<u>УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП</u>

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА ЗА МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА

ЕЛИЗАБЕТА МАЗНОВСКА

МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ ВО СТОХАСТИЧКОТО МОДЕЛИРАЊЕ НА НЕКОИ ОД ФИНАНСИСКИТЕ ДЕРИВАТИ

МАГИСТЕРСКИ ТРУД

Штип, ноември 2015

Комисија за оценка и одбрана

Ментор: д-р Татјана Атанасова – Пачемска
вонреден професор, Универзитет „Гоце Делчев“ -Штип
Факултет за информатика,
Катедра за математика и статистика

Член: д-р Билјана Јолевска-Тунеска,
редовен професор , Универзитет„Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
Факултет за електротехника и информатички технологии,

Член: д-р Зоран Трифунов,
доцент, Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип
Факултет за информатика,
Катедра за математика и статистика

Датум на одбрана: **6.11.2015 година**

МАТЕМАТИЧКИ МЕТОДИ ВО СТОХАСТИЧКОТО МОДЕЛИРАЊЕ НА НЕКОИ ОД ФИНАНСИСКИТЕ ДЕРИВАТИ

Краток извадок

Учесниците на финансискиот пазар во денешно време се соочуваат со голем број на финансиски ризици. Се поставува прашањето, кои мерки и инструменти треба да се употребат за ризиците да се сведат на најниско можно ниво. Еден вид на заштита претставуваат опциите како изведени хартии од вредности т.е. финансиски деривати кои може да се користат за заштата од ризици при тргување. Причина поради која ние самите се изложуваме на ризик е заработувачката. Обично се користи за заштита на ценовниот ризик, кога станува збор за поседување на правата на сопственикот за продажба и за правата на купување одредени средства, по однапред договорена фиксна цена, која се однесува на одредена дата во иднина. На овој начин се постигнува заштита од непосакувани промени во цената во иднина. Самиот назив кажува дека опцијата претставува избор и самиот сопственик одлучува дали опцијата ќе биде реализирана или не. Овој избор не е бесплатен, во случај на нереализирање плаќа премија за осигурување од потенцијалните финансиски ризици. Многу од хартиите на вредност издадени од страна на компаниите вклучуваат опција.

Математичките (нумеричките) модели како биномниот модел и триномниот модел се користат за одредување на цената на широк спектар на опции - договори за кои досега не се познати аналитички решенија. Американските опции се најпознатите од овој вид на опции.

Клучни зборови: опција, изведени хартии од вредност, опциона премија, Биномен модел, Триномен модел.

MATHEMATICAL METHODS IN THE STOCHASTIC MODELLING ON SOME OF THE FINANCIAL DERIVATIVES

Abstract

Participants in the financial markets today are faced with a number of financial risks. This raises the question, what measures and instruments should be used, to minimize the risks to the lowest extent possible. One form of protection options are. Options are derivative securities, namely financial derivatives, which can be used to protect against the risks associated with trading. The reason for the earning at risk. It is usually used to hedge price risk, which is the word of possession and the right to sell the right to purchase certain assets at a predetermined fixed price that applies to a specific date in the future. In this way a protection against adverse changes in the future. As their name implies, it is a selection of options, where the owner decides whether the option will be exercised or not. That choice is not free, because in case of insurance premiums paid by commission from potential financial risk. Many of the securities issued by the company include the option.

Mathematical (numerical) methods like binomial and trinomial trees and finite difference methods can be used to price a wide range of options contracts for which there are no known analytical solutions. American options are the most famous of that kind of options.

Key Words: options, derivative securities , optional premium, binomial model, trinomial model.

СОДРЖИНА

ВОВЕД

Популарноста на најпознатите финансиски деривати се толкува од страна на фактот дека тие на релативно евтин начин обезбедуваат намалување и контрола на разни видови на ризици. Во услови на динамичен развој на трансакции, финансиските деривати сè повеќе се користат од страна на банки, компании, институционални инвеститори, глобални организатори и влади. Пазарот на обврзници воглавно е институционален пазар - релативно малку поединци инвестираат директно во обврзници. Главни инвеститори се: осигурителните компании, пензиските фондови и инвестиционите фондови. Финансиските инструменти, како што се акциите и обврзниците, се едноставно побарувања спрема текот на приноси генериран од реалните средства.

Во текот на магистерските студии на насоката Финансиска математика, од особен интерес беше изучувањето на методи за оценување на вредност на параметар кај случајни процеси т.е. методи за одредување вредности на параметар за формирање цена на акција и опција на финансискиот пазар, зависност на кредитирањето од определени услови, изучување на математички модели и алгоритми чија главна карактеристика е стохастичкиот пристап, односно употреба на случајни броеви и решавање на различни проблеми, чии решенија не можат да се одредат аналитички или пак за тоа не постојат ефикасни нумерички алгоритми. Математичкиот апарат што го совладав и врската со финансиската математика ме охрабри да се зафатам со истражување на методи во актуарското моделирање, примена на математичките методи во стохастичкото моделирање на цената на опциите, модели за моделирање на цена на опции (биномниот и триномниот модел), кои ќе бидат и предмет на проучување во предложениот магистерски труд.

Магистерскиот труд има четири глави и тоа:

Глава 1. *Финансиски деривати*
Глава 2. *Биномен модел на цена на опција.Моделирање на цена на опција во дискретно време*
Глава 3. *Триномен модел на цена на опција*
Глава 4. *Black-Scholes модел.Моделирање на цена на опција во непрекинато време*

Во првата глава на овој магистерски труд е направен преглед на литературата и на научните сознанија од областа на финансиските деривати, ставајќи акцент на опциите, видови на опции, својства на опциите, фактори кои влијаат на вредноста на опцијата.
Понатаму, обработени се основните модели за моделирање на случајно зголемување на цената на активата и цената на опциите т.е. на биномниот модел за цена на опција и триномниот модел.

Втората глава е посветена на основниот модел за моделирање на случајното движење на цената на активата и цената на опцијата во дискретно време, т.е. на моделот на Кокс-Рос-Рубистеин *(Cox-Ross-Rubinstein).* Овој модел претпоставува дека цената на активата може во секој период да расте или опаѓа со одредена веројатност. Со примена на програмскиот пакет *Mathematica* претставено е биномното дрво од претпоставени вредности на цената на активата и опцијата во биномен модел.

Во третата глава во овој магистерски труд е опишан триномниот модел кој сѐ повеќе се користи во праксата. Триномниот модел претставува понапреден модел во однос на биномниот, бидејќи претпоставува дека цената на опцијата може во секој период да расте, да се намали, промени или останува иста со одредена веројатност. Триниомниот модел за цена на опција е проучуван од страна на многу автори. Бојл, Кокс, Рос, Рубинстеин, Бартер *(Boyle, Cox, Ross, Rubinstein, Bartter)* се само некои од научниците кои ги проучувале овие прашања и конструирале модели за пресметување на цената на опцијата, а некои од тие модели се прикажани во овој труд.

