УНИВЕРЗИТЕТ “ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ” – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
катедра за Математика и статистика
ШТИП

Самоил Малчески

СТРОГО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

магистерски труд

Штип, 2016 година

Комисија за оценка и одбрана

Ментор:	д-р Мартин Лукаревски Доцент, Факултет за информатика, Штип
Член	д-р Цвета Мартиновска-Банде Редовен професор, Факултет за информатика, Штип
Член	д-р Бојан Пранговски Доцент, Машински факултет, Скопје

Членови на Комисија за оценка и одбрана

Претседател:	д-р Бојан Пранговски Доцент, Машински факултет, Скопје
Член	д-р Мартин Лукаревски Доцент, Факултет за информатика, Штип
Член	д-р Цвета Мартиновска-Банде Редовен професор, Факултет за информатика, Штип

Научно поле:	Природно-математички науки
Научно подрачје:	Математика
Научна област:	Анализа и функционална анализа

Датум на одбрана: 19.08.2016

Рецензирани и објавени трудови:

Книги:

- Р. Малчески, С. Малчески; Основи на финансиска математика; ФОН Универзитет Скопје, 2010, ISBN 978-608-4506-18-8
- Р. Малчески, С. Малчески; Математика за бизнис; ФОН Универзитет Скопје, 2010, ISBN 978-608-4506-25-6
- Р. Малчески, С. Малчески; Статистика за бизнис и економија; ФОН Универзитет Скопје, 2010, ISBN 978-608-4506-26-3
- Р. Малчески, С. Малчески, К. Аневска; Методологија на научно-истражувачка работа; ФОН Универзитет Скопје, 2014, ISBN 978-608-4506-35-5
- Р. Малчески, С. Малчески; Операциони истражувања; ФОН Универзитет Скопје, 2014, ISBN 978-608-4506-36-2
- С. Малчески, Р. Малчески; Состојбите со земјоделството во Република Македонија во периодот од 1999-2013 година; ФОН Универзитет Скопје, 2015, ISBN 978-608-4506-40-9

Скрипти:

- Samoil Malcheski, Ph.D.; Materials for course Management Science, University “Sent Paul the Apostle”, 2013
- Samoil Malcheski, Ph.D.; Materials for course Management, University “Sent Paul the Apostle”, 2013
- Samoil Malcheski, Ph.D.; Materials for course Digital Economy, University “Sent Paul the Apostle”, 2013
- Samoil Malcheski, Ph.D.; Materials for course E-management, University “Sent Paul the Apostle”, 2013

Статии:

стручни

- С. Малчески, Г. Гулев: Дисконтни пресметувања; СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2007
- С. Малчески, Г. Гулев: Камата и каматни пресметувања; СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2007
- С. Малчески, Г. Гулев: Финансиски пресметувања кај обврзници и акции 1; СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2007
- С. Малчески, Г. Гулев: Финансиски пресметувања кај обврзници и акции 2; СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2007
- В. Малческа, С. Малчески: Латински квадрати и блок дизајни (прв дел); СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2008
- С. Малчески , В. Малческа: Латински квадрати и блок дизајни (втор дел); СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2008
- С. Малчески: Избор на средства за работа; СИГМА - Сојуз на математичари на Македонија, 2011

- К. Аневска, С. Малчески: Геометриско пресметување на збирови, Нумерус - Сојуз на математичари на Македонија, 2012
- К. Аневска, С. Малчески: Шаховските фигури и златниот пресек, Нумерус - Сојуз на математичари на Македонија, 2012

научни

- Р. Малчески, Т. Стојчевска, С. Малчески: Методи за корегирање на грешки на податоците во временски серии; Vizione, 13-14, 2010
- Р. Малчески, Т. Стојчевска, С. Малчески: Планирање на набавката и потрошувачката на резервни делови; Vizione, 13-14, 2010
- С. Малчески: Реформа на јавните комунални претпријатија во Република Македонија – форми и модели на реализација (магистерски труд); Економски институт при Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје, 2010
- R. Malcheski, S. Malcheski: Structure of higher education, a prerequisite for development of knowledge-based economy; Scientific conference at Institute of Economics at the University of Ss. Cyril and Methodius – Skopje, 2012
- С. Малчески: Улогата на семејните бизниси во економијата на Република Македонија (докторски труд); Економски институт при Универзитет "Св. Кирил и Методиј" – Скопје, 2013
- Malcheski, S.: Problems facing family businesses in Republic of Macedonia; 1st International Conference on Cultural Heritage, Media and Tourism; Institute for Socio-cultural Anthropology of Macedonia; 2013
- Samoil Malcheski: Outputs of the subsystems for secondary education and the labor market in Republic of Macedonia, International Journal of Science and Research Volume 3 Issue 9, September 2014, p. 246-252
- Samoil Malcheski: Changes of nominal and real net salaries in RM in the period 1999-2013, Economic development, year 16, no. 3/2014, p.187-203
- Samoil Malcheski: Family businesses, local economic development and tourism; 2nd International Conference on Cultural Heritage, Media and Tourism; Institute for Socio-cultural Anthropology of Macedonia; 2015
- Samoil Malcheski: Mathematical model for judicial analysis of a class problem; International Journal of Science and Research Volume 3 Issue 10, October 2014, p. 1144-1147
- Malcheski, S., Malcheski, R. Anevska, K.: 2-semi-norms and 2-semi-inner product, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 8, 2014, no. 52, p. 2601 – 2609
- Malcheski, S., Malcheski, A., Anevska, K., Malcheski R.: Another characterization's of 2-pre-Hilbert Space, IJSIMR, Vol. 3, 2015, Issue 2, p. 45-54
- Malcheski, A., Malcheski, R. Anevska, K., Malcheski, S. - A remark about quasi 2-normed space, Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, no. 55, pp. 2717-2727

СТРОГО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Проучувањето на геометриската структура на 2-нормираните простори, кои се генерализација на нормираните простори е од посебен интерес за примената на истите. Меѓутоа, целосното изучување на геометријата на 2-нормираните простори не е можно без соодветни знаења за линеарните 2-функционали, во кои важно место завземаат ограничените линеарни 2-функционали и нивните Хан-Банахови проширувања. Конечно, во повеќето случаи важна алатка за проучување на геометријата на 2-нормираните простори се неравенствата на паралелопипед од прв и втор вид, кои во оваа магистерска работа се детално разработени.

Важна класа на 2-нормирани простори се 2-предхилбертовите простори, па затоа истите се разгледани во одделна глава. Во овие разгледувања посебно внимание е посветено на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и равенството на паралелопипед, кое е основна алатка за карактеризацијата на 2-скаларниот производ во 2-нормиран простор. Меѓутоа, при карактеризациите на 2-скаларниот производ не помало значење имаат и равенствата од Ојлер-Лагранжов вид, строго конвексните норми со модул c, неравенството на Mercer итн., кои се одделно разработени.

Изучувањето на строго конвексните и рамномерно конвексните 2-нормирани простори е важен дел за осознавањето на геометриската структура на 2-нормираните простори. Оттука, од посебен интерес е наоѓањето на потребни и доволни услови за да еден 2-нормиран простор биде строго конвексен, односно рамномерно конвексен, при што е неопходно да се даде толкување или соодветни примери од кои може да се види разликата меѓу строгата конвексност и рамномерната конвексност. Токму наоѓањето на нови карактеризации на строго конвексните 2-нормирани простори и презентирањето на соодветни примери е основната цел на овој труд, во кој се воведени неколку нови поими и се докажани четири нови карактеризации на строго конвексните 2-нормирани простори.

Клучни зборови. 2-предхилбертов простор, неравенство на паралелопипед, екстремална точка, линеарен 2-функционал, Кошиева низа, Конвергентна низа

STRICTLY CONVEX 2-NORMED SPACES

The study of the geometric structure of the 2-normed spaces, that generalization of normed spaces is of particular interest for the application of the same. However, complete study of the geometry of the 2-normed spaces is not possible without adequate knowledge of linear 2-functional, which taking up an important place limited linear 2-functional and their Hahn-Banach extensions. Finally, in most cases, an important tool for studying the geometry of the 2-normed spaces is inequalities of parallelepiped from first and second kind, that in this master work are elaborated in details.

An important class of 2-normed spaces is 2-pre-Hilbert spaces, so they are discussed in a separate chapter. In these considerations special attention is paid to the inequality of Cauchy-Schwarz-Bunjakovski and equality of parallelogram, which is an essential tool for the characterization of 2-scalar product in 2-normed space. However, in the characterizations of 2-scalar product not less significance has the equations of Euler-Lagrange type, strictly convex norms with module c, inequality Mercer etc., which are developed separately.

The study of strictly convex and uniformly convex 2-normed spaces is an important part of understanding of the geometric structure of the 2-normed spaces. Hence, of particular interest is the finding of the necessary and sufficient conditions for a 2-normed space is strictly convex, i.e. uniformly convex, whereby is necessary to give an interpretation or additional examples of which it can be seen the difference between strict convexity and uniform convexity. Exactly the finding of new characterizations of strictly convex 2-normed spaces and presenting appropriate examples is the main purpose of this paper, which introduced several new terms and proven four new characterizations of strictly convex 2-normed spaces.

Key words. 2-pre-Hilber spaces, inequality of parallelepiped, extreme point, linear 2-functional, Cauchy string, convergent string

СОДРЖИНА

Глава I

2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

Глава II

2-ПРЕДХИЛБЕРОВИ ПРОСТОРИ

Глава III

СТРОГО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

ГЛАВА I

2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

1. ПОИМ ЗА 2-НОРМИРАН ПРОСТОР

1.1. Дефиниција ([26]). Нека L е реален векторски простор со димензија поголема од 1 и $\|\cdot,\cdot\|$ е реална функција на $L\times L$ за која важи:

i) $\|a,b\|\geq 0$, за секои $a,b\in L$ и $\|a,b\|=0$ ако и само ако множеството $\{a,b\}$ е линеарно зависно;

ii) $\|a,b\|=\|b,a\|$, за секои $a,b\in L$;

iii) $\|\alpha a,b\|=|\alpha|\cdot\|a,b\|$, за секои $a,b\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$,

iv) $\|a+b,c\|\leq\|a,c\|+\|b,c\|$, за секои $a,b,c\in L$. Ова неравенство е познато како неравенство на паралелопипед кое подетално ќе го објасниме во Глава 2.

Функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ се нарекува 2-*норма* на L, а $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ се нарекува 2-*нормиран простор*.

1.2. Теорема ([26]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор.

а) За секои $a,x\in L$ и за секој $\lambda\in\mathbf{R}$ важи равенството $\|a,x\|=\|a+\lambda x,x\|$.

б) За секои $a,b\in L$ и за секои $x,y\in L$ такви што $x=\alpha a+\beta b,\;\; y=\gamma a+\delta b$ каде $\alpha,\beta,\delta,\gamma\in\mathbf{R}$ важи $\|x,y\|=|\alpha\delta-\beta\gamma|\cdot\|a,b\|$.

Доказ. а) Од *iv)* во дефиниција 1 следува дека за секои $a,x\in L$ и за секој реален број $\lambda\in\mathbf{R}$ важи

$$\|a+\lambda x,x\|\leq\|a,x\|+\|x,\lambda x\|=\|a,x\|.$$

Од друга страна имаме

$$\|a,x\|=\|a+\lambda x+(-\lambda x),x\|\leq\|a+\lambda x,x\|+\|\lambda x,x\|=\|a+\lambda x,x\|.$$

Конечно, од последните две неравенства следува точноста на тврдењето.

б) Ако $\beta=0$, тогаш тврдењето непосредно следува од аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1 и тврдењето под а). Ако $\beta\neq 0$, тогаш повторно од аксиомата *iii*) од дефиниција 1.1 и тврдењето под а) следува

$$\begin{aligned}\|x,y\| &= \|\alpha a+\beta b,\gamma a+\delta b\| = \left\|\alpha a+\beta b,\gamma a+\delta b-\tfrac{\delta}{\beta}(\alpha a+\beta b)\right\| \\ &= \left\|\alpha a+\beta b,\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta}a\right\| = \left|\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta}\right|\cdot\|\alpha a+\beta b,a\| \\ &= \left|\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta}\right|\cdot\|\beta b,a\| = |\alpha\delta-\beta\gamma|\cdot\|a,b\|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

1.3. Теорема ([56]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и $z,x_i\in L$, $i=1,...,n$.

а) Ако $\alpha_i\ge 0, i=1,2,...,n$, тогаш

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n,z\|\le\alpha_1\|x_1,z\|+\alpha_2\|x_2,z\|+...+\alpha_n\|x_n,z\|. \qquad (1)$$

б) Ако $\alpha_1>0$ и $\alpha_i\le 0$, за $i=2,3,...,n$, тогаш

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n,z\|\ge\alpha_1\|x_1,z\|+\alpha_2\|x_2,z\|+...+\alpha_n\|x_n,z\|. \qquad (2)$$

Доказ. а) Непосредно следува од аксиомите *iii*) и *iv*) во дефиниција 1.1 и принципот на математичка индукција.

б) Од неравенството (1) следува неравенството

$$\begin{aligned}\|\alpha_1x_1,z\| &= \|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n-(\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n),z\| \\ &\le\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n,z\|+\|-(\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n),z\| \\ &\le\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n,z\|+(-\alpha_2)\|x_2,z\|+...+(-\alpha_n)\|x_n,z\|\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (2). ■

1.4. Забелешка. Ако во неравенството (1) ставиме $\alpha_i=1, i=1,2,...,n$ добиваме дека за секои $z,x_i\in L$, $i=1,2,...,n$ точно е неравенството

$$\|x_1+x_2+...+x_n,z\|\le\|x_1,z\|+\|x_2,z\|+...+\|x_n,z\|. \qquad (3)$$

1.5. Теорема ([56]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и $z,x_i\in L, i=1,2,...,n$. Тогаш

$$\|x_1+x_2+...+x_n,z\|=\|x_1,z\|+\|x_2,z\|+...+\|x_n,z\|, \qquad (4)$$

ако и само ако

$$\|\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n,z\|=\alpha_1\|x_1,z\|+\alpha_2\|x_2,z\|+...+\alpha_n\|x_n,z\|, \qquad (5)$$

за секои $\alpha_i>0, i=1,2,...,n$.

Доказ. Ако за секои $\alpha_i > 0, i = 1,2,...,n$ е точно равенството (5), тогаш ставаме $\alpha_i = 1, i = 1,2,...,n$ и го добиваме равенството (4).

Обратно, нека е исполнето равенството (4) и нека $\alpha_i > 0, i = 1,2,...,n$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\alpha_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \alpha_i$. Тогаш од равенството (4) и од теорема 1.3 следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|x_i, z\| &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \|x_i, z\| - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)\|x_i, z\| = \alpha_1 \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i, z\right\| - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)\|x_i, z\| \\ &\le \left\|\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i, z\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)x_i, z\right\| \le \left\|\alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)x_i, z\right\| \\ &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, z\right\|.\end{aligned}$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенството (1) следува равенството (5). ■

1.6. Теорема ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. За секои $x, y, z \in L$ важи

$$\big|\|x,z\| - \|y,z\|\big| \le \|x+y,z\| + \|x-y,z\| - \|x,z\| - \|y,z\| \le \min\{\|x+y,z\|, \|x-y,z\|\} \quad (5)$$

и

$$\big|\|x,z\| - \|y,z\|\big| \le \|x,z\| + \|y,z\| - \big|\|x+y,z\| - \|x-y,z\|\big|. \quad (6)$$

Доказ. Од неравенството на паралелопипед следуваат неравенствата

$$\begin{aligned}\|x+y,z\| + \|x-y,z\| - \|x,z\| - \|y,z\| &\le \|x-y,z\| \\ \|x+y,z\| + \|x-y,z\| - \|x,z\| - \|-y,z\| &\le \|x+y,z\|\end{aligned}$$

па затоа

$$\|x+y,z\| + \|x-y,z\| - \|x,z\| - \|y,z\| \le \min\{\|x-y,z\|, \|x+y,z\|\},$$

т.е. точно е десното неравенство во (5). Понатаму, повторно од неравенството на паралелопипед имаме

$$\begin{aligned}2\|x,z\| &= \|x+y+(x-y),z\| \le \|x+y,z\| + \|x-y,z\| \\ 2\|y,z\| &= \|x+y-(x-y),z\| \le \|x+y,z\| + \|x-y,z\|\end{aligned}$$

па затоа

$$2\max\{\|x,z\|, \|y,z\|\} \le \|x+y,z\| + \|x-y,z\|. \quad (7)$$

Од друга страна

$$\|x,z\| + \|y,z\| + \big|\|x,z\| - \|y,z\|\big| = 2\max\{\|x,z\|, \|y,z\|\}. \quad (8)$$

Конечно, од равенството (8) и неравенството (7) следува левото неравенство во (5).

Повторно од неравенството на паралелопипедот имаме

$$\|x+y,z\| \le \|x+y-(x-y),z\| + \|x-y,z\| = 2\|y,z\| + \|x-y,z\|$$

$$\|y-x,z\| \le \|y-x-(x+y),z\| + \|x+y,z\| = 2\|x,z\| + \|x+y,z\|,$$

па затоа

$$\big|\|x+y,z\| - \|x-y,z\|\big| \le 2\min\{\|x,z\|,\|y,z\|\}. \tag{9}$$

Од друга страна имаме

$$\|x,z\| + \|y,z\| - \big|\|x,z\| - \|y,z\|\big| = 2\min\{\|x,z\|,\|y,z\|\}. \tag{10}$$

Конечно, од равенството (10) и неравенството (9) следува неравенството (6). ■

2. ПРИМЕРИ НА 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

2.1. Пример ([72]). Нека $\mathbf{R}^3 = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \mid \alpha_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,3\}$. Со вообичаените операции собирање на вектори и множење со реален број, $\mathbf{R}^3$ е векторски простор над $\mathbf{R}$. Нека e_1, e_2, e_3 е ортонормирана база на $\mathbf{R}^3$. За секои $x_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$, $i = 1,2$ дефинираме

$$\|x_1, x_2\| = \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \right\| \tag{1}$$

Ќе докажеме дека со (1) е дефинирана $2-$норма на $\mathbf{R}^3$. За таа цел (1) ќе ја запишеме во видот

$$\| x_1, x_2 \| = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}^2}$$

i) Јасно, $\|x_1, x_2\| \ge 0$ и ако $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^3$ се линеарно зависни вектори, тогаш $\| x_1, x_2 \| = 0$. Нека претпоставиме дека $\|x_1, x_2\| = 0$ и нека $y = (b_1, b_2, b_3)$ е произволен вектор од $\mathbf{R}^3$. Тогаш

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = 0, \det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Ако последните равенства последователно ги помножиме со $(-1)^{i+1}b_i$, $i=1,2,3,$ соодветно а потоа ги собереме, од својствата на детерминанти добиваме:

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} = 0$$

што значи векторите y, x_1, x_2 се линеарно зависни. Но, y е произволен вектор и $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, па затоа x_1, x_2 се линеарно зависни.

iv) Нека $x_1, x_2, z \in \mathbf{R}^3$, $x_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$, $i=1,2$ и $z = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Од својствата на детерминантите и апсолутната вредност следува

$$\begin{aligned} \|x_1+x_2, z\| &= \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{11}+\alpha_{21} & \alpha_{12}+\alpha_{22} & \alpha_{13}+\alpha_{23} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\| \\ &\le \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|x_1, z\| + \|x_2, z\|. \end{aligned}$$

Својствата *ii)* и *iii)* од дефиницијата на $2-$норма непосредно следуваат од (7), својствата на детерминантите и својствата на евклидовата норма во $\mathbf{R}^3$. ■

2.2. Пример ([56]). Нека $(L, (\cdot,\cdot))$ е реален предхилбертов простор. Тогаш со

$$\|x, z\| = \left(\det\begin{pmatrix} (x,x) & (x,z) \\ (x,z) & (z,z) \end{pmatrix} \right)^{1/2},$$

за секои $x, z \in L$ е дефинирана таканаречената стандардна 2-норма. Понатаму, ако $L = \mathbf{R}^3$ со обичниот скаларен производ и векторите $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ не се по парови линеарно зависни, тогаш $\|x, z\|$, $\|y, z\|$, $\|x+y, z\|$ се еднакви на плоштините на паралелограмите конструирани над векторите x и z, y и z, $x+y$ и z, соодветно. Неравенството

$$\|x+y, z\| \le \|x, z\| + \|y, z\|, \tag{2}$$

е еквивалентно со неравенството

$$0 \le 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,, \tag{3}$$

каде $\measuredangle(x,y)=\alpha$, $\measuredangle(y,z)=\beta$ и $\measuredangle(z,x)=\gamma$. Геометриската смисла на неравенството (2) е дека збирот на плоштините на две соседни страни на паралелопипедот е поголем или еднаков од плоштината на дијагоналниот пресек кој се наоѓа меѓу тие две страни. Оттука, природно е неравенството (2), кое во нормиран простор е аналогно на неравенството на триаголник да го наречеме *неравенство на паралелопипед*. ■

2.3. Пример а) За секои $x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbf{R}^n, n\ge 3$ дефинираме функција $\|\cdot,\cdot\|:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ таква што

$$\|x,y\|=\max_{1\le i<j\le n}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|.$$

Јасно, векторите $x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbf{R}^n, n\ge 3$ се линеарно зависни ако и само ако е исполент условот

$$\det\begin{pmatrix} x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}=0, 1\le i<j\le n\,.$$

Сега, од својствата на детерминантите, својствата на супремумот функција и потребниот и доволен услов за линеарна зависност на два вектори во $\mathbf{R}^n$ следува точноста на аксиомите за 2-норма.

б) Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\|x,y\|=\sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|,\; x=(x_i)_{i=1}^{\infty}, y=(y_i)_{i=1}^{\infty}\in l^\infty$$

е дефинирана 2-норма, што значи дека $(l^\infty,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор и l^∞ не е строго конвексен 2-нормиран простор.

в) ([45]). Со l^∞ да го означиме множеството од сите ограничени низи реални броеви. Ова множество со вообичените операции собирање на низи и множење на низа со реален број е реален векторски простор. Најпрво да забележиме дека векторите

$x=\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}, y=\left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}\in l^{\infty},$ се линеарно зависни ако и само ако за секои природни броеви $i<j$ важи

$$\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}=0$$

За секои $x=\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}, y=\left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}\in l^{\infty},$ дефинираме функција $\|\cdot,\cdot\|: l^{\infty}\times l^{\infty}\to \mathbf{R}$

$$\|x,y\|=\sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}\right|.$$

Бидејќи $x=\left(x_j\right)_{j=1}^{\infty}, y=\left(y_j\right)_{j=1}^{\infty}\in l^{\infty},$ постојат константи $M_i, i=1,2$ такви што $|x_i|\le M_i, |y_j|\le M_j$ за секој $i,j\in\mathbf{N},$ од што следува $\|x,y\|\le 2M_xM_y,$ т.е. функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ е добро дефинирана. Сега, од својствата на детерминантите, својствата на супремумот функција и потребниот и доволен услов за линеарна зависност на два вектори во l^{∞} следува точноста на аксиомите за 2-норма. ■

2.4. Пример ([72]). Нека $k\in\mathbf{N}$, $k>2$. Со P_k да го означиме множеството од сите реални полиноми f на $[0,1]$, такви што $\deg f\le k$. Множеството P_k со вообичаените операции собирање на полиноми и множење на полином со реален број е реален векторски простор. Нека $\{x_i\}_{i=0}^{2k}$ се произволни $2k+1$ различни фиксирани точки од $[0,1]$. За секои $f_1, f_2\in P_k$ дефинираме

$$\|f_1,f_2\|=\begin{cases} 0, & \text{ако } f_1, f_2 \text{ се линеарно зависни} \\ \sum\limits_{i=0}^{2k}\left|f_1(x_i)\,f_2(x_i)\right|, & \text{ако } f_1, f_2 \text{ се линеарно независни.}\end{cases} \tag{4}$$

Јасно, ако f_1 и f_2 се линеарно зависни, тогаш $\|f_1,f_2\|=0$. Нека претпоставиме дека

$$\sum_{i=0}^{kn}\left|f_1(x_i)\,f_2(x_i)\right|=0\,.$$

Тогаш $f_1\left(x_i\right)f_2\left(x_i\right)=0$, за секој $i=0,1,2,...,2k$ и како $\deg f_j\le k$, $j=1,2$ добиваме дека еден од разгледуваните полиноми има $k+1$ нула, па затоа постои $j\in\{1,2\}$ таков што $f_j \equiv 0$. Значи, ако $\| f_1, f_2 \| = 0$, тогаш f_1 и f_2 се линеарно зависни. Јасно, $\| f_1, f_2 \| = \| f_2, f_1 \|$. Од (4) непосредно следува дека за секои $f_1, f_2 \in P_k$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$ важи

$$\| \alpha f_1, f_2 \| = |\alpha| \cdot \| f_1, f_2 \|$$

и дека за секои $f_1^{'}, f_1, f_2 \in P_k$ важи

$$\left\| f_1 + f_1^{'}, f_2 \right\| \le \| f_1, f_2 \| + \left\| f_1^{'}, f_2 \right\|.$$

Според тоа, $(P_k, \|\cdot,\cdot\|)$ е векторски 2-нормиран простор при што 2-нормата е дефинирана со (4). ■

2.5. Пример. Множеството $C([0,1])$ од непрекинати функции на интервалот $[0,1]$, со операциите собирање на функции и множење на функција со реален број е векторски простор. Определуваме функција $\|\cdot,\cdot\| : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbf{R}$ со

$$\| f, g \| = \max_{x,y \in [0,1]} \left| \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \right|. \tag{5}$$

Функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ е добро дефинирано. Навистина

$$\| f, g \| = \max_{x,y \in [0,1]} \left| \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \right| \le 2M_1 M_2 < +\infty$$

каде

$$M_1 = \max_{x \in [0,1]} | f(x) | \text{ и } M_2 = \max_{x \in [0,1]} | g(x) |.$$

Ќе докажеме дека со (9) е дефинирана $2-$норма на векторскиот простор $C([0,1])$.

Јасно, ако f и g се линеарно зависни, тогаш $\| f, g \| = 0$. Нека $\| f, g \| = 0$. Тогаш

$$\max_{x,y \in [0,1]} \left| \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \right| = 0$$

т.е.

$$\max_{x,y \in [0,1]} | f(x)g(y) - g(y)f(x) | = 0,$$

па затоа $f(x)g(y)-g(y)f(x)=0$, за секои $x,y\in[0,1]$. Ако $f\equiv 0$, тогаш $f=0\cdot g$, што знчи дека f и g се линеарно зависни. Ако $f\not\equiv 0$ и $g\not\equiv 0$, тогаш постои $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)\neq 0$, па затоа за секој $y\in[0,1]$ важи

$$g(y)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(y),\ \text{т.е.}\ g=\alpha f\ ,\ \alpha=\frac{g(x_0)}{f(x_0)},$$

што значи дека f и g се линеарно зависни. Нека $f,g\in C([0,1])$ и $\alpha\in\mathbf{R}$. Тогаш од својствата на детерминантите и својствата на максимумот следува

$$\|f,g\|=\|g,f\|\ \text{и}\ \|\alpha f,g\|=|\alpha|\cdot\|f,g\|.$$

Нека $f,g,h\in C([0,1])$. Од (9), својствата на детерминантите, апсолутната вредност и максимумот непоседно следува

$$\|f+g,h\|\leq\|f,h\|+\|g,h\|.$$

Според тоа, со (5) е дефинирана 2-норма на $C([0,1])$. ■

2.6. Пример ([46]). Нека X е произволен измерлив простор и μ е позитивна мера во X. Со $L^1(\mu)$ да го означиме множеството од сите реални измерливи функции f во X, такви што $\int_X |f|d\mu<\infty$. Множеството $L^1(\mu)$ со операциите собирање на функции и множење на функција со реален број е реален векторски простор. Прво, ќе докажеме дека векторите $f_1, f_2\in L^1(\mu)$ се линеарно зависни ако и само ако за секои измерливи множества E_1,E_2 важи

$$\det\begin{pmatrix}\int_{E_1} f_1 d\mu & \int_{E_2} f_1 d\mu\\ \int_{E_1} f_2 d\mu & \int_{E_2} f_2 d\mu\end{pmatrix}=0. \tag{6}$$

Јасно, ако векторите $f_1, f_2\in L^1(\mu)$ се линеарно зависни, тогаш за секои измерливи множества E_1,E_2 важи (1). Нека за $f_1, f_2\in L^1(\mu)$ и за секои измерливи множества E_1,E_2 важи (6), т.е.

$$\int_{E_1} f_1 d\mu\int_{E_2} f_2 d\mu-\int_{E_2} f_1 d\mu\int_{E_1} f_2 d\mu=0. \tag{7}$$

Ќе разгледаме два случаја, и тоа:

i) За секое измерливо множество E важи $\int_E f_1 d\mu = 0.$ Тогаш, $f_1 = 0,$ с.с. на X , па затоа $f_1 = 0 \cdot f_2,$ т.е. f_1 и f_2 се линеарно зависни.

ii) Постои измерливо множество E такво што $\int_E f_1 d\mu \neq 0.$ Нека

$$\alpha = \frac{\int_E f_2 d\mu}{\int_E f_1 d\mu}.$$

Од (7) следува дека за секое измерливо множество E' важи $\int_{E'} \left(f_2 - \alpha f_1 \right) d\mu = 0,$ што значи $f_1 - \alpha \cdot f_2 = 0,$ с.с. на X , т.е. f_1 и f_2 се линеарно зависни.

Дефинираме функција $\|\cdot,\cdot\| : L^1(\mu) \times L^1(\mu) \to \mathbf{R}$ таква да

$$\|f_1, f_2\| = \sup_{E_1, E_2} \left| \det \begin{pmatrix} \int_{E_1} f_1 d\mu & \int_{E_2} f_1 d\mu \\ \int_{E_1} f_2 d\mu & \int_{E_2} f_2 d\mu \end{pmatrix} \right|. \tag{8}$$

Но, за секое измерливо множество E важи

$$\left| \int_E f_i d\mu \right| \leq \int_E |f_i| d\mu \leq \int_X |f_i| d\mu = M_i < \infty, \text{ за } i = 1, \dots, n,$$

па затоа $|f_1, f_2| \leq 2! M_1 M_2,$ т.е. функцијата $\|\cdot,\cdot\|$ е добро дефинирана.

Конечно, од својствата на детерминантите, својствата на супремумот и претходно докажаниот потребен и доволен услов за линеарна зависност на два вектори во $L^1(\mu)$ лесно следува дека $(L^1(\mu), \|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор во кој 2-нормата е дефинирана со (8). ■

2.7. Пример ([49]). Нека (Y, M) е измерлив простор и μ е позитивна мера на *M*. Ставаме $X = L^p(\mu) = \{ f \mid f : Y \to \mathbf{R}, \int_Y |f|^p d\mu < +\infty \}$, $p > 1$. Ќе докажеме дека функцијата $\|\cdot,\cdot\| : L^p(\mu) \times L^p(\mu) \to \mathbf{R}$ дефинирана со

$$\|f, g\| = \left[\int_{Y \times Y} \left| \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix} \right|^p d\left(\mu \times \mu\right) \right]^{\frac{1}{p}} \tag{9}$$

каде $\mu \times \mu$ е директен производ на мерата μ е 2-норма на $X = L^p\left(\mu\right)$.

Од неравенството $(s+t)^p \le 2^{p-1}\left(t^p + s^p\right),\ s,t \ge 0$ следува

$$\begin{aligned}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{pmatrix}\right|^p &= |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^p \\ &\le \left(|f(x)g(y)|+|g(x)f(y)|\right)^p \\ &\le 2^{\,p-1}\left(|f(x)|^p|g(y)|^p+|g(x)|^p|f(y)|^p\right),\end{aligned}$$

за секој $(x,y)\in Y\times Y$. Од претходното неравенство следува дека за директниот производ на измерливи простори, $(Y\times Y, M\times M, \mu\times\mu)$ имаме

$$\begin{aligned}\|f,g\| &= \left[\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\le 2^{\frac{p-1}{p}}\left[\int\limits_{Y\times Y}|f(x)|^p|g(y)|^p\, d(\mu\times\mu)+\int\limits_{Y\times Y}|g(x)|^p|f(y)|^p d(\mu\times\mu)\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{p-1}{p}}\left[\int\limits_Y|f(x)|^p\,d\mu\cdot\int\limits_Y|g(y)|^p\,d\mu+\int\limits_Y|g(x)|^p\,d\mu\cdot\int\limits_Y|f(y)|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{p-1}{p}}2^{\frac{1}{p}}\left[\int\limits_Y|g(x)|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int\limits_Y|f(y)|^p\,d\mu\right]^{\frac{1}{p}} < \infty,\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $\|\cdot,\cdot\|: L^p(\mu)\times L^p(\mu)\to\mathbf{R}$ е добро дефинирана и

$$\|f,g\| \le 2\|f\|\cdot\|g\|.$$

Јасно, $\|f,g\|\ge 0$. Ако f и g се линеанро зависни, тогаш од (9) следува дека $\|f,g\|=0$. Нека $\|f,g\|=0$, за некои $f,g\in L^p(\mu)$, $f\ne 0$ и $g\ne 0$, во однос на μ. Од (9) следува

$$\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)=0,$$

па затоа $f(x)g(y)-g(x)f(y)=0$ с.с. во однос на $\mu\times\mu$. Од $f\ne 0$ и $g\ne 0$, во однос на μ следува дека $U_f=\{x\,|\,x\in Y, f(x)\ne 0\}$ и $U_g=\{x\,|\,x\in Y, g(x)\ne 0\}$ се множества со позитивна мера, т.е. $\mu\left(U_f\right)>0$ и $\mu\left(U_g\right)>0$. Понатаму, од $f(x)g(y)-g(x)f(y)=0$ с.с. во однос на $\mu\times\mu$ следува дека

$$W_{f,g}=\{(x,y)\mid\ f(x)g(y)-g(x)f(y)\neq 0\}$$

е множество со мера нула, т.е. $(\mu\times\mu)\left(W_{f,g}\right)=0$. Ќе докажеме дека

$$\mu\left(U_f\cap U_g\right)>0,\ \mu\left(U_f\setminus U_g\right)=0 \text{ и } \mu\left(U_g\setminus U_f\right)=0.$$

Ако $\mu\left(U_f\cap U_g\right)=0$, тогаш без ограничување на општоста можеме да сметаме дека во однос на мерата μ важи $U_f\cap U_g=\varnothing$. Притоа, за секој $(x,y)\in U_f\times U_g$ важи

$$f(x)\neq 0, g(y)\neq 0 \text{ и } g(x)=0,\ f(y)=0,$$

па затоа

$$f(x)\,g(y)-g(x)\,f(y)=f(x)\,g(y)\neq 0.$$

Значи, $(x,y)\in W_{f,g}$, т.е. $U_f\times U_g\subseteq W_{f,g}$. Од својствата на мерата $\mu\times\mu$, имаме

$$\begin{aligned}(\mu\times\mu)\left(W_{f,g}\right)&\geq(\mu\times\mu)\left(U_f\times U_g\right)\\&=\mu\left(U_f\right)\mu\left(U_g\right)>0,\end{aligned}$$

што противречи на $(\mu\times\mu)\left(W_{f,g}\right)=0$, па затоа $\mu\left(U_f\cap U_g\right)\neq 0$.

Нека претпоставиме дека $\mu\left(U_f\cap U_g\right)>0$ и $\mu\left(U_f\setminus U_g\right)>0$. Ако $(x,y)\in$ $\left(U_f\setminus U_g\right)\times\left(U_f\cap U_g\right)$, тогаш $x\in U_f, x\notin U_g$ и $y\in U_g$, $y\in U_f$. Според тоа $f(x)\neq 0$, $g(x)=0$, $f(y)\neq 0$, $g(y)\neq 0$ од каде имаме

$$f(x)g(y)-g(x)f(y)=f(x)g(y)\neq 0$$

Значи, $W_{f,g}\supseteq\left(U_f\setminus U_g\right)\times\left(U_f\cap U_g\right)$, па затоа

$$\begin{aligned}(\mu\times\mu)\left(W_{f,g}\right)&\geq(\mu\times\mu)\left[\left(U_f\setminus U_g\right)\times\left(U_f\cap U_g\right)\right]\\&=\mu\left(U_f\setminus U_g\right)\cdot\mu\left(U_f\cap U_g\right)>0,\end{aligned}$$

што не е можно. Но, $\mu\left(U_f\cap U_g\right)>0$, па затоа $\mu\left(U_f\setminus U_g\right)=0$. Аналогно се докажува дека $\mu\left(U_g\setminus U_f\right)=0$.

