуален смисол) решението на ограничениот *максимизиран* проблем со условите од прв ред, ние би го решиле проблемот на окарактеризирање на Парето ефикасните алокации (или едноставно само Парето алокации) со условите од прв ред. Многу лесно ќе ги преведеме условите од прв ред во множество на економско маргинални (гранични) услови, а тоа ни дава окарактеризирање на Патрето алокациите во однос на маргиналните (граничните) услови.

Започнуваме со земањето на алокацијата $\hat{x}$ = ($\hat{x}^i$)$_1^n$ којашто е Парето ефициент и ќе покажеме дека (бидејќи $\hat{x}$ е Парето алокација) тоа мора да е решение на специфично ограничениот максимирачки проблем. Ограничувањата се секако, вообичаените ограничувања на ресурсите, кои ги условивме со тоа дека секоја алтернативна алокација *x* мора да сеправи на $n-1$ од потрошувачите, што не е полошо отколку да се во $\hat{x}$. Тогаш, бидејќи $\hat{x}$ е Парето ефициент, тоа значи дека треба на останатите потрошувачи да им се овозможат сите големи можни корисности од сите расположливи алтернативи (можности) *x.* Забележуваме дека (бидејќи ни е дадено $\hat{x}$) секое u^i($\hat{x}^i$) во предлозите што следуваат е само реален број. Во текот на овој дел, претпоставуваме дека параметрите се претставувани со корисни функции (utility functions) .

Став 1: Ако алокацијата $\hat{x}$, е Парето ефициент за n потрошувачи $(u^i,\hat{x}^i)_1^n$, тогаш $\hat{x}$ е решение за следниов миксимизационен проблем:

$\max_{(x_k^i \in \mathbb{R}_+^{nl})} u^1(x^1)$

подлежи на

$x_k^i \geqq 0, i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, l$

P-max

$\sum_{i=1}^{n} x_k^i \leqq \dot{x}_k, \quad k = 1, \dots, l$

$u^i(x^i) \geqq u^i(\hat{x}^i), \; i = 2, \dots, n,$

Доказ: Претпоставуваме дека $(\hat{x}^i)_1^n$ *не* е решение на P-Max т.е.

Постои $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n \in \mathbb{R}_+^l$ за кое:

$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_k^i \leqq \dot{x}_k, \quad k = 1, \dots, l$

$u^i(\tilde{x}^i) \geqq u^i(\hat{x}^i), \; i = 2, \dots, n,$

$u^1(\tilde{x}^1) > u^1(\hat{x}^1).$

Тогаш $(\tilde{x}^i)_1^n$ е јасно дека претставува Парето подобрувањето на $(\hat{x}^i)_1^n$ т.е. дека $(\hat{x}^i)_1^n$ не е Парето ефициент.

Карактеристика на овој став е фактот што не бара претпоставки за корисните функции на потрошувачите. Тие не треба да бидат конвексни или монотони, константи. А, истиот доказ може да се користи дури и ако корисните функции не се себични т.е. дури и кога некој од потрошувачите се грижи за нивото на потрошувачка на другите.

За да имаме карактеризирање на Парето ефективните алокации, ние ќе треба да воспоставиме конверзија на проблемот што го утврдивме, односно треба да покажеме дека кое било решение на P-Max е Парето ефициент. Всушност, конверзијата не е баш вистинита во вака општи услови. Но, доколку сите корисни функции на потрошувачите се непрекинати и строго растечки, тоа е доволно за утврдиме дека конверзијата е вистинита.

Дефиниција: Парот $(u^i, \dot{x}^i)_1^n$, каде што u^i е функција , а $\hat{x}$ потршувачи, се нарекува економија.

Став: Ако секое u^i е непрекинато и строго растечко и ако алокацијата $\hat{x}$ е решение на проблемот P-Max, тогаш $\hat{x}$ е Парето ефициент за $(ui, \dot{x}^i)_1^n$.

Доказ: Претпоставуваме дека$(\hat{x}^i)_1^n$ не е Парето ефициент, па ќе покажеме дека $(\hat{x}^i)_1^n$ не е решение за P-Max. Бидејќи $(\hat{x}^i)_1^n$ не е Парето ефициент, постои Парето подобрување врз $(\hat{x}^i)_1^n$, така што велиме дека $(\tilde{x}^i)_1^n$:

$\sum_{i=1}^n \tilde{x}_k^i \leqq \dot{x}_k$, , $\quad k = 1, \dots, l$

$u^i(\tilde{x}^i) \geqq u^i(\hat{x}^i)$, $i = 1, \dots, n$,

$u^i(\tilde{x}^i) > u^i(\hat{x}^i)$, *за некое* i.

Ако $u^1(\tilde{x}^1) > u^1(\hat{x}^1)$, тогаш $(\hat{x}^i)_1^n$ не е решение на P-Max, а со тоа доказот е готов. Така претпоставуваме дека $u^1(\tilde{x}^1) = u^1(\hat{x}^1)$, и (wlog) $u^2(\tilde{x}^2) > u^2(\hat{x}^2)$.

Бидејќи u^2 е непрекината, може да избереме $\epsilon > 0$, доволно мало што секое$x^2 \in B_\epsilon(\tilde{x}^2) \cap \mathbb{R}_+^l$ и така се задоволува $u^2(\tilde{x}^2) > u^2(\hat{x}^2)$. А, бидејќи u^1 е строго растечко, постојат $\bar{x}^1 \in B_\epsilon(\tilde{x}^1) \cap \mathbb{R}_+^l$, така се задоволува $u^1(\bar{x}^1) > u^1(\tilde{x}^1) > u^1(\hat{x}^1)$.

За ϵ идентификувано во претходниот став, се одредува нова алокација $(\bar{x}^i)_1^n$, како следнава:

$\bar{x}^1$ е како погоре :$\bar{x}^1 \in B_\epsilon(\tilde{x}^1) \cap \mathbb{R}_+^l$и$u^1(\bar{x}^1) > u^1(\tilde{x}^1)$

$\bar{x}^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{x}^1 - \bar{x}^1$

$\bar{x}^i = \tilde{x}^i, i = 3, \dots, n.$

Така, $\bar{x}^1 + \bar{x}^2 = \bar{x}^1 + \tilde{x}^2 + \tilde{x}^1 - \bar{x}^1 = \tilde{x}^1 + \tilde{x}^2$,а тоа значи дека $\sum_{i=1}^n \bar{x}_k^i = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_k^i \leqq \dot{x}_k$, , $k = 1, \dots, l$и$u^2(\bar{x}^2) = u^2(\tilde{x}^2 + \tilde{x}^1 - \bar{x}^1) > u^2(\hat{x}^2)$, бидејќи $\|\tilde{x}^1 - \bar{x}^1\| < \epsilon$. Исто така, имаме $u^i(\bar{x}^i) \geqq u^i(\hat{x}^i)$, $i = 3, \dots, n$ и $u^1(\bar{x}^1) > u^1(\hat{x}^1)$. Со други зборови $(\bar{x}^i)_1^n$ ги задоволува сите ограничувања во P-max и $u^1(\bar{x}^1) > u^1(\hat{x}^1)$, затоа $(\hat{x}^i)_1^n$ не е решение на P-max.

Со комбинација на двата става ја добиваме следнава теорема:

Теорема 1: Ако секое u^i е непрекината и строго растечка, тогаш алокацијата $\hat{x}$ е Парето ефициент за економијата $(u^i, \dot{x}^i)_1^n$, ако и само ако е непрекината и строго растечка и претставува решение на проблемот P-max.

Потребно е да се напомене дека, додека проблемот P-max, теоремата и двата става се во насока на максимизирање на u^1, тогаш теоремата и последиците се вистинити, користејќи која било од *n* корисните функции u^i, како *максимизант*[*] ([*]квантитет на нешта што треба да се максимизират) и употребата на останатите *n*–1 корисни функции во ограничувањата.

За внатрешните алокации, може да го ослабеме барањето за растечкиот правец на корисните функции, а да бареме само да бидат **локално незадоволителни (**locally nonsatiated**)**[42]**.**

Дефиниција[43]: Релацијата $\succeq$ на множеството $X \subseteq \mathbb{R}^l$ е *локално незадоволителна*, ако за некое $x \in X$ и ако за некоја околина N од x, постои $\tilde{x} \in N$, со што е исполнето $\tilde{x} \succ x$.

Забелешка: Ние би рекле дека корисната функција *u* на множеството $X \subseteq \mathbb{R}^l$ е *локално незадоволително,* ако за некое $x \in X$ и ако за некоја околина N од x, постои $\tilde{x} \in N$, при што $u(\tilde{x}) > u(x)$.

Теорема[44]: Ако секое u^i е непрекината и *локално незадоволителна*, тогаш внатрешната алокација $\hat{x}$ е Парето ефициент за економијата $(u^i, \dot{x}^i)_1^n$, ако и само ако постои решение за проблемот P-Max.

Доказ: Во доказот даден погоре за стриктно растечките корисни функции, може да избереме доволно мало ϵ, така што $B_\epsilon(\tilde{x}^1) \subset \mathbb{R}^l{}_+$, бидејќи $\hat{x}$ е ентериерната алокација. Остатокот од доказот е идентичен.

2.3.2 Caluculus (пресметковна) карактеристика на Парето ефикасноста: маргинални услови

Сега откако ја окарактеризиравме Парето ефективната алокација како решение на ограничениот *максизационен* проблем, би требало да се поедностави користењето на *максизациони*от проблем за окарактеризирање на Парето алокацијата при условите од прв ред (First-order conditions), а потоа да се преработат условите од прв ред како економско маргинални услови. Условите од прв ред се

---

[42] *Една од аксиомите на теоријата за рационален избор. Тоа подразбира дека за кој било износ на добра или услуги, повеќето е преферирано од помалото, а тоа значи дека и при сите поголеми износи повеќето ќе биде преферирано од помалото.*

[43] https://www.coursehero.com/file/p46u6pu/Theorem-If-every-u-i-is-continuous-and-locally-nonsatiated-then-an-interior/

[44] https://www.coursehero.com/file/p46u6pu/Theorem-If-every-u-i-is-continuous-and-locally-nonsatiated-then-an-interior/

calculus (пресметковни) услови и бараат некоја конвексност т.е. услови од втор ред, така што претпоставуваме дека секоја корисна функција на потрошувачот u_i е непрекинато диферецијабилно и квазиконкавна. За да ја поедноставиме оваа констатација, пишуваме u^i_k за делумнен извод $\frac{\partial u^i}{\partial x^i_k}$. Исто така, претпоставуваме дека секое u^i е строго растечко: $u^i_k(x^i) > 0$ за секое i и k, така што само оние алокации коишто целосно ги алоцират сите добра, оние кои го задоволуваат условот $\sum_1^n x^i$= $\sum_1^n \dot{x}^i$ би можеле да бидат Парето алокации. Потребно е да се биде во можност да се проверат претпоставките дека условите од втор ред од теоремата на Kuhn-Tucker и ограничените квалификации се задоволени, така да КТ- условите од прв ред се неопходни и доволни за да биде алокацијата $(\hat{x}^i)_1^n$ решение на P-Max.

2.3.3 Внатрешни алокации

Претходно утврдивме дека алокацијата е Парето ефициент, ако и само ако е решение на ограничениот максимизационен проблем (P-max). Ги утврдуваме мултипликаторите на Лагранж (Lagrange) $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ при l ресурсни ограничувања во проблемот (P-max) и мултипликаторите $\lambda_2, \dots, \lambda_n$при$n-1$ корисно (утиларно) ниво, ограничено со $u^i(x^i) \geqq u^i(\hat{x}^i), i = 2, \dots, n$. Ако сите $\hat{x}^i_k$ се строго позитивни, т.е. ако $(\hat{x}^i)_1^n$ е внатрешна алокација, маргиналните услови од прв ред за $(\hat{x}^i)_1^n$ ќе бидат решение на P-Max, а тоа се сите равенства:

$\exists\lambda_{2,\dots,} \geqq 0$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_l \geqq 0$ такво што за секое $k = 1, \dots, l$:

u^1_k=σ_k и 0=$\sigma_k - \lambda_i u^i_k$, $i = 2, \dots, n$.

(FOMC - first-order marginal conditions - маргиналните услови од прв ред)

Последното $n-1$ равенство, го запишуваме како:

$$\lambda_i u^i_k = \sigma_k (i = 2, \dots, n;\ k = 1, \dots, l).$$

Исто така имаме $\sigma_k > 0$ за секое k и $\lambda_i > 0$, за секое $i = 2, \dots, n$. Така за секој потрошувач i и секој пар на добра k и k', имаме:

$\frac{u_k^i}{u_{k'}^i} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k'}}$, *т.е.* $MRS_{kk'}^i = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k'}}$. (*MRS-Маргинална стапка на супституција*)

Последно равенство кажува дека $MRS_{kk'}$ на секој потрошувач помеѓу две добра k и k се еднакви на некоја релативна вредност од "*сенка*" на овие две добра во максимизациониот проблем P-Max. Појасно велиме дека за секој пар на добра, секој потрошувач мора да има исто MRS:

$MRS_{kk'}^1 = \dots = MRS_{kk'}^i = \dots = MRS_{kk'}^n =$.
еднаква MRS-Маргинална стапка на супституција[*45]

Ние ја добивме еднаквоста на MRS од условот од прв ред на Кунт Такер, при што $(\hat{x}^i)_1^n$ ќе бидат решение на P-max. Затоа еднаквото MRS е неопходен услов за $(\hat{x}^i)_1^n$ да биде Парето алокација.