Во овој дел се претставени различни избори на параметри за триномен модел на цена на опција, а понатаму се применети во конкретни примери. Со примена на програмскиот пакет *Mathematica* е претставено триномното дрво од претпоставени вредности на цената на активата, како и пресметување на арбитражната вредност на европската и американската опција. Понатаму, анализирана е заштитата на параметрите на портфолиото од ризик. Двата модели за моделирање на цената на опциите, биномниот и триномниот модел се тесно поврзани.

Стеблото, како напредна структура на податоци, овозможува брзо внесување на податоци на соодветната позиција, нивна промена или читање од зададена структура.Развиен е алгоритам врз основа на кој брзо се манипулира со големи количини на податоци за движењето на цените на активата на финансискиот пазар и да се пресметува цената на опцијата, како и параметрите за заштита од ризик.

Направен е детаљен опис и истражување на основните математички модели за утврдување на вредноста на цената на акциите и опциите на финансискиот пазар. Опишани се два модели и тоа: модел на одредување само цена на акцијата и модел на одредување на цена на акцијата и опцијата според *Black-Scholes*-овата формула. Направена е споредба помеѓу различните модели и се препорачани модели што се применливи во практиката.

Во четвртата глава основна цел е да се покаже како се моделира цената на опцијата во непрекинато време. Најпрво е воведена теорема која дава доволни услови за постоење на решение на стохастичките диференцијални равенки како и формулата на Ито *(Ito)* која е од суштинско значење за одредување на решението на таа равенка. Потоа е разгледан (Блек Шоулс) *Black-Scholes* модел за пресметување на цената на европската куповна и продажна опција. Со примена на продажно-куповниот партитет на добиени резултати се добива решение на *Black-Scholes* парцијална диференцијална равенка за европска продажна опција. Со користење на добиеното решение, кое се нарекува *Black-Scholes* формула за одредување на арбитражна цена на опција, се одредува и решение на *Black-Scholes* парцијална диференцијална равенка за европска куповна и продажна опција чија актива е фјучерс.

ГЛАВА 1.ФИНАНСИСКИ ДЕРИВАТИ

Оваа глава е посветена на финансиските деривати ставајќи акцент на опциите, видови опции, својства на опции, фактори кои влијаат на вредноста на опцијата.

1.1. Видови финансиски деривати

Почнувајќи од седумдесетите, а уште поинтензивно во осумдесетите и деведесетите години од минатиот век, каматните стапки и девизните курсеви станаа многу понестабилни отколку порано. Нивната нестабилност пред сè се должела на пропаста на бетонвудскиот систем на фиксни девизни курсеви и на непредвидливото движење на инфлацијата. За да и се спротивстават на таа појава, менаџерите на финансиските институции започнале многу интензивно да ги употребуваат ***финансиските деривати (financial derivatives)***, како начин за намалување на ризикот во нивните операции.

Финансиските деривати или изведени хартии од вредност претставуваат значајна група на финансиски инструменти кои интензивно се развиваат во последните триесет години како една од најзначајните групи на финансиски иновации. Нивната појава довела до големи промени на финансиските пазари на најразвиените земји, но исто така и во меѓународниот финансиски пазар. Денес е речиси незамисливо финансиското работење без познавање и користење на овие финансиски инструменти. Финансиските деривати (или изведени хартии од вредност) овој назив го добиле по тоа што нивната вредност е изведена од вредноста на некои други хартии од вредност т.е. финансиските деривати претставуваат финансиски инструменти кои ја изведуваат вредност од вредноста на некој друг инструмент.[1]

Финансиските инструменти претставуваат предмет на тргување на финансискиот пазар. Тие можат да бидат: ***примарни или секундарни***.

[1] Петковски, Михаил, Финансиски пазари и институции, Универзитет „Св.Кирил и Методиј“ Економски факултет –Скопје стр. 235

Во примарни финансиски инструменти спаѓаат: *банкарски сметки, обврзници и акции.*

Секундарни финансиски инструменти или финансиски деривати се хартии од вредност кои како актива најчесто имаат примарна хартија од вредност. Во секундарни финансиски инструменти спаѓаат: *форвард (термински договори), фјучерси, опции, своп операции итн.*

1.2. Форвард и фјучер договори

- ***Терминските договори (forward contracts)*** претставуваат договори меѓу две страни за извршување на финансиска трансакција на некој иден датум.

Во нив, двете страни се обврзуваат меѓусебно да разменат финансиски инструменти во иднина. Цената и датумот на размената се договараат однапред, на денот на потпишувањето на договорот.

Двете страни се обврзани со договорот и не можат да бидат ослободени од таа обврска, освен доколку заедно не ги изменат неговите одредби пред неговото исполнување. Усовршена верзија на овој договор се нарекува *фјучерс (futures).*

- ***Фјучерс (futures)*** договорот е договор со кој продавачот се обврзува да испорача одреден примарен имот на одреден датум во иднина, по цена која е договорена и фиксирана на денот на склучување на договорот. Трансакцијата создадена со фјучерс договорот во крајна линија може да се затвори на денот на достасувањето на фјучерсот, кога продавачот може да изврши физичка испорака на примарниот имот, а купувачот да ја плати претходно утврдената цена.

Кај терминските договори цената, квалитетот, количината и рокот на испорака е договор меѓу продавачот и купувачот, додека кај фјучерсите сите елементи во договорот, освен цената, се стандардизирани, а цената се одредува по пат на јавна аукција на берзата. Постојат повеќе видови на фјучерси, меѓу кои се стокови, валутни, каматни и индексни фјучерси. Според видот на материјалот со кој се тргува на пазарот се одредува дали фјучерсите се стокови или финансиски. Тоа значи дека стоковите фјучерси за актива имаат стока, додека финансиските фјучерси се засновани на некој финансиски инструмент.

Фјучерс (futures) договор во суштина е ист како и форвард договорот, со разлика дека форвард договорите не можат да се купуваат и продаваат, додека фјучерсите се предмет на тргување на берзата т.е. правата и обврските можат да се продават и купуваат пред рокот на доспевање на договорот.

Со тоа берзата подготвува стандардизирани облици на фјучерси, а инвеститорот зазема позиција преку берзата и не мора да ја познава другата страна. Двете страни при склучување на договорот ставаат депозит или таканаречена маржа во клиринската куќа поради сигурност на испораката и плаќањето. Вредноста на фјучерс договорот се пресметува секој ден и разликата во цената се исплаќа на двете страни, со што се покажува дека форвард и фјучерс цената скоро се совпаѓа и може да се разгледуват како еднакви.

1.3. Опции како деривативни финансиски инструменти

1.3.1. Поим и елементи на опционите договори

До брза експанзија на финансиските пазари доаѓа во 70-тите година на XX век, со воведување на нови видови на финансиски деривати - *опции*, кои од фјучерсите се разликуваат по тоа што овој вид на договор за сопственикот не претставува обврска, туку право на одреден ден по одредена цена да се купи или продаде предметот на договорот.

Опциите спаѓаат во класата на деривативни финансиски инструменти, затоа што нивната вредност е изведена од вредноста на некој таканаречен примарен имот. Опциите претставуваат и условни побарувања во таа смисла што нивната исплата е условена од движењето на некој друг имот.