Од претходно изнесеното следува дека $U_f=U_g=U$, во однос на мерата μ. Навистина, доволно е да се разгледаат равенствата

$$U_f=\left(U_f\setminus U_g\right)\cup\left(U_f\cap U_g\right),\ U_g=\left(U_g\setminus U_f\right)\cup\left(U_f\cap U_g\right),$$

$$\mu\left(U_f\setminus U_g\right)=0 \text{ и } \mu\left(U_g\setminus U_f\right)=0.$$

Јасно, $\mu(U)>0$. За секој $x\in U$ дефинираме множество

$$U_x=\{y|y\in U\,,\,f(x)g(y)-f(y)g(x)\neq 0\}.$$

Постои $x_0\in U$ таков, што $\mu\left(U_{x_0}\right)=0$. Навистина, нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $\mu(U_x)>0$, за секој $x\in U$. Бидејќи на $Y\setminus U$, $f=g=0$ с.с. добиваме дека $f=g=0$ с.с. на $Y\setminus U_x$ и

$$h(x)=|f(x)g(y)-g(x)f(y)|^p>0,$$

на U_x. Тогаш,

$$\varphi(\,x\,)=\int\limits_Y |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^p d\mu_y=\int\limits_{U_x} |f(x)g(y)-g(x)f(y)|^p d\mu_y>0$$

од каде добиваме

$$\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ g(x) & g(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)=\int\limits_Y\varphi(x)d\mu=\int\limits_U\varphi(x)d\mu>0$$

што противречи на $\|f,g\|=0$. Значи, постои $x_0\in U$ таков што

$$f(x_0)g(y)-g(x_0)f(y)=0$$

скоро секаде на U. Бидејќи $f(x_0)\neq 0$ и $g(x_0)\neq 0$, добиваме $g(y)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(y)$ за секое $y\in U$. Бидејќи $f\equiv 0, g\equiv 0$ на $Y\setminus U$ добиваме дека $g(y)=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}f(y)$ на Y, т.е. $g(y)=\alpha f(y)$ каде $\alpha=\frac{g(x_0)}{f(x_0)}$. Значи, $g=\alpha f$ на Y, т.е. е исполнета првата аксиома за 2-норма.

Нека $f,g\in C([0,1])$ и $\alpha\in\mathbf{R}$. Тогаш од својствата на детерминантите и својствата на интегралот следува $\|f,g\|=\|g,f\|$ и $\|\alpha f,g\|=|\alpha|\cdot\|f,g\|$. Нека $f,g,h\in C\left([0,1]\right)$. Од (9), својствата на детерминантите, апсолутната вредност и неравенството на Минковски непосредно следува $\|f+g,h\|\leq\|f,h\|+\|g,h\|$. Според тоа, со (9) е дефинирана 2-норма на $C\left([0,1]\right)$. ■

3. ОГРАНИЧЕНИ ЛИНЕАРНИ 2-ФУНКЦИОНАЛИ

3.1. Дефиниција ([72]). Нека $X_i,\ i=1,2$ и Y се реални векторски простори. *Линеарен* 2-*оператор* $A: X_1 \times X_n \to Y$ ја нарекуваме секоја функција $A(x_1,x_2)$, $x_i \in X_i,\ i=1,2,$ која е линеарна во однос на секој свој аргумент одделно. Ако Y е множеството реални броеви, тогаш линеарниот 2-оператор го нарекуваме *линеарен* 2-функционал.

Лесно се гледа дека 2-операторот (функционалот) A е линеарен ако и само ако

i) $A(x_1+y_1, x_2+y_2) = \sum\limits_{\substack{z_i \in \{x_i, y_i\} \\ i=1,2}} A(z_1,z_2)$, и

ii) $A(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \alpha_1\alpha_2 A(x_1,x_2),\ \alpha_i \in \mathbf{R}, i=1,2.$

3.2. Дефиниција ([72]). Нека L е 2-нормиран простор. За 2-функционалот f со домен $D(f) \subseteq L^2$, ќе велиме дека е *ограничен* ако постои реална константа $k \geq 0$ таква што

$$|f(x_1,x_2)| \leq k\|x_1,x_2\|, \text{ за секој } (x_1,x_2) \in D(f).$$

Ако f е ограничен 2-функционал, дефинираме норма на f, во ознака $\|f\|$, со

$$\|f\| = \inf\left\{k \mid |f(x_1,x_2)| \leq k\|x_1,x_2\|, \text{ за секој } (x_1,x_2) \in D(f)\right\}.$$

Ако f не е ограничен n-функционал, тогаш по дефиниција ставаме $\|f\| = +\infty$.

3.3. Лема ([72]). Нека L е 2-нормиран простор. Ако f е ограничен линеарен 2-функционал со домен $D(f) \subseteq L^2$ и x и y се линеарно зависни такви што $(x,y) \in D(f)$, тогаш $f(x,y)=0$.

Доказ. Бидејќи f е ограничен, постои $k \geq 0$ таков што

$$|f(a,b)| \leq k\|a,b\|, \text{ за секои } (a,b) \in D(f).$$

Но, $(x,y) \in D(f)$ и x и y се линеарно зависни, па затоа

$$|f(x,y)| \leq k\|x,y\| = 0, \text{ т.е. } f(x,y) = 0. \ \blacksquare$$

3.4. Теорема ([72]). Нека L е 2-нормиран простор и f е ограничен линеарен 2-функционал со домен $D(f) \subseteq L^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x,y)| : \|x,y\| = 1, (x,y) \in D(f)\} \\ &= \sup\left\{\frac{|f(x,y)|}{\|x,y\|} : \|x,y\| \neq 0, (x,y) \in D(f)\right\}.\end{aligned}$$

Доказ. Ако

$$A = \sup\{|f(x,y)| : \|x,y\| = 1, (x,y) \in D(f)\},$$

тогаш

$$|f(x,y)| \leq \|f\| \cdot \|x,y\|, \text{ за секој } (x,y) \in D(f),$$

па затоа $A \leq \|f\|$. Да претпоставиме дека $\|x,y\| \neq 0$. Бидејќи $\left\|\frac{x}{\|x,y\|}, y\right\| = 1$, добиваме дека $\left|f\left(\frac{x}{\|x,y\|}, y\right)\right| \leq A$, т.е. $|f(x,y)| \leq A\|x,y\|$, за секој $(x,y) \in D(f)$ со $\|x,y\| \neq 0$. Ако $\|x,y\| = 0$ тогаш x и y се линеарно зависни, па од лема 3.3 следува дека $f(x,y) = 0$. Така, $|f(x,y)| \leq A\|x,y\|$, за секој $(x,y) \in D(f)$, од што следува дека $\|f\| \leq A$, што значи $A = \|f\|$.

Нека

$$C = \sup\left\{\frac{|f(x,y)|}{\|x,y\|} : \|x,y\| \neq 0, (x,y) \in D(f)\right\}.$$

Од дефиниција 3.2 следува дека $\frac{|f(x,y)|}{\|x,y\|} \leq \|f\|$, за секој $(x,y) \in D(f)$ со $\|x,y\| \neq 0$. Според тоа, $C \leq \|f\|$. Понатаму, од лема 3.3 и дефиницјата на C следува дека $|f(x,y)| \leq C\|x,y\|$, за секој $(x,y) \in D(f)$, па затоа $\|f\| \leq C$, што значи дека $\|f\| = C$. ■

3.5. Дефиниција ([72]). Нека L е 2-нормиран простор. За 2-функционалот f ќе велиме дека е *непрекинат* во точката $(a,b) \in D(f)$ ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што $|f(a,b) - f(c,d)| < \varepsilon$ секогаш кога $\|a-c,b\| < \delta$ и $\|c,b-d\| < \delta$ или $\|a-c,d\| < \delta$ и $\|a,b-d\| < \delta$. 2-функционалот f е *непрекинат* ако е непрекинат во секоја точка од $D(f)$.

3.6. Теорема ([72]). 2-нормата е непрекинат 2-функционал.

Доказ. Од својствата на 2-нормата следува

$$\begin{aligned}\|a,b\| &= \|(a-c)+c,b\| \leq \|a-c,b\| + \|c,b\| \\ &= \|a-c,b\| + \|c,(b-d)+d\| \\ &\leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\| + \|c,d\|\end{aligned}$$

па затоа

$$\|a,b\| - \|c,d\| \leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\|.$$

Аналогно се докажува дека

$$\|c,d\| - \|a,b\| \leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\|.$$

Од последните две неравенства следува

$$\big|\|a,b\| - \|c,d\|\big| \leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\|. \tag{1}$$

Конечно, ако $\varepsilon > 0$ е дадено, тогаш од (1) следува дека постои $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ таков што кога $\|a-c,b\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|c,b-d\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ важи

$$\big|\|a,b\| - \|c,d\|\big| \leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што според дефиниција 3.5 значи дека 2-нормата е непрекинат 2-функционал. ■

3.7. Теорема ([72]). Нека L е 2-нормиран простор. Ако линеарниот 2-функционал f е непрекинат во (0,0), тогаш тој е непрекинат во секоја точка од неговиот домен.

Доказ. Бидејќи f е линеарен важи $f(0,0) = 0$. Понатаму, од непрекинатоста во точката (0,0) следува дека за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ таков што

$$|f(c,d)| = |f(c,d) - f(0,0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

секогаш кога $\|c,d\| = \|c,0-d\| < \delta$. Нека $(a,b) \in D(f)$. Тогаш

$$\begin{aligned}|f(a,b) - f(x,y)| &= |f(a,b) - f(x,b) + f(x,b) - f(x,y)| \\ &\leq |f(a,b) - f(x,b)| + |f(x,b) - f(x,y)| \\ &= |f(a-x,b)| + |f(x,b-y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

секогаш кога $\|a-x,b\| < \delta$ и $\|x,b-y\| < \delta$, што според дефиниција 3.5 значи дека f е непрекинат во точката $(a,b) \in D(f)$. ■

3.8. Теорема ([72]). Нека L е 2-нормиран простор. Линеарниот 2-функционал f е непрекинат ако и само ако е ограничен.

Доказ. Нека претпоставиме дека f е ограничен. Тогаш, постои $k \geq 0$ таков што $|f(x,y)| \leq k\|x,y\|$, за секој $(x,y) \in D(f)$. Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Земаме $\delta = \frac{\varepsilon}{k+1}$ и добиваме дека $|f(x,y)| \leq k\|x,y\| < k\frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon$, секогаш кога $\|x,y\| < \delta$. Значи, f е непрекинат во (0,0), па од теорема 3.7 следува дека е непрекинат во секоја точка од $D(f)$.

Обратно, нека претпоставиме дека f е непрекинат. За $\varepsilon = 1$ постои $\delta > 0$ таков што $|f(a,b)| < 1$ секогаш кога $\|a,b\| < \delta$, за $(a,b) \in D(f)$. За $(c,d) \in D(f)$ така што множеството $\{c,d\}$ е линеарно независно да ја разгледаме точката $\left(\frac{c}{\|c,d\|}\frac{\delta}{2}, d\right)$. Тогаш

$$\left\|\frac{c}{\|c,d\|}\frac{\delta}{2}, d\right\| = \frac{1}{\|c,d\|}\frac{\delta}{2}\|c,d\| = \frac{\delta}{2},$$

па затоа

$$\left|f\left(\frac{c}{\|c,d\|}\frac{\delta}{2}, d\right)\right| < 1, \text{ т.е. } |f(c,d)| < \frac{2}{\delta}\|c,d\|.$$

Од друга страна за секој $n \in \mathbf{N}$ постои $\delta_n > 0$ таков што $|f(a,b)| < \frac{1}{n}$, секогаш кога $\|a,b\| < \delta_n$. Но, тоа значи дека во случај кога множеството $\{c,d\}$ е линеарно зависно, важи $\|c,d\| = 0 < \delta_n$, па затоа $|f(c,d)| = 0$. Конечно, од претходно изнесеното следува дека f е ограничен. ■

3.9. Лема ([51]). Нека x_1, x_2 се линеарно независни вектори во 2-нормираниот векторски простор L. Тогаш, за секој p, $1 \leq p < \infty$, 2-функционалот

$$f : V(x_1) \times V(x_2) \to \mathbf{R}$$

дефиниран со

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \alpha_2 \|x_1, x_2\|^p, \tag{2}$$

е ограничен линеарен 2-функционал со норма

$$\|f\| = \|x_1, x_2\|^{p-1}. \tag{3}$$

Доказ. Од (2) и од својствата на 2-нормата имаме

$$f(z_1+y_1,z_2+y_2)=f(\alpha_1x_1+\beta_1x_1,\alpha_2x_2+\beta_2x_2)=f((\alpha_1+\beta_1)x_1,(\alpha_2+\beta_2)x_2)$$
$$=(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)\|x_1,x_2\|^p=\|x_1,x_2\|^p\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,2}}t_1t_2$$
$$=\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,2}}t_1t_2\|x_1,x_2\|^p=\sum_{\substack{t_i\in\{\alpha_i,\beta_i\},\\ i=1,2}}f(t_1x_1,t_2x_2)$$
$$=\sum_{\substack{u_i\in\{y_i,z_i\},\\ i=1,2}}f(u_1,u_2).$$

$$f(\alpha_1y_1,\alpha_2y_2)=f(\alpha_1\beta_1x_1,\alpha_2\beta_2x_2)$$
$$=(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)\|x_1,x_2\|^p$$
$$=(\alpha_1\alpha_2)(\beta_1\beta_2)\|x_1,x_2\|^p$$
$$=(\alpha_1\alpha_2)f(\beta_1x_1,\beta_2x_2)$$
$$=(\alpha_1\alpha_2)f(y_1,y_2),$$

што значи, f е линеарен 2-функционал.

Од дефиницијата на f имаме $f(x_1,x_2)=\|x_1,x_2\|^p$. Понатаму, за секој $(y_1,y_2)\in V(x_1)\times V(x_2)$ важи

$$|f(y_1,y_2)|=|f(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2)|=\|\alpha_1\alpha_2\|\cdot\|x_1,x_2\|^p$$
$$=\|x_1,x_2\|^{p-1}|\alpha_1\alpha_2|\cdot\|x_1,x_2\|$$
$$=\|x_1,x_2\|^{p-1}\|\alpha_1x_1,\alpha_2x_2\|$$
$$=\|x_1,x_2\|^{p-1}\|y_1,y_2\|,$$

од што следува равенството (3). ■

3.10. Забелешка. Ограниченоста на линеарниот 2-функционал од лема 3.9 следува од теоремите 3.6 и 3.8.

3.11. Следната теорема всушност е обопштување на *теоремата на Хан-Банах* во 2-нормиран простор и истата ни е потребна за натамошните разгледувања.

Теорема ([51]). Нека L е 2-нормиран простор, $x_1 \in L \setminus \{0\}$, M е потпростор од L и f е ограничен линеарен 2-функционал со домен $M \times V(x_1)$. Тогаш, постои ограничен линеарен 2-функционал F со домен $L \times V(x_1)$ таков што

i) $F(x, \lambda_1 x_1) = f(x, \lambda_1 x_1)$, за секој $(x, \lambda_1 x_1) \in M \times V(x_1)$, и

ii) $\|F\| = \|f\|$.

Доказ. Нека $x \in L \setminus M$ и нека $H = P(M \cup \{x\})$. Ако $y_1, y_2 \in M$, тогаш

$$\begin{aligned} f(y_1, x_1) - f(y_2, x_1) = f(y_1 - y_2, x_1) &\le \|f\| \cdot \|y_1 - y_2, x_1\| \\ &= \|f\| \cdot \|(y_1 + x) - (y_2 + x), x_1\| \\ &\le \|f\| \left(\|y_1 + x, x_1\| + \|y_2 + x, x_1\| \right). \end{aligned}$$

Значи,

$$-\|f\| \cdot \|y_2 + x, x_1\| - f(y_2, x_1) \le \|f\| \cdot \|y_1 + x, x_1\| - f(y_1, x_1). \tag{4}$$

Според тоа,

$$S = \sup_{y_2 \in M} \{ -\|f\| \cdot \|y_2 + x, x_1\| - f(y_2, x_1) \} \le \inf_{y_1 \in M} \{ \|f\| \cdot \|y_1 + x, x_1\| - f(y_1, x_1) \} = S_1.$$

Нека r е произволен реален број таков што $S \le r \le S_1$. Ако во (4) ставиме $y_1 = y_2 = y$, добиваме

$$\left| f(y, x_1) + f \right| \le \|f\| \cdot \|y + x, x_1\|. \tag{5}$$

Дефинираме 2-функционал $\overline{f}$ на $H \times P(x_1)$ со

$$\overline{f}(y + \alpha_1 x, \alpha_2 x_1) = \alpha_2 \left(\alpha_1 r + f(y, x_1) \right).$$

Ќе докажеме дека $\overline{f}$ е линеарен и ограничен. Имаме:

$$\begin{aligned} \overline{f}(z_1 + w_1, z_2 + w_2) &= \overline{f}(y_1 + \alpha_1 x + y_2 + \beta_1 x, \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_1) \\ &= \overline{f}\left(y_1 + y_2 + (\alpha_1 + \beta_1) x, (\alpha_2 + \beta_2) x_1 \right) \\ &= (\alpha_2 + \beta_2)\left((\alpha_1 + \beta_1) r + f(y_1 + y_2, x_1) \right) \\ &= \left(\alpha_1 r + f(y_1, x_1) \right) \sum_{t_2 \in \{\alpha_2, \beta_2\}} t_2 + \left(\beta_1 r + f(y_2, x_1) \right) \sum_{t_2 \in \{\alpha_2, \beta_2\}} t_2 \\ &= \sum_{t_2 \in \{\alpha_2, \beta_2\}} \overline{f}(y_1 + \alpha_1 x, t_2 x_1) + \sum_{t_2 \in \{\alpha_2, \beta_2\}} \overline{f}(y_2 + \beta_1 x, t_2 x_1) \\ &= \sum_{u_2 \in \{z_2, w_2\}} \overline{f}(z_1, u_2) + \sum_{u_2 \in \{z_2, w_2\}} \overline{f}(w_1, u_2) = \sum_{\substack{u_i \in \{z_i, w_i\}, \\ i = 1,2}} \overline{f}(u_1, u_2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\overline{f}(\beta_1 z_1, \beta_2 z_2) &= \overline{f}(\beta_1(y+\alpha_1 x), \beta_2\alpha_2 x_1)\\ &= \overline{f}(\beta_1 y + \alpha_1\beta_1 x, \alpha_2\beta_2 x_1)\\ &= (\beta_1\beta_2)(\alpha_1\alpha_2) r + \beta_2\alpha_2 f(\beta_1 y, x_1)\\ &= \beta_1\beta_2(\alpha_1\alpha_2 r + \alpha_2 f(y, x_1))\\ &= \beta_1\beta_2 \overline{f}(y+\alpha_1 x, \alpha_2 x_1)\\ &= \beta_1\beta_2 \overline{f}(z_1, z_2)\end{aligned}$$

т.е. $\overline{f}$ е линеарен 2-функционал со домен $H \times V(x_1)$. Јасно, $\overline{f} \equiv f$ на $M \times V(x_1)$.

Ако во (5) y го замениме со $\frac{1}{\alpha} y$, каде $\alpha \neq 0$, тогаш добиваме

$$|f(y, x_1) + \alpha r| \leq \|f\| \cdot \|y + \alpha x, x_1\|, \text{ за секој } \alpha \neq 0,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\left|\overline{f}(y+\alpha_1 x, \alpha_2 x_1)\right| &= |\alpha_1\alpha_2 r + \alpha_2 f(y, x_1)|\\ &= |\alpha_2| \cdot |\alpha_1 r + f(y, x_1)|\\ &\leq |\alpha_2| \cdot \|f\| \cdot \|y + \alpha_1 x, x_1\|\\ &= \|f\| \cdot \|y + \alpha_1 x, \alpha_2 x_1\|.\end{aligned}$$

Значи, $\overline{f}$ е ограничен линеарен 2-функционал таков што $\|\overline{f}\| \leq \|f\|$. Но, $\overline{f} \equiv f$ на $M \times V(x_1)$, па затоа $\|\overline{f}\| = \|f\|$

Да ги разгледаме сите парови $\{X, g\}$, каде X е подпростор од L и g е ограничен линеарен 2-функционал со домен $X \times V(x_1)$. Ставаме $\{X, g\} \prec \{X_1, g_1\}$ ако и само ако $X \subset X_1$ и g_1 е проширување на g, такво што $\|g_1\| = \|g\|$.

Нека T е множеството од сите $\{H, \overline{f}\}$ такви што $\{M, f\} \prec \{H, \overline{f}\}$. Значи, T е делумно подредено множество, во кое секое линеарно подредено подмножество има максимален елемент. Според лемата на Цорн ([73]) која гласи:

Ако A е делумно подредено множество во кое секое линеарно подредено множество има горна граница, тогаш A има максимален елемент,

имаме, нека $\{H_i, \tilde{f}_i\}_{i\in I}$ е линеарно подредено множество. Тогаш $\{H, \tilde{f}\}$ со

$$H := \bigcup_{i\in I} H_i, \ \overline{f}(x, \lambda_1 x_1) := \overline{f}_i(x, \lambda_1 x_1) \text{ за } x \in H_i$$

е навистина мајоранта за линеатно подреденото м-во. $\overline{f}$ е добро дефинирано бидејќи $\{H_i, \tilde{f}_i\}_{i\in I}$ е линеатно подреденото множество. Од лема на Цорн заклучуваме дека T има максимален елемент $\{K, F\} = m$. Јасно $K = L$ и $\overline{f}$ е бараниот 2-функционал . ■

3.12. Последица ([51]). Нека L е 2-нормиран простор, $x_1 \in L\setminus\{0\}$, M е потпростор од L и f е ограничен линеарен 2-функционал со домен $V(x_1)\times M$. Тогаш, постои ограничен линеарен 2-функционал F со домен $V(x_1)\times L$ таков што

i) $F(\lambda_1 x_1, x) = f(\lambda_1 x_1, x)$, за секој $(\lambda_1 x_1, x)\in V(x_1)\times L$, и

ii) $\|F\| = \|f\|$.

Доказ. Аналогно на доказот на теорема 3.11. ■

3.13. Теорема ([51]). Нека L е 2-нормиран простор и нека a и b се линеарно независни вектори од L. Тогаш постојат ограничени линеарни 2-функционали F со домен $L\times V(b)$ и G со домен $V(a)\times L$, соодветно такви што

i) $F(a,b) = G(a,b)$ и

ii) $\|F\| = \|G\| = 1$.

Доказ. Според лема 3.9 пресликувањето $f : V(a)\times V(b) \to \mathbf{R}$ определено со $f(\alpha_1 a, \alpha_2 b) = \alpha_1\alpha_2 \|a,b\|$ е ограничен линеарен 2-функционал со норма $\|f\| = 1$. Сега тврдењето на теоремата непосредно следува од теорема 3.11 и последица 3.12. ■

4. НЕРАВЕНСТВА НА ПАРАЛЕЛОПИПЕД ОД ВТОР ТИП ЗА 2-НОРМА

4.1. Пред да преминеме на натамошните разгледувања накратко ќе се осврнеме на конвексните функции дефинирани на векторски простор L. Нека L е векторски простор и $C \subseteq X$ е конвексно подмножество од X. Функцијата $f : C \to \mathbf{R}$ е *конвексна* ако за секои $x, y\in C$ и за секој $\alpha \in [0,1]$ е исполнето неравенството

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Понатаму, функција $f : C \to \mathbf{R}$ е конвексна ако и само ако за секои $x_i \in C$, $i = 1, 2, ..., n$ и за секои $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, такви што $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, точно е неравенството на Јенсен

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i). \tag{1}$$

4.2. Лема ([56]). Ако $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор, тогаш за секој $z \in L$ и за секој $p \geq 1$ функцијата $f_{p,z} : L \to \mathbf{R}$ определена со

$$f_{p,z}(x) = \|x, z\|^p, \ x \in L$$

е конвексна.

Доказ. Нека $z \in L$ и $p \geq 1$. Функцијата $f(t) = t^p$, $p \geq 1$ е конвексна на интервалот $[0, \infty)$, па за тоа за секои $t_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n$ и за секои $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ точно е неравенството

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t_i^p \ . \tag{2}$$

Понатаму, од неравенството на паралелопипед и од неравенството (2), при $t_i = \|x_i, z\|$ следува дека за секои $x_i \in L$, $i = 1, 2, ..., n$ и за секои $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., n$ такви што $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ важи

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, z\right\|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i x_i, z\|\right)^p \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|x_i, z\|^p \ ,$$

т.е. за функцијата $f_{p,z}$ точно е неравенството на Јенсен, што значи дека таа е конвексна. ■

4.3. Теорема ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. За секои $z, x_1, ..., x_n \in L$, $\alpha_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ и $p \geq 1$ точно е неравенството

$$\frac{\|x_1 + x_2 + ... + x_n, z\|^p}{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^{p-1}} \leq \frac{\|x_1, z\|^p}{\alpha_1^{p-1}} + \frac{\|x_2, z\|^p}{\alpha_2^{p-1}} + ... + \frac{\|x_n, z\|^p}{\alpha_n^{p-1}} \ . \tag{3}$$

Доказ. Нека $\alpha_i > 0, i = 1,2,...,n$ и $p \geq 1$. Тогаш $r_i = \alpha_i \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^{-1} > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$.

Од лема 4.2 следува дека за секои $z, y_i \in L, i = 1,2,...,n$ важи

$$\|r_1 y_1 + r_2 y_2 + ... + r_n y_n, z\|^p \leq r_1 \|y_1, z\|^p + r_2 \|y_2, z\|^p + ... + r_n \|y_n, z\|^p,$$

т.е. важи

$$\frac{\|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n, z\|^p}{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^{p-1}} \leq \alpha_1 \|y_1, z\|^p + \alpha_2 \|y_2, z\|^p + ... + \alpha_n \|y_n, z\|^p. \tag{4}$$

Конечно, ако во равенството (4) ставиме $y_i = \frac{x_i}{\alpha_i}, i = 1,2,...,n$ го добиваме неравенството (3). ■

4.4. Забелешка. Ако во неравенството (3) земеме $n = 2$, го добиваме неравенството

$$\frac{\|x_1 + x_2, z\|^p}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{p-1}} \leq \frac{\|x_1, z\|^p}{\alpha_1^{p-1}} + \frac{\|x_2, z\|^p}{\alpha_2^{p-1}}, \tag{5}$$

од кое за $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ следува неравенството

$$\|x_1 + x_2, z\|^p \leq 2^{p-1} \left(\|x_1, z\|^p + \|x_2, z\|^p \right).$$

Сега, во последното неравенство ставаме $p = 2$ и го добиваме таканареченото *неравенство на паралелопипед од втор тип*

$$\|x_1 + x_2, z\|^2 \leq 2 \left(\|x_1, z\|^2 + \|x_2, z\|^2 \right). \tag{6}$$

Ако во (5) ставиме $p = 2, x_1 = ay_1, x_2 = by_2$, $\alpha_1 = \alpha a^2$ и $\alpha_2 = \beta b^2$ го добиваме следново поопшто неравенство на паралелопипед од втор тип

$$\frac{\|ay_1 + by_2, z\|^2}{\alpha a^2 + \beta b^2} \leq \frac{\|y_1, z\|^2}{\alpha} + \frac{\|y_2, z\|^2}{\beta}, \tag{7}$$

од кое за $a = b = \alpha = \beta = 1$ се добива неравенството (6).

4.5. Нека $x, y, z \in L$, $p \geq 1$. Да ја разгледаме функцијата $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ определена со $g(t) = \|tx + (1-t)y, z\|^p$, $t \in [0,1]$. Од непрекинатоста на 2-нормата следува дека оваа функција е непрекината на $[0,1]$, што значи дека таа е интеграбилна на $[0,1]$. Понатаму, од лема 4.2 следува

$$g(t)=\|tx+(1-t)y,z\|^p \leq \|tx,z\|^p+(1-t)\|y,z\|^p \text{, за секој } t\in[0,1],$$

па затоа

$$\int_0^1 \|tx+(1-t)y,z\|^p\,dt \leq \int_0^1 \left(t\|x,z\|^p+(1-t)\|y,z\|^p\right)dt=\frac{\|x,z\|^p+\|y,z\|^p}{2}. \quad (8)$$

Нека $t_1,t_2\in[0,1]$ и нека $\lambda\in[0,1]$. Повторно од лема 4.2 добиваме

$$\begin{aligned}
g\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right) &= \left\|\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right)x+\left(1-\lambda t_1-(1-\lambda)t_2\right)y,z\right\|^p \\
&= \left\|\left(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\right)x+\left(\lambda(1-t_1)+(1-\lambda)(1-t_2)\right)y,z\right\|^p \\
&= \left\|\lambda\left(t_1x+(1-t_1)y\right)+(1-\lambda)\left(t_2x+(1-t_2)y\right),z\right\|^p \\
&\leq \lambda\left\|t_1x+(1-t_1)y,z\right\|^p+(1-\lambda)\left\|t_2x+(1-t_2)y,z\right\|^p \\
&= \lambda g(t_1)+(1-\lambda)g(t_2),
\end{aligned}$$

што значи дека функцијата $g(t)$ е конвексна на интервалот $[0,1]$. Сега ако го искористиме Јенсеновото интегрално неравенство ([13], стр. 13, Теорема 1) добиваме

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|^p &= \left\|\int_0^1\left(tx+(1-t)y\right)dt,z\right\|^p = g\left(\int_0^1\left(tx+(1-t)y\right)dt\right) \\
&\leq \int_0^1 g\left(tx+(1-t)y\right)dt=\int_0^1\left\|tx+(1-t)y,z\right\|^p dt.
\end{aligned} \quad (9)$$

Конечно, од неравенствата (8) и (9) следува точноста на следнава лема.

Лема ([56]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор. За секои $x,y,z\in L$ и за секој $p\geq 1$ точни се неравенствата

$$\frac{\|x+y,z\|^p}{2} \leq \int_0^1 \|tx+(1-t)y,z\|^p\,dt \leq \frac{\|x,z\|^p+\|y,z\|^p}{2}. \ \blacksquare \quad (10)$$

4.6. Нека X е векторски простор, C е конвексно подмножество од X, P_n е множеството од сите ненегативни $n-$торки $(p_1,p_2,...,p_n)$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$, $f:C\to\mathbf{R}$ е конвексна функција, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in C$, $\mathbf{p}\in P_n$ и

$$J_n\left(f,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(fx_i\right)-f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\geq 0\,, \tag{11}$$

е *нормализираниот Јенсенов функционал*. Точна е следнава теорема.

Теорема ([20]). Ако $\mathbf{p},\mathbf{q}\in P_n$, $q_i>0$, за секој $i=1,2,...,n$ тогаш

$$J_n\left(f,\mathbf{x},\mathbf{q}\right)\max_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}\geq J_n\left(f,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\geq J_n\left(f,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\min_{1\leq i\leq n}\left\{\frac{p_i}{q_i}\right\}. \blacksquare \tag{12}$$

4.7. Теорема ([56]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор. Тогаш за секој $p\geq 1$, секои $\alpha_i\geq 0$, $i=1,2,...,n$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ и секои $z,x_1,...,x_n\in L$ точни се неравенствата

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{k=1}^{n}\|x_k,z\|^p-n^{1-p}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k,z\right\|^p\right]\max_{1\leq i\leq n}\{\alpha_i\}\geq\sum_{k=1}^{n}\|\alpha_k x_k,z\|^p-\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k,z\right\|^p,\\&\sum_{k=1}^{n}\|\alpha_k x_k,z\|^p-\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k,z\right\|^p\geq[\sum_{k=1}^{n}\|x_k,z\|^p-n^{1-p}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k,z\right\|^p]\min_{1\leq i\leq n}\{\alpha_i\}.\end{aligned} \tag{13}$$

Доказ. Според лема 4.5, за секој $z\in L$ и за секој $p\geq 1$ функцијата $f_{p,z}:L\to\mathbf{R}$ определена со $f_{p,z}(x)=\|x,z\|^p$, $x\in L$ е конвексна. Сега, неравенствата (13) следуваат од теорема 4.6, применета на функцијата $f_{p,z}$ при $p_i=\alpha_i$, $i=1,2,...,n$ и $q_i=\frac{1}{n}$, $i=1,2,...,n$. $\blacksquare$

4.8. Последица ([56]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор. Тогаш за секој $p\geq 1$ и за секои $z,x_1,...,x_n\in L$, такви што множествата $\{x_i,z\}, i=1,2,...,n$ се линеарно независни точни се неравенствата

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\|x_i,z\|^p-n^{1-p}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i,z\right\|^p\geq\left[\sum_{i=1}^{n}\|x_i,z\|^{p-1}-(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\|x_i,z\|})^{1-p}\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\|x_i,z\|},z\right\|^p\right]\min_{1\leq i\leq n}\{\|x_i,z\|\},\\&\left[\sum_{i=1}^{n}\|x_i,z\|^{p-1}-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\|x_i,z\|}\right)^{1-p}\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\|x_i,z\|},z\right\|^p\right]\max_{1\leq i\leq n}\{\|x_i,z\|\}\geq\sum_{i=1}^{n}\|x_i,z\|^p-n^{1-p}\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i,z\right\|^p.\end{aligned} \tag{14}$$

Доказ. Ако

$$p_i \geq 0\,, i=1,\dots,n\,,\ \sum_{i=1}^{n} p_i > 0 \text{ и } \alpha_i = p_i \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \right)^{-1} \geq 0\,, i=1,\dots,n\,,$$

тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \right)^{-1} = 1\,,$$

па затоа од неравенствата (13) добиваме

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i, z\|^p - n^{1-p} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i, z \right\|^p \right] \max_{1\leq i\leq n} \{p_i\} \geq \sum_{i=1}^{n} p_i \|x_i, z\|^p - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)^{1-p} \left\| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, z \right\|^p, \\ &\sum_{i=1}^{n} p_i \|x_i, z\|^p - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)^{1-p} \left\| \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, z \right\|^p \geq \left[\sum_{i=1}^{n} \|x_i, z\|^p - n^{1-p} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^p, z \right] \min_{1\leq i\leq n} \{p_i\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Конечно, ако земеме $p_i = \frac{1}{\|x_i, z\|}$, $i=1,2,\dots,n$, тогаш од неравенствата (29) следуваат добиваме неравенствата (14). ■

4.9. Последица ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. Тогаш за секои $z, x_1, \dots, x_n \in L$, такви што множествата $\{x_i, z\}$, $i=1,2,\dots,n$ се линеарно независни, точни се неравенствата

$$\begin{aligned} &\left[n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j, z\|}, z \right\| \right] \max_{1\leq i\leq n} \{\|x_i, z\|\} \geq \sum_{j=1}^{n} \|x_j, z\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j, z \right\|, \\ &\sum_{j=1}^{n} \|x_j, z\| - \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j, z \right\| \geq \left[n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j, z\|}, z \right\| \right] \min_{1\leq i\leq n} \{\|x_i, z\|\}, \end{aligned} \tag{16}$$

Доказ. Неравенствата (16) следуваат од неравенствата (14), за $p=1$. ■

4.10. Последица ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. За секои $x, y, z \in L$ такви што множествата $\{x, z\}$ и $\{y, z\}$ се линеарно независни точни се неравенствата

$$\|x+y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x,z\|} + \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \right) \cdot \min\{\|x, z\|, \|y, z\|\}, \tag{17}$$

$$\|x+y, z\| \geq \|x, z\| + \|y, z\| - \left(2 - \left\| \frac{x}{\|x,z\|} + \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \right) \cdot \max\{\|x, z\|, \|y, z\|\}. \tag{18}$$

Доказ. Неравенствата (17) и (18) непосредно следуваат од неравенствата (16) за $n=2$ и $x_1=x, x_2=y$. ■

4.11. Последица ([56]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор. За секои $x,y,z\in L$ такви што множествата $\{x,z\}$ и $\{y,z\}$ се линеарно независни точни се неравенствата

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\geq\frac{\|x+y,z\|-\left|\,\|x,z\|-\|y,z\|\,\right|}{\min\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}},\tag{19}$$

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\leq\frac{\|x+y,z\|+\left|\,\|x,z\|-\|y,z\|\,\right|}{\max\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}}.\tag{20}$$

Доказ. Ако искористиме дека за секои позитивни реални броеви a и b важи $2\min\{a,b\}-a-b=-|a-b|$, тогаш од неравенството (17) го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\cdot\min\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}&\geq\|x+y,z\|+2\min\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}-\|x,z\|-\|y,z\|\\&=\|x+y,z\|-\left|\,\|x,z\|-\|y,z\|\,\right|,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (19). Аналогно, ако искористиме дека за секои позитивни реални броеви a и b важи $2\max\{a,b\}-a-b=|a-b|$, тогаш од равенството (18) го добиваме равенството

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\cdot\max\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}&\leq\|x+y,z\|+2\max\left\{\|x,z\|,\|y,z\|\right\}-\|x,z\|-\|y,z\|\\&=\|x+y,z\|+\left|\,\|x,z\|-\|y,z\|\,\right|,\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со неравенството (20). ■

5. НОРМИ ГЕНЕРИРАНИ ОД 2-НОРМА – 1

5.1. Теорема ([55]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$, $p\geq1$ и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L. Тогаш со

$$\|x\|=\left(\|x,a\|^p+\|x,b\|^p\right)^{1/p},\ x\in L\tag{1}$$

е дефинирана норма на L.