За да се покаже дека еднаквото MRS е *доволен услов* за Парето ефикасноста, неопходно е да се одредат вредностите на мултипликаторите на Лагранж σ_k и λ_i при равенството FOMC кога изводите u_k^i се проценуват со $\hat{x}$. Така, за секое k, нека $\sigma_k = u_k^1(\hat{x}^1)$ и за секое i нека $\lambda_i = \frac{\sigma_l}{u_l^i(\hat{x}^i)}$.

За секое k и за секое i, имаме $\sigma_k > 0$ и $\lambda_i > 0$ и затоа откако се задоволени равенствата за еднаквото MRS при $(\hat{x}^i)_1^n$, имаме:

$\frac{u_k^i}{u_l^i} = \frac{u_k^1}{u_l^1} = \frac{\sigma_k}{\sigma_l}$,
што дава
$\sigma_k = \frac{\sigma_l}{u_l^i} u_k^i = \lambda_i u_k^i$,

[45]Во економијата, маргиналната стапка на супституција (MRS) е стапката на која потрошувачот е подготвен да се откаже <u>од еден добар во замена за уште една добра</u> , при исто ниво на корисност.

Всушност, тоа се маргиналните услови од прв ред (FOMC) , така што $(\hat{x}^i)_1^n$ ќе бидат решение на P-Max.

Од погоре произнесеното, ја имаме следнава карактеризација на Парето алокацијата во маргинални услови:

Теорема[46]: Ако секое u^i е строго растечко, квазиконкавно и диференцијабилно, тогаш внатрешната алокација $\hat{x}$ е Парето ефициент за економијата $(u^i, \dot{x}^i)_i^n$, ако и само ако се задоволува *еднаквото* MRS и $\sum_1^n \hat{x}^i$=$\sum_1^n \dot{x}^i$.

2.3.4 Гранични алокации (Boundary Allocations)

Многу од Парето алокациите се гранични алокации: некои *потрошувачки кошнички* (consumers' bundles) не ги вклучуваат позитивните износи од сите добра. Ние сакаме нашите маргинални услови да ни кажат кои гранични алокации се Парето коефициент, а кои не се на ист начин како при условите на внатрешниалокации. Потребно е само да се адаптират условите од прв ред. Така ние имаме:

$\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqq 0$ и $\sigma_1, \dots, \ \sigma_l \geqq 0$,такво што за секое $k = 1, \dots, l$ и секое $i = 1, \dots, n$:

$\lambda_i u_k^i \leqq \ \sigma_k$, и $\lambda_i u_k^i = \ \sigma_k$ ако $x_k^i > 0$ (FOMC)

Разгледуваме како овие неравенства од прв ред ќе ги претвориме во маргинални услови, за секој пар на добра и за секој пар на потрошувачи. Ги разгледуваме двете добра $k = 1,2.$ За секој корисник, (FOMC) добиваме[47]:

[46]https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/

[47]https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/

ако $x_1 > 0$, тогаш $\frac{u_1}{u_2} \geqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; т.е. $MRS \geqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. (2)

ако $x_2 > 0$, тогаш $\frac{u_1}{u_2} \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$; т.е. $MRS \leqq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. (3)

Комбинирајќи ги (2) и (3) за кои било два потрошувача (да речеме дека тоа се $i = 1,2$) ,ги имаме следниве MRS услови кои треба да се задоволени при Парето ефикасната алокација:

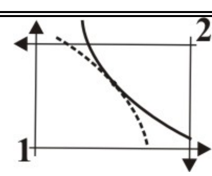
(A) Ако $x_1^1 > 0$ и $x_2^2 > 0$, тогаш $MRS^1 \geqq MRS^2$.

(B) Ако $x_2^1 > 0$ и $x_1^2 > 0$, тогаш $MRS^1 \leqq MRS^2$.

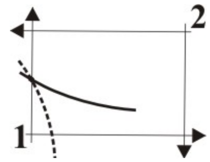
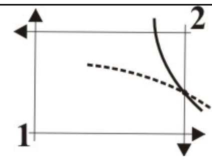
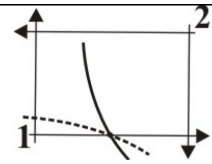
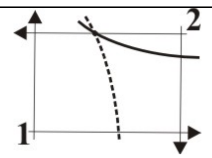
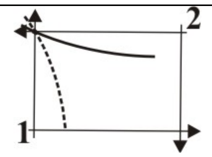
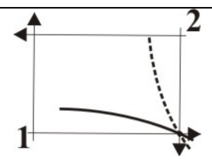
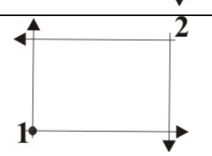
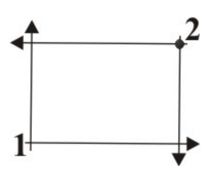
Заедно, овие два услова ги покриват сите комбинации на позитивни и нулти вредности на потрошувачките кошнички на потрошувачите $i = 1,2$, како што е опишано во подолните табели. Ќе забележиме дека сите внатрешни алокации се случај (1) во табелата, т.е. се случаи во кои се аплицирани обете погоре наведени (A) и (B), така што имаме $MRS^1 = MRS^2$. Сите останати случаи, се гранични алокации.

Секогаш е корисно да се запамети дека MRS на потрошувачот во *потрошувачката кошничка* е „*персонална вредност*“ т.е. едното добро се мери во однос на друго добро, односно ни кажува колку е подготвен потрошувачот да се откаже од едно добро за маргинално зголемување на друго добро. Ова е особено значајно за да се увидат Парето подобрувањата, односно да покаже кога Парето подобрувањата се можни.

Табела1 (Table 1)[48]

	x_1^1	x_2^1	x_1^2	x_2^2		MRS релации	Случаи
1	+	+	+	+		$MRS^1 = MRS^2$	(A) & (B)

[48]https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/

2	0	+	+	+		$MRS^1 \leqq MRS^2$	(B)
3	+	+	0	+		$MRS^1 \geqq MRS^2$	(A)
4	+	0	+	+		$MRS^1 \geqq MRS^2$	(A)
5	+	+	+	0		$MRS^1 \leqq MRS^2$	(B)
6	0	+	+	0		$MRS^1 \leqq MRS^2$	(B)
7	+	0	0	+		$MRS^1 \geqq MRS^2$	(A)
8	0	0	+	+		-	-
9	+	+	0	0		-	-

2.3.5 Максимизација на функцијата за благосостојбата

Алтернативниот пристап со кој сакаме да направиме споредба на благосостојбата од алтернативните алокации, е да се оценат алокациите според т.н. „*функција за социјална помош*“. Во принцип може да ја земеме која било вредносна функција W во простор $\mathbb{R}_+^{nl}$ со алокациите $(x^i)_1^n$.

Дефиниција[49]: Функцијата за социјална помош за економијата $(u^i, \dot{x}^i)_1^n$ е функција со следнава форма: $W_{(X)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u^i\,(x^i)$ за некои броеви $\alpha_1, \dots, \alpha_n \; > 0$.

Можеби ова изгледа дека има несоодветен пристап, бидејќи „функцијата за социјална помош“ вклучува индивидуални користи што не се споредливи.

Првото нешто што може да се согледа е фактот дека секоја алокација што ја максимизира *социјалната функција*, е Парето ефициент:

Теорема[50]: Ако алокацијата $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^{nl}$, е решение на проблемот

$$\max_{(x_k^i)\in\mathbb{R}_+^{nl}} W_{(x)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i(x^i), \qquad \text{(W-Max)}$$

за $x_k^i \geqq 0, i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, l$ за кои важи

$$\sum_{i=1}^{n} x_k^i \leqq \dot{x}_k, \qquad k = 1, \dots, l$$

За некои броеви $\alpha_1, \dots, \alpha_n \; > 0,$ тогаш $\hat{x}$ е Парето алокација за економијата $(u^i, \dot{x}^i)_1^n$.

Всушност овој резултат е многу поопшт .Тој не е резултат само за избраниот економско-алокационен проблем, туку за секоја состојба во која сакаме да агрегираме индивидуални предности во единствено агрегатно преферирање така што индивидуалните преферирања може да бидат од корисната функција. За да се појасни доказот, ќе видиме дека резултатот ќе произлезе директно од дефиницијата за Парето ефикасноста. Исто како и во дефиницијата, множеството X од алтернативи, може да биде кое било множество составено од што и да било.

Теорема: Ако алтернативата $\hat{x}$ е решение за проблем

$$\max_{x\in X} W_{(x)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i(x), \quad (4)$$

за некое$\alpha_1, \dots, \alpha_n \; > 0,$ тогаш $\hat{x}$ е Парето ефициент во X.

[49]https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/

[50]https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/

Доказ: Да претпоставиме дека $\hat{x}$ не е Парето ефициент во X и нека $\widetilde{x}$ го задоволи:

$\forall_i \in N: u_i(\tilde{x}) \geq u_i(\hat{x})$. и$\exists_j \in N: \ u_j(\tilde{x}) > u_j(\hat{x})$. (5)

Потоа, за секое $\alpha_1, \dots, \alpha_n \ > 0$ имаме

$\sum_{i \in N} \alpha_i \, u_i(\tilde{x}) > \sum_{i \in N} \alpha_i \, u_i(\hat{x})$ (6)

т.е. не постои ниту една вредност за α_i за која што $\widehat{x}$ го максимизира $W \ (\cdot)$ на X

2.4 Примери за Паретовата ефикасност[51]

Пример 1

Да претпоставиме дека економијата има само едно добро коешто сите го сакаат. Тоа значи дека секоја алокација е Парето ефициент: единствен начин да му биде некому подобро е да има повеќе од добрата, така што друг ќе има помалку добра и ќе му биде полошо.

Пример 2

Да претпоставиме дека економијата има двајца луѓе и две добра, јаболка и банани. Лицето 1 сака јаболка, а не сака банани (колку има повеќе банани, толку е полошо за него), а лицето 2 сака банани, а не сака јаболка. На располагање има 100 јаболка и 100 банани.

Единствена алокација што е Парето ефициент е кога лицето 1 ги има сите јаболка, а лицето 2 ги има сите банани. Во која било друга алокација, кога некое од двете лица има единици добра што не ги сака, нема да му биде подобро од другото лице.

Пример 3

Да претпоставиме дека економијата има две лица и две добра, јаболка и банани. Лицето 1 сака јаболка и воопшто не му е грижа за бананите, индиферентен е кон кое било множество ***(a, b)*** *и* ***(a,b')*** каде што ***a*** е кој било број на јаболка, додека ***b*** и ***b'*** се броеви на банани. Лицето 2 сака банани и воопшто не му е грижа за јаболката. Има на располагање 100 јаболка и 100 банани. Единствената алокација што претпоставува Парето ефициент е кога лицето 1 ги има сите јаболка, а лицето 2 ги има сите банани. Која било друга алокација при што се дава на кое било лице од другите единици добра што не ги сака, ќе нема ефект и никој не би бил подобар.

[51](https://www.economics.utoronto.ca/osborne/2x3/tutorial/PEDEX.HTM)

Пример 4

Да претпоставиме дека економијата се состои од две лица и две добра, јаболка и банани. И двете лица ги сакаат обете добра, но ги вреднуваат поинаку. За лицето 1, едно јаболко е еквивалентно на две банани. Ова лице е всушност индиферентно кон кое било множество (опција) ***(a, b)*** *и* ***(a-n, b+2n)***, каде што ***a*** е некој број на јаболка, ***b*** е некој број на банани, додека ***n*** е некој број. За лицето 2, две јаболка се еквивалентни на една банана.

Алокацијата е Парето ефициент ако и само ако:

- Или лицето 1 нема банани
- Или лицето 2 нема јаболка.

Зошто? Да претпоставиме дека лицето 1 има неколку банани, а лицето 2 има неколку јаболка. Со трансфер на една банана од лицето 1 кон лицето 2, и едно јаболко од лицето 2 кон лицето 1, ги правиме и обете лица подобри. Од друга страна, ако лицето 1 нема банани, така што за да биде подобар би било потребно да набави дупло повеќе банани отколку бројот на јаболката од кои се откажува, ќе резултира со фактот дека на лицето 2 ќе му биде полошо. Слична е ситуацијата кога лицето 2 нема јаболка и за да биде подобар би било потребно да набави дупло повеќе јаболка од бројот на бананите од кои се откажува, со што на лицето 1 би му било полошо.

Три од алокациите што се Парето ефикасни се оние кога:

- Лицето 1 ги има сите јаболка и лицето 2 ги има сите банани
- Лицето 1 ги има сите јаболка и сите банани
- Лицето 2 ги има сите јаболка и сите банани.