Опциите како финансиски инструменти се познати повеќе од еден век. Научникот Бечлер *(Bachelier)* во својата докторска дисертација „Теорија на шпекулации" во 1900 година прв ја дал математичката анализа на цената на опцијата и дал образложение на брзината на инвестирање во опции. Сепак, опциите почнале организирано да се продаваат во 1973 година.

Дефиниција 1.3.1: Опцијата претставува договор кој на сопственикот на опцијата *(holder)* му дава право, но не и обврска, на одреден ден *(датум на достасување – exercise date)* да ја купи, односно продаде активата *(underlying asset)* на опцијата по договорена цена *E (exercise price - strike price).*

Според дефиницијата, опцијата има вредност (цена) која се фиксира на денот на издавање на договорот, додека издавачот (продавачот) на опцијата се обврзува да ја изврши или прими „испораката" на примарниот имот на кој гласи договорот. При тоа, опциониот договор има и специфициран временски рок во кој важат правото и обврската на истиот.

Обврската на продавачот да ја испорача договорената стока е кога купувачот ќе поднесе реализација на опцијата. Премијата *(депозит во Клириншката куќа)* секогаш припаѓа на продавачот на опцијата како награда за неговиот труд и обврска да ја испорача робата.

Примарни финансиски имоти кај опционите договори можат да бидат: поединечни акции, пазарни индекси за акции, фјучерси на пазарни индекси за акции, странски валути, земјоделски производи. Постојат и каматни опции кои се однесуваат на обврзници (претежно државни), како и на каматни фјучерс договори.

Постојат три основни елементи на опциониот договор:

1. Цена на извршување на опцијата *(exercise* или *strike price)* – тоа е онаа цена која претходно е фиксирана, т.е. одредена на денот на издавање на опциониот договор. Тоа е цената по која имателот на опцијата може да го купи или продаде примарниот имот; Една опција може да се смета за извршена кога нејзиното време истекло или кога во неа предвиденото купување или продавање на инструментот е извршено.

2. Рок на достасување на опцијата *(exercise date)* - тоа е временскиот рок во рамките на кој важи правото (и обврската) што произлегува од опциониот договор. Според овој елемент, постојат два типа на опции:

А) *Европски тип на опција*, кај кој реализацијата на правото е можна само на денот на достасување на опцијата;

Б) *Американски тип на опција*, кај кој реализацијата на правото е можна и во текот на рокот на достасување на опцијата.

3. Опциона премија - тоа е цената по која опцијата може да се купи или продаде на берзанскиот пазар на опции. Опцијата му нуди на купувачот еднострана можност. Ако движењето на цените се поволни, купувачот ја реализира опцијата и остварува добивка. Ако движењата на цените се штетни, купувачот може да ја ограничи штетата ако дозволи опцијата да истече нереализирана. Поради оваа карактеристика, опциите им овозможуваат на купувачите осигурување од неповолните движења на цените. Ако движењето на цените е неповолно, купувачот ја губи само премијата платена да се купи опцијата. Опционата премија е цената на оваа осигурување.

Карактеристика на опциониот договор е imателот или купувачот на опцијата да не мора да се одлучи за нејзина реализација, тој може и да не ја искористи, односно да допушти таа да истече.

Кај реализацијата на опциониот договор постојат кратка и долга позиција. Кратка позиција е позицијата кога опционите договори се продаваат за пари, па неликвидната актива се претвора во ликвидна. Долга позиција е кога опционите договори се купуваат, па се вложува пари во берзански материјали и на тој начин се очекува поголема заработувачка на растот на цената (курсот, каматата) во иднина.

1.4.Видови опции[2]

1.4.1. Опции во однос на заземената инвестициона положба

Во однос на правото кое го остваруваат постојат два типа на опции: продажни и куповни.

Куповната опција (call option) му дава на купувачот на опцијата право да купи финансиски инструмент или фјучерс договор по цената на извршување. Оваа опција се купува тогаш кога се очекува раст на цената. Куповната цена може да биде: покриена (опфатена) и непокриена.

Покриена куповна опција (covered call option) постои тогаш кога во моментот на продажбата на опцијата продавачот поседува основна хартија (зазема долга позиција - *long position*). Може да се случи во моментот на продавање на куповната опција нејзиниот продавач да не поседува основна хартија. Тогаш станува збор за непокриена опција (*uncovered option*) т.е. продажба на празно (*short sale*), односно за непокриена позиција на продавачот на опцијата која постои сè додека тој не купи основна хартија или додека не се врати на заемодавателот од кој ги има земено парите на заем. Продавачот се одлучува на продажба на оваа опција тогаш кога очекува пад на цените на основната хартија на пазарот, односно кога верува дека во иднина може да ги купи овие хартии по ниска цена од цената по која ги има продадено врз основа на договорот за опција.

Продажната опција (put option) му дава на купувачот на опцијата право да продаде финансиски инструмент или фјучерс договор по цената на извршување. Продавачот на продажната опција се согласува да го продаде инструментот (или фјучерс договорот) по цената на извршување, ако купувачот ја изврши опцијата; продавачот на куповната опција се согласува да го купи инструментот по цената на извршување ако купувачот ја изврши опцијата.

[2] Orsag, S.HUFA, Zagreb, 2006, str.145

1.4.2.Опции во однос на времетраењето[3]

Опциите во однос на времетрањето се делат на:

- ***Краткорочни опции***
- ***Долгорочни опции***

Опциите се генерално краткорочни финансиски инструменти чиј датум на доспевање не го надминува периодот од девет месеци. Сепак, постојат и долгорочни опции. Типичен таков инструмент се LEAPS (скокови) опции. Овие се долгорочни опции што се прикажани на берзата, чиј датум на доспевање е над две и пол години. Како долгорочни опции се појавуваат сите опции на акции издадени од корпорации за нивните акции.

1.4.3.Опции во однос на стандардните основни карактеристики

Опциите во однос на стандардните основни карактеристики може да се поделат на :

- ***Стандардни опции***
- ***Егзотични опции***

Стандардните опции се составени во согласност на стандардните поврзани средства, стандарден начин на одредување на цената на извршување, начинот на извршување и стандардниот време до датумот на доспевање. Во стандардни опции спаѓаат американските и европските (put и call) опции. Друг назив за стандардните опции е „plain vanilla" опции. Стандардните опции се наведени на берзата и имаат развиено секундарен пазар.

Егзотичните опции се нестандардни американски и европски опции кои се формираат со менување на стандардните карактеристики на американски и европски опции.

[3] Orsag,S.HUFA,Zagreb,2006,str.149

Некои значајни видови на егзотични опции се:[4]

- Азиски опции
- Бермудски опции
- Ограничени *(barrier)*опции
- Заклучени *(lookback)* опции
- Опција со валутна клаузула*(currency-translated options)*
- Бинарна опција(опција на залог)

Азиските опции се опции со исплата која повеќе зависи од просечната отколку на последната пазарна цена на основните средства во текот на барем еден дел од животот на опцијата. Добивката кај азиската call опција е разликата помеѓу просечната цена и цената на остварување поврзана со основните средства, а добивката кај азиската put опција е разлика помеѓу цената на остварување на основните средства и просечната цена.