Доказ. Јасно, $\|x\|\geq0$ и $\|0\|=0$. Нека $\|x\|=0$. Тогаш од (1) следува дека $\|x,a\|=\|x,b\|=0$, па од дефиницијата на 2-норма следува дека множествата $\{x,a\}$ и $\{x,b\}$ се линеарно зависни и како множеството $\{a,b\}$ е линеарно независно следува дека $tx = \alpha a$ и $qx = \beta b$, за некои $t, q \neq 0$. Според тоа, $\alpha q a = \beta t b$ и како $\{a, b\}$ е линеарно независно множество и $t, q \neq 0$, од последното равенство следува $\alpha = \beta = 0$, т.е. $x = 0$. Нека $x \in L$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Од (1) следува

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \left(\|\alpha x, a\|^p + \|\alpha x, b\|^p\right)^{1/p} \\ &= |\alpha|\left(\|x, a\|^p + \|x, b\|^p\right)^{1/p} . \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

Конечно, од неравенството на паралелопипед и од неравенството на Минковски добиваме дека за секои $x, y \in L$ важи

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \left(\|x+y, a\|^p + \|x+y, b\|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left[\left(\|x, a\| + \|y, a\|\right)^p + \left(\|x, b\| + \|y, b\|\right)^p\right]^{1/p} \\ &\leq \left(\|x, a\|^p + \|x, a\|^p\right)^{1/p} + \left(\|y, a\|^p + \|y, b\|^p\right)^{1/p} \\ &= \|x\| + \|y\|,\end{aligned}$$

што значи дека со (1) е дефинирана норма на L, која во натамошните разгледувања ќе ја означуваме со $\|\cdot\|_{a,b,p}$. ■

5.2. Теорема ([55]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и $\{a, b\}$ линеарно независно подмножество од L. Тогаш со

$$\|x\| = \max\left\{\|x, a\|, \|x, b\|\right\}, \; x \in L \tag{2}$$

е дефинирана норма на L.

Доказ. Јасно $\|x\| \geq 0$ и $\|0\| = 0$. Нека $\|x\| = 0$. Тогаш од (2) следува дека $\|x, a\| = \|x, b\| = 0$, па аналогно како во доказот на теорема 5.1 добиваме $x = 0$. Нека $x \in L$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Од (2) следува

$$\|\alpha x\| = \max\left\{\|\alpha x, a\|, \|\alpha x, b\|\right\} = \max\left\{|\alpha| \cdot \|x, a\|, |\alpha| \cdot \|x, b\|\right\} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Понатаму, од својствата на максимумот и неравенството на паралелопипед следува неравенството

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \max\{\|x+y,a\|,\|x+y,b\|\}\\ &\le \max\{\|x,a\|+\|y,a\|,\|x,b\|+\|y,b\|\}\\ &\le \max\{\|x,a\|,\|x,b\|\}+\max\{\|y,a\|,\|y,b\|\}\\ &= \|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

што значи дека со (2) е дефинирана норма на L, која во натамошните разгледувања ќе ја означуваме со $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$. ■

5.3. Пред да преминеме на следните разгледувања, да се потсетиме: за нормите $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ определени на реалниот векторски простор L ќе велиме дека се *еквивалентни* ако постојат релани броеви $m,M>0$ такви што

$$m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1, \text{ за секој } x\in L.$$

Теорема ([55]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L. Тогаш за секои $p,q\ge 1$ нормите $\|\cdot\|_{a,b,p}$, $\|\cdot\|_{a,b,q}$ и $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ се еквивалентни.

Доказ. Нека $p\ge 1$. Тогаш за секој $x\in L$ важи

$$\begin{aligned}\|x\|_{a,b,\infty} &= \max\{\|x,a\|,\|x,b\|\} \le \left(\|x,a\|^p+\|x,b\|^p\right)^{1/p}\\ &\le 2^{1/p}\max\{\|x,a\|,\|x,b\|\} = 2^{1/p}\|x\|_{a,b,\infty},\end{aligned}$$

што значи дека нормите $\|\cdot\|_{a,b,p}$ и $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ се еквивалентни.

Нека $q\ge p\ge 1$. Понатаму, ако го искористиме познатото неравенство

$$\left(u^q+v^q\right)^{1/q} \le \left(u^p+v^p\right)^{1/p}, \text{ за } u,v\ge 0$$

добиваме дека

$$\begin{aligned}\|x\|_{a,b,q} &= \left(\|x,a\|^q+\|x,b\|^q\right)^{1/q}\\ &\le \left(\|x,a\|^p+\|x,b\|^p\right)^{1/p} = \|x\|_{a,b,q}.\end{aligned} \tag{3}$$

Од друга страна, без огранучивање на општоста можеме да земеме дека за даден $x\in L$ важи $\|x,b\|\le\|x,a\|$. Тогаш

$$
\begin{aligned}
\|x\|_{a,b,p} &= \left(\|x,a\|^p + \|x,b\|^p\right)^{1/p} = \|x,a\| \left[1 + \left(\frac{\|x,b\|}{\|x,a\|}\right)^p\right]^{1/p} \\
&\le 2^{1/p}\|x,a\| \le 2^{1/p}\|x,a\| 1 + \left[\left(\frac{\|x,b\|}{\|x,a\|}\right)^q\right]^{1/q} \\
&= 2^{1/p}\left(\|x,a\|^q + \|x,b\|^q\right)^{1/q} \\
&= 2^{1/p}\|x\|_{a,b,q} .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Конечно, од неравенствата (3) и (4) следува дека $\|\cdot\|_{a,b,p}$ и $\|\cdot\|_{a,b,q}$ се еквивалентни норми. ■

5.4. Коментар. Нека $\{a,b\}$ е линеарно независно множество во 2-нормиран простор L. Тогаш, 2-нормата индуцира фамилија норми $\left\{\|\cdot\|_{a,b,\infty}, \|\cdot\|_{a,b,p}, p \ge 1\right\}$, при што за $p \ge 1$ нормите се зададени со (1), а за $p = \infty$ нормата е дадена со (2). Нека сега $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$ се две линеарно независни множества и да ги разгледаме фамилиите норми

$$\left\{\|\cdot\|_{a,b,\infty}, \|\cdot\|_{a,b,p}, p \ge 1\right\} \text{ и } \left\{\|\cdot\|_{c,d,\infty}, \|\cdot\|_{c,d,p}, p \ge 1\right\}.$$

Јасно, ако L е конечнодимензионален простор, тогаш секои две норми од разгледуваните фамилии се еквивалентни (теорема 2, [9], pp. 29). Меѓутоа, во случај кога просторот L не е конечнодимензионален отворено е прашањето дали и при кои услови нормите

1) $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ и $\|\cdot\|_{c,d,\infty}$,

2) $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ и $\|\cdot\|_{c,d,p}$, $p \ge 1$ и

3) $\|\cdot\|_{a,b,p}$ и $\|\cdot\|_{c,d,q}$, $p,q \ge 1$

се еквивалентни.

6. НЕРАВЕНСТВО НА DUNKL-WILLIAMS ВО 2-НОРМИРАН ПРОСТОР

6.1. Теорема (неравенство на Dunkl-Williams) ([60]). Нека L е 2-нормиран простор. Тогаш

$$\left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \leq \frac{4\|x-y,z\|}{\|x,z\|+\|y,z\|}, \tag{1}$$

за секој $z \in L \setminus \{0\}$ и за секои $x, y \in L \setminus V(z)$, каде $V(z)$ е потпросторот генериран од векторот z.

Доказ. а) Нека L е 2-нормиран простор, $z \in L \setminus \{0\}$ и $x, y \in L \setminus V(z)$. Тогаш

$$\begin{aligned}\|x,z\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| &\leq \|x,z\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|x,z\|}, z \right\| + \|x,z\| \cdot \left\| \frac{y}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \\ &= \|x-y,z\| + \big| \|y,z\| - \|x,z\| \big| \\ &\leq 2\|x-y,z\|.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$\|y,z\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \leq 2\|x-y,z\|.$$

Конечно, ако ги собереме последните две неравенства го добиваме неравенството (1). ■

6.2. Забелешка. Во последица 4.11 докажавме дека за секои $x, y, z \in L$ такви што множествата $\{x,z\}$ и $\{y,z\}$ се линеарно независни точно е неравенството

$$\left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \leq \frac{\|x-y,z\| + \big| \|x,z\| - \|y,z\| \big|}{\max\{\|x,z\|, \|y,z\|\}}. \tag{2}$$

Понатаму, ако искористиме дека за секои $x, y, z \in L$ важи

$$\big| \|x,z\| - \|y,z\| \big| \leq \|x-y,z\|$$

добиваме дека од (2) следува неравенството

$$\left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \leq \frac{2\|x-y,z\|}{\max\{\|x,z\|, \|y,z\|\}}. \tag{3}$$

Јасно, неравенството (3), кое всушност е обопштување на неравенството на Massera и Schäffer ([14]) и важи во произволен 2-нормиран простор е посилно од неравенството Dunkl-Williams (1), но е послабо од неравенството (2).

Исто така, ако искористиме дека за секои $x, y, z \in L$ важи

$$\|x-y,z\|+\big|\,\|x,z\|-\|y,z\|\,\big|\leq\sqrt{2\|x-y,z\|^2+2(\|x,z\|-\|y,z\|)^2}\leq 2\|x-y,z\|,$$

од неравенството (2) добиваме е точно неравенството

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}-\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\leq\frac{\sqrt{2\|x-y,z\|^2+2(\|x,z\|-\|y,z\|)^2}}{\max\{\|x,z\|,\|y,z\|\}}. \tag{4}$$

Јасно, неравенството (4) е посилно од неравенството (3), но е послабо од неравенството (2).

7. БЕЛЕШКА ЗА 2-МЕТРИЧКИ ПРОСТОР

7.1. Во [72] S. Gähler го воведува концептот на 2-метрички простор и неговата тополошка структура.

Дефиниција. Нека X е произволно множество $\sigma: X\times X\times X\to\mathbf{R}$ е функција таква што

i) за два различни елементи $a,b\in X$ постои $c\in X$ таков што $\sigma(a,b,c)\neq 0$,

ii) $\sigma(a,b,c)=0$ кога два од трите елементи се еднакви,

iii) $\sigma(a,b,c)=\sigma(a,c,b)=\sigma(b,c,a)$, за секои $a,b,c\in X$, и

iv) $\sigma(a,b,c)\leq\sigma(a,b,d)+\sigma(a,d,c)+\sigma(d,b,c)$, за секои $a,b,c,d\in X$.

Функцијата σ ја нарекуваме 2-*метрика*, а подредениот пар (X,σ) го нарекуваме 2-*метрички простор*.

7.2. Лесно се докажува дека 2-метриката σ е ненегативна функција. Понатаму, во секој Евклидски простор со димензија $n\geq 2$ постои 2-метрика дефинирана со:

$$\sigma(a,b,c)=\frac{1}{2}\left(\sum_{1\leq i<k\leq n}\begin{vmatrix}a_i & a_k & 1\\ b_i & b_k & 1\\ c_i & c_k & 1\end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}},\ a=(a_1,a_2,...,a_n), b=(b_1,b_2,...,b_n), c=(c_1,c_2,...,c_n)$$

и која ја нарекуваме *Евклидска* 2-*метрика*.

7.3. Теорема. Секој 2-нормиран простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-метрички простор.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и нека функцијата $\sigma: L\times L\times L\to \mathbf{R}$ е определена со $\sigma(x,y,z)=\|x-z,y-z\|$. Ќе докажеме дека σ е 2-метрика на L.

Нека $x,y\in L$ и $x\neq y$. Од $\dim L>1$ следува дека постои $z\in L$ таков што векторите $x-z$ и $y-z$ се линеарно независни. Сега од дефиниција 1.1 следува дека $\sigma(x,y,z)=\|x-z,y-z\|\neq 0$, што значи дека е исполнето својството *i*) од дефиниција 7.1.

Јасно, ако $x=y$ или $x=z$ или $y=z$, тогаш векторите $x-z$ и $y-z$ се линеарно зависни, па затоа $\sigma(x,y,z)=\|x-z,y-z\|$, т.е. е исполнето својството *ii*) од дефиниција 7.1.

Нека $x,y,z\in L$. Тогаш од теорема 1.2 следува дека

$$\|x-z,y-z\|=\|x-z-(y-z),y-z\|=\|x-y,z-y\|=\|x-y,z-y-(x-y)\|=\|y-x,z-x\|,$$

што значи дека $\sigma(x,y,z)=\sigma(x,z,y)=\sigma(y,z,x)$, т.е. е исполнето својството *iii*) од дефиниција 7.1.

Нека $x,y,z,u\in L$. Тогаш од дефинија 1.1 и претходно изнесеното следува

$$\begin{aligned}\sigma(x,y,z)&=\|x-z,y-z\|=\|x-u+(u-z),y-u+(u-z)\|\\&\leq\|x-u,y-u\|+\|x-u,u-z\|+\|u-z,y-u\|+\|u-z,u-z\|\\&=\|x-u,y-u\|+\|x-u,z-u\|+\|z-u,y-u\|\\&=\sigma(x,y,u)+\sigma(x,z,u)+\sigma(z,y,u)\\&=\sigma(x,y,u)+\sigma(x,u,z)+\sigma(u,y,z)\end{aligned}$$

т.е. е исполнето својството *iv*) од дефиниција 7.1. ■

ГЛАВА II

2-ПРЕДХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ

1. ПОИМ ЗА 2-ПРЕДХИЛБЕРТОВ ПРОСТОР

1.1. Дефиниција ([21]). Нека $n>1$ е природен број, L е реален векторски простор, $\dim L \geq n$ и $(\cdot,\cdot|\cdot)$ е реална функција на $L\times L\times L$ таква што

i) $(a,a|b)\geq 0$, за секои $a,b\in L$ и $(a,a|b)=0$ ако и само ако a и b се линеарно зависни;

ii) $(a,b|c)=(b,a|c)$, за секои $a,b,c\in L$,

iii) $(a,a|b)=(b,b|a)$, за секои $a,b\in L$;

iv) $(\alpha a,b|c)=\alpha(a,b|c)$, за секои $a,b,c\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$; и

v) $(a+a_1,b|c)=(a,b|c)+(a_1,b|c)$, за секои $a,b,a_1,c\in L$.

Функцијата $(\cdot,\cdot|\cdot)$ ја нарекуваме 2-*скаларен производ*, а $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ го нарекуваме 2-*предхилбертов простор*.

Концептот на 2-скаларен производ и 2-предхилбертов простор е дводимензионална аналогија на концептот на скаларен производ и предхилбертов простор.

1.2. Пример ([11]). Нека $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ е предхилбертов простор. Ќе докажеме дека со

$$(a,b|c)=\det\begin{pmatrix}(a,b) & (a,c)\\ (c,b) & (c,c)\end{pmatrix}=(a,b)\|c\|^2-(a,c)\cdot(b,c), \tag{1}$$

каде $\|\cdot\|$ е нормата определена од скаларниот производ $(\cdot,\cdot)$, е дефиниран 2-скаларен производ на *L,* со што *L* станува 2-предхилбертов простор.

Навистина, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц во просторот $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ следува

$$(a,a|b)=\det\begin{pmatrix}(a,a) & (a,b)\\ (b,a) & (b,b)\end{pmatrix}=(a,a)\cdot(b,b)-(a,b)\cdot(b,a)=(a,a)\cdot(b,b)-(a,b)^2\geq 0$$

за секои $a,b\in L$ и $(a,a\,|\,b)=0$ ако и само ако a и b се линеарно зависни, што значи условот *i)* од дефиниција 1 е исполнет.

Ако се искористат својствата на детерминантите и скаларниот производ, лесно се докажува дека условите *ii), iii), iv)* и *v)* од дефиниција 1 се исполнети, т.е. дека $\big(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot,\ldots,\cdot)\big)$ е 2-предхилбертов простор во кој 2-скаларниот производ од е дефиниран со (1).

2-предхилбертовиот простор $\big(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)\big)$ за кој постои скаларен производ $(\cdot,\cdot)$ на L таков што важи (1) го нарекуваме *едноставен* и притоа ќе велиме дека скаларниот производ $(\cdot,\cdot)$ го генерира 2-скаларниот производ $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)$. ■

Во следните тврдења се докажани некои својства на 2-скаларниот производ.

1.3. Лема ([11]). Нека $\big(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)\big)$ е 2-предхилбертов простор. Тогаш

$$(a,b\,|\,\alpha c)=\alpha^2(a,b\,|\,c),\ \text{за секои } a,b,c\in L \ \text{ и за секој } \alpha\in\mathbf{R}.$$

Доказ. Непосредно од дефиниција 1.1 следува дека

$$\begin{aligned}(a,b\,|\,\alpha c)&=\tfrac{1}{4}\big[(a+b,a+b\,|\,\alpha c)-(a-b,a-b\,|\,\alpha c)\big]\\&=\tfrac{1}{4}\big[(\alpha c,\alpha c\,|\,a+b)-(\alpha c,\alpha c\,|\,a-c)\big]\\&=\tfrac{1}{4}\Big[\alpha^2(c,c\,|\,a+b)-\alpha^2(c,c\,|\,a-b)\Big]\\&=\tfrac{1}{4}\alpha^2\big[(a+b,a+b\,|\,c)-(a-b,a-b\,|\,c)\big]\\&=\alpha^2(a,b\,|\,c).\ ■\end{aligned}$$

1.4. Лема. Ако $\big(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)\big)$ е 2-предхилбертов простор, тогаш за секои $a,b,c,c'\in L$ важи

$$(a,b\,|\,c+c')-(a,b\,|\,c-c')=(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b).$$

Доказ. Непосредно од дефиниција 1.1 следува дека

$$
\begin{aligned}
(a,b\,|\,c+c')-(a,b\,|\,c-c') &= \tfrac{1}{4}\left[(a+b,a+b\,|\,c+c')-(a-b,a-b\,|\,c+c')\right] \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left[(a+b,a+b\,|\,c-c')-(a-b,a-b\,|\,c-c')\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[(c+c',c+c'\,|\,a+b)-(c+c,c+c'\,|\,a-b)\right] \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left[(c-c',c-c'\,|\,a+b)-(c-c',c-c'\,|\,a-b)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[(c+c',c+c'\,|\,a+b)-(c-c',c-c'\,|\,a+b)\right] \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left[(c+c,c+c'\,|\,a-b)-(c-c',c-c'\,|\,a-b)\right] \\
&= (c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b).\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

1.5. Лема ([13]). Ако $(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot))$ е 2-предхилбертов простор, тогаш за секои $a,b,c,c'\in L$ важи

$$(a,b\,|\,c+c')=(a,b\,|\,c)+(a,b\,|\,c')+\tfrac{1}{2}\left[(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b)\right].$$

Доказ. Непосредно од дефиниција 1.1 имаме:

$$
\begin{aligned}
(a,b\,|\,c+c') &= \tfrac{1}{4}\left[(a+b,a+b\,|\,c+c')-(a-b,a-b\,|\,c+c')\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[(c+c',c+c'\,|\,a+b)-(c+c',c+c'\,|\,a-b)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[(c,c\,|\,a+b)-(c,c\,|\,a-b)\right]+\tfrac{1}{4}\left[(c',c'\,|\,a+b)-(c',c'\,|\,a-b)\right]+ \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left[(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b)\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\left[(a+b,a+b\,|\,c)-(a-b,a-b\,|\,c)\right]+\tfrac{1}{4}\left[(a+b,a+b\,|\,c')-(a-b,a-b\,|\,c')\right]+ \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left[(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b)\right] \\
&= (a,b\,|\,c)+(a,b\,|\,c')+\tfrac{1}{2}\left[(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b)\right]
\end{aligned}
$$

што и требаше да се докаже. ■

1.6. Последица ([13]). Нека $(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot))$ е 2-предхилбертов простор. Ако $(a,b\,|\,c)=(a,b\,|\,c')=0$, тогаш $(a,b\,|\,c+c')=-(a,b\,|\,c-c')$.

Доказ. Од $(a,b\,|\,c)=(a,b\,|\,c')=0$ и од лема 1.5 следува равенството

$$
\begin{aligned}
(a,b\,|\,c-c') &= \tfrac{1}{2}\left[(c,-c'\,|\,a+b)-(c,-c'\,|\,a-b)\right] \\
&= -\tfrac{1}{2}\left[(c,c'\,|\,a+b)-(c,c'\,|\,a-b)\right] \\
&= -(a,b\,|\,c+c'),
\end{aligned}
$$

кое е еквивалентно на бараното равенство. ■

2. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ И РАВЕНСТВО НА ПАРАЛЕЛОПИПЕД ВО 2-ПРЕДХИЛБЕРТОВ ПРОСТОР

2.1. Теорема ([21]). Нека $\left(L,\left(\cdot,\cdot\,|\,\cdot\right)\right)$ е 2-предхилбертов простор. За секои $a,b,c\in L$ важи неравенството

$$\left|\left(a,b\,|\,c\right)\right|\leq\sqrt{\left(a,a\,|\,c\right)}\sqrt{\left(b,b\,|\,c\right)} \tag{1}$$

Неравенството (1) е 2-*димензионална аналогија на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц*.

Доказ. Од дефиниција 1.1, за секој $t\in\mathbf{R}$ добиваме

$$0\leq\left(a+tb,a+tb\,|\,c\right)=\left(a,a\,|\,c\right)+2t\left(a,b\,|\,c\right)+t^2\left(b,b\,|\,c\right).$$

Квадратниот трином

$$f\left(t\right)=\left(a,a\,|\,c\right)+2t\left(a,b\,|\,c\right)+t^2\left(b,b\,|\,c\right)$$

е ненегативен за секој $t\in\mathbf{R}$, па затоа неговата дискриминанта е непозитивна, т.е.

$$4\left(a,b\,|\,c\right)^2-4\left(b,b\,|\,c\right)\cdot\left(a,a\,|\,c\right)\leq 0.$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\left(a,b\,|\,c\right)^2-\left(b,b\,|\,c\right)\cdot\left(a,a\,|\,c\right)\leq 0,$$

т.е. на неравенството (2). ■

2.2. Последица. Нека $\left(L,\left(\cdot,\cdot\,|\,\cdot\right)\right)$ е 2-предхилбертов простор. За секои $a,c\in L$ важи $\left(a,c\,|\,c\right)=\left(a,c\,|\,a\right)=0$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 2.1 и аксиома *i*) во дефиниција 1.1. ■

2.3. Последица ([13]). Нека $\left(L,\left(\cdot,\cdot\,|\,\cdot\right)\right)$ е 2-предхилбертов простор. За секои $a_1,a_2,...,a_n\in L$, $n\geq 2$ такви што $\left(a_i,a_j\,|\,a_k\right)=0$, за $i\neq j\neq k\neq i$ и реални броеви $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ важи

$$\left(a_1,a_2\,|\,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right).$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=2$ од лемите 1.3 и 1.5 и последиците 1.6 и 2.2 следува

$$\begin{aligned}(a_1,a_2\,|\,\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)&=\alpha_1^2(a_1,a_2\,|\,a_1)+\alpha_2^2(a_1,a_2\,|\,a_2)+\\&\quad+\tfrac{1}{2}\left[\alpha_1\alpha_2(a_1,a_2\,|\,a_1+a_2)-\alpha_1\alpha_2(a_1,a_2\,|\,a_1-a_2)\right]\\&=\alpha_1\alpha_2(a_1,a_2\,|\,a_1+a_2).\end{aligned}$$

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. дека

$$\left(a_1,a_2\,|\,\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i\right)=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{k}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right).$$

Сега, за $n=k+1$ повторно од лемите 1.3 и 1.5 и последиците 1.6 и 2.2 добиваме

$$\begin{aligned}\left(a_1,a_2\,|\,\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_ia_i\right)&=\left(a_1,a_2\,|\,\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i+\alpha_{k+1}a_{k+1}\right)\\&=\left(a_1,a_2\,|\,\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i\right)+\left(a_1,a_2\,|\,\alpha_{k+1}a_{k+1}\right)+\\&\quad+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i,\alpha_{k+1}a_{k+1}\,|\,a_1+a_2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i,\alpha_{k+1}a_{k+1}\,|\,a_1-a_2\right)\right]\\&=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{k}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right)+\alpha_{k+1}^2\left(a_1,a_2\,|\,a_{k+1}\right)+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_ia_i,\alpha_{k+1}a_{k+1}\,|\,a_1+a_2\right)\\&=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{k}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{k+1}\alpha_i\left(a_i,a_{k+1}\,|\,a_1+a_2\right)\\&=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{k}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{k+1}\alpha_i\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_{k+1}\right)\\&=\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{k+1}\alpha_i\alpha_j\left(a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right),\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\geq 2$. ■

2.4. Теорема ([21]). Нека $(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot))$ е 2-предхилбертов простор. Тогаш со

$$\|x,y\|=\sqrt{(x,x\,|\,y)}\text{, за секои }x,y\in L \tag{2}$$

е дефинирана 2-норма таква што за секои $x,y,z\in L$ важи

$$\left(x,y\,|\,z\right)=\tfrac{1}{4}\left(\|x+y,z\|^2-\|x-y,z\|^2\right) \tag{3}$$

и

$$\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2=2\|x,z\|^2+2\|y,z\|^2. \tag{4}$$

Доказ. Точноста на аксиомите *i*), *ii*) и *iii*) од дефиницијата на 2-норма непосредно следува, соодветно, од аксиомите *i*), *iii*) и *iv*) од дефиницијата на 2-скаларен производ. Понатаму, од (2), својствата на 2-скаларниот производ и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|^2&=\left(x+y,x+y\,|\,z\right)=\left(x,x\,|\,z\right)+2\left(x,y\,|\,z\right)+\left(y,y\,|\,z\right)\\&\le\|x,z\|^2+2\|x,z\|\cdot\|y,z\|^2+\|y,z\|^2=\left(\|x,z\|+\|y,z\|\right)^2,\end{aligned}$$

што значи дека точна е и аксиомата *iv*) од дефиницијата на 2-норма.

Сега, за $x,y,z\in L$ имаме

$$\begin{aligned}\left(x,y\,|\,z\right)&=\tfrac{1}{4}\left[\left(x,x\,|\,z\right)+2\left(x,y\,|\,z\right)+\left(y,y\,|\,z\right)-\left(x,x\,|\,z\right)+2\left(x,y\,|\,z\right)-\left(y,y\,|\,z\right)\right]\\&=\tfrac{1}{4}\left[\left(x+y,x+y\,|\,z\right)-\left(x-y,x-y\,|\,z\right)\right]=\tfrac{1}{4}\left(\|x+y,z\|^2-\|x-y,z\|^2\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2&=\left(x+y,x+y\,|\,z\right)+\left(x-y,x-y\,|\,z\right)\\&=\left(x,x\,|\,z\right)+2\left(x,y\,|\,z\right)+\left(y,y\,|\,z\right)+\left(x,x\,|\,z\right)-2\left(x,y\,|\,z\right)+\left(y,y\,|\,z\right)\\&=2\|x,z\|^2+2\|y,z\|^2\end{aligned}$$

што значи дека се точни равенствата (3) и (4). ■

2.5. Последица. Ако $\left(L,\left(\cdot,\cdot\,|\,\cdot\right)\right)$ е 2-предхилбертов простор, тогаш за секои $x,z\in L$ важи

$$\|x,z\|=\sup\left\{\left|\left(x,y\,|\,z\right)\right|:\|y,z\|=1,\ y\in L\right\}. \tag{5}$$

Доказ. Ако множеството $\{x,z\}$ е линеарно зависно, тогаш тврдењето очигледно важи. Нека множеството $\{x,z\}$ е линеарно независно. Тогаш од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, бидејќи за $y=\frac{x}{\|x,z\|}$ важи

$$\|y,z\|^2=\left(y,y\,|\,z\right)=\left(\frac{x}{\|x,z\|},\frac{x}{\|x,z\|}\,|\,z\right)=1$$

добиваме

$$\begin{aligned}\|x,z\| &= \left(x, \tfrac{x}{\|x,z\|} \mid z\right)\\ &\le \sup\{|(x,y\mid z)| : \|y,z\|=1,\ y\in L\}\\ &\le \sup\{\|x,z\|\cdot\|y,z\| : \|y,z\|=1,\ y\in L\}\\ &= \|x,z\|,\end{aligned}$$

што значи дека е точно равенството (5). ■

2.6. Коментар. Равенството (4) всушност е аналогија на равенството на паралелограм и истото ќе го наречеме *равенство на паралелопипед*. Причина за тоа е следнава ситуација. Нека $(L,(\cdot,\cdot\mid\cdot))$ е реален претхилбертов простор. Тогаш со

$$\|x,z\| = \left(\det\begin{pmatrix}(x,x) & (x,z)\\ (x,z) & (z,z)\end{pmatrix}\right)^{1/2},$$

за секои $x,z\in L$ е дефинирана стандардната 2-норма. Понатаму, ако $L=\mathbf{R}^3$ со обичниот скаларен производ и векторите $x,y,z\in\mathbf{R}^3$ не се по парови линеарно зависни, тогаш $\|x,z\|$, $\|y,z\|$, $\|x+y,z\|$ и $\|x-y,z\|$ се еднакви на плоштините на паралелограмите конструирани над векторите x и z, y и z, $x+y$ и z, $x-y$ и z, соодветно. Притоа, лесно се пресметува дека

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2 &= \left[(x,x)+2(x,y)+(y,y)\right](z,z)-\left[(x,z)+(y,z)\right]^2\\ &\quad+\left[(x,x)-2(x,y)+(y,y)\right](z,z)-\left[(x,z)-(y,z)\right]^2\\ &= 2\left[(x,x)(z,z)-(x,z)^2\right]+2\left[(y,y)(z,z)-(y,z)^2\right]\\ &= 2\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right),\end{aligned}$$

што значи дека збирот на квадратите на плоштините на дијагоналните пресеци на паралелопипедот е еднаков на удвоениот збир на квадратите на плоштините на соодветните страни на паралелопипедот.

2.7. Во теорема 2.4 докажавме дека во 2-предхилбертов простор со (2) е дефинирана 2-норма, таква што за секои $x,y,z\in L$ се исполнети равенствата (3) и (4). Логично е да се запрашаме кога во 2-нормиран простор постои 2-скаларен производ, таков да 2-нормата е генерирана од 2-скаларниот производ. Одговорот на поставеното прашање го дава следната теорема.

Теорема ([21]). Нека $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ е 2-нормиран простор таков што за секои $x,y,z\in L$ е исполнето равенството на паралелопипед (4). Тогаш со (3) во L е дефиниран 2-скаларен производ и притоа важи (2).

Доказ. Од својствата на 2-нормата и од равенството (3) следува дека за секои $a,b\in L$ имаме

$$(a,a\,|\,b)=\tfrac{1}{4}\left(\|2a,b\|^2-\|0,b\|^2\right)=\|a,b\|^2\geq 0,$$

при што $(a,a\,|\,b)=0$ ако и само ако $\|a,b\|=0$, што значи ако и само ако a и b се линеарно зависни. Според тоа, точен е условот *i*) од дефиницијата 1.1.

Понатаму, за секои $a,b,c\in L$ важи

$$\begin{aligned}(a,b\,|\,c)&=\tfrac{1}{4}\left(\|a+b,c\|^2-\|a-b,c\|^2\right)\\&=\tfrac{1}{4}\left(\|b+a,c\|^2-\|b-a,c\|^2\right),\\&=(b,a\,|\,c)\end{aligned}$$

т.е. точен е условот *ii*) од дефиницијата 1.1.

За секои $a,b\in L$ важи

$$\begin{aligned}(a,a\,|\,b)&=\tfrac{1}{4}\left(\|a+a,b\|^2-\|a-a,b\|^2\right)=\tfrac{1}{4}\cdot 4\|a,b\|^2\\&=\tfrac{1}{4}\left(\|b+b,a\|^2-\|b-b,a\|^2\right)=(b,b\,|\,a),\end{aligned}$$

т.е. точен е условот *iii*) од дефиницијата 1.1.

Нека $u,v,w,c\in L$. Од равенството (4) следува

$$\begin{aligned}\|(u+v)+w,c\|^2+\|(u+v)-w,c\|^2&=2\left(\|u+v,c\|^2+\|w,c\|^2\right),\\\|(u-v)+w,c\|^2+\|(u-v)-w,c\|^2&=2\left(\|u-v,c\|^2+\|w,c\|^2\right).\end{aligned}$$

Ако ги одземеме последните две равенства и добиеното равенство го поделиме со 4 добиваме

$$\frac{\|(u+w)+v,c\|^2-\|(u+w)-v,c\|^2}{4}+\frac{\|(u-w)+v,c\|^2-\|(u-w)-v,c\|^2}{4}=2\,\frac{\|u+v,c\|^2-\|u-v,c\|^2}{4},$$

што според (3) значи

$$(u+w,v\,|\,c)+(u-w,v\,|\,c)=2(u,v\,|\,c). \tag{6}$$

Ако во (6) ставиме $w=u$ добиваме $(2u,v\,|\,c)=2(u,v\,|\,c)$. Сега, повторно од (6) и од последното равенство за $u+w=a,\,u-w=a'$ и $v=b$ добиваме

$$(a,b\,|\,c)+(a',b\,|\,c)=2\left(\tfrac{a+a'}{2},b\,|\,c\right)=(a+a',b\,|\,c), \tag{7}$$

т.е. точен е условот *v*) од дефиницијата 1.1.