3. Како може Hahn-Banach-овата теорема да го направи подобар пазарот: Поглед кон втората фундаментална теорема за економската благосостојба

Два најважни резултати во економијата се секако двете фундаментални теореми за економската благосостојба. Заедно тие објаснуваат зошто слободните пазари се добри и како можеме да ги направиме уште подобри. Првата теорема е формализирање на *невидливата рака* на Адам Смит . Од тоа подразбираме дека конкурентните пазари ги алоцираат ресурсите на ефикасен начин, притоа мислејќи дека *еквилибриумскиот* резултат е оптималот на Парето. Паретовата оптималност е само: *состојба во која што не може да се направи какви било промени при алокацијата, така што некој ќе биде подобар без притоа да се направи на кој било да му биде полошо*.

Единствен проблем на оваа теорема е прашањето за тоа што се случува ако Паретовиот оптимален еквилибриум кон кој се стреми пазарот, е онаков при што ресурсите се дистрибуирани рамномерно? Од овде произлегува втората фундаментална теорема за благосостојбата. Таа вели дека секоја Паретова оптимална алокација може да се достигне по пат на совршена конкуренција, а потоа да одговара на иницијалната редистрибуција на добрата.

Невидлива рака

Во економијата „*невидлива рака*" е метафора за првпат употребена од Адам Смит, за да се опишат ненамерните општествени бенефиции кои произлегуваат од индивидуалните активности. Оваа фраза е употребена од страна на Смит во врска со распределбата на приходот (1759 г.) и производството (1776г.). Иако оваа фраза се користи само трипати во делата на Смит, во суштина го доловува неговиот поим дека напорите на поединците за да ги задоволат своите интереси може да бидат многу покорисни за општеството, отколку дејствата на поединците да бидат директно насочени во корист на општеството.

Но, што Адам Смит мислел кога зборувал за „невидливата рака“?

Адам Смит сакал „*пластично*“ да го опише процесот на усогласување на поединечните, односно себичните интереси. Како на пример, пекарот пече леб за да заработи, а не за да ги нахрани гладните. Но, следејќи го тој себичен интерес, тој всушност успева да ги нахрани гладните, така што придонесува да се зголеми вкупниот национален доход и вкупната состојба. Ова совпаѓање на интереси (и следствено на ова и на придонесот за општото добро), не бара никаква експлицитна координација ниту на јавниот интерес ниту на видливата рака на власта. Ова се случува како да постои процес со кој управува невидливата рака.

Адам Смит, не сметал дека невидливата рака е непогрешна, но и дека не е секогаш поефикасна од видливата рака. Како што не сметал дека себичноста е морално посупериорна од алтруизмот. Оние кои го критикуваат понекогаш не гледаат дека би била потребна некаква рака и доколку луѓето би биле алтруистични. Или поинаку речено и тогаш би било потребно да се координираат поединечни дејствија, меѓутоа многу често координацијата е поедноставна доколку е заснована на поединечни интереси, бидејќи тие се познати на луѓето, па и дури да не им се познати, понекогаш им се морално поблиски. За да се види ова, да ги земеме потребите за кои велиме дека луѓето не се раководат од своите поединечни интереси, туку да речеме од патриотски интереси. Кои се тие? Додека не е тешко да се знаат сопствените, поединечни интереси (без разлика дали се себични или алтруистички) не е баш едноставно да се утврди што точно е патриотски интерес, освен ако не го каже тоа некој во името на државата. Според тоа, по правило, невидливата рака ги поврзува личните интереси за зголемување на личната благосостојба, со зголемувањето на вкупната или јавната благосостојба. Пред сé, се воспоставува систем на цени кои обезбедуваат ограничените средства да се користат така да постигнуваат највисока вредност. Јавниот таканаречен патриотски интерес, се потпира на даноците.

Или поинаку речено, невидливата рака се потпира на цените, а видливата на даноците. Потребен е систем на колективно одлучување и администрација, кој не мора да биде ниту ефикасен, ниту праведен. Покрај тоа, за да биде на некој начин ефикасен и праведен, потребна е т.н. невидлива рака, а тоа значи да се потпира на одлуките на луѓето кои се раководат од своите поединечни интереси. Но, тоа не значи дека тие кои сакаат да се раководат, на пример од патриотизмот, немаат право на тоа, како што никој нема обврска да се раководи од своите себични или какви било лични интереси. Адам Смит го употребил тоа не само како опис, туку и како едноставно објаснување за тоа како функционира стопанството како целина. Но и да покаже која е улогата на личните интереси и амбицијата во политиката, на пример кога станува збор за патриотските или националните мерки за охрабрување на некои активности и за заштита на некои други.

3.1 Каде може да се вклопи Hahn–Banach-овата теорема во економската благосостојба?

Одговорот е во доказот на втората фундаментална теорема за благосостојбата. Најзначаен заклучок на оваа теорема е секој обид на извршната власт, наместо со паушалното прераспределување на добрата, играта со цените да резултира со прилагодување на сите пазари и со пониска ефикасност на стопанството. Со самото тоа се добива и пониска општествена благосостојба. Тоа се случува затоа што цените се носачи на синтетички информации во децентрализираниот систем на одлучување.

Но најпрво да се потсетиме на геометриската верзија на Hahn-Banach-овата теорема.

Во врска со докажувањето на втората теорема за благосостојбата, геометриската Hahn-Banach-овата теорема ќе се користи повеќе во ова еквивалентна форма:

[52]*Нека X е реално нормиран линеарен векторски простор и нека K,V⊂X се конвексни множества. Претпоставуваме дека или K има внатрешна точка или X е конечно димензионален и дека V не содржи никаква внатрешна точка од K. Тогаш постои непрекинат линеарен функционал* $F \neq \theta$ *на X и константа* c *таква што*

$F(y) \leq c \leq F(x)$

за сите $x \in V$ и $y \in K$.

[52]Luenberger, David G. Optimization by Vector Space Methods. New York, NY: J. Wiley and Sons, 1969.Luenbergerpg. 133-134)

3.2 Втора фундаментална теорема за економската благосостојба

Пред да ја докажеме втора фундаментална теорема за економската благосостојба, треба да се додаде математичка фундаменталност на концептот за којшто ќе зборуваме, а тоа се конкурентниот еквилибриум и *оптималот* на Pareto.

За да се дефинира терминот Паретов оптимал, прво ни се потребни некои забелешки: каков вид на алокации на добрата се изводливи и како луѓето избираат меѓу потрошувачките кошници.

Дефиниција: *Изводливост* (Feasible–Badurpg. 4)[53]: Нека X_i е множество на потрошувачка за личноста *I* и Y_j множество на производството со техничко ниво *j*. X_i е само множество на сите потрошувачки кошници на добра, коишто потрошувачот сака да ги потроши, со оглед на тоа што Y_j е само множество на сите нивоа на производство што можат да се достигнат со даденото техничко ниво *j*. Исто така, нека $X_i, Y_j \subset Z$ каде што Z е реално нормиран векторски простор, наречен простор на артикли (стоки) кои ги содржат и сите можни комбинации на артиклите (стоките) на пазарот. Тогаш, алокацијата (x_i, y_j) е остварлива ако $x_i \in X_i, \forall i$ и $y_j \in Y_j \forall j$ и $\sum_i x_i = \sum_j y_j$.

Дефиниција: *Корисности* (Utility–Badurpg. 4)[54]: Дадено е множество на потрошувачката X_i за личноста *i*, а *корисноста* на личноста е само мерка на неговите приоритети врз различните потрошувачки кошнички во множеството. Мерата е одредена математички како функција $u_i : X_i \to \mathbb{R}$. Луѓето ги сакат повеќе потрошувачки кошничките што им даваат повеќе корист.

Сега ќе дефинираме што значи тоа, алокацијата да биде Паретов оптимал:

Дефиниција : Парето оптимал*:* (Pareto optimal – Badur стр. 4)[55]: Алокацијата (x_i^*, y_j^*) со $x_i^* \in X_i$ и $y_j^* \in Y_j$ е Паретов оптимал, ако е остварлива и не постои друга остварлива алокација (x_i, y_j), таква што $u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*), \forall i$ и $u_i(x_i) > u_i(x_i^*)$ за барем еден од i.

---

[53] Badur, Kemal. Econ 8106: Macroeconomic Theory III. University of Minnesota, http://www.econ.umn.edu/ kemal/academic/Files/8106.pdf, accessed on December 10, 2012.
[54] Badur, Kemal. Econ 8106: Macroeconomic Theory III. University of Minnesota, http://www.econ.umn.edu/ kemal/academic/Files/8106.pdf, accessed on December 10, 2012.

[55] Badur, Kemal. Econ 8106: Macroeconomic Theory III. University of Minnesota, http://www.econ.umn.edu/ kemal/academic/Files/8106.pdf, accessed on December 10, 2012.

Сега формулиравме што значи да се прави алокација, да стане некој подобар, а да не направи на друг да му е полошо, така што продолжуваме со дефинирањето на тоа што е пазарен конкурентен еквилибриум. На овој начин правиме поврзување со втората фундаментална теорема за економската благосостојба.

Дефиниција: Конкурентен еквилибриум - (Competitive Equilibrium – Badur стр.4): Конкурентен еквилибриум е алокацијата (x_i^c, y_j^c) и непрекинатиот линеарен функционал $F: Z \to \mathbb{R}$ (функција на ресурсите што го претвораат износот на добрата во ресурси) така што се содржат следниве три работи:

1. $x_i^c = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$ и $F(x) \leq F(x_i^c), \forall_i$
2. $y_j^c = \max_{y_j \in Y_J} F(y_j), \forall_i$
3. $\sum_i x_i^c = \sum_j y_j^c$

што ни кажува дека вкупниот број на добра што се произведени е еднаков на вкупниот број на добрата што се потрошуваат. Така никој не ќе може да потроши повеќе отколку што е произведено, и сé што е произведено се потрошува во некое одредено време.

Првите два услова се всушност фактот дека сите ги *максимизираат* своите користи и се обидуваат да станат најдобри што може. Фирмите, исто така ја максимизираат својата економска благосостојба и секој се обидувада стане најдобар што може. Тоа е дел од способноста на втората фундаментална теорема за економската благосостојба. Ние, всушност, покажеме дека можеме да ги дистрибуираме ресурсите, иницијално, на таков начин што ќе дозволиме секој да дејствува на начин на кој ќе го добие својот најдобар интерес и потоа да се заврши со исходот на Паретовиот оптимал, а самото тоа го посакува и самото општеството. Тоа е конверзија од „невидливата рака“ на Адам Смит. Не само што достигнуваме оптимална алокација кога им дозволуваме на луѓето да дејствуваат за свој интерес, но можеме иницијално да го уредиме системот така што можеме да достигнеме каква било посакувана оптимизација.

Дефиниција: (econweb.ucsd.edu/~jsobel/205f10/notes13.pdf) Функцијата $f{:}R_n \rightarrow R$ е квазиконкавна ако $\{x|\ f(x)>a\}$ е конвексно за сите $a \in R$. Со други зборови горното контурно множество е конвексно множество.

Потребни ни се уште следниве претпоставки за доказ на втора фундаментална теорема за економската благосостојба:

1. X_i е конвексно за секое i.
2. Ако $x, x^{'} \in X_i$и $u_i(x) > u_i(x^{'})$, тогаш мора тоа да е случај кога за $\alpha \in [0,1], u_i(\alpha x + (1-\alpha)x^{'}) > u_i(x^{'})$. Ова само значи дека горното контурно множество на функцијата на корисноста е конвексно, а тоа е ако стриктно се претпочита едно нешто повеќе од друго.
3. :$X_i \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекинато за сите i.
4. Множеството на вкупното производство $Y = \sum_j Y_J$ е конвексно.
5. Или вкупното производство Y има внатрешна точка или Z е конечно димензионално.

***Теорема* 1**[56] Втора теорема на благосостојбата (The Second Fundamental Welfare Theorem – Badur стр.8-9, Kruegerpgs. 106-108): Да претпоставиме дека наведениве претпоставки 1-5, се задоволени, исто така нека (x_i^c, y_j^c) е Паретова оптимална алокација. Претпоставуваме дека за некое $k \in \{1,2, \dots I\}$, множество на сите потрошувачи, постои $x_i^{'} \in X_k$со $u_i(x_k^{'}) > u_i(x_i^{'c})$. Тогаш ∃ непрекинат линеарен функционал $F{:}Z \rightarrow \mathbb{R}$ со $F \neq \theta$, нулти вектор , така што следниве два услова се задоволени:

1. $x \in X$ и $u_i(x) \geq u_i(x_i^c) \rightarrow F(x) \geq F(x_i^c)$ за секое
2. $y_j^c \in \arg \max_{y \in Y_J} F(y)$.

Забелешка: Овде непрекинатиот линеарен функционал F е оној истиот кога го дефиниравме конкурентниот еквилибриум т.е. тоа е функцијата што ја конвертира апсолутната вредност на добрата на ниво на ресурсите. Базирано на ова, можеме да ги видиме двата услова што треба да ги задоволи функционалот F, соодветно

[56]The Second Fundamental Welfare Theorem – Badur pgs. 8-9, Kruegerpgs. 106-108

на фактот дека ако доброто x е стриктно преферирано од x_i^+, тогаш не може да чини помалку (услов 1). Фирмите ги максимизираат профитите (F) со бирање на производствено ниво y. Овие услови исто така го задоволуват и балансот на буџетот, а тоа е ограничување што беше спомнато претходно ($\sum_i x_i^c = \sum_j y_j^c$). Кога сите овие услови ќе се задоволат, тоа значи дека Паретовата оптимална алокација може да биде поддржана како квазиеквилибриум. Единственото нешто што недостасува за да биде конкурентнтен еквилибриум е дека во овој случај, потрошувачите не ја максимизират својата корисност (услов1 во дефиницијата за конкурентен еквилибриум).