Бермудските опции се модифицирани верзии на американската опција со одложување на датумот за почеток, односно скратено е времето за можност на извршување на опцијата од некој иден ден до истекот на рокот на достасување.

Кај *ограничени (barrier) опции* исплатата зависи не само од цената на средства на денот на достасување на опциите, туку за тоа дали цената на основните средства надминала некои „ограничувања". На пример: опцијата down-and-out е тип на ограничена опција која автоматски постанува безвредна и истекува ако и кога цената на акцијата паѓаат под некоја ограничена цена. Од друга пак страна, опцијата down-and-in нема да обезбеди исплата се додека цената на акцијата не падне под некоја граница барем еднаш за време на траење на опцијата. Друг назив на овие опции е knock-out и knock-in опции.

Заклучени (lookback) опции имаат исплата која делумно зависи од минималната или максималната цена на основните средства за време на траењето на опцијата.

[4] Peran, A. str. 64

Пример, заклучена опција може да обезбеди добивка на сопственикот на опцијата во висина на разликата помеѓу максималната цена на основните средства за време на траење на опцијата и извршната цена, што е спротивно на цената на заклучена акција намалена за извршната цена.

Опциите со *валутна клаузула (currency-translated options)* имаат или средства или цена изразена во странска валута.

Бинарната опција има фиксна исплата која зависи од тоа дали таа ги исполнува условите за трошоци поврзани со сопственоста. Пример, бинарната call опција може да донесе фиксен износ од 100$ (USD) ако цената на акцијата на денот на достасување е поголема од извршната цена.

1.5. Вреднување на опции

Европска куповна опција (***European call option***) е договор кој на својот имател (*holder*) му дава право, но не и и обврска во одреден *датум на доспевање* T *(expiry date)* да купи одредена актива (*underlying asset*) по договорената *цена на извршување* E *(exercise price).*

Другата страна на договорот, позната како издавач (*writer)* има обврска да ја продаде активата, ако имателот (купувачот) на опцијата сака да ја купи. Бидејќи опцијата на својот имател му дава право, но не и обврска да купува, а издавачот (продавачот) на опцијата има обврска да ја продаде, имателот на опцијата мора да плати одредена сума за тоа право т.е. ја плаќа опцијата.

Бидејќи со опционот договор се подразбира право за имателот на опцијата, додека за продавачот подразбира обврска, тој мора да има некоја вредност. Купувачот на опцијата плаќа на продавачот, а продавачот добива надомест за преземање обврска за исполнување на тој договор. Таа сума се нарекува *премија*. Потребно е да се одреди премијата како и вредноста на опцијата во секој момент до датумот на доспевање. Таа вредност се нарекува *арбитражна цена* на опцијата.

Вредноста на европската куповната опција во моментот t ќе ја означиме со $c_t = c(S_t) = C(S_t, t)$,каде што со S_t се означува вредноста на активата за која се однесува опцијата во моментот t. На вредноста на опцијата влијае и цената на извршување E, датумот на доспевање T , волатилноста на цена на активата како и каматната стапка, меѓутоа таа за конкретни опции се разгледува како константна.

Главен проблем и предмет на овој магистерски труд претставува прашањето како ќе се одреди вредноста на опцијата C *, при склучување на договор.* Најпознат модел кој го решава овој проблем е моделот на *Black-Scholes.*

Сопственикот на куповната опција зазема долга позиција, а издавачот кратка позиција. Многу често Европските куповни опции се карактеризираат со приходот кој го остварува имателот на опцијата во моментот T.

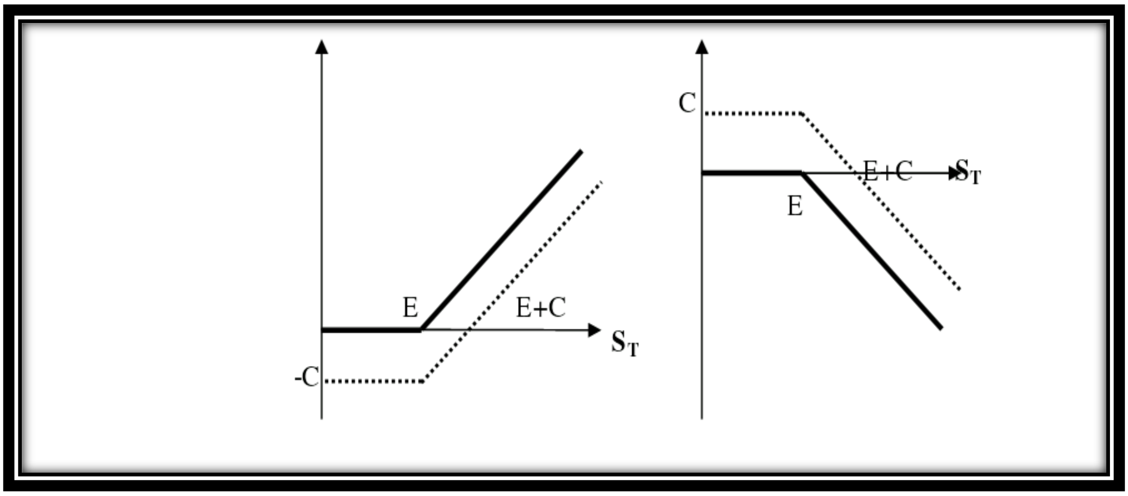
Во моментот T можат да се реализират две можности: цената на активата S_T е поголема или помала од E.

1. Ако $S_T > E$, тогаш имателот на опцијата ќе го искористи своето право и ја реализира (exercise) опцијата т.е. ќе купи стока по ниска цена E , и ако веднаш ја продаде на пазарот ќе оствари приход $S_T - E$. Издавачот (продавач) на опцијата во овој случај има негативен приход $E - S_T$.

2. Ако $S_T < E$, тогаш имателот на опцијата нема да ја реализира опцијата т.е. неговиот приход ќе биде нула. Исто така и продавачот на опцијата има приход (payoff) нула.

Понатаму, за куповната опција може да се заклучи:

	долга позиција (holder)	*кратка позиција (writer)*
___________ *приход*	$C(S_T, T) = max\{S_T - E, 0\}$ $= (S_T - E)^+$	$min\{E - S_T, 0\}$
.... *профит*	$max\{S_T - E, 0\} - C$	$min\{E - S_T, 0\} + C$



Слика 1: Долга и кратка позиција на Европска куповна опција
Figure 1: Long and short position of European call option

Приходот *(payoff)* на продавачот на европската купова опција изнесува $min\{E-S_T,0\}$ т.е. или е еднаков на нула или е негативен. Бидејќи за купување на таков финансиски инструмент е платена премија c_t, профитот на сопственикот на опцијата е c_T-c_t, а додека профитот на продавачот е c_t-c_T.