Ако во (7) ставиме $a'=0$ и ако искористиме дека $(0,b\,|\,c)=0$, тогаш од (7) го добиваме равенството $(a,b\,|\,c)=2\left(\frac{1}{2}a,b\,|\,c\right)$. Од последното равенство и условот *v*) од дефиниција 1.1 добиваме дека $\alpha(a,b\,|\,c)=(\alpha a,b\,|\,c)$ за секој $\alpha=\frac{m}{2^n}$. Понатаму, бидејќи $\|\alpha a+b,c\|$ и $\|\alpha a-b,c\|$ се непрекинати функции од α, од (3) следува дека $(\alpha a,b\,|\,c)$ е непрекината функција од α. Затоа, $\alpha(a,b\,|\,c)=(\alpha a,b\,|\,c)$ за секој реален број α. ■

2.8. Пример. Во пример докажавме дека во просторот $\mathbf{R}^n, n\geq 3$ функцијата $\|\cdot,\cdot\|:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ определена со

$$\|x_1,x_2\|=\max_{1\leq j_1<j_2\leq n}\left|\det\begin{pmatrix} x_{1j_1} & x_{1j_2}\\ x_{2j_1} & x_{2j_2}\end{pmatrix}\right|.$$

е 2-норма. Ќе докажеме дека во случајов 2-нормата не е генерирана од 2-скаларен производ. Навистина, за векторите $x=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},0,...,0\right)$, $y=\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},0,...,0\right)$, $z=(1,0,...,0)$ имаме $x+y=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{13}{8},0,...,0\right)$, $x-y=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},0,...,0\right)$, па затоа

$$\|x+y,z\|=\tfrac{13}{8},\ \|x-y,z\|=\tfrac{1}{4},\ \|x,z\|=\tfrac{7}{8},\ \|y,z\|=\tfrac{3}{4}.$$

Според тоа,

$$\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2=\tfrac{173}{64}\neq\tfrac{170}{64}=2\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right),$$

па од теорема 2.7 следува дека разгледуваната 2-норма не е генерирана од 2-скаларен производ. ■

2.9. На крајот од оваа точка ќе дадеме пет леми, при чие докажување непосредно се применува неравенството на паралелопипед.

Лема А ([60]). Нека $(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot))$, $\dim L>2$ е 2-нормиран простор. Ако за секој тридимензионален подпростор Y од L постои 2-скаларен рпоизвод $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)_Y$ таков што

$(y,y\,|\,z)_Y=\|y,z\|^2$, за секои $y,z\in Y$, тогаш постои 2-скаларен производ $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)_L$ таков што $(x,x\,|\,z)_L=\|x,z\|^2$, за секои $x,z\in L$.

Доказ. Нека $x,y,z\in L$. Тогаш постои подпростор Y од L таков што $\dim Y=3$ и $x,y,z\in Y$. Од претпоставката следува дека постои 2-скаларен производ $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)_Y$ таков што $(a,a\,|\,b)_Y=\|a,b\|^2$, за секои $a,b\in Y$. Но, тоа значи дека

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2&=(x+y,x+y\,|\,z)_Y+(x-y,x-y)_Y\\&=2(x,x\,|\,z)_Y+2(y,y\,|\,z)_Y=2\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right).\end{aligned}$$

Конечно, од произволноста на $x,y,z\in L$ следува дека во L е исполнето равенството на паралелопипед, што значи дека L е 2-претхолбертов простор, т.е. постои 2-скаларен производ $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)_L$ таков што $(x,x\,|\,z)_L=\|x,z\|^2$, за секои $x,z\in L$. ■

Лема Б ([60]). Нека $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)$ е 2-скаларен производ во векторскиот простор L и нека линеарното пресликување $T:L\to L$ е инјекција. Тогаш со

$$(x,y\,|\,z)_T=(T(x),T(y)\,|\,T(z)),\ x,y,z\in L \tag{8}$$

е дефиниран 2-скаларен производ на L.

Доказ. Нека линеарното пресликување $T:L\to L$ е инјекција и нека $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)_T$ е зададен со (8). Тогаш $(x,x\,|\,z)_T=(T(x),T(x)\,|\,T(z))\geq 0,$ за секои $x,z\in L$ и $(x,x\,|\,z)_T=0$ ако и само ако $T(x)$ и $T(z)$ се линеарно зависни, т.е. постојат $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ такви што $\alpha\neq 0$ или $\beta\neq 0$ и $\alpha T(x)+\beta T(z)=0$. Но, последното значи $T(\alpha x+\beta z)=0$ и како T е инјекција, а $T(0)=0$ заклучуваме дека $\alpha x+\beta z=0$. Според тоа, $(x,x\,|\,z)_T=0$ ако и само ако x и z се линеарно зависни, т.е. исполнета е аксиомата *i*) од дефиницијата на 2-скаларен производ.

Понатаму, T е линеарно пресликување, па затоа од својствата на 2-скаларниот производ следува дека за секои $x,x_1,y,z\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи

$$(x,y\,|\,z)_T=(T(x),T(y)\,|\,T(z))=(T(y),T(x)\,|\,T(z))=(y,x\,|\,z)_T,$$

$$(x,x\,|\,y)_T=(T(x),T(x)\,|\,T(y))=(T(y),T(y)\,|\,T(x))=(y,y\,|\,x)_T,$$

$$\begin{aligned}(\alpha x,y\,|\,z)_T &= \big(T(\alpha x),T(y)\,|\,T(z)\big)=\big(\alpha T(x),T(y)\,|\,T(z)\big)\\ &=\alpha\big(T(x),T(y)\,|\,T(z)\big)=\alpha(x,y\,|\,z)_T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+x_1,y\,|\,z)_T &= \big(T(x+x_1),T(y)\,|\,T(z)\big)=\big(T(x)+T(x_1),T(y)\,|\,T(z)\big)\\ &=\big(T(x),T(y)\,|\,T(z)\big)+\big(T(x_1),T(y)\,|\,T(z)\big)=(x,y\,|\,z)_T+(x_1,y\,|\,z)_T,\end{aligned}$$

што значи дека се исполнети аксиомите *ii*)-*v*) од дефиницијата на 2-скаларен производ. ■

Лема В ([60]). Нека L и L_1 се 2-предхилбертови простори. Тогаш за линеарното пресликување $F:L\to L_1$ важи

$$\big(F(x),F(y)\,|\,F(z)\big)_{L_1}=(x,y\,|\,z)_L,\ \text{за секои }x,y,z\in L \tag{9}$$

ако и само ако

$$\|F(x),F(y)\|_{L_1}=\|x,y\|_L,\ \text{за секои }x,y\in L, \tag{10}$$

каде 2-нормите на L и L_1 се зададени со 2-скаларните производи.

Доказ. Нека за линеарното пресликување $F:L\to L_1$ важи (9). Тогаш за секои $x,y\in L$ имаме $\|F(x),F(y)\|_{L_1}=\big(F(x),F(x)\,|\,F(y)\big)_{L_1}=(x,x\,|\,y)_L=\|x,y\|_L$, важи (10).

Обратно, ако $F:L\to L_1$ е линеарно пресликување такво што важи (10), тогаш за секои $x,y,z\in L$ имаме

$$\begin{aligned}\big(F(x),F(y)\,|\,F(z)\big)_{L_1}&=\frac{\|F(x)+F(y),F(z)\|_{L_1}^2-\|F(x)-F(y),F(z)\|_{L_1}^2}{4}\\ &=\frac{\|F(x+y),F(z)\|_{L_1}^2-\|F(x-y),F(z)\|_{L_1}^2}{4}\\ &=\frac{\|x+y,z\|_L^2-\|x-y,z\|_L^2}{4}=(x,y\,|\,z)_L,\end{aligned}$$

т.е. важи (9). ■

Лема Г ([3]). Во 2-претхилбертов простор $\big(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)\big)$ за секои $x,y,z,u\in L$ важи

$$\|z-x,u\|^2+\|z-y,u\|^2=\tfrac{1}{2}\|x-y,u\|^2+2\left\|z-\tfrac{1}{2}(x+y),u\right\|^2. \tag{11}$$

Доказ. Во равенството (4) ставаме $a=z-x, b=z-y, c=u$ и го добиваме равенството $\|2z-(x+y),u\|^2+\|y-x,u\|^2=2\Big(\|z-x,u\|^2+\|z-y,u\|^2\Big)$, кое е еквивалентно со равенството (11). ■

Лема Д ([3]). Во 2-предхилбертов простор $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ равенството (4) е еквивалентно со равенството

$$\|a+b,c\|^4-\|a-b,c\|^4=8\left(\|a,c\|^2+\|b,c\|^2\right)\cdot(a,b\,|\,c). \tag{12}$$

Доказ. Нека $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ е 2-предхилбертов простор. Ако равенството (4) го помножиме со $\|a+b,c\|^2-\|a-b,c\|^2$ и го искористиме равенството (3) добиваме

$$\begin{aligned}\|a+b,c\|^4-\|a-b,c\|^4&=2\left(\|a,c\|^2+\|b,c\|^2\right)\left(\|a+b,c\|^2-\|a-b,c\|^2\right)\\&=8\left(\|a,c\|^2+\|b,c\|^2\right)\cdot(a,b\,|\,c),\end{aligned}$$

што значи дека од (4) следува (12).

Нека е исполнето равенството (12). Ако $\|a+b,c\|^2\neq\|a-b,c\|^2$, тогаш равенството (12) го делиме со $\|a+b,c\|^2-\|a-b,c\|^2$ и го добиваме равенството (4). Ако $\|a+b,c\|^2=\|a-b,c\|^2$, т.е. $(a,b\,|\,c)=0$, тогаш

$$\begin{aligned}\|a+b,c\|^2+\|a-b,c\|^2=2\|a+b,c\|^2&=2(a+b,a+b\,|\,c)\\&=2\left[(a,a\,|\,c)+2(a,b\,|\,c)+2(b,b\,|\,c)\right]\\&=2\left(\|a,c\|^2+\|b,c\|^2\right),\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (4). ■

3. КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА 2-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД СО ПОМОШ НА РАВЕНСТВА ОД ОЈЛЕР-ЛАГРАНЖОВ ВИД

3.1. Во овој параграф ќе дадеме карактеризации на 2-скаларен производ со помош на равенства од Ојлер-Лагранжов вид. При докажувањето на овие карактеризации ќе го користиме поимот конвергентна низа во 2-нормиран простор. Така ја имаме следнава дефиниција.

Дефиниција. ***i)*** **([72]).** Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во реалниот 2-нормиран простор ја нарекуваме *конвергентна* ако постои $x\in L$ таков што

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,y\|=0, \text{ за секој } y\in L.$$

Векторот $x \in L$ го нарекуваме *граница* на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пишуваме $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ или $x_n \to x$, $n \to \infty$.

ii) **([73]).** Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа рационални броеви. За низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ќе велиме дека е *Кошиева (фундаментална)* ако за секој $\varepsilon \in Q^+$ постои $n_0 \in N^+$ таков што за секои $m,n \ge n_0$, $m,n \in N^+$ важи $|a_n - a_m| < \varepsilon$. ■

Во врска со конвергентните низи во 2-нормиран простор точна е следнава лема, која ни е потребна за натамошните разгледувања.

Лема ([72]). Нека L е реален 2-нормиран простор и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во L. Ако $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$, тогаш $\lim_{n\to\infty} \|x_n, y\| = \|x, y\|$. ■

3.2. Теорема ([2]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. 2-нормата е добиена од 2-скаларен производ ако и само ако

$$\frac{\|ax+by,z\|^2}{\gamma} + \frac{\|\beta bx-\alpha ay,z\|^2}{\gamma\alpha\beta} = \frac{\|x,z\|^2}{\alpha} + \frac{\|y,z\|^2}{\beta}, \tag{1}$$

за секои $x,y,z \in L$ и за секои $a,b \in \mathbf{R}$, $\alpha,\beta > 0$, $\gamma = \alpha a^2 + \beta b^2$.

Доказ. Нека за секои $x,y,z \in L$ и за секои $a,b \in \mathbf{R}$, $\alpha,\beta > 0$, $\gamma = \alpha a^2 + \beta b^2$, е исполнето равенството (1). Ако во (1) ставиме $\alpha = \beta = a = b = 1$, го добиваме равенството на паралелопипед, што значи дека со

$$(x, y \mid z) = \frac{1}{4}\left(\|x+y,z\|^2 - \|x-y,z\|^2\right), \tag{2}$$

е дефиниран 2-скаларен производ на L од кој е добиена 2-нормата, т.е. важи

$$\|x,y\| = \sqrt{(x,x \mid y)}, \text{ за секои } x,y \in L. \tag{3}$$

Обратно, нека постои 2-скаларен производ од кој е добиена 2-нормата, т.е. важи (3). Тогаш за секои $x,y,z \in L$ и за секои $a,b \in \mathbf{R}$, $\alpha,\beta > 0$, $\gamma = \alpha a^2 + \beta b^2$ имаме

$$\frac{\|ax+by,z\|^2}{\gamma}+\frac{\|\beta bx-\alpha ay,z\|^2}{\gamma\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma}\left(ax+by,ax+by\,|\,z\right)+\frac{1}{\gamma\alpha\beta}\left(\beta bx-\alpha ay,\beta bx-\alpha ay\,|\,z\right)$$

$$=\frac{1}{\gamma}\left[a^2\left(x,x\,|\,z\right)+2ab\left(x,y\,|\,z\right)+b^2\left(y,y\,|\,z\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma\alpha\beta}\left[\beta^2b^2\left(x,x\,|\,z\right)-2ab\alpha\beta\left(x,y\,|\,z\right)+\alpha^2a^2\left(y,y\,|\,z\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma}\left(\alpha a^2+\beta b^2\right)\left[\frac{\|x,z\|^2}{\alpha}+\frac{\|y,z\|^2}{\beta}\right]=\frac{\|x,z\|^2}{\alpha}+\frac{\|y,z\|^2}{\beta},$$

т.е. точно е равенството (1). ■

3.3. Последица ([2]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е реален 2-нормиран простор. 2-нормата е добиена од 2-скаларен производ ако и само ако

$$\|ax+by,z\|^2+\|bx-ay,z\|^2=\left(a^2+b^2\right)\left(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right), \tag{4}$$

за секои $x,y,z\in L$ и за секои $a,b\in\mathbf{R}$,

Доказ. Непосредно следува од теорема 3.2 за $\alpha=\beta=1$. ■

3.4. Равенството (4) е од Ојлер-Лагранжов вид и како што видовме истото дава карактеризација на 2-скаларниот производ. Следнава последица всушност е аналогија на последица 3.3, односно нејзин тригонометриски запис.

Последица ([2]). Нека $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е реален 2-нормиран простор. 2-нормата е добиена од 2-скаларен производ ако и само ако

$$\|x\cos\alpha+y\sin\alpha,z\|^2+\|y\cos\alpha-x\sin\alpha,z\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2, \tag{5}$$

за секои $x,y,z\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$.

Доказ. Нека за секои $x,y,z\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ е исполнето равенството (5). Ако во (5) ставиме $\alpha=\frac{\pi}{4}$, го добиваме равенството

$$\left\|x\cos\tfrac{\pi}{4}+y\sin\tfrac{\pi}{4},z\right\|^2+\left\|y\cos\tfrac{\pi}{4}-x\sin\tfrac{\pi}{4},z\right\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2,$$

т.е. равенството

$$\frac{\|x+y,z\|^2}{2}+\frac{\|y-x,z\|^2}{2}=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2,$$

кое е еквивалентно со равенството ма паралелопипед, што значи дека со (2) е дефиниран 2-скаларен производ од кој е добиена 2-нормата, т.е. важи (3).

Обратно, нека постои 2-скаларен производ од кој е добиена 2-нормата и нека $x,y,z\in L$ и $\alpha\in\mathbf{R}$. Според последица 3.3 имаме дека за секои $x,y,z\in L$ и за секои $a,b\in\mathbf{R}$ е исполнето равенството (4). Во равенството (4) ставаме $a=\cos\alpha$ и $b=\sin\alpha$ и добиваме дека за секои $x,y,z\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи

$$\begin{aligned}\|x\cos\alpha+y\sin\alpha,z\|^2+\|x\sin\alpha-y\cos\alpha,z\|^2&=\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right)\\&=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2,\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (5). ■

3.5. Коментар. Во вториот дел од доказот на последица 3.4, докажавме дека равенството (5) следува од равенството (4). Но, равенствата (4) и (5) всушност се еквивалентни. Навистина, нека $x,y,z\in L$ и $a,b\in\mathbf{R}$. Тогаш постои $\alpha\in\mathbf{R}$ таков што $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$. Конечно, од равенството (5) го добиваме равенството

$$\left\|x\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+y\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},z\right\|^2+\left\|x\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-y\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},z\right\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2,$$

кое е еквивалентно со равенството (4).

3.6. Лема ([2]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. Ако постои $\alpha\in\mathbf{R}$ таков што за секои $x,y,z\in L$ е исполнето равенството (6), тогаш за секои $x,y,z\in L$ и за секој $n\in\mathbf{N}$ важи

$$\|x\cos n\alpha+y\sin n\alpha,z\|^2+\|y\cos n\alpha-x\sin n\alpha,z\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2. \tag{6}$$

Доказ. За $n=1$ равенството (6) се сведува на равенството (5), т.е. тоа е исполнето. Нека претпоставиме дека за некој $n=k\geq 1$ важи равенството (6), т.е. за секои $x,y,z\in L$ важи

$$\|x\cos k\alpha+y\sin k\alpha,z\|^2+\|y\cos k\alpha-x\sin k\alpha,z\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2. \tag{7}$$

Ако ги замениме x со $x\cos\alpha+y\sin\alpha$ и y со $y\cos\alpha-x\sin\alpha$, тогаш од равенствата (5) и (7) последователно добиваме

$$\begin{aligned}\|x,z\|^2+\|y,z\|^2 &= \|x\cos\alpha+y\sin\alpha,z\|^2+\|y\cos\alpha-x\sin\alpha,z\|^2\\ &=\|(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\cos k\alpha+(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\sin k\alpha,z\|^2+\\ &\quad+\|(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\cos k\alpha-(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\sin k\alpha,z\|^2\\ &=\|x(\cos\alpha\cos k\alpha-\sin\alpha\sin k\alpha)+y(\sin\alpha\cos k\alpha+\cos\alpha\sin k\alpha)\|^2+\\ &\quad+\|y(\cos\alpha\cos k\alpha-\sin\alpha\sin k\alpha)-x(\sin\alpha\cos k\alpha+\cos\alpha\sin k\alpha)\|^2\\ &=\|x\cos(k+1)\alpha+y\sin(k+1)\alpha,z\|^2+\|y\cos(k+1)\alpha-x\sin(k+1)\alpha,z\|^2\end{aligned}$$

што значи дека равенството (6) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

3.7. За следната карактеризација на 2-скаларниот производ неопходен ни е следниов класичен резултат од математичката анализа. Со S^1 да ја означиме единечната кружница во $\mathbf{R}^2$ и нека $\pi\mathbf{Q}=\{k\pi \mid k\in\mathbf{Q}\}$. Точна е следнава лема.

Лема. За секој $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Q}$ множеството $\{(\cos n\alpha,\sin n\alpha)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ е густо во S^1.

Доказ. Ако $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Q}$, тогаш $\xi=\frac{\alpha}{2\pi}$ е ирационален број. Затоа множеството $E=\{m+n\xi\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$ е секаде густо во $\mathbf{R}$ (пример 24.10 Б, [73]). Понатаму, функцијата $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, определена со $f(x)=(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x), x\in\mathbf{R}$ е непрекината и $f(\mathbf{R})=S^1$. Но, непрекината слика на густо множество е густо множество, па затоа множеството

$$f(E)=\{(\cos 2\pi(m+n\xi),\sin 2\pi(m+n\xi))\mid m,n\in\mathbf{Z}\}=\{(\cos n\alpha,\sin n\alpha)\mid n\in\mathbf{Z}\}$$

е густо во S^1. ■

3.8. Теорема ([2]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. 2-нормата е добиена од 2-скаларен производ ако и само ако постои $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Q}$ таков што за секои $x,y,z\in L$ е точно равенството (5).

Доказ. Нека постои 2-скаларен производ од кој е добиена 2-нормата. Тогаш од последица 3.3 следува дека равенството (5) е точно за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ и за секои $x,y,z\in L$, па затоа равенството (5) е точно за некој $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Q}$ и за секои $x,y,z\in L$.

Обратно, нека постои $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Q}$ таков што за секои $x, y, z \in L$ е точно равенството (5). Бидејќи $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in B(0;1)$, од лема 3.7 следува дека постои низа природни броеви $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos m_n\alpha, \sin m_n\alpha\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \tag{8}$$

Понатаму, за секои $x, y, z \in L$ важи

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\| x\cos m_n\alpha + y\sin m_n\alpha - \frac{x\sqrt{2}+y\sqrt{2}}{2}, z \right\| \\ &\le \left|\cos m_n\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot \|x, z\| + \left|\sin m_n\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot \|y, z\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\le \left\| y\cos m_n\alpha - x\sin m_n\alpha - \frac{y\sqrt{2}-x\sqrt{2}}{2}, z \right\| \\ &\le \left|\cos m_n\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot \|y, z\| + \left|\sin m_n\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| \cdot \|x, z\|, \end{aligned}$$

и ако во последните две неравенства земеме $n \to \infty$, од равенството (8) следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x\cos m_n\alpha + y\sin m_n\alpha - \frac{x\sqrt{2}+y\sqrt{2}}{2}, z \right\| = 0 \ ,$$

за секои $x, y, z \in L$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y\cos m_n\alpha - x\sin m_n\alpha - \frac{y\sqrt{2}-x\sqrt{2}}{2}, z \right\| = 0,$$

за секои $x, y, z \in L$. Сега, од последните две равенства и од лема 3.1 следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \|x\cos m_n\alpha + y\sin m_n\alpha, z\| = \left\| \frac{x\sqrt{2}+y\sqrt{2}}{2}, z \right\|, \tag{9}$$

за секои $x, y, z \in L$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|y\cos m_n\alpha - x\sin m_n\alpha, z\| = \left\| \frac{y\sqrt{2}-x\sqrt{2}}{2}, z \right\|, \tag{10}$$

за секои $x, y, z \in L$. Понатаму, $m_n \in \mathbf{N}$, за $n \in \mathbf{N}$, па затоа од лема 3.6 следува дека за секој $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\|x\cos m_n\alpha + y\sin m_n\alpha, z\|^2 + \|y\cos m_n\alpha - x\sin m_n\alpha, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2.$$

Конечно, ако во последното равенство земеме $n \to \infty$, тогаш од равенствата (9) и (10) следува равенството $\frac{\|x+y,z\|^2}{2} + \frac{\|y-x,z\|^2}{2} = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$, кое е еквивалентно со равенството на паралелопипед, што значи дека со (2) е дефиниран 2-скаларен производ од кој е добиена 2-нормата, т.е. важи (3). ■

4. КАРАКТЕРИЗАЦИЈА НА 2-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД СО ПОМОШ НА СТРОГО КОНВЕКСНА НОРМА СО МОДУЛ *C*

4.1. Дефиниција ([54]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор и $c>0$. 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ ја нарекуваме *строго конвексна по модул* c ако

$$\|tx+(1-t)y,z\|^2 \le t\|x,z\|^2+(1-t)\|y,z\|^2-ct(1-t)\|x-y,z\|^2, \qquad (1)$$

за секои $x,y,z\in L$, $z\notin V(x,y)$ и за секој $t\in(0,1)$. 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ ја нарекуваме *средно строго конвексна по модул* c ако неравенството (1) важи само за $t=\frac{1}{2}$, т.е. ако

$$\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|^2 \le \frac{\|x,z\|^2+\|y,z\|^2}{2}-\frac{c}{4}\|x-y,z\|^2, \qquad (2)$$

за секои $x,y,z\in L$, $z\notin V(x,y)$.

4.2. Забелешка. Од дефиниција 1 е јасно дека секоја строго конвексна 2-норма по модул c е средно строго конвексна по истиот модул c, а ако 2-нормата не е средно строго конвексна по модул c, тогаш таа не е ниту строго конвексна по модул c.

4.3. Пример ([54]). Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\|x,y\| = \sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}}\left|\det\begin{pmatrix} x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|,\ x=(x_i)_{i=1}^{\infty},\ y=(y_i)_{i=1}^{\infty}\in l^\infty \qquad (3)$$

е дефинирана 2-норма, што значи дека $(l^\infty,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. За векторите

$$x=\left(1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},\dots,1-\tfrac{1}{2^n},\dots\right),\ y=\left(0,1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},\dots,1-\tfrac{1}{2^{n-1}},\dots\right) \text{ и } z=(1,0,0,\dots,0,\dots)$$

важи

$$\|x,z\|=\|y,z\|=\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|=1,\ \|x-y,z\|=\tfrac{1}{2^2}$$

и $z \notin V(x,y)$, па затоа за секој $c>0$ важи

$$\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\|^2 > \frac{\|x,z\|^2+\|y,z\|^2}{2} - \frac{c}{4}\|x-y,z\|^2,$$

што значи дека 2-нормата (3) не е средно строго конвексна по модул c, па според забелешка 4.2 таа не е строго конвексна по модул c. ■

4.4. Пример ([54]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален предхилбертов простор. Тогаш со

$$\|x,y\| = \left(\det\begin{pmatrix}(x,x) & (x,y)\\ (y,x) & (y,y)\end{pmatrix}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

за секои $x,y\in L$ е дефинирана стандардна 2-норма, т.е. $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. Лесно се проверува дека за $c=1$ важи

$$\|tx+(1-t)y,z\|^2 \le t\|x,z\|^2 + (1-t)\|y,z\|^2 - t(1-t)\|x-y,z\|^2,$$

што значи дека 2-нормата (4) е строго конвексна по модул 1, па затоа таа е средно строго конвексна по модул 1. ■

4.5. Теорема ([54]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ е строго конвексна по модул 1;

2) 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ е средно строго конвексна по модул 1;

3) L е 2-предхилбертов простор.

Доказ. Ќе ја докажеме следнава низа импликации: $1)\Rightarrow 2)\Rightarrow 3)\Rightarrow 1)$.

$1)\Rightarrow 2)$. Важи според забелешка 4.2.

$2)\Rightarrow 3)$. Нека 2-нормата е средно строго конвексна по модул $c=1$. Тогаш од (2) следува неравенството

$$\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\|^2 \le \frac{\|x,z\|^2+\|y,z\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x-y,z\|^2$$

и затоа

$$\|x+y,z\|^2 + \|x-y,z\|^2 \le 2\left(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2\right). \tag{5}$$

за секои $x,y,z\in L$. Во (5) ставаме $u=x+y$ и $v=x-y$ и добиваме дека

$$2\left(\|u,z\|^2+\|v,z\|^2\right)\le\|u+v,z\|^2+\|u-v,z\|^2, \tag{6}$$

за секои $u,v,z\in L$. Конечно, од неравенствата (5) и (6) следува равенството на паралелопипед, што значи дека постои 2-скаларен производ на L кој ја генерира 2-нормата.

$3)\Rightarrow 1)$. Нека постои 2-скаларен производ $(\cdot,\cdot\,|\,\cdot)$ кој ја генерира 2-нормата. Имаме

$$\begin{aligned}\|tx+(1-t)y,z\|^2&=(tx+(1-t)y,tx+(1-t)y\,|\,z)=t^2(x,x\,|\,z)+2t(1-t)(x,y\,|\,z)+(1-t)^2(y,y\,|\,z)\\&=t(x,x\,|\,z)-t(1-t)(x,x\,|\,z)+2t(1-t)(x,y\,|\,z)+(1-t)(y,y\,|\,z)-t(1-t)(y,y\,|\,z)\\&=t(x,x\,|\,z)+(1-t)(y,y\,|\,z)-t(1-t)\left[(x,x\,|\,z)-2(x,y\,|\,z)+(y,y\,|\,z)\right]\\&=t(x,x\,|\,z)+(1-t)(y,y\,|\,z)-t(1-t)(x-y,x-y\,|\,z)\\&\le t\|x,z\|^2+(1-t)\|y,z\|^2-t(1-t)\|x-y,z\|^2,\end{aligned}$$

што значи дека 2-нормата $\|\cdot,\cdot\|$ е строго конвексна по модул 1. ■

4.6. Забелешка. Во пример 4.3 докажавме дека за секој $c>0$ просторот $\left(l^\infty,\|\cdot,\cdot\|\right)$ во кој 2-нормата е воведена со (3) не е строго конвексен по модул c. Сега, од теорема 4.5, следува дека не постои 2-скаларен производ од кој може да се добие 2-нормата (3).

5. КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА 2-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД СО ПОМОШ НА НЕРАВЕНСТВОТО НА МЕРЦЕР

5.1. Во овој параграф ќе дадеме нови карактеризации на 2-скаларниот производ. За таа цел најпрво без доказ ќе наведеме повеќе стандардни карактеризации на 2-скаларниот производ, кои се дадени во следнава теорема.

Теорема 1 ([11]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. L е 2-предхилбертов простор ако и само ако за секој $z\in L\setminus\{0\}$ е исполнет еден од условите:

II_1. За секои $x,y\in L$ такви што $\|x,z\|=\|y,z\|$ и за секои $m,n\in\mathbf{R}$ важи

$$\|mx+ny,z\|=\|nx+my,z\|.$$

II_2. Од $\|x+y,z\|=\|x-y,z\|$, $x,y\in L$ следува

$$\|x+y,z\|^2=\|x,z\|^2+\|y,z\|^2$$

II_3. Постои реален број $\alpha \neq 0, \pm 1$ таков што од $\|x,z\| = \|y,z\|$, $x, y \in L$ следува $\|x+\alpha y, z\| = \|\alpha x + y, z\|$.

II_4. Постои реален број $\alpha \neq 0, \pm 1$ таков што од $\|x+y,z\| = \|x-y,z\|$, $x, y \in L$ следува

$$\|x+\alpha y, z\| = \|x - \alpha y, z\|.$$

II_5. Од $\|x,z\| = \|y,z\|$, $x, y \in L$ следува дека за секој реален број $\alpha > 0$ важи

$$\left\|\alpha x + \alpha^{-1} y, z\right\| \geq \|x+y,z\|.$$

II_6. За секои $x_1, x_2, x_3 \in L$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i = 0$ и $\|x_1,z\| = \|x_2,z\|$ важи

$$\|x_1 - x_3, z\| = \|x_2 - x_3, z\|.$$

II_7. За секои $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 0$ и $\|x_1,z\| = \|x_2,z\|$ и $\|x_3,z\| = \|x_4,z\|$ важи $\|x_1 - x_3, z\| = \|x_2 - x_4, z\|$ и $\|x_2 - x_3, z\| = \|x_1 - x_4, z\|$.

II_8. Вредноста на изразот

$$F(x_1, x_2, x_3) = \|x_1 + x_2 + x_3, z\|^2 + \|x_1 + x_2 - x_3, z\|^2 - \|x_1 - x_2 - x_3, z\|^2 - \|x_1 - x_2 + x_3, z\|^2$$

не зависи од x_3.

II_9. За секои $x_1, ..., x_n \in L$, $n \geq 3$ такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ важи

$$\sum_{i,k=1}^{n} \|x_i - x_k, z\|^2 = 2n \sum_{i=1}^{n} \|x_i, z\|^2 . \blacksquare$$

5.2. Пред да преминеме на новите карактеризации на 2-скаларниот производ ќе ја докажеме генерализацијата на неравенството на Мерцер.

Теорема (неравенство на Мерцер) ([60]). Ако L е 2-предхилбертов простор, тогаш

$$\left\| \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z \right\| \leq \frac{2\|x-y,z\|}{\|x,z\| + \|y,z\|}, \tag{1}$$

за секој $z \in L \setminus \{0\}$ и за секои $x, y \in L \setminus V(z)$, каде $V(z)$ е потпросторот генериран од векторот z.

Доказ. Нека L е 2-предхилбертов простор, $z \in L \setminus \{0\}$ и $x, y \in L \setminus V(z)$. Тогаш

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z\right\|^2 &= \left(\frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, \frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|} \mid z\right) = 2 - 2\left(\frac{x}{\|x,z\|}, \frac{y}{\|y,z\|} \mid z\right) \\
&= \frac{1}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left(2\|x,z\|\cdot\|y,z\| - 2(x,y \mid z)\right) \\
&= \frac{1}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left(2\|x,z\|\cdot\|y,z\| - \left(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 - \|x-y,z\|^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left(\|x-y,z\|^2 - (\|x,z\| - \|y,z\|)^2\right).
\end{aligned}$$

Понатаму, од претходното равенство и од неравенството на паралелопипед следува

$$\begin{aligned}
&\|x-y,z\|^2 - \left(\frac{\|x,z\|+\|y,z\|}{2}\right)^2 \left\|\frac{x}{\|x,z\|} - \frac{y}{\|y,z\|}, z\right\|^2 = \\
&= \|x-y,z\|^2 - \left(\frac{\|x,z\|+\|y,z\|}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left(\|x-y,z\|^2 - (\|x,z\| - \|y,z\|)^2\right)\right) \\
&= \frac{(\|x,z\|-\|y,z\|)^2}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left(\frac{\|x,z\|+\|y,z\|}{2}\right)^2 + \|x-y,z\|^2\left(1 - \left(\frac{\|x,z\|+\|y,z\|}{2}\right)^2 \frac{1}{\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\right) \\
&= \frac{(\|x,z\|-\|y,z\|)^2}{4\|x,z\|\cdot\|y,z\|}\left((\|x,z\| + \|y,z\|)^2 - \|x-y,z\|^2\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

па затоа точно е неравенството (1). ■

5.3. Теорема ([60]). Нека L е 2-нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) За секој $z \in L \setminus \{0\}$ и за секои $x, y \in L \setminus V(z)$, каде $V(z)$ е потпросторот генериран од векторот z точно е неравенството (1).
2) Ако $x, y, z \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$, тогаш

$$\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| \leq \|(1-t)x + ty, z\|, \tag{2}$$

за секој $t \in [0,1]$.

Доказ. $1) \Rightarrow 2)$. Нека претпоставиме дека е точно тврдењето 1). Нека $x, y, z \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$. Тогаш $z \in L \setminus \{0\}$ и $x, -y \in L \setminus V(z)$. Јасно, за $t = 0$ и $t = 1$, точно е неравенството (2). Ако $t \in (0,1)$, тогаш од 1) следува

$$\|(1-t)x + ty, z\| = (1-t)\left\|x - \tfrac{t}{t-1}y, z\right\| = \tfrac{1-t}{2}\left(\|x,z\| + \left\|\tfrac{t}{t-1}y, z\right\|\right)\frac{2\left\|x - \frac{t}{t-1}y, z\right\|}{\|x,z\| + \left\|\frac{t}{t-1}y, z\right\|}$$

$$\geq \frac{1-t}{2}\left(\|x,z\|+\left\|\frac{t}{t-1}y,z\right\|\right)\left\|\frac{x}{\|x,z\|}-\frac{\frac{t}{t-1}y}{\left\|\frac{t}{t-1}y,z\right\|},z\right\|=\frac{1-t}{2}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)\|x+y,z\|=\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|,$$

т.е. точно е неравенството (2).

$2)\Rightarrow 1)$. Нека претпоставиме дека е точно тврдењето 2). Нека $z\in L\setminus\{0\}$ и $x,y\in L\setminus V(z)$. Тогаш за $\frac{x}{\|x,z\|},\frac{-y}{\|y,z\|}\in L$ важи

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|},z\right\|=\left\|\frac{-y}{\|y,z\|},z\right\|=1$$

и ако земеме $t=\frac{\|y,z\|}{\|x,z\|+\|y,z\|}$, тогаш од 2) добиваме

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}-\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|=2\left\|\frac{\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{-y}{\|y,z\|}}{2},z\right\|\leq 2\left\|(1-\frac{\|y,z\|}{\|x,z\|+\|y,z\|})\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{\|y,z\|}{\|x,z\|+\|y,z\|}\cdot\frac{-y}{\|y,z\|},z\right\|$$
$$=\frac{2\|x-y,z\|}{\|x,z\|+\|y,z\|},$$

т.е. точно е неравенството (1). ■

5.4. Теорема ([60]). Нека L е 2-нормиран простор. Ако за секој $z\in L\setminus\{0\}$ и за секои $x,y\in L\setminus V(z)$ е точно неравенството (1), тогаш L е 2-предхилбертов простор.