Доказ: Нека (x_i^c, y_j^c) е Паретова оптимална алокација. Потоа, ги дефинираме множествата:

$A_i = \{x \in X | u_i(x) \geq u_i(x_i^c)\}, i = 1,2, \dots I$

A_i се само множества на кошнички на потрошувачката каде што потрошувачот добива повисока корисност отколку при Паретовата оптимална кошничка (горните контурни множества со респект на x_i^c). Сега нека

$A = \sum_i A_i$ и $Y = \sum_j Y_j$.

Остатокот од доказот само покажува дека сите овие множества ги задоволуваат условите за примена на теоремата на Hahn и Banach. Пред сé, претпоставката 4 ни кажува дека Y е конвексно и претпоставката 2 ни кажува дека секое поединечно A_i е конвексно бидејќи се горно контурни множества на функцијата на корисноста, како што е и дефинирано во претпоставката. Бидејќи збирот на конвексните множества е исто така конвексен, тогаш и *A* е конвексно.

покажуваме дека не постои внатрешна точка на Y во A и ја применуваме погоре споменатата Теорема (геометриската Hahn-Banach-овата теорема во доказот за втората фундаментална теорема за благосостојбата). Ова ќе го докажеме со контрадикција.

Претпоставуваме дека $\exists y \in \dot{Y}$ исто така е елемент на *A*. Тогаш y ќе може да биде произведено бидејќи $y \in \dot{Y}$, исто така кај Парето доминира x^c, бидејќи $y \in A$ и A е дефинирано како збир од горно контурни множества од корисните функции (utility functions), што значи дека

$u_i(y) \geq u_i(x^c)$.

Според хипотезите на теоремата,

$\exists k$ и $x_k' \in X_k$ така што $u_i(x_k') > u_i(x_i'^c)$.

Може да дозволиме $x_k^\alpha = \alpha x_k' + (1-\alpha)x_k', \quad \alpha \in (0,1)$.

Според претпоставката 1 и 2, имаме

$x_k^\alpha \in X$ и $u_k(x_k^\alpha) > u_k(x_k^c), \forall_\alpha \in (0,1)$.

Бидејќи $y \in \dot{Y}$, можеме да избереме произволен избор $y' \in Y$ и тогаш кореспондира со производствената кошничка x_k' и затоа имаме остварлива алокација (x_k', y'), така што $u_k(x_k') > u_k(x_k^c)$. Ова е контрадикторно на Паретовата оптимизација на алокацијата (x_i^c, y_j^c), а со тоа докажавме дека

$A \cap \dot{Y} = \emptyset$.

Ја применуваме погоре споменатата Теорема (геометриската Hahn-Banach-овата теорема во доказот за втората фундаментална теорема за благосостојбата) на *A* и *Y* и заклучуваме дека постои непрекинат линеарен функционал $F \neq \theta$ и константа c така што

$F(y) \leq c \leq F(x), \forall_y \in Y, \forall_x \in A$.

Треба да се докаже дека овој функционал и Паретовата алокација (x_i^c, y_j^c), навистина ги задоволуват условите на теоремата за економската благосостојба.

Најпрво забележуваме дека (x_i^c, y_j^c) е Паретов оптимал, па поради тоа мора да е остварлив и така имаме

$x^c = \sum_i x_i^c = \sum_j y_j^c = y^c$

Комбинирајќи го ова со резултатот од погоре споменатата Теорема (*геометриската Hahn-Banach-овата теорема во доказот за втората фундаментална теорема за благосостојбата*), имаме

$F(x^c) = F(y^c) \leq c \leq F(x^c)$

и можеме да заклучиме дека
$F(x^c) = F(y^c) = c.$

За *условот 1*, претпоставуваме дека постои $y_j^{'} \in Y_J$ така што $F(y_j^{'}) > F(y_j^c)$. Нека $y_k^{'}=y_k^c$ за $k \neq j$. $y^{'} = \sum_j y_j^{'} \in Y$, но исто така имаме дека $F(y^{'}) > F(y^c) = c$ што е контрадикторно на фактот дека $F(y) \leq c$ за сите $y \in Y$. Затоа, тоа мора да е случај кога y_j^c го максимизира $F(y)$ за $y \in Y_j$.

За условот 2, претпоставуваме дека постои $x_i^{'} \in X_i$ така што $u_i(x_i^{'}) \geq u_i(x_i^c)$ и $F(x_i^{'}) < F(x_i^c)$. Нека $x_k^{'} = x_k^c$ за $k \neq i$. $\sum_i x_i^{'} \in A$ но, исто така $F(x^{'}) < F(x^c) = c$, а тоа е контрадикторно на фактот дека $F(x) \geq c$ за сите $x \in A$. Затоа, x_i^c го *максимизира* $F(x)$ за $x \in X_i$ и $u_i(x) \geq u_i(x_i^c)$.

Конечно покажавме дека која било Паретова оптимална алокација може да се поддржи како квазиеквилибриум. Единственото нешто што ни преостана е да го прошириме ова до конкурентен еквилибриум.

3.3 Екстензија на конкурентниот еквилибриум

Единственото нешто што недостасува, од погоре наведеново, е условот за *макзимизирање* на корисноста на конкурентниот еквилибриум (услов1).

Теорема 2 Втора фундаментална теорема на благосостојбата – Екстензија (Second Welfare Theorem - Extension – Badur стр. 9[57], Krueger стр. 108[58]): Нека *F* и алокацијата (x_i^c, y_j^c) го задоволуваат условот на втората фундаментална теорема за економската благосостојба. Единственото нешто што ни е потребно е дополнителната претпоставка дека $\forall i \in \{1,2,\ldots,I\}, \exists x_i^{'} \in X_i$ така што $F(x_i^{'}) < F(x_i^c)$. Тогаш $[(x_i^c, y_j^c), F]$ сите заедно формираат конкурентен еквилибриум.

Доказ: Докажувајќи дека максимизирањето на корисноста е еквивалентно на покажувањето дека за сите потрошувачи и сите

[57] Badur, Kemal. Econ 8106: Macroeconomic Theory III. University of Minnesota, http://www.econ.umn.edu/ kemal/academic/Files/8106.pdf, accessed on December 10, 2012.
[58] Krueger, Dirk. Macroeconomic Theory. University of Pennsylvania, August 2007.

$x \in X_i$,$F(X) \leq F(x_i^c) \rightarrow u_i(x) \leq u_i(x_i^c)$. Потоа знаеме дека секој потрошувач ја бира потрошувачката на кошничката што им дава највисока корисност. Прво се зема во предвид произволен потрошувач и $x \in X_i$ со што се задоволува $F(X) \leq F(x_i^c)$. Можеме да дефинираме

$x_\alpha = \alpha x_i' + (1-\alpha)x, \qquad \forall_\alpha \in (0,1)$.

Со претпоставката знаеме дека $F(x_i') < F(x_i^c)$ и $F(x) \leq (x_i^c)$, затоа тоа мора да е случај кога:

$F(x_\alpha)= \alpha F(x_i') + (1-\alpha)F(x) < \alpha F(x_i^c) + (1-\alpha)F(x_i^c) = F(x_i^c)$,$\forall_\alpha \in (0,1)$.

Според претпоставката 1, од втората теорема за економската благосостојба, знаеме дека $x_\alpha \in X_{i,}$ и според претпоставка добиваме дека x_i^c, е дел од квазиеквилибриум. Тоа значи дека $u_i(x_\alpha) \geq u_i(x_i^c) \rightarrow F(x_\alpha) \geq F(x_i^c)$. Спротивното на ова тврдење, значи дека $F(x_\alpha) < F(x_i^c) \rightarrow u_i(x_\alpha) < u_i(x_i^c)$, но од непрекинатоста на функцијата на корисноста (претпоставка 3, од втората теорема за економската благосостојба), имаме дека $u_i(x) = \log_{\alpha\rightarrow 0} u_i(x_\alpha) \leq u_i(x_i^c)$ што требаше да се докаже.

4. Парето принцип или ABC правило

Сигурно некогаш во животот сме се сретнале со некоја сензација, настан или феномен, пред да знаеме претходно да го објасниме со некој закон, правило или постулат. Како на пример сигурно попрво сме биле во када полна вода, па откако сме влегле во кадата, водата се прелила, а дури отпосле, кога сме пораснале, сме слушнале за Архимедовиот закон. Исто така, прво сме ја почувствувале гравитацијата, а отпосле сме слушнале за Њутновиот закон. Така има многу примери со кои попрво сме се соочиле, а дури покасно сме се сретнале со нивното објаснување.

Таков е случајот со Паретовиот принцип 80:20! Уште во 1906 г. Вилфред Парето ја формулирал нееднаквата дистрибуција на богатството во својата земја, бидејќи видел дека во својата земја 20% од луѓето поседуваат 80% од добрата во тогашна Италија. Подоцна, околу 1940 год. се согледало дека ова правило вреди многу повеќе и е наречено Паретов принцип или Паретов закон. Многумина забележиле дека сличен феномен се среќава во нивното поле на работење, па ова правило уште се нарекува и „витално малцинство“ (неколкумина) и „тривијално мнозинство“ (vital few and trivial maney).

Правилата од искуство зборуваат дека резултатите често не стојат во линеарен однос: 80% од работата прави трошок (расход) од 20%. Останатите 20% бараат 80% расход (трошоци), што е премногу. „Перфектноста“ е напорна. Особено ова се однесува на грешките: 20% од причинителите за грешки често пати се резултат за настанатите 80% грешки.

Како и каде се среќава ова правило? – Трговците забележале дека дека 80% од заработувачката ја прават само 20% од купувачите, лекарите забележале дека 80% од здравствените проблеми се кај 20% од пациентите, 20% талентирани луѓе се одговорни за 80% од успехот во фирмата, 20% од криминалците ги прават 80% од вкупно сторените криминални дела, 20% од сопствената гардероба ја носиме 80% од времето, дури и во Паретовата градина 80% од грашокот е добиен од посеаните 20% стебла, итн.

[59]*“ Принципот 80/20 тврди дека помал дел од примерокот, (при влезот или излезот на напор) обично доведува до поголем дел од последиците (излезот или резултатот).*

Можеби затоа што биле поблиску до квалитетното чекорење, стручњаците за компјутери и програмирање кои стојат позади информатичката револуција, се запознаени со принципот 80/20 и често го користат. Доколку судиме според бројот на објавените компјутерски и програмерски статии кои го применуваат принципот 80/20, заклучуваме дека мнозинството веќе го користи во својата секојдневна работа.

Принципот 80/20 ни говори дека нашата стратегија е погрешна. Ако поголем дел од заработувачката ја стекнуваме од помалиот дел на своите активности, тогаш би требало да ја свртиме нашата компанија во спротивен правец и да ги насочиме нашите напори кон зголемување на тој мал дел. Но, и тоа е само дел од решението.

Успешниот маркетинг најмногу се однесува токму на насочувањето на релативно мал број на муштерии кои се и најактивни во потрошувачката на Вашиот производ или услуга. Помалиот дел од муштериите го купуваат поголемиот дел од производот или услугата, а поголемиот дел од муштериите купува многу малку. А, поентата е во тоа што всушност добро искористуваме само 20% од своето време“.

Не постои недостаток на време, туку неправилна организација на времето. Всушност, сите сме преокупирани со тоа.

4.1 Парето анализа

Дефиниција: Парето анализа е процес на рангирање на можностите за да се утврди кои од многуте потенцијални можности треба да се спроведуваат во прв план. Исто така, е позната како поделба на *неколкуте витални од многуте тривијални* можности.

---

[59]цитат од : “The 80/20 Principle: The Secret to Achieving More with Less“ - October 19, 1999
by Richard Koch (Author)

4.1.1 Парето или ABC дијаграм и неговата примена

Парето или ABC дијаграмот е графичка метода за анализа на појавите во кои се врши рангирање на големините/појавите или на грешките и нивните причини во намалувачки редослед. Опфатот на примена на алатите е доста широк. Може да се примени во сите организациони цели каде што е можно да се идентификува проблемот и врз основа на добиените резултати од анализата да се преземат корективни активности за нивно отстранување.

Парето дијаграмот се применува*[60]:

- Во организационото управување за анализа на мнозинството показатели за деловно работење или за пронаоѓање на критичните подрачја.
- Во производниот сектор за анализа на неусогласеноста која се јавува во процесот на производство.
- Во малопродажниот сектор за да се анализира фреквенцијата на поплаки за одредени производи и трошоците за санација.
- Во набавниот сектор за класификација на добавувачите според важноста на материјалот којшто влијае на квалитетот на производот, според вкупното финансиско учество на набавените материјали во вкупната вредност на набавката, во зависност од бројот на *рекламираните* (вратените) испораки при селекцијата и оценката на добавувачот.
- Во маркетингот за анализа на потребите на купувачите и за анализа на пазарните движења.
- Во секторот за анализа на трендовите за развој на производите, технологии и сл.
- Во секторот за квалитет за анализа на произлезените несогласувања на одредени производи/услуги со побарувањата на корисниците, причините за произлезените несогласности и ефектот на унапредување, односно овој алат е многу ефикасен за постојано (континуирано) подобрување на производствено трговскиот процес.