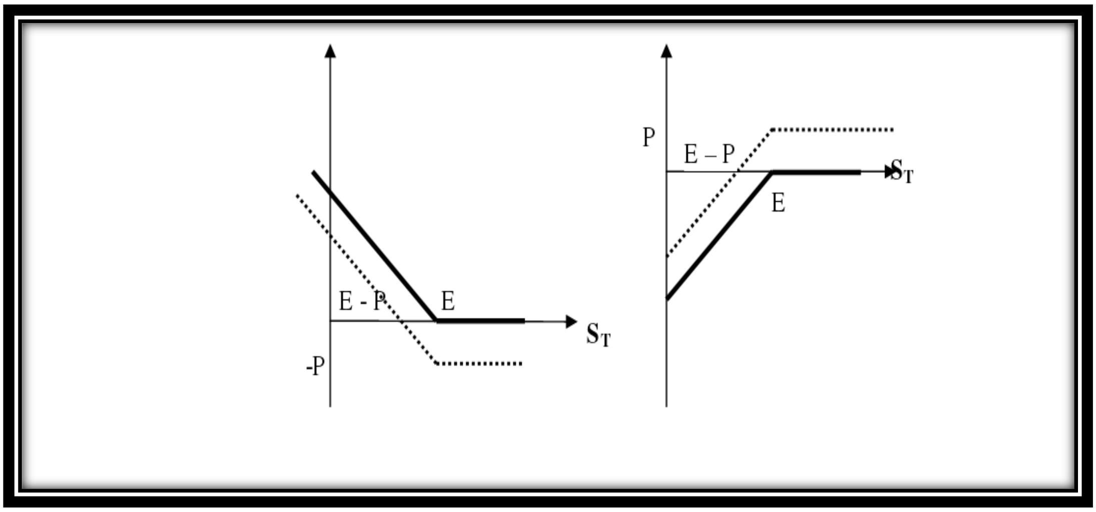
Европска продажна опција (European put option) е договор кој на својот имател (*holder*) му дава за право, но е и обврска да во одредена дата на доспевање T*(expiry date)* продава одредена актива *(underlying asset*) по договорена цена на извршување E(*exercise price).* Другата страна на договорот, позната како издавач на опцијата *(writer)* има обврска да ја купи активата, ако имателот на опцијата сака да ја продаде. Вредноста на европска продажна опција во моментот t ќе ја означиме со $p_t=p(S_t)=P(S_t,t)$, а вредноста на активата во моментот на склучување на договорот со S_t .

Ако во моментот T цената на активата S_T е помала од договорената цена $E(\ S_T<E)$, опцијата ќе се реализира, па приходот на таа опција е еднаков на $E-S_T$. Ако на датумот на доспевање на опцијата цената на активата S_T е поголема од договорената цена $E(\ S_T>E)$, опцијата нема да се реализира, па приходот на таа опција е еднаков на нула.

Имателот на продажната опција зазема кратка позиција додека издавачот долга позиција. Продажната опција може аналогно да се карактеризира преку приходот, секако дека во овој случај опцијата ќе биде рализирана ако во моментот T цената на активата S_T е помала од договорената цена E .

Може да заклучиме дека:

	кратка позиција(writer)	*долга позиција (writer)*
___________ *приход*	$P(S_T,T)=max\{E-S_T,0\}$ $=(E-S_T)^+$	$min\{S_T-E,0\}$
.... *профит*	$max\{E-S_T,0\}-P$	$min\{S_T-E,0\}+P$



Слика 2: Долга и кратка позиција на Европска продажна опција
Figure2: Long and short position of European put option

Приходот на продавачот на европската продажна опција е $min\{S_T - E, 0\}$ и тој е еднаков на нула или е негативен. За купување на таков финансиски инструмент платена е премија p_t, а профитот на сопственикот на опцијата е еднаков на $p_T - p_t$, додека профитот на продавачот на опцијата е еднаков на $p_t - p_T$. *Сегашната* цена на активата на пазарот се нарекува *спот* цена.

Опцијата нуди повеќе потенцијални стратегии за заштита од ризик, за разлика од форвард и фјучерс. Сопственикот на опцијата може да бида дали опцијата ќе се реализира на датумот на доспевање или не. Во зависност од односот на спот цената и договорената цена на опцијата може да се поделат на:

1.Опции со добивка *(in-the-money);*

2.Опции на рамнотежа *(at-the-money);*

3.Опции со загуба *(out-of-the-money).*

Берзанските аналитичари имаат две основни задачи при работата со опциите. Првата задача е да пресметат колку купувачот треба да плати на продавачот (т.е. колку изнесува премијата), додека другата задача се состои од намалување на ризикот кој го презема продавачот на опцијата.

На вредноста на опцијата влијаат следните шест фактори:

1) спот цената на активата;

2) договорена цена;

3) датум на доспевање на опцијата;

4) волатилноста на цената на активата;

5) важечката каматна стапка;

6) дивидендата која се очекува за време на траење на опцијата.

Во случај опцијата да се реализира (изврши) на датумот на доспевање, исплатата на куповната опција е еднаква на сумата за која цената на активата ја надминува договорената цена. Понатаму, куповната опција е вредна ако цената на активата расте, а помалку вредна доколку договорената цена расте. Исплатата на продажната опција е еднаква на сумата за која договорената цена ја надминува цената на активата. Понатаму, продажната опција е малку вредна кога цената на активата расте, а е вредна ако договорената цена расте.

Кај американската опција со подоцен датум на доспевање се зголемува вредноста на опцијата, бидејќи постојат повеќе можности за нејзина реализација. Кај европските типови на опција, во општ случај тоа не важи.

Цената на активата има особина на *нестабилност (волатилност)* т.е. се менува на случаен начин во времето. Колку е волатилноста поголема, толку се поголеми скоковите на графикот на функција на цената на активата во зависност од времето. Тоа влијае на распределбата на цената на истекот на рокот и на тој начин на очекуваната заработувачка од опцијата. <u>*Волатилноста може да се разгледа како мерка на несигурноста на инвеститорите во идните ценовни движења на активата.*</u>

Цената на опцијата зависи и од валидната каматна стапка. Бидејќи премијата се исплаќа во моментот на склучување на опционоит договор, цената на опцијата мора да одговара со нивото на добивка кое ќе се оствари кога во банка ќе се инвестира вредноста на активата. Кај продажните опции, кога каматната стапка расте, вредноста на опцијата ќе опаѓа.

И дивидендата која ја обезбедува активата на која акцијата гласи влијае врз формирањето на цената на опцијата. Дивидендата која се исплаќа за време на траење на опцијата ја намалува вредноста на куповната опција, а ја зголемува вредноста на продажната опција.

Разгледувајќи ги овие дијаграми може да заклучиме дека ако инвеститорот смета дека цената на активата со тек на време ќе добие вредност, тогаш ќе купи куповна опција. Доколку смета дека цената ќе се намали, тогаш треба да купи продажна опција.

Приходот и профитот ако се во сопственост на имателот на опцијата можат да бидат неограничени, додека ризикот е ограничен (за разлика од фјучерс и форвард договорите).

Ќе ги разгледаме следните две портфолија:

- Портфолио А: Една европска куповна опција со цена на извршување E и сума на пари еднаква на $Ee^{-r(T-t)}$.
- Портфолио В: Една европска продажна опција и единична актива.