Доказ. Нека $\alpha>0$, $z\in L\setminus\{0\}$ и $x,y\in L\setminus V(z)$ се такви што $\|x,z\|=\|y,z\|$. Од неравенството (1), применето на векторите αx и $-\alpha^{-1}y$ следува

$$\left\|\alpha x+\alpha^{-1}y,z\right\|\geq\frac{\|\alpha x,z\|+\left\|\alpha^{-1}y,z\right\|}{2}\left\|\frac{\alpha x}{\|\alpha x,z\|}+\frac{\alpha^{-1}y}{\left\|\alpha^{-1}y,z\right\|},z\right\|$$
$$=\frac{\alpha\|x,z\|+\alpha^{-1}\|y,z\|}{2}\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|$$
$$=\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\|x+y,z\|\geq\|x+y,z\|,$$

што според теорема 5.1 значи дека L е 2-предхилбертов простор. ■

5.5. Последица ([60]). Нека L е 2-нормиран простор. Ако $x,y,z\in L$ се такви што $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и за секој $t\in[0,1]$ важи

$$\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|\leq\left\|(1-t)x+ty,z\right\|,$$

тогаш L е 2-предхилбертов простор.

Доказ. Непосредно следува под теоремите 5.3 и 5.4. ■

5.6. Пред да преминеме на следната карактеризација на 2-предхилбертов простор да забележиме дека условот II_4 од теорема 5.1 е еквивалентен на следниве два услови:

$II_4^{'}$. Постои реален број $\alpha_0 > 1$ таков што $\|\alpha_0 x + y, z\| = \|x + \alpha_0 y, z\|$, за секои $x, y \in L$ такви што $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$.

$II_4^{''}$. Постои реален број $t_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ таков што

$$\|(1-t_0)x + t_0 y, z\| = \|t_0 x + (1-t_0)y, z\|$$

за секои $x, y \in L$ такви што $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$.

Од теорема 5.1 и од претходно изнесеното следува точноста на следва последица.

Последица ([60]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. L е 2-предхилбертов простор ако и само ако за секој $z \in L \setminus \{0\}$ е исполнет еден од условите

1) Постои реален број $\alpha_0 > 1$ таков што $\|\alpha_0 x + y, z\| = \|x + \alpha_0 y, z\|$, за секои $x, y \in L$ такви што $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$.

2) Постои реален број $t_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ таков што

$$\|(1-t_0)x + t_0 y, z\| = \|t_0 x + (1-t_0)y, z\|$$

за секои $x, y \in L$ такви што $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$. ■

5.7. Во следната теорема ќе покажеме дека ослабувајќи ги условите 1) и 2) од последица 2, добиваме нова карактеризација на 2-предхилбертов простор.

Теорема ([60]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. L е 2-предхилбертов простор ако и само ако за секој $z \in L \setminus \{0\}$ е исполнет еден од условите:

1) За секои $x, y \in L$ такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ постои реален број $\alpha > 1$ таков што $\|\alpha x + y, z\| = \|x + \alpha y, z\|$.

2) За секои $x, y \in L$ такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ постои реален број $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ таков што $\|(1-t)x + ty, z\| = \|tx + (1-t)y, z\|$.

Јасно, реалните броеви $\alpha > 1$ и $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ може да зависат од $x, y \in L$, за кои важи $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$.

Доказ. Од последица 5.6 следува дека е доволно да докажеме дека од условот 2) следува дека L е 2-предхилбертов простор, што според последица 5.5 значи дека е доволно да докажеме дека од условот 2) следува дека $x, y, z \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$, тогаш

$$\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| \le \|(1-t)x + ty, z\|,$$

за секој $t \in [0,1]$.

Нека $x, y, z \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$. Можеме да претпоставиме дека множеството $\{x, y\}$ е линеарно независно. Да го разгледаме множеството

$$A = \left\{ t \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \mid \|(1-t)x + ty, z\| = \|tx + (1-t)y, z\| \right\}.$$

Од условот 2) следува дека $A \ne \varnothing$, па затоа постои $t_0 = \sup A$. Ќе докажеме дека $t_0 = \frac{1}{2}$ од што заради конвексноста на функцијата $t \to \|(1-t)x + ty, z\|$, $t \in [0,1]$ ќе следува дека $\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| \le \|(1-t)x + ty, z\|$, за секој $t \in [0,1]$.

Нека претпоставиме дека $t_0 < \frac{1}{2}$. Тогаш од непрекинатоста на 2-нормата следува дека $t_0 \in A$. За векторите $u = (1-t_0)x + t_0 y$ и $v = t_0 x + (1-t_0)y$ важи $\|u,z\| = \|v,z\|$. Нека $x_0 = \frac{u}{\|u,z\|}$ и $y_0 = \frac{v}{\|v,z\|}$. Од претпоставката следува дека постои реален број $t_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ таков што

$$\|(1-t_1)x_0 + t_1 y_0, z\| = \|t_1 x_0 + (1-t_1)y_0, z\|.$$

Нека $t^* = (1-t_1)t_0 + t_1(1-t_0)$. Тогаш $t_0 < t^* < \frac{1}{2}$ и важи

$$\|(1-t^*)x+t^*y,z\| = \|t^*x+(1-t^*)y,z\|,$$

што значи дека $t^* \in A$, а тоа е противречност на $t_0 = \sup A$ и $t_0 < t^* < \frac{1}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува $t_0 = \frac{1}{2}$. ■

5.8. Последица ([60]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. L е 2-предхилбертов простор ако и само ако за секој $z \in L\setminus\{0\}$ важи

$$\left\|x+\frac{x+y}{\|x+y,z\|},z\right\| = \left\|y+\frac{x+y}{\|x+y,z\|},z\right\|, \tag{3}$$

за секои $x,y \in L$ такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $x+y \notin V(z)$.

Доказ. Ќе докажеме дека условот е доволен. Ако $z \in L\setminus\{0\}$ и $x,y \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $x+y \notin V(z)$, тогаш

$$\begin{aligned}\|(1+\|x+y,z\|)x+y,z\|^2 &= (1+\|x+y,z\|)^2\|x,z\|^2 + 2(1+\|x+y,z\|)(x,y\,|\,z) + \|y,z\|^2\\ &= (1+\|x+y,z\|)^2\|y,z\|^2 + 2(1+\|x+y,z\|)(x,y\,|\,z) + \|x,z\|^2\\ &= \|x+(1+\|x+y,z\|)y,z\|^2,\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството

$$\|(1+\|x+y,z\|)x+y,z\| = \|x+(1+\|x+y,z\|)y,z\|, \tag{4}$$

кое е еквивалентно на равенството (3).

Ќе докажеме дека условот е потребен. Нека $z \in L\setminus\{0\}$ и $x,y \in L$ се такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $x+y \notin V(z)$. Тогаш точно е равенството (3), кое е еквивалентно на равенството (4). Но, $x+y \notin V(z)$, па затоа $1+\|x+y,z\| > 1$, што според теорема 5.7 значи дека L е 2-предхилбертов простор. ■

5.9. Забелешка. Бидејќи $1+\|x+y,z\|$ зависи од $x,y \in L$ такви што $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$, заклучуваме дека тврдењето искажано во последица 5.6 не следува од тврдењата искажани во последица 5.5. Последното всушност и ја покажува предноста на теоремата 5.7.

5.10. Пример ([60]). Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\|x,y\| = \sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}} \left| \det\begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \right|, \; x=(x_i)_{i=1}^{\infty}, \, y=(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l^{\infty}$$

е дефинирана 2-норма, што значи дека $\left(l^{\infty},\|\cdot,\cdot\|\right)$ е реален 2-нормиран простор. Лесно се проверува дека за векторите

$$x=\left(1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},...,1-\tfrac{1}{2^n},...\right), \; y=\left(0,\tfrac{1}{2}-1,\tfrac{1}{2^2}-1,...,\tfrac{1}{2^{n-1}}-1,...\right) \text{ и } z=(1,0,0,...,0,...)$$

важи $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $x+y\notin V(z)$. Понатаму, $\|x+y,z\|=\frac{1}{2^2}$, па затоа

$$x+\tfrac{x+y}{\|x+y,z\|}=\left(1+\tfrac{3}{2},1+\tfrac{3}{2^2},1+\tfrac{3}{2^3},...,1+\tfrac{3}{2^n},...\right), \; y+\tfrac{x+y}{\|x+y,z\|}=\left(2,\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}-1,...,\tfrac{3}{2^{n-1}}-1,...\right).$$

Според тоа,

$$\left\|x+\tfrac{x+y}{\|x+y,z\|},z\right\|=\tfrac{7}{4}\neq 1=\left\|y+\tfrac{x+y}{\|x+y,z\|},z\right\|,$$

што според последица 5.8 значи дека 2-нормираниот простор $\left(l^{\infty},\|\cdot,\cdot\|\right)$ не е 2-пред-хилбертов. ■

6. НОРМИ ГЕНЕРИРАНИ ОД 2-НОРМА – II

6.1. Пример ([55]). Во пример 1.2 докажавме дека ако $\left(L,(\cdot,\cdot)\right)$ е реален пред-хилбертов простор, тогаш со

$$(x,y\,|\,z)=\det\begin{pmatrix}(x,y) & (x,z)\\ (y,z) & (z,z)\end{pmatrix}, \quad x,y,z\in L \tag{1}$$

е дефиниран 2-скаларен производ и притоа 2-норма на L се дефинира со

$$\|x,y\|=\sqrt{\|x\|^2\|y\|^2-(x,y)^2}\,. \tag{2}$$

Понатаму, ако $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L, тогаш

$$\|x\|_{a,b,p}=\left[\left(\|x\|^2\|a\|^2-(x,a)^2\right)^{p/2}+\left(\|x\|^2\|b\|^2-(x,b)^2\right)^{p/2}\right]^{1/p}, \; p\geq 1 \tag{3}$$

$$\|x\|_{a,b,\infty}=\max\left\{\sqrt{\|x\|^2\|a\|^2-(x,a)^2},\sqrt{\|x\|^2\|b\|^2-(x,b)^2}\right\}, \tag{4}$$

е фамилија норми, која во суштина е генерирана од примарната норма $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ и притоа за секој $p\geq 1$ важи

$$\|a\|_{a,b,p}=\|b\|_{a,b,p}=\|a\|_{a,b,\infty}=\|b\|_{a,b,\infty}=\sqrt{\|a\|^2\|b\|^2-(a,b)^2}\;.$$

Јасно, ако L е конечнодимензионален простор, тогаш сите овие норми се еквивалентни со примарната норма. Меѓутоа, дали и за кои вектори a и b примарната норма $\|\cdot\|$ се совпаѓа со некоја од нормите $\|\cdot\|_{a,b,p}$, $p\geq 1$ и $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ е прашање на кое подолу ќе дадеме одговор. ■

6.2. Теорема ([55]). Ако $(L,(\cdot,\cdot))$ е 2-предхилбертов простор, тогаш за секое линеарно независно множество $\{a,b\}$ нормираниот простор $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,2}\right)$ е предхилбертов и притоа за секои $x,y\in L$ важи

$$(x,y)_{a,b}=(x,y\,|\,a)+(x,y\,|\,b). \tag{5}$$

Доказ. Од дефиницијата на нормата $\|\cdot\|_{a,b,2}$ и од равенството на паралелопипед следува дека за секои $x,y\in L$ важи

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{a,b,2}^2+\|x-y\|_{a,b,2}^2&=\|x+y,a\|^2+\|x+y,b\|^2+\|x-y,a\|^2+\|x-y,b\|^2\\&=2\left(\|x,a\|^2+\|y,a\|^2\right)+2\left(\|x,b\|^2+\|y,b\|^2\right)\\&=2\left(\|x,a\|^2+\|x,b\|^2\right)+2\left(\|y,a\|^2+\|y,b\|^2\right)\\&=2\left(\|x\|_{a,b,2}^2+\|y\|_{a,b,2}^2\right),\end{aligned}$$

што значи дека во просторот $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,2}\right)$ е исполнето равенството на паралелограм, па затоа тој е предхилбертов. Понатаму,

$$\begin{aligned}(x,y)_{a,b}&=\frac{\|x+y\|_{a,b,2}^2-\|x-y\|_{a,b,2}^2}{4}=\frac{\|x+y,a\|^2+\|x+y,b\|^2-\|x-y,a\|^2-\|x-y,b\|^2}{4}\\&=\frac{\|x+y,a\|^2-\|x-y,a\|^2}{4}+\frac{\|x+y,b\|^2-\|x-y,b\|^2}{4}=(x,y\,|\,a)+(x,y\,|\,b),\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (5). ■

6.3. Забелешка. Во теорема 6.2 видовме дека во случај кога $(L,(\cdot,\cdot))$ е 2-предхилбертов простор нормираниот простор $(L,\|\cdot\|_{a,b,2})$ е предхилбертов. Меѓу сите норми $\|\cdot\|_{a,b,p}$, $1\leq p\leq\infty$ на $\mathbf{R}^n$ добиени во пример 6.1 само нормата $\|\cdot\|_{a,b,2}$ е индуцирана од скаларен производ. Навистина, ако

$$a=(1,1,0,...,0),\ b=(1,0,1,0,...,0),\ x=(0,1,0,...,0) \text{ и } y=(0,0,1,0,...,0),$$

тогаш за $p\neq 2, 1\leq p<\infty$ добиваме

$$\|x\|_{a,b,p}=\left(1+2^{p/2}\right)^{1/p},\ \|y\|_{a,b,p}=\left(2^{p/2}+1\right)^{1/p},$$

$$\|x+y\|_{a,b,p}=2^{1/p}3^{1/2} \text{ и } \|x-y\|_{a,b,p}=2^{1/p}3^{1/2},$$

па затоа

$$\|x+y\|_{a,b,p}^2+\|x-y\|_{a,b,p}^2=6\cdot 4^{1/p}\neq 4\left(1+2^{p/2}\right)^{2/p}=2\left(\|x\|_{a,b,p}^2+\|y\|_{a,b,p}^2\right),$$

што значи дека не е исполнето равенството на паралелограм. Понатаму, за $p=\infty$

$$\|x\|_{a,b,\infty}=\sqrt{2},\ \|y\|_{a,b,\infty}=\sqrt{2},\ \|x+y\|_{a,b,\infty}=\sqrt{3} \text{ и } \|x-y\|_{a,b,\infty}=\sqrt{3},$$

па затоа

$$\|x+y\|_{a,b,\infty}^2+\|x-y\|_{a,b,\infty}^2=6\neq 8=2\left(\|x\|_{a,b,\infty}^2+\|y\|_{a,b,\infty}^2\right),$$

што значи дека и во овој случај не е исполнето равенството на паралелограм.

6.4. Забелешка. Ако $(L,(\cdot,\cdot))$ е реален предхилбертов простор, тогаш со (1) е зададен 2-скаларен производ. Понатаму, ако $\{a,b\}$ е линеарно независно множество, тогаш според теорема 6.2 на L со (5) е зададен скаларен производ

$$(x,y)_{a,b}=(x,y\,|\,a)+(x,y\,|\,b)=(x,y)\left[\|a\|^2+\|b\|^2\right]-(x,a)(y,a)-(x,b)(y,b).$$

што значи дека со помош на почетниот скаларен производ генериравме фамилија скаларни производи

$$(\cdot,\cdot)_{a,b},\ \text{множество } \{a,b\} \text{ е линеарно независно во } L. \tag{6}$$

Се поставува прашање дали оваа фамилија го содржи почетниот скаларен производ, т.е. дали постојат линеарно независни вектори $a,b\in L$ такви што за секои $x,y\in L$ важи

$$(x,y)_{a,b}=(x,y). \tag{7}$$

Имаме, $(a,b)_{a,b}=0$, па затоа ако постојат линеарно независни вектори $a,b\in L$ такви што за секои $x,y\in L$ важи (7), тогаш $(a,b)=0$. Понатаму, ако во (7) ставиме $x=y=a$ и земеме во предвид дека $(a,b)=0$ и $\|a\|>0$ добиваме $\|b\|=1$. Аналогно се добива дека $\|a\|=1$. Според тоа, равенството (7) го добива обликот

$$(x,y)=(x,a)(y,a)+(x,b)(y,b). \tag{8}$$

Можни се два случаја:

1. $\dim L=2$. Тогаш множеството $\{a,b\}$ е ортонормирана база на L, па равенството (8) всушност е равенството на Парсевал, што значи дека фамилијата (6) го содржи почетниот скаларен производ и истиот се добива за секоја ортонормирана база $\{a,b\}$ на L. Последното значи дека ако $\{a,b\}$ е ортонормирана база на L, тогаш примарната норма $\|\cdot\|$ се совпаѓа нормата $\|\cdot\|_{a,b,2}$.
2. $\dim L>2$. Тогаш согласно теоремата на Gram-Schmidt за ортогонализација постои $c\in L$ таков што $(a,c)=(b,c)=0$ и $\|c\|=1$. Сега, ако во (8) ставиме $x=y=c$ добиваме $1=\|c\|^2=(c,a)^2+(c,b)^2=0$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека ако $\dim L>2$, тогаш фамилијата (6) не го содржи почетниот скаларен производ, што значи дека во случај кога $\dim L>2$ ниту една од нормите $\|\cdot\|_{a,b,p}$, $1\le p\le\infty$ не се совпаѓа со почетната норма $\|\cdot\|$.

6.5. Дефиниција ([72]). Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ во 2-нормираниот простор L ја нарекуваме *Кошиева* ако за секој $y\in L$ важи

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m,y\|=0.$$

6.6. Теорема ([55]). Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа во 2-нормираниот простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ и $\{a,b\}$ е линеарно независно множество во L.

а) Ако низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во $(L,\|\cdot,\cdot\|)$, тогаш таа е Кошиева во $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$, $p\geq 1$ и $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$.

б) Ако низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна во $(L,\|\cdot,\cdot\|)$, тогаш таа е конвергентна во $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$, $p\geq 1$ и $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$.

Доказ. а) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева низа во $(L,\|\cdot,\cdot\|)$. Тогаш

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m,a\|=0 \text{ и } \lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m,b\|=0,$$

па затоа за секој $p\geq 1$ важи

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|_{a,b,p}=\lim_{m,n\to\infty}\left(\|x_n-x_m,a\|^p+\|x_n-x_m,b\|^p\right)^{1/p}=0 \text{ и}$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m\|_{a,b,\infty}=\lim_{m,n\to\infty}\max\{\|x_n-x_m,a\|,\|x_n-x_m,b\|\}=0,$$

т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е Кошиева во $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$, $p\geq 1$ и $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$.

б) Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна низа во $(L,\|\cdot,\cdot\|)$. Тогаш постои $x\in L$ таков што $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,a\|=0$ и $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x,b\|=0$, па затоа за секој $p\geq 1$ важи

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{a,b,p}=\lim_{n\to\infty}\left(\|x_n-x,a\|^p+\|x_n-x,b\|^p\right)^{1/p}=0 \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_{a,b,\infty}=\lim_{n\to\infty}\max\{\|x_n-x,a\|,\|x_n-x,b\|\}=0,$$

т.е. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна во $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$, $p\geq 1$ и $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$. ■

7. 2*-ПОЛУСКАЛАРЕН ПРОИЗВОД И 2-ПОЛУНОРМИ

7.1. Концептите за 2-норма и 2-скаларен производ се дводимензионални аналогии на концептите за норма и скаларен производ. Како што знаеме, ако $(L,(\cdot,\cdot|\cdot))$ е 2-предхилбертовиот простор, тогаш со

$$\|a,b\|=(a,a\,|\,b)^{1/2} \tag{1}$$

е дефинирана 2-норма, со што добиваме векторски 2-нормиран простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$.

Во 2-нормираните и 2-предхилбертовите простори важат својства аналогни на својствата на нормираните и предхилбертовите простори. Меѓутоа, последното не е секогаш точно, што ќе биде покажано во следниов пример.

7.2. Пример 9 ([59]). Ако $(L_1,(\cdot,\cdot)_1)$ и $(L_2,(\cdot,\cdot)_2)$ се предхилбертови простори, тогаш со

$$((a_1,b_1),(a_2,b_2))=(a_1,a_2)_1+(b_1,b_2)_2\text{, за секои } (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in L_1\times L_2$$

е дефиниран скаларен производ, што значи дека $L_1\times L_2$ е предхилбертов простор, односно нормиран простор во кој нормата е дефинирана со

$$\|(a,b)\|=\sqrt{(a,a)_1+(b,b)_2}\text{, за секој } (a,b)\in L_1\times L_2 .$$

Меѓутоа, ако $(L_1,(\cdot,\cdot)_1)$ и $(L_2,(\cdot,\cdot)_2)$ се 2-предхилбертови простори, тогаш со

$$\langle(a_1,b_1),(a_2,b_2)\,|\,(a_3,b_3)\rangle=(a_1,a_2\,|\,a_3)_1+(b_1,b_2\,|\,b_3)_2, \tag{2}$$

каде $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in L_1\times L_2$ не е дефиниран 2-скаларен производ над $L_1\times L_2$. Навистина, лесно се проверува дека со (2) е дефинирана реална функција на $(L_1\times L_2)\times(L_1\times L_2)\times(L_1\times L_2)$ за која се исполнети аксиомите *ii*), *iii*), *iv*) и *v*) од дефиницијата на 2-скаларен производ. Понатаму, ако (a_1,b_1) и (a_2,b_2) се линеарно зависни, тогаш постои $\alpha\in\mathbf{R}$ таков што $(a_1,b_1)=\alpha(a_2,b_2)=(\alpha a_2,\alpha b_2)$, што значи $a_1=\alpha a_2$, $b_1=\alpha b_2$, т.е. a_1 и a_2 се линеарно зависни во L_1, а b_1 и b_2 се линеарно зависни во L_2, па затоа

$$\langle(a_1,b_1),(a_1,b_1)\,|\,(a_2,b_2)\rangle=(a_1,a_1\,|\,a_2)_1+(b_1,b_1\,|\,b_2)_2=0 .$$

Меѓутоа, (a,b) и $(a,2b)$ не се линеарно зависни во $L_1\times L_2$ и за овие вектори имаме

$$\langle(a,b),(a,b)\,|\,(a,2b)\rangle=(a,a\,|\,a)_1+(b,b\,|\,2b)_2=0 ,$$

што значи дека не е исполнета аксиомата *i*) од дефиницијата на 2-скаларен производ. ■

7.3. Во пример 7.2. видовме дека функцијата (2) не дефинира 2-норма над $L_1\times L_2$, како што тоа со помош на (1) може да се направи во 2-предхилбертовите простори $\left(L_1,(\cdot,\cdot)_1\right)$ и $\left(L_2,(\cdot,\cdot)_2\right)$. Меѓутоа, функцијата $p:\left(L_1\times L_2\right)^2\to\mathbf{R}$ определена со

$$p\left(\left(a_1,b_1\right),\left(a_2,b_2\right)\right)=\sqrt{\left\langle\left(a_1,b_1\right),\left(a_1,b_1\right)\mid\left(a_2,b_2\right)\right\rangle}\,, \tag{3}$$

за секои $\left(a_1,b_1\right),\left(a_2,b_2\right)\in L_1\times L_2$ ги задоволува 1) – 4) од следнава дефиниција.

Дефиниција ([57]). Нека L е реален векторски простор со димензија поголема од 1 и $p:L\times L\to\mathbf{R}$ е функција таква што

1) ако $a,b\in L$ се линеарно зависни, тогаш $p(a,b)=0$,

2) $p(a,b)=p(b,a)$, за секои $a,b\in L$,

3) $p(\alpha a,b)=|\alpha|\,p(a,b)$, за секои $a,b\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$,

4) $p(a+b,c)\le p(a,c)+p(b,c)$, за секои $a,b,c\in L$.

Функција p се нарекува 2-*полунорма*, а (L,p) се нарекува 2-*полунормиран простор*.

7.4. Јасно, секоја 2-норма е и 2-полунорма. Но, како што претходно видовме не секоја 2-полунорма е 2-норма. Понатаму, за 2-полунормата точни се следниве тврдења.

Лема ([57]). Нека (L,p) е 2-полунормиран простор. Тогаш

а) $p(a,b)=p(a+\lambda b,b)$, за секои $a,b\in L$ и за секој $\lambda\in\mathbf{R}$,

б) $p(\alpha a+\beta b,\gamma a+\delta b)=|\alpha\delta-\beta\gamma|\,p(a,b)$, за секои $a,b\in L$ и за секои $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R}$ важи.

Доказ. Аналогно на доказот на теорема I 1.2. ■

Теорема ([57]). Нека (L,p) е 2-полунормиран простор. Тогаш

а) $\left|p(a,c)-p(b,c)\right|\le p(a-b,c)$, за секои $a,b,c\in L$,

б) $p(a,b)\ge 0$, за секои $a,b\in L$,

Доказ. а) Неравенството следува непосредно од својствата на апсолутна вредност и неравенствата

$$p(a,c)=p(a-b+b,c)\le p(a-b,c)+p(b,c) \text{ и}$$

$$p(b,c)=p(b-a+a,c)\le p(b-a,c)+p(a,c).$$

б) Јасно, $p(0,b)=0$ па затоа од неравенството под а) следува

$$p(a,b)=p(a-0,b)\geq\left|p(a,b)-p(0,b)\right|=\left|p(a,b)\right|\geq 0\,.\ \blacksquare$$

7.5. Пример ([59]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор, $1\leq\alpha<\infty$ и со $l^{\alpha}(L)$ да го означиме множеството од сите низи $a=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i\in L$, $i=1,2,3,...$ такви што

$$p(a,b)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i,b_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}<\infty, \text{ за секои } a,b\in l^{\alpha}(L).$$

Јасно, $l^{\alpha}(L)$ со операциите собирање и множење со реален број дефинирани како во случајот на просторот l^{α} е реален векторски простор.

Лесно се гледа дека функцијата p ги задоволува условите 1), 2) и 3) од дефиниција 7.3. Понатаму, од неравенството на паралелопипед и неравенството на Минковски следува дека за секои $a,b,c\in L$ важи

$$\begin{aligned} p(a+b,c)&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i+b_i,c_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\leq\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\|a_i,c_i\|+\|b_i,c_i\|\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}\\ &\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i,c_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i,c_i\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}=p(a,c)+p(b,c), \end{aligned}$$

што значи дека p е 2-полунорма на $l^{\alpha}(L)$. Меѓутоа, p не е 2-норма на $l^{\alpha}(L)$ бидејќи ако $a=\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\in l^{\alpha}(L)$, тогаш лесно се гледа дека $a'=\left\{\frac{a_i}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}\in l^{\alpha}(L)$ и притоа важи

$$p(a,a')=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|a_i,\frac{a_i}{i}\right\|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}=0,$$

но множеството $\{a,a'\}$ не е линеарно зависно во $l^{\alpha}(L)$. ■

7.6. Претходно изнесеното е причина за воведување на следнава дефиниција, односно за воведување на поимот 2*-полускаларен производ со чија помош се генерира 2-полунорма, аналогно како што 2-скаларниот производ генерира 2 -норма.

Дефиниција ([59]). Нека L е реален векторски простор со димензија поголема од 1 и $\langle \cdot,\cdot|\cdot\rangle$ е реална функција на $L\times L\times L$ таква што

1. ако $a,b\in L$ се линеарно зависни, тогаш $\langle a,a|b\rangle=0$,
2. $\langle a,b|c\rangle=\langle b,a|c\rangle$, за секои $a,b,c\in L$,
3. $\langle a,a|b\rangle=\langle b,b|a\rangle$, за секои $a,b,c\in L$,
4. $\langle \alpha a,b|c\rangle=\langle \alpha a,b|c\rangle$, за секои $a,b,c\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$,
5. $\langle a+a_1,b|c\rangle=\langle a,b|c\rangle+\langle a_1,b|c\rangle$, за секои $a,b,a_1,c\in L$.

Функцијата $\langle \cdot,\cdot|\cdot\rangle$ ја нарекуваме 2*-*полускаларен производ*, а $(L,\langle \cdot,\cdot|\cdot\rangle)$ го нарекуваме *простор со* 2*-*полускаларен производ.*

7.7. Пример ([59]). Нека $(L_1,(\cdot,\cdot)_1)$ и $(L_2,(\cdot,\cdot)_2)$ се предхилбертови простори. Со

$$(a,b|c)_i=\det\begin{pmatrix}(a,b)_i & (a,c)_i\\ (c,b)_i & (c,c)_i\end{pmatrix}=(a,b)_i\,\|c\|_i^2-(a,c)_i\cdot(b,c)_i,$$

каде $\|\cdot\|_i$ е нормата определена од скаларниот производ $(\cdot,\cdot)_i$, е дефиниран 2-скаларен производ на L_i, со што добиваме 2-предхилбертов простор $(L_1,(\cdot,\cdot)_1)$ и $(L_2,(\cdot,\cdot)_2)$. Понатаму, на $L_1\times L_2$ со (2) е определен 2*-полускаларен производ, а со (3) е определена 2-полунорма на $L_1\times L_2$.

Ако земеме $(L_1,(\cdot,\cdot)_1)=(L_2,(\cdot,\cdot)_2)=(L,(\cdot,\cdot))$, добиваме дека за секој предхилбертов простор $(L,(\cdot,\cdot))$ со (2) на векторскиот простор $L\times L$ е определен 2*-полускаларен производ, кој не е 2-скаларен производ, а со (3) е определена 2-полунорна, која не е 2-норма. ■

7.8. Теорема ([59]). Нека $(L,\langle \cdot,\cdot|\cdot\rangle)$ е простор со 2*-полускаларен производ. За секои $a,b,c\in L$ важи неравенството

$$|\langle a,b|c\rangle|\le\sqrt{\langle a,a|c\rangle}\sqrt{\langle b,b|c\rangle}. \tag{4}$$

Неравенството (4) е 2-*димензионална аналогија на неравенството на Коши-Буња-ковски-Шварц* во простор со 2*-полускаларен производ.

Доказ. Од претходно изнесеното следува дека функцијата $p: L\times L \to \mathbf{R}$ определена со $p(a,b)=\langle a,a\,|\,b\rangle$, за секои $a,b\in L$ е 2-полунорма. Сега, од теорема 1 b) следува $\langle a,a\,|\,b\rangle = p(a,b)\geq 0$, за секои $a,b\in L$. Понатаму, доказот е аналоген на доказот на теорема 2.1. ■

7.9. Последица ([59]). За секои $a,c\in L$ важи $\langle a,c\,|\,c\rangle = \langle a,c\,|\,a\rangle = 0$.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7.8 и аксиома i) во дефиниција 7.6. ■

7.10. Лема ([59]). Нека $(L,\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot\rangle)$ е простор со 2*-полускаларен производ.

а) За секои $a,b,c\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи $\langle a,b\,|\,\alpha c\rangle = \alpha^2\langle a,b\,|\,c\rangle$

б) За секои $a,b,c,c'\in L$ важи $\langle a,b\,|\,c+c'\rangle - \langle a,b\,|\,c-c'\rangle = \langle c,c'\,|\,a+b\rangle - \langle c,c'\,|\,a-b\rangle$

в) За секои $a,b,c,c'\in L$ важи

$$\langle a,b\,|\,c+c'\rangle = \langle a,b\,|\,c\rangle + \langle a,b\,|\,c'\rangle + \tfrac{1}{2}\left[\langle c,c'\,|\,a+b\rangle - \langle c,c'\,|\,a-b\rangle\right]$$

г) Ако $\langle a,b\,|\,c\rangle = \langle a,b\,|\,c'\rangle = 0,$ тогаш $\langle a,b\,|\,c+c'\rangle = -\langle a,b\,|\,c-c'\rangle$.

д) За секои $a_1,a_2,...,a_n\in L$, $n\geq 2$ такви што $\langle a_i,a_j\,|\,a_k\rangle = 0$, за $i\neq j\neq k\ \neq i$ и за секои реални броеви $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ важи $\left\langle a_1,a_2\,|\,\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right\rangle = \sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\alpha_i\alpha_j\left\langle a_1,a_2\,|\,a_i+a_j\right\rangle$.

Доказ. а) Аналогно на доказот на лема 1.3.

б) Аналогно на доказот на теорема 1.4.

в) Аналогно на доказот на лема 1.5.

г) Аналогно на доказот на последица 1.6.

д) Аналогно на доказот на последица 2.3. ■

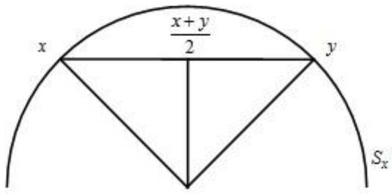
ГЛАВА III
СТРОГО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА СТРОГО КОНВЕКСЕН 2-НОРМИРАН ПРОСТОР. ЕЛЕМЕНТАРНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ

1.1. Дефиниција ([11]). Нека $x, y \in L$ се ненулти елементи и со $V(x, y)$ да го означиме потпросторот од L генериран од векторите x и y. Векторскиот 2-нормиран простор $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ го нарекуваме *строго конвексен* ако од

$\|x, z\| = \|y, z\| = 1$, $\|x + y, z\| = \|x, z\| + \|y, z\|$ и $z \notin V(x, y)$, за $x, y, z \in L$, следува дека $x = y$.■

Пример. Строго конвексен 2-нормиран простор за форма на единечна кружница е даден на цртежот десно.



1.2. Теорема ([50]). За векторскиот 2-нормиран простор $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен,

ii) Ако $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$, $x \neq y$ и $z \notin V(x, y)$, тогаш $\left\|\frac{1}{2}(x + y), z\right\| < 1$.

Доказ. *i*) $\Rightarrow$ *ii*). Нека $\|x, z\| = \|y, z\| = 1$, $x \neq y$ и $z \notin V(x, y)$. Тогаш од неравенството на паралелопипед следува

$$\left\|\frac{1}{2}(x + y), z\right\| \leq \frac{1}{2}\|x, z\| + \frac{1}{2}\|y, z\| = 1.$$

Ако $\left\|\frac{1}{2}(x + y), z\right\| = 1$, тогаш

$$\|x + y, z\| = 2 = \|x, z\| + \|y, z\|$$

и како L е строго конвексен добиваме $x = y$, што е противречност. Значи, $\left\|\frac{1}{2}(x + y), z\right\| < 1$.

ii) $\Rightarrow$ *i*). Нека $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$, $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $z\notin V(x,y)$. Ако $x\neq y$, тогаш

$$1>\left\|\tfrac{1}{2}(x+y),z\right\|=\tfrac{1}{2}\|x+y,z\|=\tfrac{1}{2}\|x,z\|+\tfrac{1}{2}\|y,z\|=1,$$

што е противречност. Значи, $x=y$, т.е. $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен. ■

1.3. Теорема ([11]). 2-предхилбертов простор е строго конвексен.

Доказ. Нека L е 2-предхилбертов простор и нека $x,y,z\in L$ се такви што $\|x,z\|=\|y,z\|=1$, $x\neq y$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш од равенството на паралелопипед следува

$$\left\|\tfrac{x+y}{2},z\right\|^2+\left\|\tfrac{x-y}{2},z\right\|^2=1. \qquad (1)$$

Но, $x\neq y$ и $z\notin V(x,y)$, па затоа $\left\|\frac{x-y}{2},z\right\|>0$ и од равенството (1) следува $\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|<1$. Конечно, од теорема 1.2 следува дека L е строго конвексен. ■

1.4. Пример ([45]). Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\|x,y\|=\sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}}\left|\det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|,\ x=(x_i)_{i=1}^\infty,\ y=(y_i)_{i=1}^\infty\in l^\infty$$

е дефинирана 2-норма, што значи дека $(l^\infty,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор. За векторите

$$x=\left(1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},...,1-\tfrac{1}{2^n},...\right),\ y=\left(0,1-\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2^2},...,1-\tfrac{1}{2^{n-1}},...\right) \text{ и } z=(1,0,0,...,0,...)$$

важи $\|x,z\|=\|y,z\|=\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|=1$ и $z\notin V(x,y)$, но $x\neq y$, што значи дека l^∞ не е строго конвексен 2-нормиран простор.