[60] Todorović, Z.: *Upravljanjekvalitetom*, Ekonomskifakultet, Banja Luka, 2009. godine

Првиот чекор во изведувањето на анализата по оваа метода се однесува на изборот на проблемот. Потребно е :

- Да се изврши избор на појавите или проблемите кои бараат решение.
- Да се одреди временскиот период за којшто ќе се анализираат податоците (недели, месеци, години и сл.).
- Да се подготват податоците за дадениот временски период.

Собирањето на податоците подразбира :

- Јасно дефинирање на собраните податоци врз кои се врши анализата (на пример: програми за производство, податоци за рекламираните испорачани производи и сл.).
- Поделба на податоците на подрачја (групи) – категоризација на податоците доколку нивниот обем е голем и не може да се обезбеди прегледност на анализата.
- Избор на единици мерки кои ќе бидат критериум за анализа, како на пример: количината во даден временски период, зачестеност на појавите, вредноста, трошоците и сл. и да се утврди големината на секоја евентуално извршена класификација (поделба).

Парето дијаграмот се нарекува уште и ABC дијаграм затоа што овозможува издвојување *[61]:

- Група со многу влијателни својства и карактеристики – подрачје А
- Група со влијателни својства и карактеристики -подрачје В
- Група со помалку влијателни својства и карактеристики – подрачје С

Границите помеѓу групите А, В и С не се строго одредени, така што може да се набљудуват во рамките на дефинираниот интервал, доколку има причина за тоа.
Границите на дијаграмот се повлекуваат при што:

- Групата А опфаќа 70-80% од кумулативниот износ
- Групата В, придружена на групата А, опфаќа 90-95% од кумулативниот износ

[61]Klarić, S., Pobrić, S.: *Upravljanjekvalitetom – alatiimetodepoboljšanja*, Mašinskifakultet, Mostar, 2009.Godine

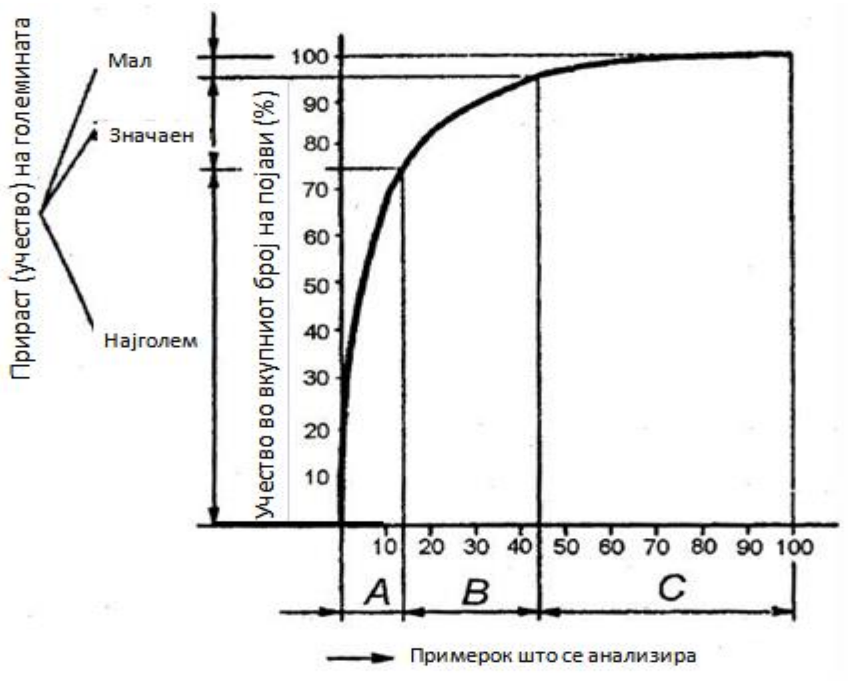
- Групата С го опфаќа преостанатиот дел од кумулативниот износ, а тоа е 5-10%.

Или поинаку кажано[62]:

- Подрачје А – подрачје со најголем прираст на набљудуваните големини. Всушност, тоа е најчестото подрачје кое зазема многу мал број на елементи од вкупната структура.
- Подрачје В – подрачје со значаен прираст на набљудуваните големини, односно, тоа е најчесто подрачје кое зазема помал број на елементи од вкупната структура.
- Подрачје С – подрачје со мал прираст (недоволно значителен) на набљудуваните величини, односно тоа е подрачје кое зазема најголем број на елементи во структурата на влијателните елементи.

Во литературата може да се сретне, на пример правилото 80/20 за подрачјето А, што значи дека 20% од структурата на влијателните елементи не припаѓа на подрачјето А, а 80% припаѓа. Може да се примени и следново правило: до 75% влијаат врз А, 20% влијаат врз В и 5% влијаат врз С. Не е правило дека мора да се издвојат три подрачја на влијание, може да се набљудуваат и две подрачја на влијание, но три подрачја ја прават анализата поосетлива.

[62] UPRAVLJANJE KVALITETOM - IV изменето и дополнето издание – Живан Живковиќ, Предраг Ѓоргевиќ



Дијаграм 2 (Figure 2)

4.1.1.1 Постапка за изработка на Парето дијаграм[63]

Чекор 1

Се присобираат податоци за зачестеноста на грешките или појавите, а по можност и трошоците врзани за нив.

Пример: При редовниот преглед на локациите A, B, C и D се воочени неправилности на одредени карактеристики на квалитетот (a, b, c, d и e). Неправилностите на одредени карактеристики на квалитетот се одбележани со цртички. Набљудуваниот временски период е четири недели.

[63] http://www.efbl.org/upload/3861124-menadment-kvaliteta-vjebe-broj-4-2014-11-14.pdf

Табела 2 (Table 2)

Евиденција за неправилностите на карактеристиките на квалитетот (a, b, c, d и e)

Records for irregularities of quality characteristics (a, b, c, d & e)

Локација / Location	Карактеристики на квалитетот / quality characteristics	1. Недела / 1st week	2. Недела / 2 nd week	3. Недела / 3th week	4. Недела / 4th week
A	A	I I	I II	I	
	B	I II	I I	I II	I I
	C	I	I		I
B	A	I I	I I	I I	
	B	I I	I II	I II	I
	E		I	I	I
C	B	I I	I		
	D	I		I	I I
D	E	I I	I	I I	

Табела 3 (Table 3)

Поединечни трошоци предизвикани со неправилностите воочени врз набљудуваните карактеристики на квалитетот (Incremental costs caused by the irregularities noted on the observed quality characteristics)

Карактеристики на квалитетот / quality characteristics	Поединечни трошоци / Incremental costs
A	13
B	2
C	1
D	4
E	2

Чекор 2

Врз основа на претходно насобраните податоци (со помош на посебни критериуми и обрасци за собирање на податоците) за учество на грешките /појавите, а по можност и трошоците врзани за нив, се формира табела за Парето дијаграм. Во табелата се сумираат грешките/појавите.

Пример:

Табела 4 (Table 4)

Карактеристики на квалитетот / quality characteristics	Фреквенција / frequency				Вкупна фреквенција / total frequency
	Локација / Location A A	Локација / LocationB	Локација / LocationC	Локација / LocationD	
A	6	6	0	0	12
B	10	9	3	0	22
C	3	0	0	0	3
D	0	0	4	0	4
E	0	3	0	5	8
Вкупно / Total :					49

Чекор 3

Во третиот чекор се врши рангирање на грешките/појавите според големината на фреквенцијата и тоа од најголемата кон најмалата, па потоа се пресметува процентуалното учество на секоја грешка/појава во вкупниот збир на грешки/појави и кумулатив на процентуалното учество.

Табела 5 (Table 5)

карактеристики на квалитетот / quality characteristics	Вкупна фреквенција / total frequency	Процентуално учество / Percentage (%)	Кумулативен процент (%) / cumulative Percentage (%)
B	22	44,9	44,9
A	12	24,5	69,4
E	8	16,3	85,7

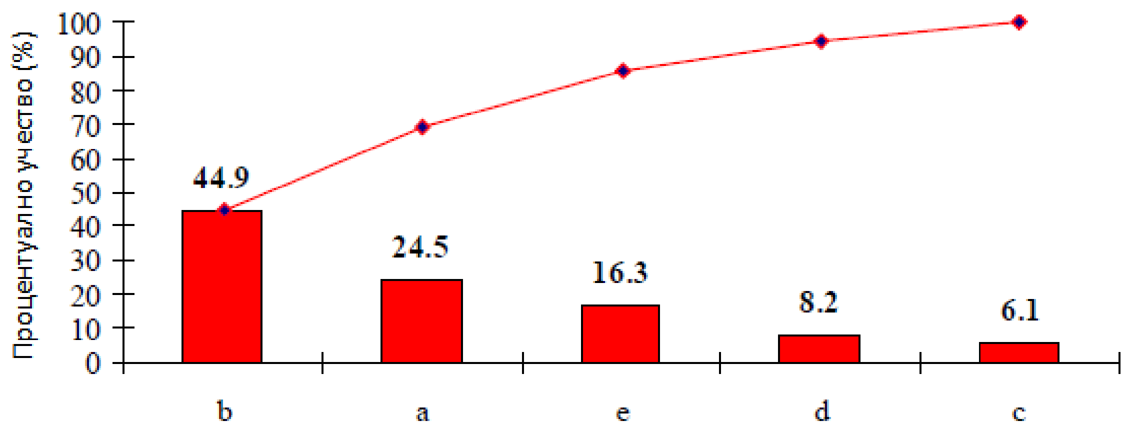
D	4	8,2	93,9
C	3	6,1	100,0
Вкупно :	49	100,0	

Чекор 4

Во овој чекор може да се пристапи во изработката на Парето дијаграмот. Врз основа на Парето дијаграмот лесно ќе воочиме кои грешки/ појави најчесто се појавуваат.

Пример:

Парето дијаграм на воочените неправилности на набљудуваните карактеристики на квалитетот(Pareto diagram of perceived irregularities of observed quality characteristics)



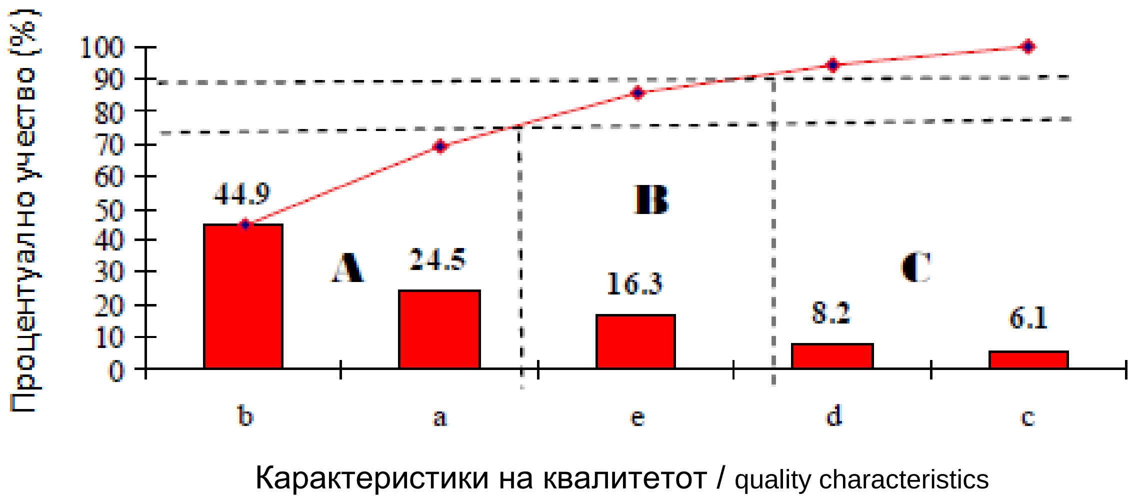
Карактеристики на квалитетот / quality characteristics

Дијаграм 3 (Figure 3)

Чекор 5

Повлекуваме хоризонтална линија на ниво 70% (80%) и 90% (95%) во дијаграмот, и на местото на пресекот со Парето крива повлекуваме вертикална линија до X-оската, така што се одвојат полињата A, B и C. За грешките/ појавите кои најчесто се појавуваат (Подрачјето A – група со многу влијателни својства и карактеристики) се бара примерок и се предлагаат корективни мерки за нивно отстранување.

Парето дијаграм на воочените неправилности на набљудуваните карактеристики на квалитетот (Pareto diagram of perceived irregularities of observed quality characteristics)



Дијаграм 4 (Figure 4)

За да донесеме правилни одлуки за приоритетот на спроведувањето на корективните активности, потребно е да се изврши анализа на трошоците предизвикани со воочените неправилности. Оваа анализа исто така ќе ја извршиме со Парето постапка.