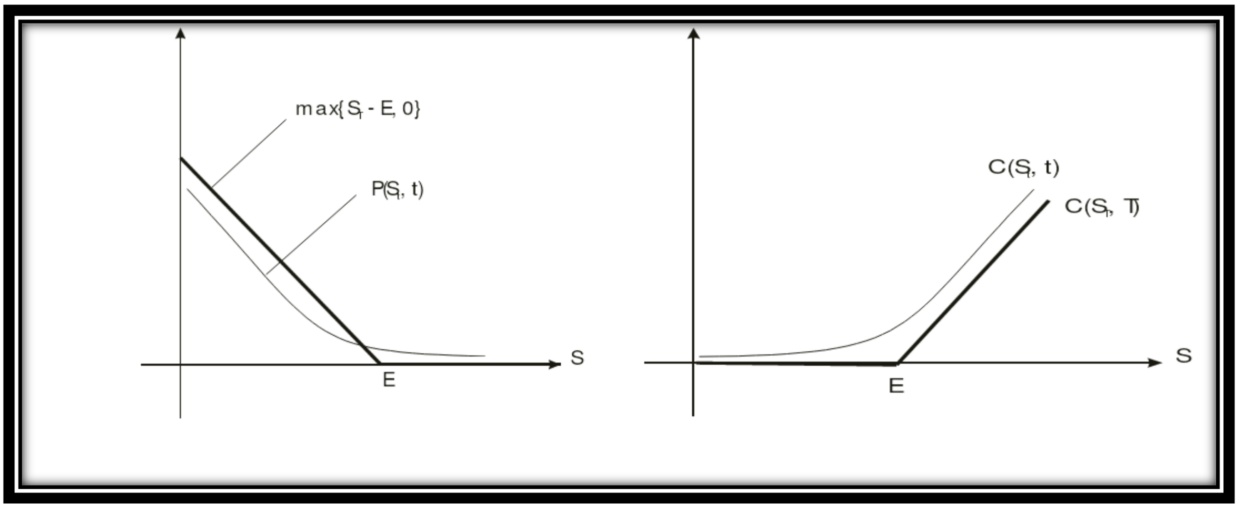
Во моментот на доспевање T двете портфолија имаат вредност :$max\{S_T, E\}$. Оттука следува дека тие мораат да имаат иста вредност и во секој претходен момент t (ако ова не би било точно, инвеститорот може да дојде до неризичен профит така што би купил евтино портфолио и ќе го продаде скапо). Понатаму,

$$\boxed{C(S_t, t) + Ee^{-r(T-t)} = P(S_t, t) + S_t}$$

Оваа равенство е познато како ***PUT-CALL ПАРТИТЕТ***, а врз основа на ова равенство може да се пресмета вредноста на куповната опција ако е позната вредноста на продажната опција и обратно.

Вредноста на опцијата во моментот на доспевање T е еднаква на приходот т.е. $C(S_T,T) = max\{S_T - E, 0\}$ и $P(S_T,T) = max\{E - S_T, 0\}$.

Специјално, за европската куповна опција, нејзината вредност е функција од цената на активата S_T и секогаш е поголема од $max\{S_T - E, 0\}$, а како се приближува датумот на доспевање, односно $t \to T$ графикот на функцијата од вредностите на опцијата сѐ повеќе се приближува кон графикот на приносот.



Слика 3: Вредност на европска продажна и куповна опција
Figure3:Value of European put and call option

Внатрешна вредност (Intrinsic value) на опцијата во моментот t е максимумот од нула и од вредностите која опцијата ги има ако во тој момент таа се реализира. Понатаму за куповна опција е внатрешната вредност $max\{S_T - E, 0\}$, а за продажната опција е $max\{E - S_T, 0\}$.

Временска вредност (Time value) на опцијата е разлика меѓу нејзината вредност и внатрешната вредност. На пример за куповната опција временската вредност е $C(S_t, t) - max\{S_T - E, 0\}$.

Кај куповната опција за акција, во текот на рокот на достасување (и на денот на достасување) на опцијата, можни се три ситуации:

1. Кога тековната пазарна цена на акцијата е поголема од цената на извршување на опцијата, тогаш се вели дека опцијата е *ITM (in-the money*), односно нејзината реализација би донела позитивен принос;
2. Кога тековната пазарна цена на акцијата е помала од цената на извршување, тогаш опцијата е *OTM (out-of-the-money)* односно нејзината реализација не би била профитоносна;
3. Кога тековната пазарна цена на акцијата е еднаква со цената на извршување, тогаш опцијата е *ATM (at-the-money),* односно нејзината реализација би имала неутрален ефект т.е. ист ефект како и директното купување на акцијата на пазарот.

Јасно, европската опција ќе се реализира само ако е ITM во моментот на достасување T .

Куповната опција е ITM ако $S_t > E, ATM$ ако $S_t = E, OTM$ ако $S_t < E$
Продажна опција е ITM ако $S_t < E, ATM$ ако $S_t = E, OTM$ ако $S_t > E$

ITM опцијата има позитивна внатрешна вредност, додека за ATM и OTM куповната опција нивната внатрешна вредност е еднаква на нула, а имаат позитивна временска вредност која опаѓа кон нула бидејќи $t \to T$, па во моментот T вредноста на опцијата е еднаква на внатрешната вредност, а додека временската вредност е нула. ATM и OTM продажните опции имаат негативна временска вредност која расте кон нулата кога $t \to T$.

Ако инвеститорот купи ATM или OTM опција, таа има само временска вредност која е во тесна корелација со времето преостанато до датумот на достасување т.е $t \to T$. Колку што е преостанатото време подолго, поголема е веројатноста дека цената на пазарот ќе се промени, т.е. дека опцијата ќе се реализира како ITM.

<u>Американската куповна опција (American call option)</u> и <u>Американската продажна опција (American put option)</u> гарантира на својот имател исти права како и европската опција, освен што овие опции може да се извршат и пред датумот на доспевање T.

Нека C_t е вредност на американската куповна, а P_t е вредност на американската продажна опција со вредност на активата S_t во момент t. Со примена на арбитражните аргументи не може да се одреди точната вредност на овие опции туку само со долна и горна граница на нивната арбитражна цена.

Со оглед дека европската и американската куповна опција му даваат на сопственикот права за купување на активата по договорената цена E, без оглед што се случило на пазарот, вредноста на таа опција не смее да ја надмине вредноста на активата S_t т.е. $c_t \leq S_t$ и $C_t \leq S_t$.

Европската и американската продажна опција му дава на сопственикот право да ја продаде активата по договорената цена E на датумот на доспевање, па без оглед што се случило на пазарот, вредноста на таа опција не смее да ја надмине договорената цена E т.е. $p_t \leq S_t$ и $P_t \leq S_t$.