1.5. Пример ([49]). Нека (Y,M) е измерлив простор, μ е позитивна мера на M, $X=L^p(\mu)$, $p>1$ е просторот $X=\left\{f : f:Y\to\mathbf{C},\ \int_Y |f|^p d\mu<+\infty\right\}$. Функцијата $\|\cdot,\cdot\|:L^p(\mu)\times L^p(\mu)\to\mathbf{R}$ определена со:

$$\|f,g\|=\left\{\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ g(x) & g(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

е 2-норма на $X=L^p(\mu)$. Нека $\|f,h\|=\|g,h\|=1$, $f\neq g$ и $h\notin V(f,g)$. Тогаш од неравенството на Минковски следува дека

$$\|f+g,h\|=\left(\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} g(x) & g(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} g(x) & g(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f,h\|+\|g,h\|=1+1=2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои $\alpha>0$ таков што

$$\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}=\alpha\det\begin{pmatrix} g(x) & g(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix},$$

скоро секаде. Меѓутоа, бидејќи $\|f,h\|=\|g,h\|=1$ добиваме

$$1=\|f,h\|=\left\{\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & f(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\int\limits_{Y\times Y}\left|\alpha\det\begin{pmatrix} g(x) & g(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\alpha\left\{\int\limits_{Y\times Y}\left|\det\begin{pmatrix} g(x) & g(y)\\ h(x) & h(y)\end{pmatrix}\right|^p d(\mu\times\mu)\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\alpha\|g,h\|=\alpha\cdot 1=\alpha.$$

Последното противречи на $f\neq g$, па затоа $\|f+g,h\|<2$, т.е. $\left\|\frac{f+g}{2},h\right\|<1$, што според теорема 1.2 значи дека 2-нормираниот простор $X=L^p(\mu)$ е строго конвексен. ■

1.6. Теорема ([54]). Ако $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е реален 2-нормиран простор со средно строго конвексна по модул $c>0$ норма, тогаш L е строго конвексен.

Доказ. Нека L е реален 2-нормиран простор со 2-норма средно строго конвексна по модул $c>0$. Ако $\|x,z\|=\|y,z\|=1$, $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, за $x,y,z\in L$, тогаш од

$$1=\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|^2 \leq \frac{\|x,z\|^2+\|y,z\|^2}{2}-\frac{c}{4}\|x-y,z\|^2=1-\frac{c}{4}\|x-y,z\|^2,$$

за секои $x,y,z\in L$, $z\notin V(x,y)$ следува $\|x-y,z\|=0$. Но, од својствата на 2-нормата последното равенство е можно ако и само ако множеството $\{x-y,z\}$ е линеарно зависно и како $z\notin V(x,y)$, добиваме дека $x=y$, т.е. L е строго конвексен. ■

1.7. Забелешка. Бидејќи секоја строго конвексна норма со модул $c>0$ е средно строго конвексна норма со модул $c>0$ од претходната теорема следува дека 2-нормиран простор со строго конвексна норма со модул $c>0$ е строго конвексен.

1.8. Теорема ([12]). За векторскиот 2-нормиран простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

а) $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен.

б) Од $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$ следува $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

в) Од $\|x-u,z\|=\alpha\|x-y,z\|, \|y-u,z\|=(1-\alpha)\|x-y,z\|$, $\alpha\in(0,1)$ и $z\notin V(x-u,y-u)$ следува $u=(1-\alpha)x+\alpha y$.

Доказ. *а)* $\Rightarrow$ *б)*. Нека претпоставиме дека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен и нека $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш $\left\|\frac{x}{\|x,z\|},z\right\|=\left\|\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|=1$ и ако во теорема И 1.5 земеме $x_1=x, x_2=y$, $\alpha_1=\frac{1}{\|x,z\|}, \alpha_2=\frac{1}{\|y,z\|}$ добиваме

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|=\frac{1}{\|x,z\|}\|x,z\|+\frac{1}{\|y,z\|}\|y,z\|=2.$$

Но, $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен, па од теорема 1.2 следува $\frac{x}{\|x,z\|}=\frac{y}{\|y,z\|}$, т.е. $y=\alpha x$, за $\alpha=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}>0$.

б) $\Rightarrow$ *в)*. Нека претпоставиме дека е точно тврдењето б). Од

$$\|x-u,z\|=\alpha\|x-y,z\|,\ \|y-u,z\|=(1-\alpha)\|x-y,z\|,\ \alpha\in(0,1) \text{ и } z\notin V(x-u,y-u)$$

следува $\|x-u+(u-y),z\|=\|x-u,z\|+\|u-y,z\|$ и како $z\notin V(x-u,u-y)$ добиваме $u-y=\beta(x-u)$, за некој $\beta>0$. Според тоа,

$$(1-\alpha)\|x-y,z\|=\|y-u,z\|=\beta\|x-u,z\|=\beta\alpha\|x-y,z\|,$$

па затоа $\beta=\frac{1-\alpha}{\alpha}$, од каде добиваме $u-y=\frac{1-\alpha}{\alpha}(x-u)$, т.е. $u=(1-\alpha)x+\alpha y$.

в) $\Rightarrow$ *а*). Нека претпоставиме дека е точно тврдењето *в*) и нека

$$\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|,\ \|x,z\|=\|y,z\|=1 \text{ и } z\notin V(x,y).$$

За $u=0$, од добиваме

$$\|x-u,z\|=\tfrac{1}{2}\|x-(-y),z\|,\ \|u-y,z\|=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\|x-(-y),z\|,\ \tfrac{1}{2}\in(0,1) \text{ и } z\notin V(x-u,y-u),$$

па затоа од в) следува

$$0=\left(1-\tfrac{1}{2}\right)x+\tfrac{1}{2}(-y),\ \text{ т.е. } x=y.$$

Значи, $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор. ■

1.9. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

(1) $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен.

(2) Ако $\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш $x=y$.

(3) Ако $\|x+\alpha y,z\|=2\|x,z\|$ за некој $\alpha>0$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш $x=\alpha y$, и $\alpha=1$ ако $\|x,z\|=\|y,z\|$.

(4) Ако $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш $x=\beta y$ за некој $\beta>0$.

(5) Ако $\|x-w,z\|=\|x-y,z\|+\|y-w,z\|$ и $z\notin V(x-y,y-w)$, тогаш $y=(1-\gamma)x+\gamma w$, за некој $\gamma\in(0,1)$.

(6) Ако $\|x+y,z\|=\|x-y,z\|=\|x,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш $y=0$.

(7) Ако $\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|\neq 0$ и $x\neq y$, тогаш $z=\delta(x-y)$ за некој $\delta\neq 0$.

Доказ. Да ги разгледаме следниве тврдења:

(3') Ако $\|x+\alpha y,z\|=2\|x,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, каде $\alpha=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}$, тогаш $x=\alpha y$.

(4') Ако $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш $\|y,z\|x=\|x,z\|y$.

(7') Ако $\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|\neq 0$ и $x\neq y$, тогаш $\|x,y\|\neq 0$ и $z=\pm\frac{\|x,z\|}{\|x,y\|}(x-y)$

Доказот на теоремата ќе го реализираме докажувајќи ги импликациите и еквиваленциите: $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3')\Rightarrow(4')\Rightarrow(1)$, $(3')\Rightarrow(3)\Rightarrow(2)$, $(4)\Leftrightarrow(5), (2)\Leftrightarrow(6)$ и $(4')\Rightarrow(4)\Rightarrow(2)\Rightarrow(7')\Rightarrow(7)\Rightarrow(2)$.

$(1)\Rightarrow(2)$. Ако

$$\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|=\gamma,\ \gamma\neq 0,$$

од $z\notin V(x,y)$ следува

$$\frac{1}{2}\left\|x+y,\frac{z}{\gamma}\right\|=\left\|x,\frac{z}{\gamma}\right\|=\left\|y,\frac{z}{\gamma}\right\|=1.$$

Но, L е строго конвексен, па затоа $x=y$.

$(2)\Rightarrow(3')$. Бидејќи $\|\alpha y,z\|=\|x,z\|=\frac{1}{2}\|x+\alpha y,z\|$, од (2) следува $x=\alpha y$.

$(3')\Rightarrow(4')$. Нека претпоставиме дека $\|x,z\|\leq\|y,z\|$ и $\alpha=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|&=\left\|x+\alpha y+\left(\|y,z\|-\|x,z\|\right)\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\\&\leq\|x+\alpha y,z\|+\|y,z\|-\|x,z\|\\&\leq 2\|x,z\|+\|y,z\|-\|x,z\|\\&=\|x,z\|+\|y,z\|.\end{aligned}$$

Ако равенството во (4') е исполнето, тогаш $\|x+\alpha y,z\|=2\|x,z\|$, па од (3') следува $x=\alpha y=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y$.

Во случај кога $\|x,z\|\geq\|y,z\|$, условот (3') го запишуваме во обликот: Ако $\left\|\frac{x}{\alpha}+y,z\right\|=2\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, каде $\alpha=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}$, тогаш $x=\alpha y$. Сега тврдењето (4') следува аналогно.

$(4')\Rightarrow(1)$. Ако $\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|=1$, тогаш $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и затоа од (4') следува $\|y,z\|x=\|x,z\|y$, што значи $x=y$.

Импликациите $(3')\Rightarrow(3)\Rightarrow(2)$, $(4')\Rightarrow(4)$ и $(7')\Rightarrow(7)$ се очигледни.

$(4)\Rightarrow(2)$. Нека $\frac{1}{2}\|x+y,z\|=\|x,z\|=\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш од (4) следува дека $x=\beta y$ за некој $\beta>0$. Со замена во $\|x,z\|=\|y,z\|$ добиваме $\beta=1$, т.е. $x=y$.

$(2) \Rightarrow (7')$. Ако $x \neq y$, тогаш од (2) следува дека $z = \beta x + \gamma y$, за некои $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Така

$$\|x, z\| = \|x, \beta x + \gamma y\| = |\gamma| \cdot \|x, y\|$$

и

$$\|y, z\| = \|y, \beta x + \gamma y\| = |\beta| \cdot \|x, y\|.$$

Затоа, $\|x, y\| \neq 0$ и $|\beta| = |\gamma| = \frac{\|x,z\|}{\|x,y\|}$, од што следува $z = \pm \frac{\|x,z\|}{\|x,y\|}(x - y)$.

$(7) \Rightarrow (2)$. Ако $z \notin V(x, y)$, тогаш $z \neq \delta(x - y)$, па од (7) следува $x = y$.

$(4) \Rightarrow (5)$. Ако условот во (5) важи, тогаш од (4) следува дека $x - y = \beta(y - w)$, за некој $\beta > 0$. Затоа, $y = (1 - \gamma)x + \gamma w$, каде $\gamma = \frac{\beta}{\beta + 1}$ и $\gamma \in (0,1)$.

$(5) \Rightarrow (4)$. Заклучокот во (5) го запишуваме во обликот $y - w = (1 - \gamma)(x - w)$. Сега во (5) заменуваме $x - y$ со x и $y - w$ со y, соодветно, па затоа $x - w$ со $x + y$ и добиваме $y = (1 - \gamma)(x + y)$, т.е. $x = \beta y$, каде $\beta = \frac{\gamma}{1-\gamma} > 0$.

$(2) \Leftrightarrow (6)$. Во (2) заменуваме x со $x + y$ и y со $x - y$, соодветно и го добиваме (6). Важи и обратното. ■

1.10. Во теорема I 1.5 докажавме дека во 2-нормиран простор

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n, z\| = \|x_1, z\| + \|x_2, z\| + ... + \|x_n, z\|, \tag{2}$$

ако и само ако

$$\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n, z\| = \alpha_1 \|x_1, z\| + \alpha_2 \|x_2, z\| + ... + \alpha_n \|x_n, z\|, \tag{3}$$

за секои $\alpha_i > 0, i = 1, 2, ..., n$. Во случај кога просторот $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен, точна е следнава теорема.

Теорема ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор, и векторите $z, x_i \in L$, $i = 1, 2, ..., n$ се такви што множествата $\{x_i, z\}, i = 1, 2, ..., n$ се линеарно независни. Тогаш равенствата (2) и (3) се еквивалентни на равенствата

$$\frac{x_1}{\|x_1, z\|} = \frac{x_2}{\|x_2, z\|} = ... = \frac{x_n}{\|x_n, z\|}. \tag{4}$$

Доказ. Ако се исполнети равенствата (4), тогаш за секои $\alpha_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ важи

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i, z\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \|x_i, z\| \frac{x_i}{\|x_i, z\|}, z\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \|x_i, z\| \frac{x_1}{\|x_1, z\|}, z\right\|$$
$$= \left\|\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \frac{\|x_i, z\|}{\|x_1, z\|}\right) x_1, z\right\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \frac{\|x_i, z\|}{\|x_1, z\|}\right)\|x_1, z\|$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \|x_i, z\|,$$

т.е. точно е равенството (3).

Обратно, нека е исполнето равенството (2). За секој $i = 2,3,...,n$ важи $\|x_1 + x_i, z\| \le \|x_1, z\| + \|x_i, z\|$. Од друга страна

$$\|x_1 + x_i, z\| \ge \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k, z\right\| - \left\|\sum_{k\ne 1,i} x_k, z\right\| = \sum_{k=1}^{n}\|x_k, z\| - \left\|\sum_{k\ne 1,i} x_k, z\right\|$$
$$\ge \sum_{k=1}^{n}\|x_k, z\| - \sum_{k\ne 1,i}\|x_k, z\| = \|x_1, z\| + \|x_i, z\|,$$

и затоа $\|x_1 + x_i, z\| = \|x_1, z\| + \|x_i, z\|$. Но, L е строго конвексен, па од теорема 1.8 следува дека $x_1 = \alpha_i x_i$, за $i = 2,3,..,n$. Значи, $\|x_1, z\| = \alpha_i \|x_i, z\|$, за $i = 2,3,..,n$, односно $\alpha_i = \frac{\|x_1, z\|}{\|x_i, z\|}$, за $i = 2,3,..,n$. Според тоа, $\frac{x_1}{\|x_1, z\|} = \frac{x_i}{\|x_i, z\|}$, за $i = 2,3,..,n$, т.е. точни се равенствата (4). ■

1.11. Во последица I 4.10 докажавме дека, ако множествата $\{x, z\}$ и $\{y, z\}$ се линеарно независни, тогаш точни се неравенствата

$$\|x + y, z\| \le \|x, z\| + \|y, z\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x, z\|} + \frac{y}{\|y, z\|}, z\right\|\right)\cdot \min\{\|x, z\|, \|y, z\|\}, \tag{5}$$

$$\|x + y, z\| \ge \|x, z\| + \|y, z\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x, z\|} + \frac{y}{\|y, z\|}, z\right\|\right)\cdot \max\{\|x, z\|, \|y, z\|\}. \tag{6}$$

Во следната теорема ќе дадеме потребен и доволен услов за да во случај на строго конвексен простор во неравенствата (5) и (6) важи знак за равенство.

Теорема ([56]). Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор и $x, y, z \in L$ такви што множествата $\{x, z\}$ и $\{y, z\}$ се линеарно независни, при што важи $\|x, z\| < \|y, z\|$. Тогаш

$$\|x+y,z\|+\left(2-\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\right)\|x,z\|=\|x,z\|+\|y,z\| \tag{7}$$

ако и само ако постои $\alpha\in(0,1)$ таков што $x=\pm\alpha y$.

Доказ. Од $\|x,z\|<\|y,z\|$ и од неравенството на паралелопипед следува

$$\|x+y,z\|=\left\|\frac{\|x,z\|}{\|x,z\|}x+\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y+\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)y,z\right\|\leq\|x,z\|\cdot\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|+\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)\|y,z\|$$

$$=\|x,z\|\cdot\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|+\|y,z\|-\|x,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|-\left(2-\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\right)\|x,z\|,$$

(8)

што значи дека равенството (7) е точно ако и само ако во неравенството (8) важи знак за равенство, т.е. ако и само ако

$$\left\|x+\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y+\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)y,z\right\|=\left\|x+\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y,z\right\|+\left\|\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)y,z\right\|. \tag{9}$$

Но, L е строго конвексен, па од теорема 1.10 следува дека равенството (9) е еквивалентно со равенството

$$\frac{x+\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y}{\left\|x+\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y,z\right\|}=\frac{\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)y}{\left\|\left(1-\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}\right)y,z\right\|}, \tag{10}$$

т.е. со равенството

$$x=\left(\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|-1\right)\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y\,.$$

Нека

$$\alpha=\left(\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|-1\right)\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}.$$

Тогаш $x=\alpha y$. Но, $\|x,z\|<\|y,z\|$, па затоа $0<|\alpha|<1$.

Обратно, ако $x=\alpha y$, каде $0<|\alpha|<1$, тогаш

$$\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|}=\left(1+\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)\frac{y}{\|y,z\|}.$$

Но, $1+\frac{\alpha}{|\alpha|}>0$, па затоа

$$\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|=1+\frac{\alpha}{|\alpha|},$$

т.е. точно е равенството

$$\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|}=\left\|\frac{x}{\|x,z\|}+\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|\frac{y}{\|y,z\|}.$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството (10), односно со равенството (9), па затоа во (8) важи знак за равенство т.е. точно е равенството (7). ■

2. НОВИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ НА СТРОГО КОНВЕКСЕН 2-НОРМИРАН ПРОСТОР

2.1. Дефиниција ([61]). Нека $x, y \in L$. Множеството

$$[x,y]=\{\alpha x+(1-\alpha)y \mid \alpha\in[0,1]\}$$

го нарекуваме *отсечка (сегмент) со крајни точки* x и y. Множеството

$$(x,y)=\{\alpha x+(1-\alpha)y \mid \alpha\in(0,1)\}$$

го нарекуваме *внатрешност на отсечка (сегмент) со крајни точки* x и y.

2.2. Теорема ([61]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

1) $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен.

2) Ако $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, за $x,y,z\in L$, тогаш множеството $[x,y]=\{\alpha x+(1-\alpha)y \mid \alpha\in[0,1]\}$ е линеарно зависно.

Доказ. Нека е исполнет условот 2). Од $x,y\in[x,y]$ следува дека множеството $\{x,y\}$ е линеарно зависно, т.е. постои $\alpha\in\mathbf{R}$ таков што $y=\alpha x$. Ако замениме во условот $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и земеме предвид дека $z\notin V(x,y)$ добиваме $|1+\alpha|=1+|\alpha|$, од каде следува $\alpha>0$. Според тоа, $y=\alpha x$ за некој $\alpha>0$, па од теорема 1.8 следува дека L е строго конвексен.

Нека L е строго конвексен. Ако $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш од теорема 1.8 следува дека $y=\alpha x$ за некој $\alpha>0$. Нека $x_t=tx+(1-t)y$, за $t\in[0,1]$. Имаме $x_t=(t+(1-t)\alpha)x$, за $t\in[0,1]$ и како за секои $t,p\in[0,1]$ важи $t+(1-t)\alpha>0$ и $p+(1-p)\alpha>0$ добиваме

$$x_t = \left(t+(1-t)\right)\alpha x = \frac{t+(1-t)\alpha}{p+(1-p)\alpha}\left(p+(1-p)\alpha\right)x_p = \frac{t+(1-t)\alpha}{p+(1-p)\alpha}x_p ,$$

што значи дека за секои $t, p \in [0,1]$ множеството $\{x_t, x_p\}$ е линеарно зависно, па затоа множеството $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha) y \mid \alpha \in [0,1]\}$ е линеарно зависно. ■

2.3. Дефиниција ([61]). Нека L е 2-нормиран простор, $x, z \in L$ и $r > 0$. Множеството

$$B_z(x,r) = \{y \in L \mid \| y - x, z \| < r\}$$

го нарекуваме *отворена топка во однос на* z *со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B_z(0,1)$ ја нарекуваме *единична отворена топка во однос на* z. Множеството

$$B_z[x,r] = \{y \in L \mid \| y - x, z \| \le r\}$$

го нарекуваме *затворена топка во однос на* z *со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $B_z[0,1]$ ја нарекуваме *единична затворена топка во однос на* z. Множеството

$$S_z(x,r) = \{y \in L \mid \|y - x, z\| = r\}$$

го нарекуваме *сфера во однос на* z *со центар во* x *и радиус* r. Ако $x = 0$ и $r = 1$, тогаш $S_z(0,1)$ ја нарекуваме *единична сфера во однос на* z. Јасно,

$$B_z(x,r) \subseteq B_z[x,r] \text{ и } B_z[x,r] = B_z(x,r) \cup S_z(x,r).$$

2.4. Лема ([61]). Нека L е 2-нормиран простор и $x, y, z \in L$. Ако

$$\|x + y, z\| = \|x, z\| + \|y, z\|,$$

тогаш за секои $t, s \ge 0$ важи

$$\|tx + sy, z\| = t\|x, z\| + s\|y, z\| \ . \tag{1}$$

Ако $z \notin V(x, y)$, тогаш $\left[\frac{x}{\|x,z\|}, \frac{y}{\|y,z\|}\right] \subseteq S_z(0,1)$.

Доказ. Нека $0 \le s \le t$. Тогаш од својствата на 2-нормата следува

$$\begin{aligned} t\|x,z\|+s\|y,z\| &\geq \|tx+sy,z\| \\ &= \|t(x+y)-(t-s)y,z\| \\ &\geq \|t(x+y),z\|-\|(t-s)y,z\| \\ &= t\|x+y,z\|-(t-s)\|y,z\| \\ &= t\|x,z\|+t\|y,z\|-t\|y,z\|+s\|y,z\| \\ &= t\|x,z\|+s\|y,z\|, \end{aligned}$$

т.е. во овој случај точно е равенството (1). Аналогно се разгледува случајот кога $0\leq t\leq s$.

Нека $z\notin V(x,y)$. Ако $\alpha\in[0,1]$, тогаш од равенството (1) следува

$$\left\|\alpha\frac{x}{\|x,z\|}+(1-\alpha)\frac{y}{\|y,z\|},z\right\|=\frac{\alpha}{\|x,z\|}\|x,z\|+\frac{1-\alpha}{\|y,z\|}\|y,z\|=1,$$

од каде следува дека $\left[\frac{x}{\|x,z\|},\frac{y}{\|y,z\|}\right]\subseteq S_Z(0,1)$. ∎

2.5. Теорема ([61]). 2-нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако од $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $[x,y]\subseteq S_Z(0,1)$ следува $x=y$.

Доказ. Нека L е строго конвексен 2-нормиран простор и нека се исполнети условите $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $[x,y]\subseteq S_Z(0,1)$. Тогаш, од $[x,y]\subseteq S_Z(0,1)$, за $\alpha=\frac{1}{2}$ имаме

$$\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}x+\left(1-\frac{1}{2}\right)y\in S_Z(0,1),$$

што значи дека $\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|=1$ и како L е строго конвексен добиваме $x=y$.

Обратно, нека од $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $[x,y]\subseteq S_Z(0,1)$ следува $x=y$. Нека претпоставиме дека $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш од лема 2.4 следува $\left[\frac{x}{\|x,z\|},\frac{y}{\|y,z\|}\right]\subseteq S_Z(0,1)$, што според претпоставката значи дека $\frac{x}{\|x,z\|}=\frac{y}{\|y,z\|}$, т.е. $x=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y$. Конечно, од теорема 1.8 следува дека L е строго конвексен 2-нормиран простор. ∎

2.6. Теорема ([61]). 2-нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако е исполнет условот од $x, y \in S_Z(0,1)$, $x \neq y$ следува $\|\alpha x+\beta y, z\|<1$, за $\alpha, \beta>0$ и $\alpha+\beta=1$. (2)

Доказ. Нека е исполнет условот (2) и нека $\|x, z\|=\|y, z\|=1$, $x \neq y$ и $z \notin V(x, y)$. Тогаш $x, y \in S_Z(0,1)$ и ако земеме $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ добиваме $\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\|<1$, што според теорема 1.2 значи дека L е строго конвексен.

Обратно, нека претпоставиме дека постојат $x, y \in S_Z(0,1), x \neq y$ и $\alpha, \beta>0$, $\alpha+\beta=1$ такви што $\|\alpha x+\beta y, z\|$=1. Од овде следува дека постојат $x, y, z \in L$ такви што $\|x, z\|=\|y, z\|=1$, $x \neq y$ и $\alpha, \beta>0$, $\alpha+\beta=1$ такви што

$$\|\alpha x+\beta y, z\|=\|\alpha x, z\|+\|\beta y, z\|.$$

Според лема 2.4 за секои $t, s \geq 0$ важи

$$\|t(\alpha x)+s(\beta y), z\|=t\|\alpha x, z\|+s\|\beta y, z\|.$$

Ако во последното равенство ставиме $t=\frac{1}{2\alpha}$, $s=\frac{1}{2\beta}$, добиваме дека постојат $x, y, z \in L$ такви што $\|x, z\|=\|y, z\|=1$, $x \neq y$ и $\left\|\frac{x+y}{2}, z\right\|=1$, што според теорема 1.2 значи дека просторот L не е строго конвексен. ■

2.7. За следната карактеризација на строг конвексните 2-нормирани простори ќе ги користиме екстремалните точки на конвексните множества. Нека C е конвексно множество во 2-нормираниот простор L.

Дефиниција ([61]). Точката $z \in C$ ја нарекуваме *екстремална* (*крајна*) *точка за множеството* C ако од $z=tx+(1-t)y$, за некој $t \in(0,1)$ и некои $x, y \in C$ следува $x=y$.

2.8. Теорема ([61]). 2-нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако за секој $z \in L$ секоја точка од единичната сфера во однос на z е екстремална точка за затворената единична топка во однос на z.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Ќе докажеме дека секоја точка на множеството $S_Z(0,1)$ е екстреманлна за множеството $B_Z[0,1]$. Нека $u \in S_Z(0,1)$ и нека $u=tx+(1-t)y$ за некој $t \in(0,1)$ и некои $x, y \in B_Z[0,1]$. Од $u \in S_Z(0,1)$ следува $\|u, z\|=1$

и како $x, y \in B_z[0,1]$ добиваме $\|x,z\| \le 1, \|y,z\| \le 1$. Ќе докажеме дека $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$. Навистина, во спротивно имаме

$$1 = \|u,z\| = \|tx + (1-t)y, z\| \le t\|x,z\| + (1-t)\|y,z\| < 1,$$

што е противречност. Според тоа, $\|x+y,z\| \le \|x,z\| + \|y,z\| = 2$. Ќе докажеме дека $\|x+y,z\| = 2$. Навистина, во спротивно имаме

$$\begin{aligned} 1 = \|u,z\| &= \|tu + (1-t)u, z\| \\ &= \|t[tx + (1-t)y] + (1-t)[tx + (1-t)y], z\| \\ &= \|t^2 x + t(1-t)(x+y) + (1-t)^2 y, z\| \\ &< t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1, \end{aligned}$$

што е противречност. Според тоа, $\|x,z\| = \|y,z\| = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| = 1$ и како L е строго конвексен добиваме $x = y$, т.е. u е екстремална точка за затворената единична топка во однос на z.

Обратно, нека претпоставиме $\|x,z\| = \|y,z\| = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| = 1$ и $z \notin V(x,y)$, за $x, y, z \in L$. Според тоа, точката $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ е од единичната сфера во однос на z, па затоа таа е екстремална точка за затворената единична топка во однос на z, што значи $x = y$, т.е. L е строго конвексен. ■

2.9. Пример ([61]). а) C_0 простор од низи $x = (x_n)_1^\infty$, т.ш. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\|x,y\|$ не е строго конвексен.■

б) l^p, $1 < p < \infty$ е строго конвексен 2-нормиран простор.

в) C_0 не е строго конвексен 2-нормиран простор како потпростор од l^∞.

г) $L^1[0,1]$ и $L^\infty[0,1]$ не се строго конвексни 2-нормирани простори.

д) На векторскиот простор $\mathbf{C}[0,1]$, од непрекинати функции на интервалот $[0,1]$, функцијата $\|\cdot,\cdot\| : \mathbf{C}[0,1] \times \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{R}$ определена со

$$\|x,y\| = \max_{s,t\in[0,1]} \left| \det \begin{pmatrix} x(t) & x(s) \\ y(t) & y(s) \end{pmatrix} \right|.$$

е 2-норма, што значи дека $\left(\mathbf{C}[0,1],\|\cdot,\cdot\|\right)$ е 2-нормиран простор. За функциите

$$x(t)=1,\ y(t)=1-t,\ z(t)=t^2\in\mathbf{C}[0,1]$$

важи

$$\|x,z\|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ t^2 & s^2\end{pmatrix}\right|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|s^2-t^2\right|=1 \text{ и}$$

$$\|y,z\|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|\det\begin{pmatrix}1-t & 1-s\\ t^2 & s^2\end{pmatrix}\right|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|s^2-t^2+st^2-ts^2\right|=1,$$

што значи дека $x,y\in S_z(0,1)$. Понатаму, функцијата $u(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}y(t)=1-\frac{t}{2}$ важи

$$\|u,z\|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|\det\begin{pmatrix}1-\frac{t}{2} & 1-\frac{s}{2}\\ t^2 & s^2\end{pmatrix}\right|=\max_{s,t\in[0,1]}\left|s^2-t^2-\tfrac{1}{2}ts^2+\tfrac{1}{2}st^2\right|=1,$$

што значи дека $u\in S_z(0,1)$ и како таа не е екстремална за $B_z[0,1]$ заклучуваме дека просторот $\left(\mathbf{C}[0,1],\|\cdot,\cdot\|\right)$ не е строго конвексен. ■

2.10. За следната карактеризација на строгите конвексни 2-нормирани простори ќе го воведеме поимот минимална точка во однос на множеството $M\subseteq L$.

Дефиниција ([61]). За точката $v\in L$ ќе велиме дека е *минимална во однос на множеството* M ако од

$\|u-m,z\|\le\|v-m,z\|,\ z\notin V(u-M)=V(\{u-m\,|\,m\in M\}),\ u,z\in L$ и за секој $m\in M$

следува $u=v$.

2.11. Теорема ([61]). 2-нормираниот простор L е строго конвексен ако и само ако за секои $x,y\in L$ точките од сегментот $[x,y]=\{tx+(1-t)y\,|\ t\in[0,1]\}$ се минимални во однос на множеството $\{x,y\}$.

Доказ. Нека L е строго конвексен. Јасно, точките x и y се минимални во однос на множеството $\{x,y\}$, па затоа нека $v_t=tx+(1-t)y$, $t\in(0,1)$ е произволна точка од внатрешноста на сегментот $[x,y]$. Нека претпоставиме дека за некој $u\in L$ и $z\notin V(x,y)$ важи

$$\|u-x,z\| \le \|v_t - x,z\| = (1-t)\|x-y,z\| \tag{3}$$

$$\|u-y,z\| \le \|v_t - y,z\| = t\|x-y,z\|. \tag{4}$$

Понатаму, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\|x-y,z\| \le \|x-u,z\| + \|u-x,z\| \le (1-t)\|x-y,z\| + t\|x-y,z\| = \|x-y,z\|$$

па затоа точни се равенствата

$$\|u-x,z\| = (1-t)\|x-y,z\|,\ \|u-y,z\| = t\|x-y,z\|$$

и како $(t \in 0,1)$ и $z \notin V(x-u, y-u)$, од теорема 1.8 следува $u = tx + (1-t)y = v_t$, што значи дека точката v_t е минимална во однос на множеството $\{x, y\}$.

Обратно, нека за секои $a, b \in L$ точките од сегментот $[a,b]$ се минимални за множеството $\{a,b\}$. Ако $\|x,z\| = \|y,z\| = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| = 1$ и $z \notin V(x,y)$, тогаш

$$\|0-x,z\| = \|x,z\| = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| \le \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y) - x, z\right\|,$$

$$\|0-(-y),z\| = \|y,z\| = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| \le \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y) - (-y), z\right\|$$

и $z \notin V(x,y) = V(0-x, 0-(-y))$. Но, точката $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y)$ припаѓа на сегментот $[x,-y]$, што значи дека таа е минимална во однос на множеството $\{x,-y\}$, па затоа $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-y) = 0$, т.е. $x = y$, односно L е строго конвексен. ■

3. СТРОГА КОНВЕКСНОСТ НА НОРМИРАН ПРОСТОР ВО КОЈ НОРМАТА Е ГЕНЕРИРАНА ОД 2-НОРМА

3.1. Нека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор и $\{a,b\}$ е линеарно независно подмножество од L. Во претходните разгледувања докажавме дека

$$\|x\| = \left(\|x,a\|^p + \|x,b\|^p\right)^{1/p},\ x \in L,\ p \ge 1, \tag{1}$$

$$\|x\| = \max\{\|x,a\|, \|x,b\|\},\ x \in L \tag{2}$$

се норми на L, кои ги означивме со $\|\cdot\|_{a,b,p}$ и $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$, соодветно. Природно се поставува прашањето дали строгата конвексност на $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ ја повлекува строгата конвексност на просторите $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$, $p\ge 1$ и $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$. Во следните разгледувања ќе дадеме одговор на ова прашање.

3.2. Теорема ([58]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор, $p>1$ и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L. Тогаш нормираниот простор $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$ е строго конвексен.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен, $p>1$ и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L. Да претпоставиме дека

$$\|x\|_{a,b,p}+\|y\|_{a,b,p}=\|x+y\|_{a,b,p},\ x,y\neq 0.$$

Тогаш од (1), неравенството на паралелопипед за 2-нормата и неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}\left(\|x,a\|^p+\|x,b\|^p\right)^{1/p}+\left(\|y,a\|^p+\|y,b\|^p\right)^{1/p}&=\left(\|x+y,a\|^p+\|x+y,b\|^p\right)^{1/p}\\&\le\left[\left(\|x,a\|+\|y,a\|\right)^p+\left(\|x,b\|+\|y,b\|\right)^p\right]^{1/p}\\&\le\left(\|x,a\|^p+\|x,b\|^p\right)^{1/p}+\left(\|y,a\|^p+\|y,b\|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Според тоа, во горната низа неравенства важи знак за равенство, што значи дека во неравенството на паралелопипед и во неравенството на Минковски важи знак за равенство, односно

$$\|x+y,a\|=\|x,a\|+\|y,a\|,\ \|x+y,b\|=\|x,b\|+\|y,b\|, \tag{3}$$

$$\|x,a\|\cdot\|y,b\|=\|x,b\|\cdot\|y,a\|. \tag{4}$$

Ќе разгледаме два случаја:

1) $a\notin V(x,y)$ или $b\notin V(x,y)$ и

2) $a,b\in V(x,y)$.

Нека $a\notin V(x,y)$ или $b\notin V(x,y)$. Но, $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен, па од теорема 1.8. и од (3) следува $y=\alpha x$ за некој $\alpha>0$, што значи дека $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,p}\right)$ е строго конвексен.

Случајот $a,b\in V(x,y)$ противречи на линеарната независност на множеството $\{a,b\}$. Навистина, ако $a=mx+ny, b=rx+qy$, за некои $m,n,r,q\in\mathbf{R}$, тогаш

$$\begin{aligned}&\|x,a\|=|n|\cdot\|x,y\|,\ \|y,a\|=|m|\cdot\|x,y\|,\ \|x+y,a\|=|n-m|\cdot\|x,y\|,\\&\|x,b\|=|q|\cdot\|x,y\|,\ \|y,b\|=|r|\cdot\|x,y\|,\quad \|x+y,b\|=|q-r|\cdot\|x,y\|,\end{aligned}\tag{5}$$

и од равенствата (3) и (4) следуваат равенствата

$$\begin{aligned}&(|n|+|m|)\|x,y\|=|n-m|\cdot\|x,y\|,\\&(|q|+|r|)\|x,y\|=|q-r|\cdot\|x,y\|,\end{aligned}\tag{6}$$

$$|nr|\cdot\|x,y\|^2=|mq|\cdot\|x,y\|^2.\tag{7}$$

Понатаму, ако $\|x,y\|=0$, тогаш $\dim V(x,y)=1$, што значи дека множеството $\{a,b\}$ е линеарно зависно, а тоа е противречност. Ако $\|x,y\|\neq 0$, тогаш од последните три равенства следуваат равенствата

$$|n|+|m|=|n-m|,\ |q|+|r|=|q-r|,\tag{8}$$

$$|nr|=|mq|.\tag{9}$$

Од равенствата (8) следува дека $mn\le 0$ и $qr\le 0$, па затоа од равенството (9) следува дека $nr=mq$. Но, тоа значи $ra-mb=(nr-mq)y=0$ и ако $r\neq 0$ или $m\neq 0$, добиваме дека $\{a,b\}$ е линеарно зависно, а ако $r=m=0$, тогаш $a=ny,\ b=qy$, што повторно противречи на линеарната независност на множеството $\{a,b\}$. ■

3.3. Во следниот пример ќе покажеме дека, ако $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L, тогаш нормираниот простор $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,\infty}\right)$ не мора да е строго конвексен.