Чекор 6

Во овој чекор формираме табела за одредување на приоритетите на корективните активности од гледна точка на трошоците, кои се предизвикани со воочените неправилности на набљудуваните карактеристики на квалитетот. Во табелата го пресметуваме вкупниот трошок, така што ја множиме вкупната фреквенција на грешките/појавите со единичниот трошок. Ги рангираме карактеристиките на квалитетот според големината на вкупниот трошок од најголемиот кон најмалиот, па потоа го пресметуваме процентуалното учество на трошоците врзани со набљудуваните карактеристики на квалитетот во вкупниот трошок предизвикан со воочените неправилности и кумулативниот процент.

Пример:

Табела 6 (Table 6)

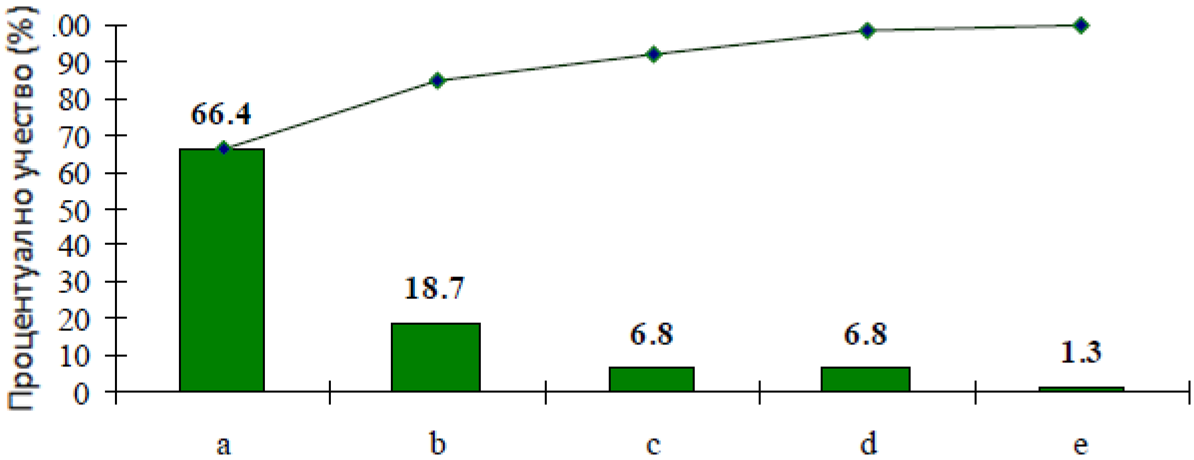
Карактеристики на квалитетот / quality characteristics	Вкупна фреквенција / total frequency	Поединечен трошок / Incremental costs	Вкупен трошок / total costs	Процентуално учество / Percentage (%)	Кумулативен процент (%) / cumulative Percentage (%)
A	12	13	156	66,4	66,4
B	22	2	44	18,7	85,1
C	4	4	16	6,8	91,9
D	8	2	16	6,8	98,7
E	3	1	3	1,3	100,0
Вкупно:	49		235	100,0	

Чекор 7

Во овој чекор правиме Парето дијаграм за учеството на трошоците поврзани со набљудуваните карактеристики на квалитетот, кои се предизвикани со воочените неправилности. Врз основа на Парето дијаграмот лесно ќе согледаме кои грешки/појави предизвикуваат најголеми трошоци. За грешките/појавите кои предизвикуваат најмногу трошоци се предлагаат корективни активности за нивно намалување или потполно отстранување.

Пример:

Парето дијаграм на воочените неправилности на набљудуваните карактеристики на квалитетот (Pareto diagram of perceived irregularities of observed quality characteristics)



Карактеристики на квалитетот / quality characteristics

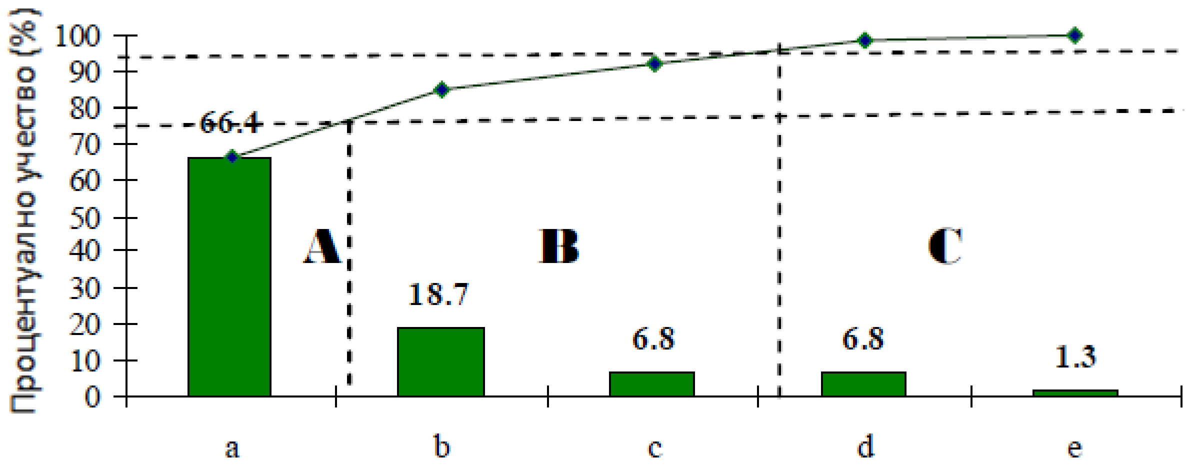
Дијаграм 5 (Figure 5)

Чекор 8

Повлекуваме хоризонтална линија на ниво 70% (80%) и 90% (95%) проценти во дијаграмот и на местото на пресекот со Парето кривата, повлекуваме линија до X - оската така што се одвојуваат полињата A, B и C. За грешките/појавите кои предизвикуваат најголеми трошоци (Подрачјето А – група со многу влијателни својства и карактеристики) се бара примерок и се предлагаат корективни мерки за нивно отстранување.

Пример:

Парето дијаграм на воочените неправилности на набљудуваните карактеристики на квалитетот (Pareto diagram of perceived irregularities of observed quality characteristics)



карактеристики на квалитетот / quality characteristics

Дијаграм 6 (Figure 6)

Чекор 9

Бидејќи се утврдени грешките кои најчесто се појавуваат и предизвикуваат најголеми трошоци се утврдува приоритет на корективните активности врз основа на индексот на приоритетот.

4.1.1.2 Практични примери со користење на Парето дијаграм

Секое претпријатие за да работи порентабилно, сака да го фокусира своето внимание за решавање на најважните проблеми. Но, како да се одлучи со кои проблеми треба прво да се справи? И кои од проблемите се предизвикани од иста причина? За таа цел го користиме Парето принципот – исто така познат како „*правило 80/20*“ така што со негова помош согледуваме дека 20% од анализираните податоци, сочинуваат 80% од резултатот. Овие 80% со 20% се илустративни, односно може 13% од работата да претставува 87% од резултатот, односно 13% анализирани причинители, може да предизвикаат 87% од проблемите. Или 70% од проблемите може да бидат предизвикани од 30% од причинителите.

Така, на пример во рударско производственото претпријатие „НН“ се зголемуваат секојдневно трошоците, а воедно се зголемуваат и залихите на артиклите во магацините, а тоа повлекува пораст на трошоците. За таа цел се земаат табеларни податоци за сите трошоци по соодветно трошковно место направени до 7-ми месец 2016 г., односно податоци за сите артикли во магацин (групирани по соодветна група, односно за која машина се однесуваат) за кои имало остаток од претходните години, а истите се повторно набавувани и годинава, притоа не биле истите барани, така што стојат непотребно на залиха во магацин.

Пример 1

Во претпријатието „НН“ се анализираат сите направени трошоци групирани по фази за соодветни економски единици до 31.7.2016 год.

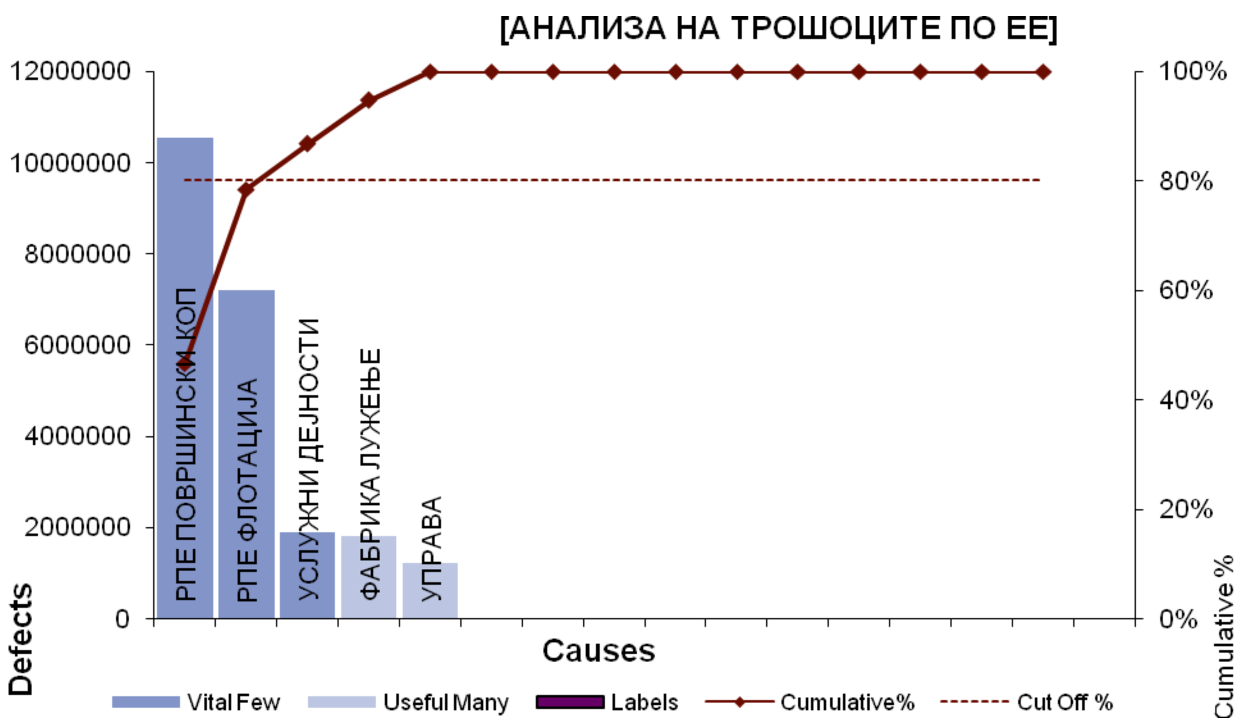
Табела 7 (Table 7)

#	Causes(EE)	Defects	Cumulative%
		Cumulative Percentage Cutoff:	80%
1	РПЕ ПОВРШИНСКИ КОП	10.544.434,58 €	46,6%
2	РПЕ ФЛОТАЦИЈА	7.208.209,46 €	78,4%
3	УСЛУЖНИ ДЕЈНОСТИ	1.879.232,26 €	86,7%
4	ФАБРИКА ЛУЖЕЊЕ	1.812.599,50 €	94,7%
5	УПРАВА	1.104.508,25 €	100,0%

Pareto Analysis

Претпријатие „НН“

Анализа на трошоците по ЕЕ
(31.7.2016)



Дијаграм 7 (Figure 7)

The first 3 Causes(EE) cover 087% of the Total Defects

Од погоре прикажаниов Парето дијаграм, може да согледаме дека 87% од вкупните трошоци во претпријатието „НН“ се предизвикани во економските единици:

- РПЕ ПОВРШИНСКИ КОП
- РПЕ ФЛОТАЦИЈА
- УСЛУЖНИ ДЕЈНОСТИ.

Одиме во подетална анализа, поконкретно на економската единица РПЕ ПОВРШИНСКИ КОП, за да видиме кои се причинителите за толку големи трошоци.