Долна граница на цената на европската куповна опција во моментот $t \leq T$ има вредност:

- Ако опцијата гласи на актива која не обезбедува дивиденда

$$c_t \geq max\{S_t - Ee^{-r(T-t)}, 0\}$$

- Ако опцијата гласи на актива која обезбедува привремена дивиденда

$$c_t \geq max\{S_t - D_t - Ee^{-r(T-t)}, 0\}$$

каде D_t е вредност во моментот t на дивидендата која се исплаќа за време на траење на опцијата;

- Ако опцијата гласи на актива која обезбедува непрекинат принос на дивиденда q

$$c_t \geq max\{S_t e^{-q(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, 0\}$$

Долна граница на цената на европската продажна опција во моментот $t \leq T$ има вредност:

- Ако опцијата гласи на актива која не обезбедува дивиденда

$$p \geq max\{Ee^{-r(T-t)} - S_t, 0\}$$

- Ако опцијата гласи на актива која обезбедува привремена дивиденда
$$p_t \geq max\{D_t + Ee^{-r(T-t)} - S_t, 0\}$$

каде D_t е вредност во моментот t на дивидендата која се исплаќа за време на траење на опцијата;

- Ако опцијата гласи на актива која обезбедува непрекинат принос на дивиденда q
$$p_t \geq max\{Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)}, 0\}$$

Исто така, со примена на арбитражните аргументи може да се докажат следните особини на американската опција:

- Американската куповна опција со актива која не обезбедува дивиденда никогаш не може оптимално да се реализира пред датумот на доспевање;
- Американската куповна опција со актива која не обезбедува дивиденда, а која обезбедува добивка, има вредност како соодветната европска куповна опција;
- Американската продажна опција со актива која не обезбедува дивиденда, а која обезбедува добивка, оптимално се реализира пред датумот на доспевање.

Нека инвеститорот поседува единична актива и нека зазема долга позиција во продажната и кратка позиција во куповната европска опција. На датумот на доспевање T, вредноста на опцијата на оваа протфолио е еднаква на договорената цена E , без разлика на односот на активата и договорената цена. Поради тоа вредноста на ова портфолио во произволен момент $t < T$ мора да биде:

$$S_t + p_t - c_t = Ee^{-r(T-t)} \qquad (1.5.1)$$

За опцијата со актива која обезбедува привремена дивиденда, продажно – куповниот паритет е :

$$S_t + p_t - c_t = D_t + Ee^{-r(T-t)}.$$

За опцијата со актива која обезбедува непрекинат принос на дивиденда, продажно – куповниот паритет е :

$$S_t e^{-q(T-t)} + p_t - c_t = E e^{-r(T-t)} \quad (1.5.2)$$

За американската опција која не обезбедува дивиденда,продажно-куповниот партитет:

$$E e^{-r(T-t)} \leq S_t + P_t - C_t \leq E$$

За американската опција со актива која обезбедува привремена дивиденда, продажно - куповниот партитет е:

$$E e^{-r(T-t)} \leq S_t + P_t - C_t < D_t + E$$

За опција со актива која обезбедува непрекинат (постојан) принос на дивиденда, продажно-куповниот партитет е:

$$E e^{-r(T-t)} \leq S_t e^{-q(T-t)} + P_t - C_t \leq E$$

Бидејќи американската опција му дава повеќе права на својот имател од европската, логично е да се очекува дека и нивната вредност е поголема.

Сепак, тоа е точно само за американските продажни опции. Американската куповна опција никогаш не е поволно да биде реализирана пред датумот на доспевање, па таа во принцип е исто што е и европската куповна опција.

Тврдење1.5.1: Американската куповна опција не е оптимално да биде реализирана пред датумот на доспевање.

Доказ: Ќе ги разгледаме следните две портфолија:

- Портфолио А: една американска куповна опција (на акција) и сума на пари еднаква на $E e^{-r(T-t)}$.
- Портфолио В: една акција.

Ќе утврдиме дека ако се реализира опцијата т.е. купиме акција, тогаш портфолиото А се претвара во портфолио В.

Вредноста на парите во портфолиото А во моментот на доспевање T е еднаква на E, а во произволен претходен момент $\tau < T$ неговата вредност е $Ee^{-r(T-\tau)}$.

Ако се реализира опцијата во претходен момент τ , вредноста на портфолиото А би била: $S_\tau - E + Ee^{-r(T-\tau)} < S_\tau$,бидејќи $\tau < T$ и $r > 0$.

Бидејќи S_τ е вредност на портфолиото В во моментот τ , следува дека портфолиото А во секој момент е помалку вредно за разлика од портфолиото В, ако опцијата се реализира пред датумот на доспевање T.

Ако опцијата се држи сè до моментот T, вредноста на портфолиот А на доспевање ќе биде $max\{S_T, E\}$, а вредноста на портфолиото В тогаш е S_T . Секако дека секогаш постои веројатност дека во тој момент $S_T < E$. Тоа значи, во случај опцијата да се држи, портфолиото А секогаш е вредно исто како и портфолиот В или пак и повеќе. Што значи дека понатаму нема смисла да се порано реализира опцијата. ■

Оваа тврдење потврдува дека вредноста на европската куповна опција за секој $t < T$ е повисока од нејзината внатрешна вредност $max\{S_T - E, 0\}$.(Слика 3).

Американската продажна опција има секогаш поголема вредност од својата соодветна (дуална) европска опција. Причината е во тоа што вредноста на европската продажна опција во моментот $t < T$ лежи под нејзината внатрешна вредност. Да претпоставиме дека во некој момент $t < T$ пред доспевањето вредноста на акцијата S_T е во опсег таков што $P(S,t) < max\{E - S, 0\}$ т.е. вредноста на опцијата е помала од нејзината внатрешна вредност и посматраме што ќе се случи ако во тој момент извршиме продажба на опцијата. Очигледно постои можност на арбитража: можеме да купиме акција за S_T , истовремено да купиме и продажна опција за $P(S_t, t)$ која веднаш ќе се изврши (реализира) така што ќе ја продадеме акцијата за E. Така без ризик ќе оствариме профит $E - P(S_t, t) - S_t$.

Понатаму, мора да претпоставиме дека вредноста на американската продажна опција секогаш е поголема од нејзината внатрешна вредност:

$$P(S_t, t) \geq max\{E - S_t, 0\}$$

Од овде следува и дека вредноста на американската продажна опција секогаш е поголема од вредноста на европската продажна опција $P_a(S_t, t) > P_b(S_t, t)$ за секој $t < T$, а за куповните опции веќе заклучивме дека имаат иста вредност $C_a(S_t, t) > C_b(S_t, t)$.

За американската опција не важи *put - call партитет,* па може да тврдиме дека важи само неравенството: $C_a(S_t, t) + Ee^{-r(T-\tau)} < P_a(S_t, t) + S_t$.

Европските опции се карактеризираат со функцијата на приход во момент T. Американските опции имаат иста функција на приход, но кај нив освен проблемот на пресметување на вредноста на опцијата се појавува уште и проблем за наоѓање оптимален момент кога треба да се изврши опцијата.

Вредноста на европските и американските опции зависи само од цената на активата S_T во моментот T. Постојат таканаречени егзотични опции чија вредност зависи и од минатото - од поранешната цена на активата.

Ќе наведеме неколку примери за општи опции:

- ***Cash-or-nothing option*** имаат приход $B\mathcal{H}(S_T - E)$, каде $\mathcal{H}(\cdot)$ е Хевисајдова функција т.е. приходот е еднаков на нула ако $S_T < E$, а е еднаков на B ако $S_T > E$. Оваа опција може да се интерпретира како директна кладба (облог) за цената на активата.
- ***Азијска опција (Asian option)*** има вредност која зависи од аритметичката, геометриската или хармониската средина на почетната цена на активата.
- ***Lookback опција,*** чија вредност зависи од максимумот или минимумот на почетната цена на активата.