Пример ([58]). Да го разгледаме Хилбертовиот простор $\mathbf{R}^3$ со обичниот скаларен производ. Тогаш со

$$(x,y\,|\,z)=\det\begin{pmatrix}(x,y) & (x,z)\\ (y,z) & (z,z)\end{pmatrix},\qquad x,y,z\in L\tag{10}$$

е дефиниран 2-скаларен производ и со

$$\|x,y\| = \sqrt{\|x\|^2\|y\|^2 - (x,y)^2} \qquad (11)$$

е дефинирана 2-норма на $\mathbf{R}^3$ и 2-нормираниот простор $(\mathbf{R}^3, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен. Векторите $a=(1,1,3)$ и $b=(1,2,0)$ се линеарно независни, што значи дека со (2) е зададена норма $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ на $\mathbf{R}^3$. Да ги разгледаме векторите $x=(1,1,1)$ и $y=(1,1,0)$. Од (11) следува

$$\|x,a\| = 2\sqrt{2},\ \|x,b\| = \sqrt{6},\ \|y,a\| = 3\sqrt{2},\ \|y,b\| = 1, \|x+y,a\| = 5\sqrt{2},\ \|x+y,b\| = 3,$$

па затоа од (2) следува

$$\|x\|_{a,b,\infty} = 2\sqrt{2},\ \|y\|_{a,b,\infty} = 3\sqrt{2},\ \|x+y\|_{a,b,\infty} = 5\sqrt{2},$$

што значи дека

$$\|x\|_{a,b,\infty} + \|y\|_{a,b,\infty} = \|x+y\|_{a,b,\infty}.$$

Меѓутоа, за секој $\alpha > 0$ важи $y \neq \alpha x$, па затоа просторот $(\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_{a,b,\infty})$ не е строго конвексен. Од друга страна, според теорема 2.4.4, пп. 53, [36] секој рамномерно конвексен простор е строго конвексен, и како $(\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_{a,b,\infty})$ не е строго конвексен простор, заклучуваме дека тој не е рамномерно конвексен, иако 2-нормираниот простор $(\mathbf{R}^3, \|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен. ■

3.4. Коментар. Претходно докажавме дека, ако $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен 2-нормиран простор, тогаш за $p > 1$ и $\{a,b\}$ линеарно независно подмножество од L нормираниот простор $(L, \|\cdot\|_{a,b,p})$ е строго конвексен и покажавме дека нормираниот простор $(\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_{a,b,\infty})$ не е строго конвексен. Се поставува прашање дали нормираниот простор $(L, \|\cdot\|_{a,b,1})$ е строго конвексен.

4. СТРОГА КОНВЕКСНОСТ ВО ПРОСТОР СО 2-ПОЛУСКАЛАРЕН ПРОИЗВОД СО КАРАКТЕРИСТИКА *p*

4.1. Дефиниција ([23]). Нека $[\cdot,\cdot\,|\,\cdot]$ е реална функција дефинирана на L^3 таква што

i) $[a,a\,|\,z]\geq 0$, за секои $a,z\in L$ и $[a,a\,|\,z]=0$ ако и само ако a и z се линеарно зависни,

ii) $[a,b\,|\,z]=[b,a\,|\,z]$, за секои $a,b,z\in L$,

iii) $[\alpha a,b\,|\,z]=\alpha[a,b\,|\,z]$, за секои $a,b,z\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$,

iv) $[a+a_1,b\,|\,x]=[a,b\,|\,z]+[a_1,b\,|\,z]$, $a,b,a_1,z\in L$;

v) $[a,b\,|\,z]\leq[a,a\,|\,z]^{\frac{1}{p}}\cdot[b,b\,|\,z]^{\frac{p-1}{p}}$, за секој $p>1$ и за секои $a,b,z\in L$.

Функцијата $[\cdot,\cdot\,|\,\cdot]$ ја нарекуваме 2-*полускаларен производ со карактеристика* p додека пак $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е простор со 2-полускаларен производ со карактеристика p.

4.2. Пример ([74]). Во $\mathbf{R}^2$ со

$$[a,b\,|\,c]=(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_2-b_2c_1)\left(c_1^2+c_2^2\right),$$

каде $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2), c=(c_1,c_2)$ е дефиниран 2-полускаларен производ со карактеристика p, кој не е 2-скаларен производ. ■

4.3. Лема. Нека $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е произволен простор со 2-полускаларен производ со карактеристика p. Тогаш

$$[a,b\,|\,b]=0,\ \text{за секои}\ \ a,b\in L,$$

Доказ. Непосредно следува од својствата *i)* и *v)* во дефиниција 4.1. ■

4.4. Лема ([23]). Нека $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е произволен простор со 2-полускаларен производ со карактеристика p, таков што $[a,a\,|\,x]=[x,x\,|\,a]$, за секои $a,x\in L$. Тогаш, со

$$\|x,y\|=[x,x\,|\,y]^{\frac{1}{p}},\ \ x,y\in L \tag{1}$$

е дефинирана 2-норма во L.

Доказ. Од (1) и од својството *i)* во дефиниција 4.1 непосредно следува точноста на својството *i)* од дефиницијата на 2-норма.

Својството *ii)* од дефиницијата на 2-норма непосредно следува од претпоставката дека $[a,a\,|\,x]=[x,x\,|\,a]$, за секои $a,x\in L$ и својството *ii)* во дефиниција 4.1.

Да го докажеме својството *iii)* од дефиницијата за 2-норма. Ако множе-ството $\{a,b\}$ е линеарно зависно или ако $\alpha=0$, тогаш точноста на *iii)* непо-средно следува од точноста на својството *iii)* од дефиниција 4.1. Нека претпоставиме дека $\alpha\neq 0$ и дека $\{a,b\}$ е линеарно независно множество. Од *iii)* и *v)* во дефиниција 4.1 имаме

$$[\lambda a,\lambda a\,|\,b]=\|[\lambda a,\lambda a\,|\,b]\|=|\lambda|\cdot\|[a,\lambda a\,|\,b]\|\leq|\lambda|\cdot[a,a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}[\lambda a,\lambda a\,|\,b]^{\frac{p-1}{p}}$$

односно

$$[\lambda a,\lambda a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}\leq|\lambda|\cdot[a,a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}.$$

Од друга страна, од претходно кажаното, имаме

$$[a,a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}=\left[\tfrac{1}{\lambda}\lambda a,\tfrac{1}{\lambda}\lambda a\,|\,b\right]^{\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{|\lambda|}[\lambda a,\lambda a\,|\,b]^{\frac{1}{p}},$$

т.е.

$$|\lambda|\cdot[a,a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}\leq[\lambda a,\lambda a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}.$$

Според тоа,

$$|\lambda|\cdot[a,a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}=[\lambda a,\lambda a\,|\,b]^{\frac{1}{p}}$$

па значи и во овој случај важи својството *iii)* од дефиницијата за 2-норма.

Ако $a+b,c$ се линеарно зависни вектори, тогаш својството *iv)* од дефиницијата за 2-норма е исполнето. Ако векторите $a+b,c$ се линеарно независни, тогаш од *i), iv)* и *v)* од дефиниција 4.1 добиваме

$$\begin{aligned}[a+b,a+b\,|\,c]&=\|[a+b,a+b\,|\,c]\|=\|[a,a+b\,|\,c]+[b,a+b\,|\,c]\|\\&\leq\|[a,a+b\,|\,c]\|+\|[b,a+b\,|\,c]\|\\&\leq[a,a\,|\,c]^{\frac{1}{p}}[a+b,a+b\,|\,c]^{\frac{p-1}{p}}+[b,b\,|\,c]^{\frac{1}{p}}[a+b,a+b\,|\,c]^{\frac{p-1}{p}}\\&=[a+b,a+b\,|\,c]^{\frac{p-1}{p}}\left([a,a\,|\,c]^{\frac{1}{p}}+[b,b\,|\,c]^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

од што следува

$$[a+b,a+b\,|\,c]^{\frac{1}{p}} \le [a,a\,|\,c]^{\frac{1}{p}} + [b,b\,|\,c]^{\frac{1}{p}}$$

т.е. и во овој случај важи својството *iv)* од дефиниција на 2-норма. ■

4.5. Лема ([74]). Во секој 2-нормиран простор L може да се воведе 2-полускаларен производ со карактеристика p (во општ случај не единствен).

Доказ. Нека x и y се линеарно независни вектори во 2-нормираниот векторски простор L и нека f е 2-функционал, со домен $V(x)\times V(y)$ дефиниран со

$$f(\alpha x,\beta y)=\alpha\beta\|x,y\|^{p}. \tag{2}$$

Функционалот f е е ограничен со норма

$$\|f\|=\|x,y\|^{p-1}. \tag{3}$$

Според теоремата на Хан-Банах f може да се продолжи до 2-линеарен функционал F со домен $L\times V(y)$ таков што $\|F\|=\|x,y\|^{p-1}$ и $F(x,y)=\|x,y\|^{p}$. Функционалот F го означуваме со $F_{x,y}$. За $x,y,z\in L$ дефинираме

$$[x,y\,|\,z]=\begin{cases} F_{y,z}(x,z), & \text{ако } \{\text{y,z}\} \text{ е линеарно независно множество,} \\ 0, & \text{ако } \{\text{y,z}\} \text{ е линеарно зависно множество.}\end{cases} \tag{4}$$

Ќе докажеме дека со (4) е дефиниран 2-полускаларен производ со карактеристика p.

Од $\|x,z\|^{p}\ge 0$ и $\|x,z\|^{p}=0$ ако и само ако $\{x,z\}$ е линеарно зависно множество и фактот дека $F_{x,z}(x,z)=\|x,z\|^{p}$, заклучуваме дека $[x,x\,|\,z]\ge 0$ и $[x,x\,|\,z]=0$ ако и само ако $\{x,z\}$ е линеарно зависно множество, т.е. својството *i)* од дефиниција 4.1 важи.

Точноста на својствата *ii), iii)* и *iv)* од дефиниција 4.1 непосредно следува од дефиницијата на 2-норма и фактот дека за секое линеарно независно множество $\{y,z\}\subseteq L$ 2-функционалот $F_{y,z}$ е линеарен, па значи е линеарен и во однос на првата координата.

Бидејќи $F_{y,z}$ е ограничен 2-линеарен функционал добиваме

$$\left|F_{y,z}(x,z)\right|\le\left\|F_{y,z}\right\|\cdot\|x,z\|=\|y,z\|^{p-1}\|x,z\|=\left|F_{x,z}(x,z)\right|^{\frac{1}{p}}\left|F_{y,z}(y,z)\right|^{\frac{p-1}{p}}$$

што значи

$$[x,y\,|\,z] \le [x,x\,|\,z]^{\frac{1}{p}}[y,y\,|\,z]^{\frac{p-1}{p}},$$

односно важи својството *v)* од дефиниција 4.1. ■

4.6. Теорема ([74]). Ако 2-полускаларниот производ е хомоген и адитивен во однос на вториот аргумент и $[a,a\,|\,x]=[x,x\,|\,a]$, за секои $a,x\in L$, тогаш L е 2-претхилбертов простор со $(a,b\,|\,c)=[a,b\,|\,c]$.

Доказ. Според лема 4.4 L е 2-нормиран простор. Понатаму, ако се искористи равенството

$$[a,b\,|\,c]=\frac{[a+b,a+b|c]-[a-b,a-b|c]}{4},$$

тогаш лесно се докажува дека во 2-нормираниот простор е исполнето равенството на паралелопипед, што значи дека L е 2-предхилбертов простор, таков што

$$(a,b\,|\,c)=[a,b\,|\,c].$$ ■

4.7. Теорема ([74]). Нека $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е простор со 2-полускаларен производ со карактеристика p таков што $[a,a\,|\,x]=[x,x\,|\,a]$, за секои $a,x\in L$. Ако 2-нормата во L е дефинирана со (1), тогаш следните услови се еквивалентни:

i) $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е строго конвексен,

ii) Ако $\|y+z,x\|\le\|y,x\|$ и $[z,y\,|\,x]=0,$ тогаш множеството $\{z,x\}$ е линеарно зависно,

iii) Ако $\|y+z,x\|=\|y,x\|$ и $[z,y\,|\,x]=0,$ тогаш множеството $\{z,x\}$ е линеарно зависно,

iv) Ако T е линеарен оператор на L и ако $\|w+Tw,x\|\le\|w,x\|$ за секој $w\in L$ и $[Ty,y\,|\,x]=0,$ тогаш множеството $\{Ty,x\}$ е линеарно зависно.

Доказ. $i)\Rightarrow ii)$. Ако $\|y,x\|=0$, тогаш множеството $\{y,x\}$ е линеарно зависно и $\|y+z,x\|=0$. Значи, множеството $\{y+z,x\}$ е линеарно зависно и како $\{y,x\}$ е линеарно зависно множество заклучуваме дека и множеството $\{z,x\}$ е линеарно зависно.

Нека претпоставиме дека $\|y,x\|=1$. Тогаш за секој $t,\;\; 0\le t\le 1$ важи

$$\begin{aligned}\|y,x\|^p &= \|[y,y\,|\,x]\| = \|[y+tz,y\,|\,x]\|\\ &\le [y+tz,y+tz\,|\,x]^{\frac{1}{p}}[y,y\,|\,x]^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \|y+tz,x\|\cdot\|y,x\|^{p-1}\\ &= \|t(y+z)+(1-t)y,x\|\cdot\|y,x\|^{p-1}\\ &\le \left(t\|y+z,x\|+(1-t)\|y,x\|\right)\cdot\|y,x\|^{p-1}\\ &\le \left(t\|y,x\|+(1-t)\|y,x\|\right)\cdot\|y,x\|^{p-1}\\ &\le \|y,x\|^p .\end{aligned}$$

Според тоа, $\|y,x\|=\|y+tz,x\|$ за секој t, $0\le t\le 1$. Ако $x\notin V(y+z,y)$, тогаш за $t=1$ имаме

$$\|y,x\|=\|y+tz,x\|,$$

а за $t=\frac{1}{2}$ добиваме

$$\|y+2z,x\|=2\|y,x\|=\|y+z,x\|+\|y,x\|$$

и како $(L,[\cdot,\cdot\,|\,\cdot])$ е строго конвексен важи $z=0$, што значи множеството $\{z,x\}$ е линеарно зависно.

Ако $x\in V(y+z,y)$, тогаш од $\|y+tz,x\|=1$ за секој t, $0\le t\le 1$ следува дека множеството $\{z,x\}$ е линеарно зависно.

$ii)\Rightarrow iv)$. Ако T е линеарен оператор на L и ако $\|w+Tw,x\|\le\|w,x\|$ за секој $w\in L$ и $[Ty,y\,|\,x]=0$, тогаш при $y=w$, $z=Tw$ се исполнети претпоставките од *ii)*, па значи множеството $\{z,x\}=\{Ty,x\}$ е линеарно зависно.

$iv)\Rightarrow iii)$. Нека претпоставиме дека условот *iii)* не е точен. Тогаш постојат y и z такви што множествата $\{z,x\}$ и $\{y,x\}$ се линеарно независни и важи $\|y+z,x\|=\|y,x\|$ и $[z,y\,|\,x]=0$. Дефинираме линеарен оператор T со:

$$Tw=\frac{1}{\|y,x\|^p}[w,y\,|\,x](y+z)-w .$$

Сега имаме,

$$\begin{aligned}\|w+Tw,x\| &= \frac{1}{\|y,x\|^p}\left|[w,y\,|\,x]\right|\cdot\|y+z,x\| \\ &= \frac{1}{\|y,x\|^p}\left|[w,y\,|\,x]\right|\cdot\|y,x\| \\ &\le \frac{1}{\|y,x\|^p}[w,w\,|\,x]^{\frac{1}{p}}[y,y\,|\,x]^{\frac{p-1}{p}}\cdot\|y,x\| \\ &= \frac{1}{\|y,x\|^p}\|w,x\|\cdot\|y,x\|^p \\ &= \|w,x\|\end{aligned}$$

и $Ty=z$. Освен тоа $[Ty,y\,|\,x]=[z,y\,|\,x]=0$, а $\{z,x\}$ е линеарно независно множество. Значи, множеството $\{Ty,x\}$ е линеарно независно, т.е. условот *iv)* не е исполнет.

$iii)\Rightarrow i)$. Ако условот *i)* не е исполнет, тогаш постојат различни точки a и b и линеарно независни вектори $c\notin V(a,b)$ такви што

$$\|a,c\|=\|b,c\|=1 \text{ и } \|a+b,c\|=\|a,c\|+\|b,c\|.$$

Нека $y=\frac{a+b}{2}$ и $z=\frac{b-a}{2}$. Тогаш

$$\|y+z,c\|=\|b,c\|=1 \text{ и } \|y+z,c\|=\left\|\tfrac{a+b}{2},c\right\|=\tfrac{1}{2}\|a+b,x\|=1.$$

Според тоа, $\|y+z,c\|=\|y,c\|$ и множеството $\{z,c\}$ е линеарно независно. Но,

$$\begin{aligned}\left|[z,y\,|\,c]+1\right| &= \left|[z,y\,|\,c]+[y,y\,|\,c]\right| \\ &= \left|[z+y,y\,|\,c]\right|=\left|[b,y\,|\,c]\right| \\ &\le [b,b\,|\,c]^{\frac{1}{p}}[y,y\,|\,c]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|b,c\|\cdot\|y,c\|^{p-1}=1\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\left|[z,y\,|\,c]-1\right| &= \left|[z,y\,|\,c]-[y,y\,|\,c]\right| \\ &= \left|[z-y,y\,|\,c]\right|=\left|[-a,y\,|\,c]\right| \\ &\le [a,a\,|\,c]^{\frac{1}{p}}[y,y\,|\,c]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|a,c\|\cdot\|y,c\|^{p-1}=1.\end{aligned}$$

Значи, $[z,y\,|\,c]=0$, па затоа условот *iii)* не е исполнет. ■

4.8. Теорема ([23]). Нека $(L,[\cdot,\cdot|\cdot])$ е простор со 2-полускаларен производ со карактеристика p таков што

$$[a,a\,|\,x]=[x,x\,|\,a],\ \text{за секои } a,x\in L.$$

Ако 2-нормата во L е дефинирана со (1), тогаш $(L,[\cdot,\cdot|\cdot])$ е строго конвексен ако и само ако од

$$[z,y\,|\,x]=\|z,x\|\cdot\|y,x\|^{p-1},\ \ x\notin V(y,z) \tag{5}$$

следува дека $y=\lambda z$, за некој $\lambda>0$.

Доказ. Нека $(L,[\cdot,\cdot|\cdot])$ е строго конвексен простор таков што важи (5). Тогаш

$$\begin{aligned}\|z+y,x\|\cdot\|y,x\|^{p-1}&\geq\left|[z+y,y\,|\,x]\right|\\&\geq\left|[z,y\,|\,x]+[y,y\,|\,x]\right|\\&=\|z,x\|\cdot\|y,x\|^{p-1}+\|y,x\|^{p}\\&=(\|z,x\|+\|y,z\|)\|y,x\|^{p-1}\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\|z+y,x\|\geq\|z,x\|+\|y,x\|. \tag{6}$$

Но, L е 2-нормиран простор, па затоа важи

$$\|z+y,x\|\leq\|z,x\|+\|y,x\|. \tag{7}$$

Од (6) и (7) имаме

$$\|z+y,x\|=\|z,x\|+\|y,x\|$$

и како L е строго конвексен 2-нормиран простор според теорема 1.8 имаме $y=\lambda z$, за некој $\lambda>0$.

Обратно, нека е исполнет условот (5) и нека $\|z+y,x\|=\|z,x\|+\|y,x\|$ и $x\notin V(y,z)$. Тогаш

$$\begin{aligned}\|z+y,x\|^{p}&=[z+y,z+y\,|\,x]\\&=[z,z+y\,|\,x]+[y,z+y\,|\,x]\\&\leq\|z,x\|\cdot\|z+y,x\|^{p-1}+\|y,x\|\cdot\|z+y,x\|^{p-1}\\&=(\|z,x\|+\|y,x\|)\cdot\|z+y,x\|^{p-1}\\&=\|z+y,x\|^{p},\end{aligned}$$

од што следува дека

$$[z, z+y \mid x] = \|z, x\| \cdot \|z+y, x\|^{p-1} \tag{8}$$

и

$$[y, z+y \mid x] = \|y, x\| \cdot \|z+y, x\|^{p-1} \quad . \tag{9}$$

Од (8) следува дека $z+y=\alpha z,$ за некој $\alpha>0,$ а од (9) следува дека $z+y=\beta y,$ за некој $\beta>0.$ Според тоа, $\alpha z=\beta y,$ за некои $\alpha,\beta>0,$ односно $z=\lambda y,$ за некој $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}>0$. Конечно, од теорема 1.8 следува дека L строго конвексен 2-нормиран простор. ■

5. КАРАКТЕРИЗАЦИЈА НА СТРОГА КОНВЕКСНОСТ СО ДУАЛНИ ЛИНЕАРНИ 2-ФУНКЦИОНАЛИ И ДУАЛНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

5.1. Дефиниција. Нека L е 2-нормиран простор и $z\neq 0$. Со L_z^* да го означиме просторот од ограничени линеарни 2-функционали на $L\times V(z)$. За пресликувањето $I: L\times V(z)\to 2^{L_z^*}$ определено со

$$I(x,z)=\left\{F\in L_z^* : F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|\right\}$$

ќе велиме дека е *дуално пресликување од прв тип*.

Нека ϕ е *семипозитивна функција*, т.е. $\phi:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ е таква да $\phi(\lambda)=0$ ако и само ако $\lambda=0$. За пресликувањето $J_\phi: L\times V(z)\to 2^{L_z^*}$ определено со

$$J_\phi(x,z)=\left\{F\in L_z^* : F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|, \|F\|=\phi(\|x,z\|)\right\}$$

ќе велиме дека е *дуално пресликување од втор тип*.

5.2. Забелешка. Од теорема I 3.11 следува дека ако x и z се линеарно независни, тогаш $I(x,z)\neq\varnothing$. Лесно се гледа дека x и z се линеарно зависни ако и само ако $I(x,z)=L_z^*$. Понатаму, ако ϕ е семипозитивна функција, тогаш $J_\phi(x,z)\subset I(x,z)$ и $I(x,z)=\bigcup\limits_{\alpha>0}\alpha J_\phi(x,z)$, за секој $x\in L$.

5.3. Дефиниција. Ќе велиме дека во 2-*нормираниот простор* L *важи својството* (R) ако за секои $x, y, z \in L$ такви што $x \neq y, \|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $z \notin V(x,y)$ важи $\|\alpha x + (1-\alpha) y, z\| < 1$, за некој реален број α.

5.4. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) L го има својството (R).

Доказ. Нека L е строго конвексен. Ако $x, y, z \in L$ такви што $x \neq y, \|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $z \notin V(x,y)$, тогаш од теорема 1.2 следува дека за $\alpha = \frac{1}{2}$ важи

$$\|\alpha x + (1-\alpha) y, z\| = \left\|\tfrac{1}{2} x + \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) y, z\right\| = \left\|\tfrac{1}{2}(x+y), z\right\| < 1,$$

т.е. во L важи својството (R).

Нека претпоставиме дека L не е строго конвексен, т.е. дека постојат $x, y, z \in L$ такви што $x \neq y, \|x,z\| = \|y,z\| = \left\|\frac{1}{2}(x+y), z\right\| = 1$ и $z \notin V(x,y)$. Според теорема I 3.13 постои $F \in L_z^*$ таков што $\|F\| = 1, F\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = \left\|\frac{x+y}{2}, z\right\| = 1$. Според тоа,

$$\tfrac{1}{2} F(x,z) + \tfrac{1}{2} F(y,z) = 1, \; F(x,z) \leq |F(x,z)| \leq \|F\| \cdot \|x,z\| = 1 \text{ и}$$
$$F(y,z) \leq |F(y,z)| \leq \|F\| \cdot \|y,z\| = 1.$$

Но, тоа значи дека $F(x,z) = F(y,z) = 1$, па затоа за секој реален број α важи

$$\begin{aligned} 1 &= |\alpha F(x,z) + (1-\alpha) F(y,z)| = |F(\alpha x + (1-\alpha) y, z)| \\ &\leq \|F\| \cdot \|\alpha x + (1-\alpha) y, z\| = \|\alpha x + (1-\alpha) y, z\|, \end{aligned}$$

што значи дека во L не важи својството (R). ■

5.5. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) Ако $z \neq 0$, $F \in L_z^*, \|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $F(x,z) = F(y,z) = \|F\|$, тогаш или $x = y$ или $\|x,y\| \neq 0$ и $z = \pm \frac{x-y}{\|x,y\|}$.

Доказ. $(1)\Rightarrow(2)$. Нека L е строго конвексен. Нека $z\neq 0$ и $F\in L_z^*$. Ако $F(x,z)=F(y,z)=\|F\|$ и $\|x,z\|=\|y,z\|=1$, тогаш важи

$$2=\frac{1}{\|F\|}F(x+y,z)\leq\|x+y,z\|\leq\|x,z\|+\|y,z\|=2,$$

па затоа $\|x+y,z\|=2$. Ако $x\neq y$, тогаш $z\in V(x,y)$ бидејќи во спротивно од строгата конвексност на L ќе следува $x=y$. Затоа постојат реални броеви α и β такви што $z=\alpha x+\beta y$. Тогаш $1=\|x,z\|=\|x,\alpha x+\beta y\|=\|x,\beta y\|=|\beta|\cdot\|x,y\|$. Слично, $|\alpha|\cdot\|x,y\|=1$, па затоа $\|x,y\|\neq 0$ и $|\alpha|=|\beta|=\frac{1}{\|x,y\|}$. Конечно, од $\|x+y,z\|=2$ следува дека $z=\pm\frac{x-y}{\|x,y\|}$.

$(2)\Rightarrow(1)$. Да претпоставиме дека условот (2) е исполнет и нека $x\neq y$, $\|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш имаме

$$\|x+y,z\|\leq\|x,z\|+\|y,z\|=2.$$

Ако $\|x+y,z\|=2$ тогаш од теорема I 3.13 следува дека постои $F\in L_z^*$ таков што

$$\|F\|=1,\quad F\left(\frac{x+y}{2},z\right)=\left\|\frac{x+y}{2},z\right\|=1.$$

Понатаму,

$$F(x,z)\leq|F(x,z)|\leq\|F\|\cdot\|x,z\|=1.$$

Ако $F(x,z)=1$, тогаш бидејќи $x\neq\frac{1}{2}(x+y)$, од условот (2) применет на x и $\frac{1}{2}(x+y)$ следува дека $z\in V(x,y)$, што е противречност. Значи, $F(x,z)<1$. Слично се докажува дека $F(y,z)<1$. Но, тоа значи дека

$$1=\tfrac{1}{2}F(x+y,z)=\tfrac{1}{2}F(x,z)+\tfrac{1}{2}F(y,z)<1,$$

што повторно е противречност. Според тоа, $\|x+y,z\|<2$, па од теорема 1.2 следува дека L е строго конвексен. ■

5.6. Теорема. Следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) $I(x,z)\cap I(y,z)\neq\varnothing$ и $z\notin V(x,y)$ за $x,y,z\in L$ повлекува $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

Доказ. $(1)\Rightarrow(2)$. Нека $I(x,z)\cap I(y,z)\neq\varnothing$ и $z\notin V(x,y)$. Јасно, $z\notin V(x)$ и $z\notin V(y)$. Нека $F\in I(x,z)\cap I(y,z)$ и $F\neq 0$. Тогаш $F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|$ и $F(y,z)=\|F\|\cdot\|y,z\|$, па затоа $F\left(\frac{x}{\|x,z\|},z\right)=F\left(\frac{y}{\|y,z\|},z\right)=\|F\|$. Нека $u=\frac{x}{\|x,z\|}$ и $v=\frac{y}{\|y,z\|}$. Тогаш $\|u,z\|=\|v,z\|=1$ и $F(u,z)=F(v,z)=\|F\|$, па од теорема 5.6 следува или $u=v$ или $\|u,v\|\neq 0$ и $z=\pm\frac{u-v}{\|u,v\|}$. Ако $u=v$, тогаш $y=\frac{\|y,z\|}{\|x,z\|}x$, т.е. $y=\alpha x$, за $\alpha=\frac{\|y,z\|}{\|x,z\|}>0$. Ако $\|u,v\|\neq 0$ и $z=\pm\frac{u-v}{\|u,v\|}$, тогаш $z\in V(x,y)$, што противречи на $z\notin V(x,y)$.

$(2)\Rightarrow(1)$. Нека $F\in L_z^*, F\neq 0, \|x,z\|=\|y,z\|=1$ и $F(x,z)=F(y,z)=\|F\|$. Тогаш $F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|, F(y,z)=\|F\|\cdot\|y,z\|$ и $F\in I(x,z)\cap I(y,z)\neq\varnothing$. Ако $z\notin V(x,y)$, тогаш од условот (2) следува дека $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$. Но, бидејќи $\|x,z\|=\|y,z\|$, последното значи дека $\alpha=1$, т.е. $x=y$. Ако $z\in V(x,y)$, тогаш $z=\beta x+\gamma y$ за некои β и γ.

$1=\|x,z\|=\|x,\beta x+\gamma y\|=\|x,\gamma y\|=|\gamma|\cdot\|x,y\|$ и $1=\|y,z\|=\|y,\beta x+\gamma y\|=\|y,\beta x\|=|\beta|\cdot\|x,y\|$

следува $\|x,y\|\neq 0$ и $|\beta|=|\gamma|=\frac{1}{\|x,y\|}$. Бидејќи

$$\|F\|\cdot\|x+y,z\|\geq F(x+y,z)=F(x,z)+F(y,z)=2\|F\|,$$

добиваме дека $\|x+y,z\|=2$, што заедно со претходните разгледувања дава $z=\pm\frac{x-y}{\|x,y\|}$. Конечно, од теорема 5.5 следува дека L е строго конвексен. ■

5.7. Теорема. Нека ϕ_1 и ϕ_2 се семипозитивни функции. Тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) $J_{\phi_1}(x,z)\cap J_{\phi_2}(y,z)\neq\varnothing$ и $z\notin V(x,y)$ за $x,y,z\in L$ повлекува $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

Доказ. $(1)\Rightarrow(2)$. Нека $J_{\phi_1}(x,z)\cap J_{\phi_2}(y,z)\neq\varnothing$ и $z\notin V(x,y)$. Од $J_{\phi_1}(x,z)\subset I(x,z)$ и $J_{\phi_2}(y,z)\subset I(y,z)$ следува дека $I(x,z)\cap I(y,z)\neq\varnothing$. Сега од теорема 5.6 следува дека $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Нека $F \in L_z^*, F \neq 0, \|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $F(x,z) = F(y,z) = \|F\|$. Бидејќи ϕ_1 и ϕ_2 се семипозитивни функции, за $\|F\| > 0$ постојат броеви $a > 0$ и $b > 0$ такви што $\phi_1(a) = \|F\|$ и $\phi_2(b) = \|F\|$. Така имаме

$$F(ax,z) = \|F\| \cdot \|ax,z\|, \; F(by,z) = \|F\| \cdot \|by,z\| \text{ и}$$

$$\phi_1(\|ax,z\|) = \|F\|, \; \phi_2(\|by,z\|) = \|F\|.$$

Затоа $F \in J_{\phi_1}(ax,z) \cap J_{\phi_2}(ay,z)$, т.е. $J_{\phi_1}(ax,z) \cap J_{\phi_2}(ay,z) \neq \varnothing$. Ако $z \notin V(ax,by)$, тогаш од (2) следува $y = \alpha x$, за некој $\alpha > 0$. Ако $z \in V(ax,by)$, тогаш $z = \beta x + \gamma y$ за некои β и γ. На потполно аналоген начин како и во доказот на теорема 5.6 добиваме $\|x,y\| \neq 0$ и $z = \pm \frac{x-y}{\|x,y\|}$, што според теорема 5.5 значи дека L е строго конвексен 2-нормиран простор. ■

5.8. Дефиниција. За функцијата ϕ ќе велиме дека е *псевдо-мерлива* ако таа е строго растечка и семипозитивна.

5.9. Последица. Нека ϕ е псевдо-мерлива функција. Тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) $J_\phi(x,z) \cap J_\phi(y,z) \neq \varnothing$ и $z \notin V(x,y)$ за $x,y,z \in L$ повлекува $y = x$. ■

5.10. Ако ϕ е функцијата $\phi(a) = a$, тогаш наместо J_ϕ ќе пишуваме J. Во случајов ϕ е псевдо-мерлива функција, па затоа е точна следнава последица.

Последица. Следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвексен.

(2) $J(x,z) \cap J(y,z) \neq \varnothing$ и $z \notin V(x,y)$ за $x,y,z \in L$ повлекува $y = x$. ■

5.11. Теорема. Нека:

(а) L е строго конвкесен.

(б) $I(x,z) \subset I(y,z)$ и $z \notin V(x,y)$ повлекува $y = \alpha x$, за некој $\alpha > 0$.

(в) $I(x,z)=I(y,z)$ повлекува или $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$ или $z=\beta x+\gamma y$ за некои β и γ.

Точни се следниве тврдења:

(1) Од (а) следува (б).

(2) Од (б) следува (в).

(3) Ако $I(x,z)\cap I(y,z)\subset I(x+y,z)$, тогаш од (в) следува (а).

Доказ. Со непосредна примена на теорема 5.6 лесно се докажуваат тврдењата (1) и (2). Ќе го докажеме тврдењето (3). Нека претпоставиме дека се исполнети (в) и $I(x,z)\cap I(y,z)\subset I(x+y,z)$.

Нека $\|x+y,z\|=\|x,z\|+\|y,z\|$ и $z\notin V(x,y)$. Нека $F\in I(y,z), F\neq 0$. Тогаш од претпоставката следува

$$F\in I(x+y,z),\ F(y,z)=\|F\|\cdot\|y,z\|,\ F(x+y,z)=\|F\|\cdot\|x+y,z\|,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\|F\|\cdot\|x,z\|+\|F\|\cdot\|y,z\|&=\|F\|\big(\|x,z\|+\|y,z\|\big)\\&=\|F\|\cdot\|x+y,z\|\\&=F(x,z)+F(y,z)\\&=F(x,z)+\|F\|\cdot\|y,z\|\end{aligned}$$

од што следува $F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|$, т.е. $F\in I(x,z)$. Според тоа, $I(y,z)\subset I(x,z)$. На потполно ист начин се докажува дека $I(x,z)\subset I(y,z)$. Значи, $I(x,z)=I(y,z)$, па од (в) следува дека или $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$ или $z=\beta x+\gamma y$ за некои β и γ. Ако $z=\beta x+\gamma y$ за некои β и γ, тогаш $z\in V(x,y)$, штои противречи на $z\notin V(x,y)$. Според тоа, $y=\alpha x$, за некој $\alpha>0$, т.е. L е строго конвексен. ■

5.12. Дефиниција. Дуалното пресликување од прв тип $I:L\times V(z)\to 2^{L_z^*}$ го нарекуваме *строго монотоно* ако за секои $(x,z),(y,z)\in L\times V(z)$ важи

$$(F-G)(x-y,z)>0,$$

каде $x\neq y,\ z\notin V(x,y),\ F\in I(x,z)$ и $G\in I(y,z)$.

5.13. Лема ([40]). Ако ϕ е псевдо-мерлива функција, тогаш за секои $(x,z),(y,z)$ $\in L\times V(z)$ важи

$$(F-G)(x-y,z)=(\|F\|-\|G\|)(\|x,z\|-\|y,z\|)+(\|F\|\cdot\|y,z\|-F(y,z))+(\|G\|\cdot\|x,z\|-G(x,z)),$$

каде $x\neq y,\ z\notin V(x,y),\ F\in J_{\phi}(x,z)$ и $G\in J_{\phi}(y,z)$.