Понатаму правиме подетално групирање и поделби на трошоците, притоа не земајќи ги во предвид трошоците за плати и трошоците за одржување на инфраструктурните објекти (недвижностите) во оваа економска единица, така што ги анализираме само поголемите трошоци кои произлегуваат од поголемите машини, при што не ги земаме во предвид трошоците за гориво (нафта), туку само трошоците за потрошени материјали, резервни делови и сервисните услуги за истите машини. Селективно ги земаме 15-те најголеми причинители:

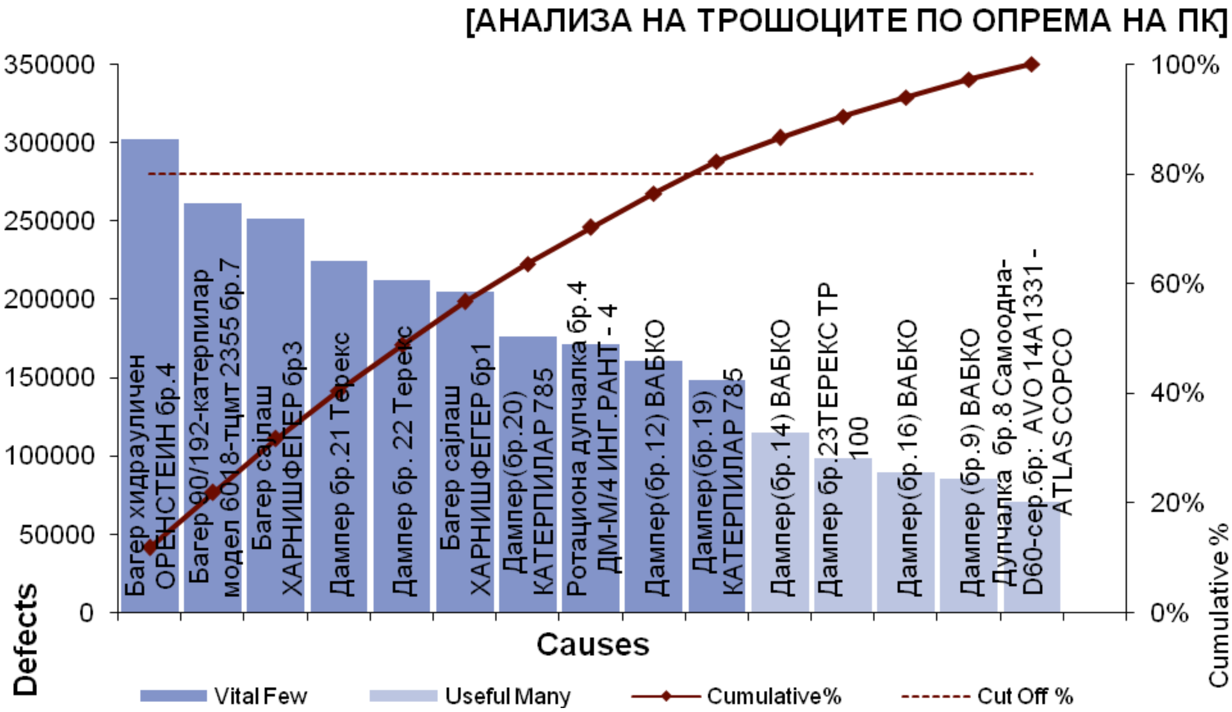
Табела 8 (Table 8)		Cumulative Percentage Cutoff:	80%
#	**Causes(опрема)**	**Defects**	Cumulative%
1	Багер хидрауличен ОРЕНСТЕИН бр.4	302.006,94	11,8%
2	Багер 90/192-катерпилар модел 6018-тцмт 2355 бр.7	260.791,54 €	21,9%
3	Багер сајлаш ХАРНИШФЕГЕР бр3	250.893,02 €	31,7%
4	Дампер бр.21 Терекс	224.580,70 €	40,4%
5	Дампер бр. 22 Терекс	211.814,96 €	48,7%
6	Багер сајлаш ХАРНИШФЕГЕР бр1	204.396,68 €	56,6%
7	Дампер(бр.20) КАТЕРПИЛАР 785	175.738,23 €	63,5%
8	Ротациона дупчалка бр.4 ДМ-М/4 ИНГ.РАНТ – 4	171.392,96 €	70,2%
9	Дампер(бр.12) ВАБКО	160.348,13 €	76,4%
10	Дампер(бр.19) КАТЕРПИЛАР 785	148.185,56 €	82,2%
11	Дампер(бр.14) ВАБКО	114.399,84 €	86,6%
12	Дампер бр.23ТЕРЕКС ТР 100	98.000,00 €	90,4%
13	Дампер(бр.16) ВАБКО	89.402,39 €	93,9%
14	Дампер (бр.9) ВАБКО	85.315,28 €	97,2%
15	Дупчалка бр.8 Самоодна-D60-сер.бр: AVO 14A1331 ATLAS COPCO -	70.907,02 €	100,0%

Претпријатие „НН“

Анализа на трошоците по опрема на ПК

(31.7.2016)

Од погоре прикажаниот Парето дијаграм гледаме дека првите 10 машини



Дијаграм 8 (Figure 8)

The first 10 Causes(опрема) cover 082% of the Total Defects

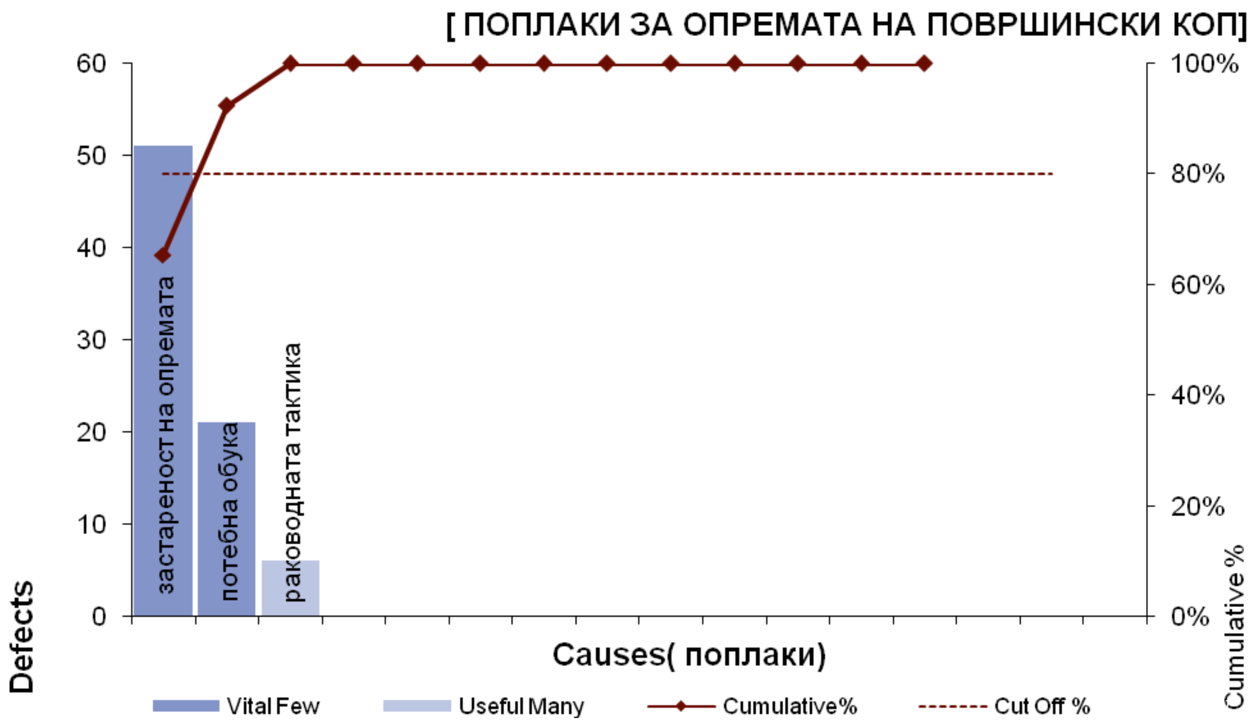
предизвикуваат 82% од трошоците на економската единица Површински коп. Бидејќи станува збор за големи трошоци, можеби би било поисплатливо наместо да се одржува оваа застарена опрема, да се предложат дополнителни инвестиции за купување на нова опрема, бидејќи всушност некои од машините изнесуваат токму толку , колку што е потрошено за одржување на една дотраена машина и тоа само за седум месеци во годината, не земајќи ги во предвид трошоците од минатите години.

Меѓутоа, одиме во подетална анализа на трошоците за одржување на опремата на *Површински коп*. Имено, увидувајќи дека некои исти трошоци за одржување се повторуваат понекогаш и во еден ист месец за една иста машина, поради нестручност и недоволна квалификуваност на персоналот, настанува дефицит и уништување на соодветни резервни делови при самото монтирање во машините. Затоа имаме неколку поплаки од вработените, од кои 51 се жалат дека причина за трошоците е застареност на опремата, 21 се жалат дека е потребна обука и само шест се жалат дека причина е раководната тактика.

Табела 9 (Table 9)

Pareto Analysis		Cumulative Percentage Cutoff:	80%
#	**Causes (поплаки)**	**Defects**	Cumulative%
1	застареност на опремата	51,00	65,4%
2	потребна обука	21,00	92,3%
3	раководната тактика	6,00	100,0%

Pareto Analysis
Претпријатие „НН“
Анализа на полаки за опремата на ПК
31.7.2016



Дијаграм 9 (Figure 9)

The first 3 Causes(поплаки) cover 100% of the Total Defects

Од дијаграмов може да заклучиме дека најсоодветно и економично решение за претпријатието „НН“ е да направат инвестирање во нова опрема, меѓутоа не изостанува фактот дека е потребна и дополнителна обука на вработените.

Пример 2

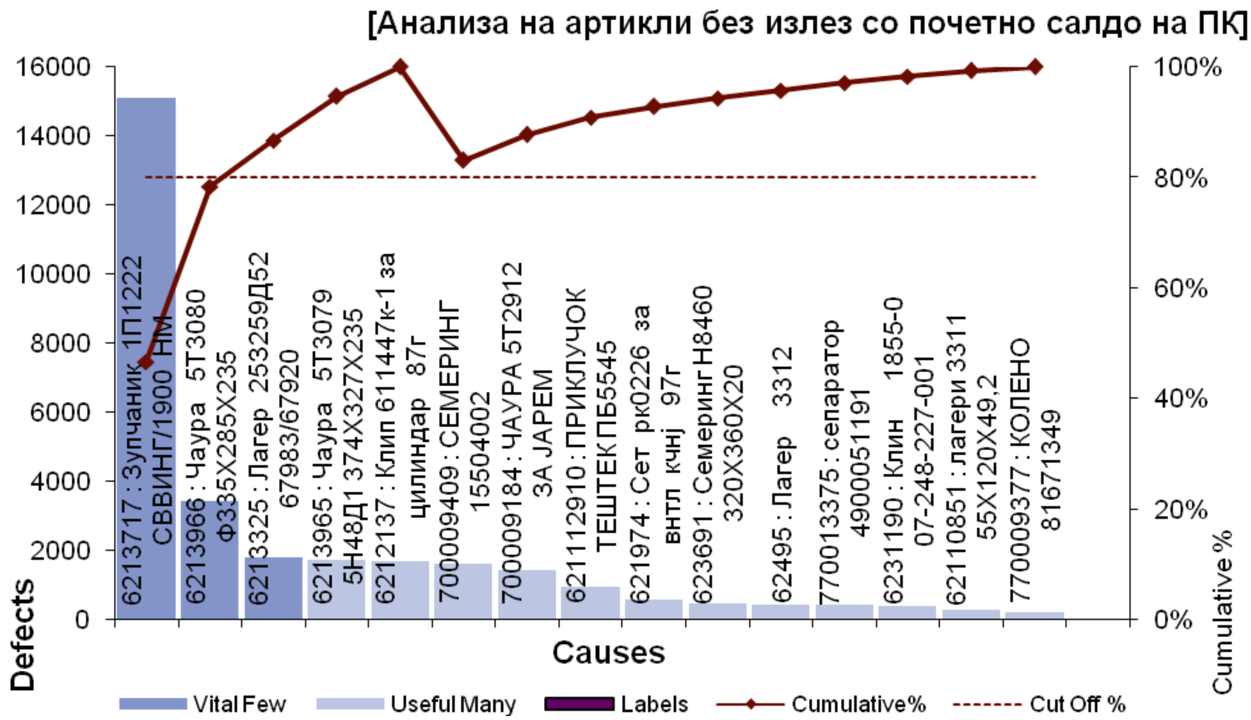
Имено, исто како што се утврди дека најголем број на трошоци се за економската единица *Површински коп*, така и најголем број на залихи се од артикли за истата економска единица, па затоа ќе влезат само тие во анализата. Утврдено е дека во магацинот постојат артикли кои имале залиха од минатата година, а од истите непотребно е набавувано пак во тековната година, а притоа немало излез на истите од магацинот. Сепак се пристапува селективно, само кон оние артикли за кои е направен најголем непотребен промет:

Табела 10 (Table 10)

	Cumulative Percentage Cutoff:	80%
Causes(артикли)	**Defects**	Cumulative%
6213717 : Зупчаник 1П1222 СВВИНГ/1900 НМ	€ 15.093,01	49,4%
6213966 : Чаура 5Т3080 Ф335Х285Х235	€ 3.429,87	60,6%
6213325 : Лагер 253259Д52 67983/67920	€ 1.800,02	66,5%
6213965 : Чаура 5Т3079 5Н48Д1 374Х327Х235	€ 1.723,80	72,2%
6212137 : Клип 611447к-1 за цилиндар 87г	€ 1.707,32	77,8%
700009409 : СЕМЕРИНГ 15504002	€ 1.614,04	83,0%
700009184 : ЧАУРА 5Т2912 ЗА ЈАРЕМ	€ 1.439,80	87,8%
621112910 : ПРИКЛУЧОК ТЕШТЕК ПБ5545	€ 948,34	90,9%
621974 : Сет рк0226 за внтл кчнј 97г	€ 582,34	92,8%
623691 : Семеринг Н8460 320Х360Х20	€ 463,32	94,3%
62495 : Лагер 3312	€ 425,71	95,7%
770013375 : сепаратор 4900051191	€ 419,51	97,0%
6231190 : Клин 1855-0 07-248-227-001	€ 383,66	98,3%
62110851 : лагери 3311 55Х120Х49,2	€ 297,95	99,3%
770009377 : КОЛЕНО 81671349	€ 221,46	100,0%

Pareto Analysis

Претпријатие „НН“
Анализа на артикли без излез со почетно салдо на ПК
(31.7.2016)



Дијаграм 10 (Figure 10)

The first 3 Causes(артикли) cover 087% of the Total Defects

Од Парето дијаграмов согледуваме дека првите три артикли предизвикуваат навистина непотребна залиха која нема излез и може да препорачаме од истите артикли дека не е потребно воопшто да се набавува до крајот на годината. Оправдувањето на инженерско-раководниот тим на Површински коп, е дека за некои артикли набавката е побавна, бидејќи се набавуваат од странство, па доколку дојде до неопходна нивна потреба, истите би биле потребни да се на резервна залиха. Но, овде станува збор за артикли кои веќе имале залиха од претходните години, а од истите пак е непотребно набавувано.

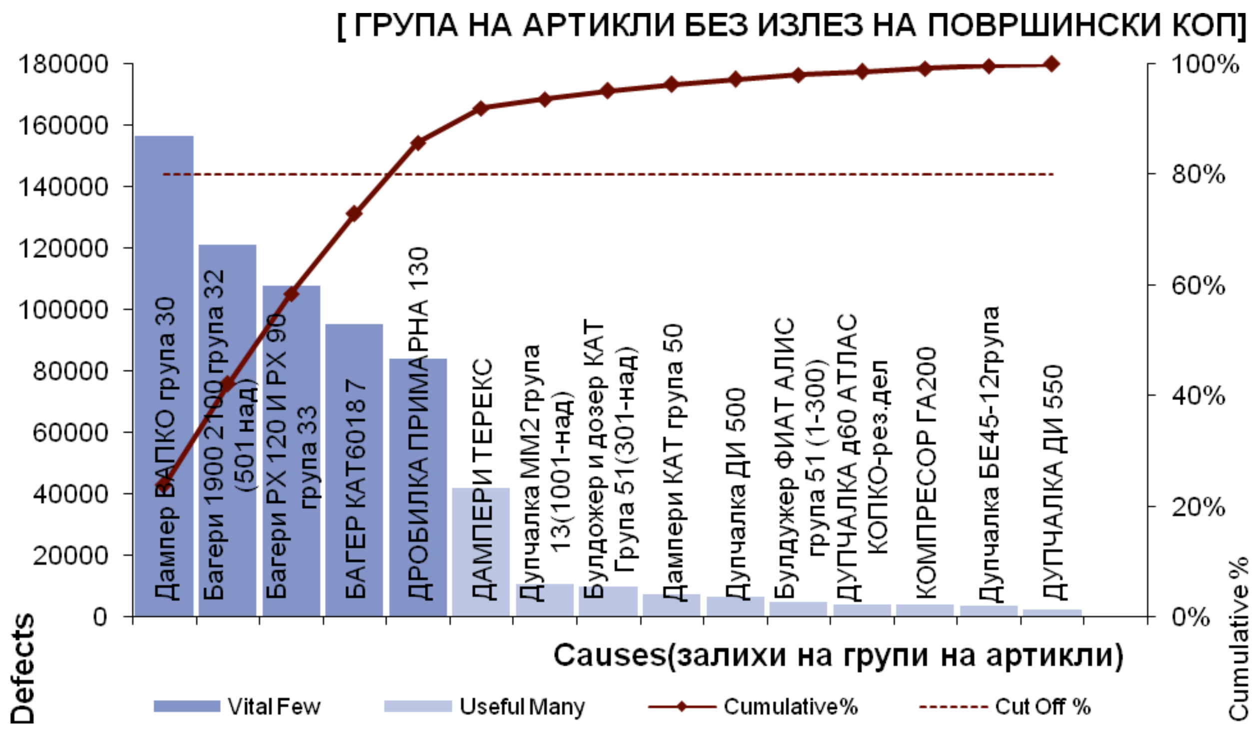
Понатаму ги анализираме набавените артикли во тековната година за кои немало излез, односно не биле требувани, притоа групирајќи ги по групи на артикли за соодветни машини на Површински коп. Селективно се земани групите на артикли за кои е направен промет над 2000 евра:

Табела 11(Table 11)

		Cumulative Percentage Cutoff:	80%
#	**Causes(залихи на групи на артикли)**	**Defects**	Cumulative%
1	Дампер ВАПКО група 30	€ 156.504,46	23,7%
2	Багери 1900 2100 група 32 (501 над)	€ 121.043,08	42,1%
3	Багери РХ 120 И РХ 90 група 33	€ 107.642,43	58,4%
4	БАГЕР КАТ6018 7	€ 95.404,49	72,9%
5	ДРОБИЛКА ПРИМАРНА 130	€ 84.130,39	85,7%
6	ДАМПЕРИ ТЕРЕКС	€ 41.678,63	92,0%
7	Дупчалка ММ2 група 13(1001-над)	€ 10.495,14	93,6%
8	Булдожер и дозер КАТ Група 51(301-над)	€ 9.936,08	95,1%
9	Дампери КАТ група 50	€ 7.321,37	96,2%
10	Дупчалка ДИ 500	€ 6.653,75	97,2%
11	Булдужер ФИАТ АЛИС група 51 (1-300)	€ 4.669,72	97,9%
12	ДУПЧАЛКА д60 АТЛАС КОПКО-рез.дел	€ 3.929,79	98,5%
13	КОМПРЕСОР ГА200	€ 3.770,40	99,1%
14	Дупчалка БЕ45-12група	€ 3.429,97	99,6%
15	ДУПЧАЛКА ДИ 550	€ 2.500,21	100,0%

Претпријатие „НН“

Анализа на залиха по група на артикли без излез набавени во тековната година на ПК (31.7.2016)



Дијаграм 11 (Figure 11)

The first 5 Causes(залихи на групи на артикли) cover 086% of the Total Defects

Од дијаграмов гледаме дека првите пет групи на артикли претставуваат 86% од вкупно направените непотребни залихи за артикли на Површински коп. Овде, бидејќи станува збор за навистина високи износи, може да се предложи и продажба на некои од непотребно набавените набавки, иако на домашен пазар тоа би било тешко изводливо, бидејќи претпријатија со слична структура се малку на број, се препорачува истите да се продадат на странскиот пазар.

Заклучок

Засега, заклучивме дека за да биде поддржана Парето оптималнта алокација, од конкурентен еквилибриум, мора да се одржи претпоставката од втората теорема за економската благосостојба заедно со екстензијата на потрошувачката кошничка.

Како што спомнавме претходно, втората теорема за економската благосостојба им дава можност на државните управувачки креатори да согледат дека постои можност за фер распределба на добрата во економијата. Ова, всушност дава поттик за сите социјални програми кои имаат за цел да се редистрибуираат ресурсите од богатите на сиромашните, така што сиромашните би имале поголем дел од ресурсите и на крајот да се заврши со одреден пазарен еквилибриум. Проблемот со втората теорема за економската благосостојба и реалноста, е фактот што теоремата се потпира на конкурентните пазари и на паушалните трансфери. Ова значи дека, секогаш кога ќе ги претставиме на некоја асиметрична информација, односно кога една група знае повеќе информации за добрата од друга група или во случај на било кој друг неконкурентен пазар, како што се на пример монополите, тогаш теоремата не мора да важи. Но, во реалноста постојат овие работи и затоа во нашите секојдневни животи е тешко да се редистрибуираат ресурсите на таков начин со што ќе ја постигнеме вистинската Паретова оптимална алокација на добрата како што посакуваме.

Со ограничувањето на нашиот ум, тоа е сé уште една благородна обврска да се обидеме да ги направиме пазарите пофер и да му се овозможи на општеството да биде во можност да избира оптимални алокации. Тоа зависи од нас, дали ќе бидеме свесни за овие теореми и нивните примени во општеството.

Користена литература

1. Peano, G. [1888] *Calcologeometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann precedutodalleoperazionidellalogicadeduttiva*, Torino.

2. Volterra, V.,[l954-l962.] Operematematiche, 5 vol., Acc. deiLincei,
3. Fr´echet, M. [1904] *Generalisation d' un th´eor`eme de Weierstrass*, C. R. Acad. Sci. 139, 848-850.
4. Fr´echet, M. [1906] *Sur quelques points du calculfonctionnel*, Rend. Circ. mat. Palermo 22, 1-74
5. Schmidt, E. [1908] ¨ *Uber die Aufl¨osunglinearerGleichungenmitunendlichvielen Unbekannten*, Rend. Palermo XXV, 53-77.

6. Fr´echet, M. [1908] *Essai de g´eom´etrieanalytique `a uneinfinit´e de coordonn´ees*, Nouv. Ann. de Math. (4) 8, 97-116 and 289-317.
7. *BishopBerkeley [1734] TheAnalyst*
8. Jean Baptiste Joseph ***Fourier***.[1822]*Théorieanalytique de la chaleur*.

9. Riesz, F. [1910] *Sur certain syst`emesd'´equationsfonctionelles et l'approximation des fonctions continues,* Acad´emie des Sciences, Paris, ComptesRendusRiesz, F. [1911] *Sur certain syst`emessinguliersd'´equationsint´egrales*, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.
10. Banach, S. [1923b] *Sur le probl`eme de la mesure*, Fund.Math.4, 7-33.
11. Saccoman, J. [1992] *Extension theorems and the problem of measure*, Riv. Mat. Univ. Parma (5) 1, 287-293.
12. Kreĭn, M.G.; Rutman, M.A. (1948). "Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space"
13. Minkowski, H. [1896], *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig
14. Helly, E. (1912), "ÜberlineareFunktionaloperationen", *Wien. Ber.*
15. Hahn, H. [1927] ¨ *UberlinearerGleichungssysteme in linearerR¨aumen*, J. Reine Angew.Math.157, 214-229.

16. Banach, S. [1929] *Sur les fonctionelleslin´eaires*, Studia Math. 1, 211-216 and223-229.
17. Hahn, H. [1922] ¨ *UberFolgenlinearerOperationen*, Monatsh.Math.und Phys. 32, 1-88
18. Banach, S. [1923] *Sur les op´erationsdans les ensembles abstraits et leur application aux ´equations int´egrales*, Fund. Math.
19. Banach, S. [1932] *Th´eorie des op´erationslin´eaires*, Chelsea, New York.
20. Wiener, N. [1922] *Limit in terms of continuous transformation*, Bull. Soc. Math. Fr. 50, 119-134.
21. Taylor, A. [1939] *The extension of linear functionals,* Duke Math. J. 5, 538-547.
22. Foguel, S. [1958] *On a theorem by A. E. Taylor,* Proc. Amer. Math. Soc. 9, 325
23. Phelps, R. [1960] *A generalization of the Hahn-Banach theorem,* Trans. Amer. Math. Soc. 95, 238-255
24. Park, S. [1993] *A little generalization of the Hahn-Banach extension property*, J.Korean Math. Soc. 30, 139-150.
25. Nachbin, L. [1950] *A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations*,Trans. Amer. Math. Soc. 68, 28-46
26. Goodner, D. [1950] *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 69, 89-108.
27. Kelley, J. [1952] *Banach spaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. 72, 323-326
28. Holmes, R. [1975] *Geometric functional analysis and its applications*, GTM 24, Springer-Verlag, New York.
29. https://www.coursehero.com/file/6743229/characterization-of-ParetoEfficiency/
30. https://www.coursehero.com/file/p46u6pu/Theorem-If-every-u-i-is-continuous-and-locally-nonsatiated-then-an-interior/
31. https://www.coursehero.com/file/p7aco75/Without-loss-of-generality-we-consider-the-two-goods-k-1-2-For-each-consumer/
32. https://www.economics.utoronto.ca/osborne/2x3/tutorial/PEDEX.HTM
33. Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem – Luenbergerpg. 111)

34. Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem–Luenbergerpg. 129)
35.
36. Luenberger, David G. (1969). Optimization by Vector Space Methods(Hahn-BanachExtensionTheorem – (Luenberger pg.133)
37. Luenberger, David G. Optimization by Vector Space Methods. New York, NY: J. Wiley and Sons, 1969.Luenbergerpg. 133-134)
38. Badur, Kemal. Econ 8106: Macroeconomic Theory III. University of Minnesota, http://www.econ.umn.edu/ kemal/academic/Files/8106.pdf, accessed on December 10, 2012.
39. Krueger, Dirk. Macroeconomic Theory. University of Pennsylvania, August 2007.
40. “The 80/20 Principle: The Secret to Achieving More with Less“ - October 19, 1999 by Richard Koch (Author)
41. Todorović, Z.: *Upravljanjekvalitetom*, Ekonomskifakultet, Banja Luka, 2009. godine
42. Klarić, S., Pobrić, S.: *Upravljanjekvalitetom – alatiimetodepoboljšanja*, Mašinskifakultet, Mostar, 2009.Godine
43. UPRAVLJANJE KVALITETOM - IV изменето и дополнето издание – ЖиванЖивковиќ, Предраг Ѓоргевиќ
44. http://www.efbl.org/upload/3861124-menadment-kvaliteta-vjebe-broj-4-2014-11-14.pdf
45. www.pmf.untz.ba/.../FF**Operatori**Funkcionali.pdf
46. [ЛюстСоб, 170-180], [КантАк, 83-88]
47. www.mat.unimi.it/users/libor/AnConvessa/HB.pdf

Елизабета Гигова

Прилози кон теоремата на Hahn-Banach, Паретова оптимална алокација и примена во економијата

Универзитет „Гоце Делчев” – Штип