Доказ. Нека $z\notin V(x,y),\ F\in J_{\phi}(x,z)$ и $G\in J_{\phi}(y,z)$. За секои $(x,z),(y,z)\in$ $L\times V(z)$ важи

$$\begin{aligned}(F-G)(x-y,z)&=F(x-y,z)-G(x-y,z)\\&=F(x,z)-F(y,z)-G(x,z)+G(y,z)\\&=\|F\|\cdot\|x,z\|-F(y,z)-G(x,z)+\|G\|\cdot\|y,z\|\\&=\|F\|\cdot\|x,z\|-\|F\|\cdot\|y,z\|+\|F\|\cdot\|y,z\|-F(y,z)\\&\quad+\|G\|\cdot\|x,z\|-G(x,z)-\|G\|\cdot\|x,z\|+\|G\|\cdot\|y,z\|\\&=(\|F\|-\|G\|)(\|x,z\|-\|y,z\|)+(\|F\|\cdot\|y,z\|-F(y,z))\\&\quad+(\|G\|\cdot\|x,z\|-G(x,z)),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

5.14. Теорема ([40]). Ако ϕ е псевдо-мерлива функција, тогаш следниве тврдења се еквивалентни:

(1) L е строго конвкесен.

(2) Дуалното пресликување од втор тип J_{ϕ} е строго монотоно.

Доказ. Според последица 5.9 L не е строго конвексен ако и само ако постојат $x,y\in L$, $x\neq y$ и $F\in L_z^*$ таков што $F\in J_{\phi}(x,z)\cap J_{\phi}(y,z)$, ако и само ако имаме $x\neq y$,

$$F(x,z)=\|F\|\cdot\|x,z\|,\ F(y,z)=\|F\|\cdot\|y,z\| \text{ и } \|F\|=\phi(\|x,z\|)=\phi(\|y,z\|),$$

што според лема 5.13 значи ако и само ако постојат $x,y\in L$, $x\neq y$, $F\in J_{\phi}(x,z)$ и $G\in J_{\phi}(y,z)$ такви што $(F-G)(x-y,z)=0$, односно ако и само ако дуалното пресликување од втор тип J_{ϕ} не е строго монотоно. ■

ГЛАВА IV
РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА РАМНОМЕРНО КОНВЕКСЕН 2-НОРМИРАН. ЕЛЕМЕНТАРНИ КАРАКТЕРИЗАЦИИ

1.1. Дефиниција ([39]). 2-нормираниот простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ го нарекуваме *рамномерно конвексен* ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta(\varepsilon) > 0$ таков што од $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$, $\|x-y,z\| \geq \varepsilon$ и $z \notin V(x,y)$ следува $\|x+y,z\| \leq 2(1-\delta(\varepsilon))$, каде $V(x,y)$ е подпросторот генериран од векторите x и y.

1.2. Теорема ([39]). Секој 2-предхилбертов простор е рамномерно конвексен.

Доказ. 2-предхилбертов простор е 2-нормиран, при што 2-нормата е воведена со $\|x,y\| = (x,x\,|\,y)^2$ и таа го задоволува равенството на паралелограм

$$\|x+y,z\|^2 + \|x-y,z\|^2 = 2\left(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2\right). \tag{1}$$

Ако $\varepsilon > 0$ е дадено и $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$, $\|x-y,z\| \geq \varepsilon$ и $z \notin V(x,y)$, тогаш од равенството (1) следува дека за $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} > 0$ важи

$$\|x+y,z\| = \left(4 - \|x-y,z\|^2\right)^{1/2} \leq \left(4-\varepsilon^2\right)^{1/2} = 2(1-\delta(\varepsilon)),$$

што значи дека $(L,(\cdot,\cdot\,|\,\cdot))$ е рамномерно конвексен. ■

1.3. Теорема ([58]). Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е 2-нормиран простор. Ако L е рамномерно конвексен, тогаш тој е строго конвексен.

Доказ. Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен и да претпоставиме дека за $x,y,z \in L$, $z \notin V(x,y)$ важи $\|x,z\| = \|y,z\| = 1$ и $x \neq y$. Тогаш за $\varepsilon = \frac{\|x-y,z\|}{2}$, важи $\varepsilon > 0$ и бидејќи L е рамномерно конвексен добиваме дека постои $\delta(\varepsilon)>0$ таков што од $\|x,z\|=\|y,z\|=1$, $\|x-y,z\|\geq\varepsilon$ и $z\notin V(x,y)$ следува

$$\|x+y,z\|\leq 2\left(1-\delta\left(\varepsilon\right)\right)<2, \text{ т.е. } \left\|\tfrac{x+y}{2},z\right\|<1.$$

Конечно, од теорема III 1.2 следува дека L е строго конвексен. ■

1.4. Пример ([58]). Во множеството од ограничени низи реални броеви l^∞ со

$$\|x,y\|=\sup_{\substack{i,j\in\mathbf{N}\\ i<j}}\left|\det\begin{pmatrix}x_i & x_j\\ y_i & y_j\end{pmatrix}\right|,\ x=(x_i)_{i=1}^{\infty},\ y=(y_i)_{i=1}^{\infty}\in l^\infty$$

е дефинирана 2-норма, што значи дека $\left(l^\infty,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е реален 2-нормиран простор и l^∞ не е строго конвексен 2-нормиран простор. Од теорема 1.3 следува дека l^∞ не е рамномерно конвексен. ■

1.5. Теорема ([58]). 2-нормираниот простор $\left(L,\|\cdot,\cdot\|\right)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\|x_n,z\|=\|y_n,z\|=1$ и $z\notin V(x_n,y_n)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n+y_n,z\|=2$ и $z\notin V(x_n,y_n)$

важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

Доказ. Нека петпоставиме дека низите ги исполнуваат условите 1) и 2), но дека низата $\{x_n-y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира кон 0. Тогаш постојат $\varepsilon_0>0$, $z\in L$ и низа природни броеви $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ таква што $\left\|x_{n_k}-y_{n_k},z\right\|\geq\varepsilon_0$, $z\notin V\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)$. Но, L е рамномерно конвексен, па затоа за овој ε_0 постои $\delta(\varepsilon_0)>0$ таков што

$$\left\|x_{n_k}+y_{n_k},z\right\|\leq 2\left(1-\delta\left(\varepsilon_0\right)\right)<2,\ z\notin V\left(x_{n_k},y_{n_k}\right),$$

што противречи на условот 2). Конечно, од добиената противречност следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

Нека претпоставиме дека L е таков што за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ за кои важат условите 1) и 2) важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, но дека L не е рамномерно конвексен. Тогаш за некој $\varepsilon > 0$ и за $\delta = \frac{1}{n}$ постојат $x_n, y_n \in L$ такви што

i) $\|x_n, z\| = \|y_n, z\| = 1$ и $z \notin V(x_n, y_n)$,

ii) $\|x_n + y_n, z\| \geq 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ и $z \notin V(x_n, y_n)$

iii) $\|x_n - y_n, z\| \geq \varepsilon$.

Но, *iii*) противречи на претпоставката, бидејќи од *ii*) следува $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n + y_n, z\| = 2$ и $z \notin V(x_n, y_n)$. Конечно, од добиената противречност следува дека L е рамномерно конвексен. ■

1.6. Теоремата 1.5 може да се запише во следнавата еквивалентна формулација.

Теорема ([58]). 2-нормираниот простор $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен ако и само ако за секои низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n, z\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|y_n, z\| = 1$ и $z \notin V(x_n, y_n)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n + y_n, z\| = 2$ и $z \notin V(x_n, y_n)$

важи $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. ■

1.7. Пример. Лесно се проверува дека во $L = \mathbf{R}^3$ со

$$\|x, y\| = |b_1c_2 - b_2c_1| + |a_1c_2 - a_2c_1| + |a_1b_2 - a_2b_1|,$$

каде $x = (a_1, b_1, c_1)$, $y = (a_2, b_2, c_2)$ е дефинирана 2-норма.

Ќе докажеме дека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ не е строго конвексен и не е рамномерно конвексен.

Навистина, за $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$ и $z = (0,0,1)$ важи $x \neq y$, $z \notin V(x, y)$ и

$$\|x, z\| = \|(1,0,0),(0,0,1)\| = 1, \|y, z\| = \|(0,1,0),(0,0,1)\| = 1, \ \|x + y, z\| = \|(1,1,0),(0,0,1)\| = 2$$

што според теорема III 1.2 значи дека $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ не е строго конвексен.

Да ги разгледаме низите

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(1-\tfrac{1}{n+1},0,0\right)\right\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(0,1-\tfrac{1}{n+1},0\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ и } z=(0,0,1).$$

За секој $n=1,2,3,...$ имаме, $z\notin V(x_n,y_n)$ и притоа важи

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n,z\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\left(1-\tfrac{1}{n+1},0,0,\right),(0,0,1)\right\|=\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n,z\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\left(0,1-\tfrac{1}{n+1},0\right)(0,0,1)\right\|=\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)=1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\|\tfrac{1}{2}(x_n+y_n),z\right\|&=\tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n,z\|\\&=\tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\|\left(1-\tfrac{1}{n+1},1-\tfrac{1}{n+1},0\right),(0,0,1)\right\|\\&=\tfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2-\tfrac{1}{n+1}\right)=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n,z\|&=\lim_{n\to\infty}\left\|\left(1-\tfrac{1}{n+1},-1+\tfrac{1}{n+1},0\right),(0,0,1)\right\|\\&=\lim_{n\to\infty}\left(2-\tfrac{2}{n+1}\right)=2\neq 0,\end{aligned}$$

што според теорема 1.6 значи дека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ не е рамномерно конвексен. ■

1.8. Во претходните разгледувања дадовме примери на 2-нормирани простори кои или се и строго конвексни и рамномерно конвексни или не се строго конвексни и не се рамномерно конвексни. Во следниот пример ќе разгледаме 2-нормиран простор кој е строго конвексен, но не е рамномерно конвексен.

Пример. Нека $L=\{q(x): q \text{ е полином на } [0,1]\}$. Јасно, L е векторски простор со вообичаените операции собирање на полиноми и производ на полином со реален број. Понатаму, при ознака $W(p,q)=|pq'-qp'|$, со

$$\|p,q\|=\sqrt{\int_0^1 (W(p,q))^2\,dx}+\sup_{0\le x\le 1}W(p,q),\ \ p,q\in L \tag{2}$$

е определена 2-норма на L. Навистина:

1) Од (2) следува $\|p,q\|\geq 0$, за секои $p,q\in L$ и $\|p,q\|=0$ ако и само ако $W(p,q)=0$, т.е. ако и само ако $pq'-qp'=0$, на $[0,1]$. Од својствата на полиномите следува дека последното равенство е можно ако и само ако

$p(x)=\lambda q(x)$, за секој $x\in[0,1]$, т.е. ако и само ако p и q се линеарно зависни.

2) Од $W(p,q)=W(q,p)$ следува $\|p,q\|=\|q,p\|$, за секои $p,q\in L$

3) Бидејќи за секој $\lambda\in\mathbf{R}$ и за секои $p,q\in L$ важи

$W(p,\lambda q)=|p(\lambda q)'-(\lambda q)p'|=|\lambda(pq'-qp')|=|\lambda|\cdot|pq'-qp'|=|\lambda|W(p,q)$

добиваме

$$\begin{aligned}\|p,\lambda q\|&=\sqrt{\int_0^1\left(W(p,\lambda q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}W(p,\lambda q)\\&=\sqrt{\int_0^1\left(|\lambda|W(p,q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}|\lambda|W(p,q)\\&=|\lambda|\left(\sqrt{\int_0^1\left(W(p,q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}W(p,q)\right)\\&=|\lambda|\cdot\|p,q\|.\end{aligned}$$

4) За секои $p,q,r\in L$ важи

$$\begin{aligned}W(p+r,q)&=|(p+r)q'-(p+r)'q|\\&=|(pq'-qp')+(rq'-qr')|\\&\le|pq'-qp'|+|rq'-qr'|\\&=W(p,q)+W(r,q),\end{aligned},$$

па затоа од својствата на супремумот и неравенството на Минковски следува

$$\begin{aligned}\|p+r,q\|&=\sqrt{\int_0^1\left(W(p+r,q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}W(p+r,q)\\&\le\sqrt{\int_0^1\left(W(p,q)+W(r,q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}\left(W(p,q)+W(r,q)\right)\\&\le\sqrt{\int_0^1(W(p,q)^2dx}+\sqrt{\int_0^1\left(W(r,q)\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}W(p,q)+\sup_{0\le x\le 1}W(r,q)\\&=\|p,q\|+\|r,q\|.\end{aligned}$$

Ќе докажеме дека L не е рамномерно конвексен простор. За таа цел ќе ги разгледаме низите $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ определени со

$p_n(x)=\frac{1}{2}x,\ q_n(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, за $n=1,2,\ldots$ и ќе земеме $r(x)=-1$.

Од $p_n^{'}(x)=\frac{1}{2}, q_n^{'}(x)=\frac{1}{2}\left(1-x^n\right), r'(x)=0$ и од тоа што дека за секој $n=1,2,3,...$ важи $r\notin V(p_n,q_n)$ следува

$$\lim_{n\to\infty}\|p_n,r\|=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}\tfrac{1}{2})=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|q_n,r\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\int_0^1\left(\tfrac{1}{2}\left|1-x^n\right|\right)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}\tfrac{1}{2}\left|1-x^n\right|\right),$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{2}{n+1}+\tfrac{1}{2n+1}}+\tfrac{1}{2}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\tfrac{1}{2}(p_n+q_n),r\right\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\int_0^1(\tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{x^n}{2}\right|)^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}\tfrac{1}{2}\left|1-\tfrac{x^n}{2}\right|\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{4(n+1)}}+\tfrac{1}{2}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|p_n-q_n,r\|=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\int_0^1\left|\tfrac{x^n}{2}\right|^2dx}+\sup_{0\le x\le 1}\left|\tfrac{x^n}{2}\right|\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2(n+1)}}+\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2},$$

што според теорема 1.6 значи дека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ не е рамномерно конвексен.

Нека $\|p+r,q\|=\|p,q\|+\|r,q\|$ и $q\notin V(p,r)$. Од претходните разгледувања, бидејќи функциите $W(p,q)$ и $W(r,q)$ се непрекинати, следува дека тоа е можно ако и само ако:

i) на интервалот $[0,1]$ важи $W(p+r,q)=W(p,q)+W(r,q)$, односно важи

$$\left|(pq'-qp')+(rq'-qr')\right|=\left|pq'-qp'\right|+\left|rq'-qr'\right|,$$

што значи дека за секој $x\in[0,1]$ полиномите $pq'-qp'$ и $rq'-qr'$ се со ист знак, и

ii) во неравенството на Минковски, применето на функциите $W(p,q)\ge 0$ и $W(r,q)\ge 0$ важи знак за равенство, што значи дека $W(p,q)=\alpha W(r,q)$, за некој $\alpha>0$.

Сега од *i*) и *ii*) следува дека на интервалот $[0,1]$ важи $pq'-qp'=\alpha(rq'-qr')$, за некој $\alpha>0$, односно дека на интервалот $[0,1]$ важи $(p-\alpha r)q'-(p-\alpha r)'q=0$. Од својствата на полиномите следува дека последното равенство е можно ако и само ако $p(x)-\alpha r(x)=\lambda q(x)$, за секој $x\in[0,1]$, т.е. ако и само ако $p-\alpha r$ и q се линеарно зависни и како $q\notin V(p,r)$, добиваме дека $p-\alpha r=0$, за некој $\alpha>0$, што значи дека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е строго конвексен. ■

2. СВОЈСТВА НА РАМНОМЕРНО КОНВЕКСНИТЕ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

2.1. Во овој дел ќе разгледаме неколку својства на рамномерно конвексните 2-нормирани простори.

Теорема. Нека $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-нормиран простор. Следниве тврдења се еквивалентни.

(1) $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен.

(2) За секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што ако $\|x,z\|=\|y,z\|$, $z\notin V(x,y)$ и $\|x-y,z\|\geq\varepsilon\|x,z\|$, тогаш

$$\tfrac{1}{2}\|x+y,z\|\leq(1-\delta)\|x,z\|.$$

(3) За секој $\varepsilon>0$ постои $\delta'>0$ таков што ако $\|x-ay,z\|=\varepsilon\|x,z\|$, каде $a=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш

$$\tfrac{1}{2}\|x+ay,z\|\leq(1-\delta')\|x,z\|.$$

(4) За секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што ако $\|x-ay,z\|\geq\varepsilon\|x,z\|$, каде $a=\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}$ и $z\notin V(x,y)$, тогаш

$$\|x+y,z\|\leq\|x,z\|+\|y,z\|-\delta\|x,z\|$$

или

$$\|x+y,z\|\leq 3\|x,z\|-\|y,z\|-\delta\|x,z\|.$$

Доказ. $(1)\Rightarrow(2)$. Нека $\|x,z\|=\|y,z\|=c\neq 0$ и $z\notin V(x,y)$. Тогаш од (1) следува дека $\|x,\frac{z}{c}\|=\|y,\frac{z}{c}\|=1$ и $\|x-y,\frac{z}{c}\|\geq\varepsilon$ повлекува

$$\tfrac{1}{2}\|x+y,\tfrac{z}{c}\|\leq 1-\delta \text{, т.е. } \tfrac{1}{2}\|x+y,z\|\leq(1-\delta)\|x,z\|.$$

$(2)\Rightarrow(3)$. Имаме $\|x,z\|=\left\|\frac{\|x,z\|}{\|y,z\|}y,z\right\|=\|ay,z\|$. Ако во (2) го замениме y со ay и искористиме дека $\|ay,z\|=\|x,z\|$ го добиваме (3).

$(3)\Rightarrow(4)$. Бидејќи $\frac{1}{2}\|x+ay,z\|\leq(1-\delta')\|x,z\|$ од (3), ако $\|y,z\|\geq\|x,z\|$, тогаш

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|&=\|x+ay+y(1-a),z\|\\&\leq\|x+ay,z\|+(1-a)\|y,z\|\\&\leq 2(1-\delta')\|x,z\|+\|y,z\|-\|x,z\|\\&=\|x,z\|+\|y,z\|-2\delta'\|x,z\|.\end{aligned}$$

Во случај кога $\|y,z\|\leq\|x,z\|$, добиваме

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|&=\|x+ay+y(1-a),z\|\\&\leq\|x+ay,z\|+(a-1)\|y,z\|\\&\leq 2(1-\delta')\|x,z\|+\|x,z\|-\|y,z\|\\&=3\|x,z\|-\|y,z\|-2\delta'\|x,z\|.\end{aligned}$$

Ако во последните неравенства ставиме $\delta=2\delta'$, го добиваме бараните неравенства.

$(4)\Rightarrow(1)$. $\|x,z\|=\|y,z\|=1$, тогаш од (4) следува $\|x+y,z\|\leq 2-\delta'\|x,z\|$. Конечно, ако во последното неравенство земеме $\delta=\frac{1}{2}\delta'$, добиваме дека L е рамномерно конвексен. ■

2.2. Теорема ([58]). Ако 2-нормираниот простор $(L,\|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен и φ е строго конвексна и строго растечка функција на $(0,1]$ таква што $\varphi(1)=1$. Тогаш за функцијата

$$h(t)=\inf\left\{\varphi(\|x+ty,z\|)+\varphi(\|x-ty,z\|)-2,\ \|x,z\|=\|y,z\|=1, z\notin V(x,y)\right\}$$

важи $h(t)>0$, за секој $t\in(0,1]$.

Доказ. Нека претпоставиме дека L е рамномерно конвексен и дека φ е строго конвексна и строго растечка функција на $(0,1]$ таква што $\varphi(1)=1$ и дека за некој $t_0 \in (0,1]$ важи $h(t_0)=0$. Од дефиницијата на функцијата $h(t)$ следува дека постојат низи $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ такви што $\|x_n, z\| = \|y_n, z\| = 1$, $z \notin V(x_n, y_n)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\varphi(\|x_n + t_0 y_n, z\|) + \varphi(\|x_n - t_0 y_n, z\|)\right) = 2. \qquad (2)$$

Но, по претпоставка функцијата φ е строго растечка со $\varphi(1)=1$, што значи дека таа е ограничена и како φ е конвексна добиваме дека таа е непрекината. Според тоа, постои инверзната функција φ^{-1} која исто така е непрекината и строго растечка. Сега од дефиницијата на функцијата $h(t)$, својствата на функцијата φ и равенството (2) добиваме

$$2 \le 2\varphi\left(\tfrac{\|x_n + t_0 y_n, z\| + \|x_n - t_0 y_n, z\|}{2}\right) \le \varphi(\|x_n + t_0 y_n, z\|) + \varphi(\|x_n - t_0 y_n, z\|) \to 2,\ n \to \infty,$$

односно

$$1 \le \varphi\left(\tfrac{\|x_n + t_0 y_n, z\| + \|x_n - t_0 y_n, z\|}{2}\right) \to 1,\ n \to \infty. \qquad (3)$$

Понатаму, бидејќи функцијата φ е строго конвексна од претходните разгледувања следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\big|\,\|x_n + t_0 y_n, z\| - \|x_n - t_0 y_n, z\|\,\big| = 0. \qquad (4)$$

Но, функцијата φ^{-1} е непрекината, строго растечка и $\varphi^{-1}(1)=1$, па затоа од (3) следува

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x_n + t_0 y_n, z\| + \|x_n - t_0 y_n, z\|\right) = 2. \qquad (5)$$

Конечно, од (4) и (5) следува

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n + t_0 y_n, z\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - t_0 y_n, z\| = 1 \text{ и } z \notin V(x_n, y_n) \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n + t_0 y_n + (x_n - t_0 y_n), z\| = \lim_{n\to\infty}\|2x_n, z\| = 2 \text{ и } z \notin V(x_n, y_n),$$

и како $(L, \|\cdot,\cdot\|)$ е рамномерно конвексен од теорема 3.6 добиваме

$$2t_0 = \lim_{n\to\infty} 2t_0\|y_n, z\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n + t_0 y_n - (x_n - t_0 y_n), z\| = 0,$$

што е противречност, па затоа $h(t) > 0$, за секој $t \in (0,1]$. ■

2.3. Забелешка. Природно е да се запрашаме дали важи обратната теорема на теорема 2.2, како и кои други резултати за рамномерно конвексни нормирани простори можат да се обопштат за 2-нормирани простори.

ЗАКЛУЧОК

Прочувањето на 2-нормираните простори датира од шеесеттите години на минатиот век, па затоа многу прашања во оваа област се отворени, како што се отворени и прашањата кои од својствата на 2-нормираните простори можат да се обопштат во n-нормираните простори. Ќе наведеме некои од нив.

1. Во 1969 година трудот [69] го воведува поимот 2-банахов простор и е докажано дека секој дводимензионален реален 2-нормиран простор е 2-банахов, а во 2014 година во трудот [52] е докажано дека секој реален конечнодимензионален 2-нормиран простор е 2-банахов. Меѓутоа, останува прашањето дали во случај на конечнодимензионален реален 2-нормиран простор сите 2-норми се еквивалентни, како што тоа е случај во конечнодимензионален реален нормиран простор.
2. На страна 31 од оваа магистерска работа забележавме дека во случај на конечнодимензионален векторски простор фамилиите норми $\left\{\|\cdot\|_{a,b,\infty},\ \|\cdot\|_{a,b,p},\ p\geq 1\right\}$ и $\left\{\|\cdot\|_{c,d,\infty},\ \|\cdot\|_{c,d,p},\ p\geq 1\right\}$ се еквивалентни, меѓутоа останува отворено прашањето, во случај кога L не е конечно-димензионален, дали и мпри кои услови нормите:

   1) $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ и $\|\cdot\|_{c,d,\infty}$,

   2) $\|\cdot\|_{a,b,\infty}$ и $\|\cdot\|_{c,d,p}$, $p\geq 1$ и

   3) $\|\cdot\|_{a,b,p}$ и $\|\cdot\|_{c,d,q}$, $p,q\geq 1$

   се еквивалентни.
3. При проучувањето на 2-нормираните простори едно од важните прашања е да се најдат потребни и доволни услови при кои 2-нормата е генерирана од 2-скаларен производ. По однос на ова, отворено е прашањето дали 2-скаларниот производ може да се карактеризира со помош на условите за

нормалност на вектори во 2-нормиран простор, како што тоа е случајот во нормираните простори.

4. Во овој труд се дадени низа карактеризации на строго конвексните и рамномерно конвеккдните 2-нормирани простори. Сепак, заради значењето на поимот строга конвексност значајно поле за натамошна работа е наоѓањето на нови карактеризации на строгата конвексност и рамномерната конвексност. Притоа, од особено значење е утврдувањето кои од познатите 2-нормирани простори се строго конвексни, а кои не се. Во контекст на претходно изнесеното потребно е да се даде одговор и на прашањето дали нормираниот простор $\left(L,\|\cdot\|_{a,b,1}\right)$ е строго конвексен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Al-Rashed, Abdalla M., Al-Abbas, M. A. (1999). A characterization of strict convexity in 2-normed spaces, Math. Japon. 35, pp. 1035-1038
2. Anevska, K., Malčeski, R. (2014). Characterization of 2-inner product using Euler-Lagrange type of equality, International Journal of Science and Research (IJSR), ISSN 2319-7064, Vol. 3 Iss. 6, pp. 1220-1222
3. Anevska, K., Malčeski, R. (2014). Generalization on parallelepiped equality in 2-normed space, IJPAST, ISSN 2229 - 6107, Vol. 22 No. 2, pp. 41-49
4. Anevska, K., Malčeski, R. (2014). Remarks on one S. S. Dragomir's results, American journal of Engineering Research, (AJER), e-ISSN 2320-0847 p-ISSN 2320-0936, Vol. 03, Iss. 02, pp. 1-3
5. Cho, Y. J. (1982). Characterizations of strictly convex linear 2-normad spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10, pp. 671-673
6. Cho, Y. J., Ha, K. S., Kim, S. W. (1981). Strictly Convex Linear 2-Normed Spaces, Math. Japonica, 26, pp. 475-478
7. Cho, Y. J., Kim, S. S. (1992). Gâteaux derivatives and 2-Inner Product Spaces, Glasnik Math., Vol. 27(47), pp. 271-282
8. Cho,Y. J., Park, B. H., Park, K. S. (1982). Strictly 2-convex Linear 2-normed Spaces, Math. Japon. 27, No. 5, pp. 609-612
9. Diestel, J. (1975). Geometry of Banach space – Selected Topics, Springer-Verlag, Berlin-Neidelberg-New York
10. Diminnie, C., Gahler, S. (1978). Some geometric results concerning strictly 2-convex 2-normed spaces, Math. Seminar Notes, Kobe Univ., 6, pp. 245-253
11. Diminnie, C., Gähler, S., White, A. (1973). 2-Inner Product Spaces I, Demonstratio Mathematica, Vol. VI, pp. 525-536
12. Diminnie, C., Gahler, S., White, A. (1974). Strictly Convex Linear 2-Normed Spaces, Math. Nachr. 59, pp. 319-324
13. Diminnie, C., Gähler, S., White, A. (1977). 2-Inner Product Spaces II, Demonstratio Mathematica, Vol. X, No 1, pp. 169-188
14. Diminnie, C., Gahler, S., White, A. (1979). Remarks on Strictly Convex and Strictly 2-Convex 2-Normed Spaces, Math.Nachr. 88, pp. 363-372

15. Diminnie, C., White, A. (1973). A result in linear 2-normed spaces, Science Studies 28, pp.
16. Diminnie, C., White, A. (1975). 2-Inner Product Spaces and Gâteaux partial derivatives, Comment Math. Univ. Carolinae 16(1), pp. 115-119
17. Diminnie, C., White, A. (1976). Some Geometric Remarks Concerning Strictly 2-convex Spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 6, pp. 245-253
18. Diminnie, C., White, A. (1982). 2-norms Generated by Seminorms on the space of bivectors, Math. Nachr. 106, pp. 341-346
19. Diminnie, C., White, A. (1982). A characterizatin of 2-inner product spaces, Math. Japon. No. 27, pp. 357-377.
20. Dragomir, S. S. (2006). Bounds for the normalized Jensen functional, Bull. Austral. Math. Soc. 74, No. 3, pp. 471-478
21. Ehret, R. (1969). Linear 2-Normed Spaces, Doctoral Diss., Saint Louis Univ.
22. Ficken, A. F. (1943). Note on the existence of Scalar Products in Normed Linear Spaces, Ann. of Math., Vol 45, No. 2, pp. 362-366
23. Franić, I. (1982). Two Results in 2-Normed Spaces, Glas. Mat. Ser. III 17 (37), pp. 271-275
24. Freese, R. W., Cho, Y. J., Kim, S. S. (1992). Stryctly 2-convex linear 2-normed spaces, J. Korean Math. Soc. 29, pp. 391-400
25. Freese, R. W., Gahler, S. (1982). Remarks on Semi-2-Normed Spaces, Math. Nachr. 105, pp. 151-161
26. Gähler, S. (1965). Lineare 2-normierte Räume, Math. Nachr. 28, pp. 1-42
27. Gähler, S. (1969). Uber 2-Banah-Raume, Math.Nachr. 42, pp. 335-347
28. Gähler, S. Misiak, A. (1984). Remarks on 2-Inner Product, Demonstratio Mathematica, Vol. XVII, No 3, pp. 655-670
29. Giles, J. R. (1967), Classes of semi-inner product spaces, pp. 436-446
30. Gunawan, H. (2002). Inner products on n-inner product spaces, Soochow Jurnal of Mathematics, Vol. 28, No. 4, pp. 389-398.
31. Gunawan, H. (2002). On Convergence in n-Inner Product Spaces, Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) 25, pp. 11-16
32. Gunawan, H., Mashadi (2001). On finite dimensional 2-normed spaces, Soochow Jurnal of Mathematics, Volume 27, No. 3, pp. 321-329
33. Ha, K. S., Cho, Y. J., Seong S., Khan, M. S. (1990). Strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Nachr. 146, pp. 375-381

34. Ha, K. S., Cho, Y. J., White, A. (1988). Strictly convex and strictly 2-convex linear 2-normed spaces, Math.Japon. 33, No. 3, pp. 375-384
35. Iseki, K. (1975). On nonexpansive mappings in strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 3, pp. 125-129
36. Istrăţescu, I. V. (1984). Strict convexity and complex strict convexity (theory and applications), Marcel Dekker, New York – Basel
37. Jordan, P., Von Neumann, J. (1935). On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. 36, pp. 719-732
38. Khan, A. (1982). 2-Normed spaces that are uniformly convex in every direction, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10, 687-690
39. Khan, A. (1982). Uniformly convex 2-normed spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10, pp. 681-686
40. Khan, A. H., Siddiqi, A. (1978). Characterization od strictly convex 2-normed spaces in terms of duality bimappings, Math. Japon. 23, No. 1, pp. 133-137
41. Khan, A., Uniformly convex 2-normed spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 10, pp. 681-686, (1982).
42. Kurepa, S. (1981). Functional analysis, Školska knjiga, Zagreb
43. Lin, C. S. (1990). On strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces, Math. Nachr. 149, pp. 149-154
44. Mabizela, S. (1989). A characterization of strictly convex linear 2-normed spaces, Questiones Math. 12, pp. 201-204
45. Malčeski, A. (1997). l^{∞} as *n*-normed space, Matematički bilten, V. 21 (XXI), pp. 103-110
46. Malčeski, A., Malčeski, R. (1997). $L^1(\mu)$ as a n-normed space, Annuaire des l'institut des mathematiques, V. 38, pp. 23-29
47. Malčeski, A., Malčeski, R. (2000). Convergent sequences in the n-normed spaces, Matematički bilten, Tome 24 (L), pp. 47-56 (macedonian)
48. Malčeski, A., Malčeski, R. (2000). Remarks on *n*-seminormed space, Proceedings from II congress of mathematicians and computer scientists of Macedonia, Ohrid
49. Malčeski, A., Malčeski, R. (2005). $L^p(\mu)$ as a 2-normed space, Matematički bilten, V 29 (XL), pp. 71-76
50. Malčeski, R. (1997). Strong convex *n*-normed spaces, Contributions, Sec. Mat. Tech. Sci., MANU. XVIII, 1-2, pp. 39-57
51. Malčeski, R. (2003). Gateaux изводи на *n*-норма, Matematički bilten, 27, pp. 75-86,

52. Malčeski, R., Anevska, K. (2014). About the 2-Banach spaces, International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), ISSN 2249–6645, Vol. 4 Iss. 5, pp. 28-32
53. Malčeski, R., Anevska, K. (2014). Characterization of 2-inner product by strictly convex 2-norm of modul c, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 8, No. 33, pp. 1647-1652, HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
54. Malčeski, R., Anevska, K. (2014). Families of norms generated by 2-norm, AJER, e-ISSN 2320-0847 p-ISSN 2320-0936, Volume-03, Issue-05, pp-315-320
55. Malčeski, R., Anevska, K. (2014). Parallelepiped inequality into 2-normed space and its consequencies, IJSIMR, e-ISSN 2347-3142, p-ISSN 2346-304X, Vol. 2, Iss. 08, pp. 719-728
56. Malčeski, R., Malčeski, A. (1997). *n*-seminormed space, Annuaire des l'institut des mathematiques, **V. 38**, pp. 31-40, (in macedonian)
57. Malčeski, R., Nasteski, Lj., Nachevska, B., Huseini, A. (2014). About the strictly convex and uniformly convex normed and 2-normed spaces., IJSIMR, e-ISSN 2347-3142, p-ISSN 2346-304X, Vol. 2, Iss. 06, pp. 603-610
58. Malčeski, S., Malčeski, A., Anevska, K., Malčeski, R. (2015). Another characterization's of 2-pre-Hilbert Space, IJSIMR, e-ISSN 2347-3142, p-ISSN 2346-304X, Vol. 3, Iss. 02, pp.
59. Malčeski, S., Malčeski, R., Anevska, K. (2014). 2-semi-norms and 2*-semi-inner product, Hikari, International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 8, No. 52, pp. 2601-2609, HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
60. Mazaheri, H., Kazemi, R. (2007). Some results on 2-inner product spaces, Novi Sad J. Math., Vol. 37, No. 2, pp. 35-40
61. Misiak, A. (1989). n-inner product spaces, Math. Nachr. 140, 299-319
62. Misiak, A., Riz. A. (2000). n-inner product spaces and projections, Mathematica Bohemica, Vol. 125, No. 1, pp. 87-97
63. Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E. and Fink, A. M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, (1993).
64. Rizvi, S. M., Ho, Y., White, A. (1987). Weak 2-norms and 2-inner products, Math. Japon. 32, pp. 643-648
65. Rudin, W. (1976). Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York
66. Rudin, W. (1991). Functional Analysis, 2nd ed. McGraw-Hill, Inc. New York

67. Sahab, S. A., Khaleelulla, S. M. (1985). Some-results on 2-semi-inner product spaces, J. Natur. Sci. Math. 25, pp. 31-41
68. Siddiqi, A., Rizwi, S. M. (1976). 2-Semi-inner spaces II, Math. Japon. 20, pp. 391-397
69. Vijayabalaji, S., Parthiban,J. (2013). Some inequalities in valued inner product space, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 86, No. 6, pp. 983-992
70. White, A. (1969). 2-Banach Spaces, Math. Nachr. pp. 42, pp. 43-60
71. White, A.; Cho, Y. J. (1982). A new characterization of strict 2-convexity, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., pp. 619-622
72. Gähler, S. (1963). 2-metrische Räume und ihre topologishe struktur, Math. Nachr. 26, pp. 115-148
73. Малчески, Р. (2001). Основи на математичка анализа, УКИМ, Скопје

Самоил Малчески

СТРОГО КОНВЕКСНИ 2-НОРМИРАНИ ПРОСТОРИ

УНИВЕРЗИТЕТ “ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ” – ШТИП