Произволен приход може да се оствари со комбинација на различни опции во портфолиото. На тој начин може да се постигне истовремен ограничен ризик и ограничен профит. Познатата комбинација се нарекува распон *(spread).*

Вертикалниот распон содржи опции со иста вредност (куповни или продажни) со ист датум на доспевање, но со различна цена на извршување и со различна заземена позиција. Хоризонтален или календарски распон содржи опции со различни датуми на доспевање.

1.6.Пазари на опции

Постојат два типа на пазари за опции: пазари преку шалтер и берзански пазари. Пазарите преку шалтер ги опфаќаат нестандардизираните опциони договори кои се прават според индивидуалните потреби на конкретните странки во договорот. Учесниците на овој пазар, во принцип, се заинтересирани за реализирање на опционото право, а не за тргување со самите опции. Оттука, ова е неликвиден пазар, со релативно повисоки трансакциони трошоци, иако истиот овозможува флексибилност во дизајнирањето на опционите договори.

Од друга страна, берзите за опции се организирани и регулирани пазари за тргување со стандардизирани опциони договори. Опциските берзи овозможуваат ликвидност на инвестициите во опции, преку стандардизираноста на договорите, локациската централизираност на тргувањето, постоењето на соодветна структура на берзански посредници и постоењето на соодветни правила за дисеминација на информации и регулација.

Трансакциите на берзанскиот пазар на опции не се директни трансакции меѓу купувачите и продавачите на опции, туку се трансакции посредувани од страна на специфична институција – Клириншка куќа, која функционира на конкретниот пазар. Всушност, тргувањето и реализацијата на опциите се одвива низ следниот синџир на учесници: инвеститори-брокерски/дилерски фирми-членки на клириншката куќа (често тоа се брокерските куќи) - клириншка куќа. Кај секоја поединечна трансакција, клириншката куќа се јавува како внатрешен посредник интермедиер, и тоа во двонасочна улога. На пример, кога некој инвеститор купи куповна опција за акција, клириншката куќа фактички ја раздвојува трансакцијата на два опциони договори: договор помеѓу крајниот купувач на опцијата и клириншката куќа, која се јавува како продавач на договорот и договор помеѓу крајниот продавач на опцијата и клириншката куќа која тука се јавува како купувач на договорот.

Клириншката куќа има централна улога во функционирањето на берзите за опции. Таа *de facto* се јавува како гарант за извршувањето на обврските на продавачите на опции: со тоа, кредитниот ризик се релоцира од продавачот на опцијата кон клириншката куќа.

Заради тоа, клириншката куќа им наметнува на продавачите на опции обврска за депонирање на еден вид депозит за сигурност, кој во практиката се нарекува маргина. Големината на ваквата маргина зависи од тоа дали и во колкава мера опцијата има позитивна вредност *(т.е. опцијата е In-the-money),* како и од тоа дали продавачот на опцијата го поседува примарниот имот кој евентуално би требало да го испорача. Покрај маргината, клириншката куќа одредува минимални капитални стандарди кон кои мора да се придржуваат нејзините фирми -членки, а понекогаш се формира соодветен гарантен фонд на куќата.

Инвеститорите во опции имаат во основа две можности: да ја извршат опцијата и да тргуваат со опцијата. Извршувањето значи реализација на правото од опцијата. Но, опциските берзи се атрактивни токму со обезбедувањето на втората можност. Имено, доколку цената на опцијата значајно порасне во однос на цената по која инвеститорот истата ја купил, тој ќе сака да ја продаде и така да оствари профит. Кога инвеститорот сака да ја продаде опцијата која ја поседува, тоа во практиката се споредува преку прибирање на постојната активна позиција *(long position)* на инвеститорот со креирање спротивна пасивна позиција *(short position)*, преку налог за продажба на истата опција.

Берзанското тргување со опции започнува во 1973 година на Чикашката опциска берза *(CBOE-Chicago Board Options Exchange)*. Тоа значи дека опциите се релативно нов феномен на организираните финансиски пазари. Врз појавата и развојот на тргувањето со опции значајно влијание имаа и придонесите во модерната финансиска теорија, поврзани со вреднувањето на опциите.

Меѓу овие придонеси, најзначајни се оние на тројцата финансиски економисти Фишер, Блек, Мајрон Шоулс и Роберт Мертон. Мајрон Шоулс и Роберт Мертон, за својот придонес ја добија и Нобеловата награда за економија во 1997 година.

Опционите договори со кои се тргува на берзите се нарекуваа тргувани опции *(traded options)*. Меѓутоа, елементи на опциони договори се среќаваат и кај некои видови на хартии од вредност, тогаш се зборува за т.н. вградени опции *(embedded options)*. Вакви опции се среќаваат кај конвертибилните обврзници, отповикливите обврсници и сл.

1.7.Пазарите на деривати - работа на „далечна“ иднина за Македонија?[5]

Во Македонија, единствени дериватни инструменти што се во употреба се валутните термински и своп договори. Своп договорите се склучуваат меѓусебно помеѓу банките и помеѓу банките и централна банка. Девизните свопови во последно време се еден од главните инструменти со кој комерцијалните банки раководат со ликвидноста.

Наспроти тоа, во Македонија воопшто не се тргува со деривати на хартиите од вредност. Пазарите на хартии од вредност во Македонија, како резултат на повеќе причини, се релативно неразвиени и неефикасни. Оттаму, не претставува никакво изненадување што во услови кога не постои развиено тргување со основните видови хартии од вредност (акции и обврсници), отсусутвува било какво тргување со нивните деривати.

Дериватните инструменти на хартиите од вредност сепак постојат, но во македонскиот Закон за хартии од вредност и тоа во пет негови членови. Во нив се третирани само опциите и фјучерсите, како стандардни дериватни финансиски инструменти. Веројатно во некое негово идно дополнување, би можело да се најде место за своповите и терминските договори.

Впрочем, помалку развиените земји генерално далеку заостануваат во поглед на обемот на тргување со дериватни инструменти во споредба со развиените земји.

И покрај брзиот растеж во последните неколку години, на дериватите тргувани во земјите во развој отпаѓа околу 1% од вкупната договорена главнина тргувана на глобалните пазари на деривати[6]. Ниту транзиционите економии не можат да се пофалат со некои импресивни резултати во тој поглед.

---

[5] Петковски, Михаил, „Финансиски и пазари и институции“ стр. 248
[6] „Derivatives in Emerging Market Economies“ , BIS 2002, Chapter IV

На пример, Словенија не успеа да развие активна берза на деривати. Но, во некои поранешни социјалиситички земји тргувањето со деривати сепак покажува значителен подем и тоа особено во оние кои примаат значителни износи странски инвестиции. Чешка претставува позитивен пример, така што на крајот на 2001 година на шалтерскиот пазар биле отворени позиции во различни дериватни инструменти во вредност од 50 милијарди долари.

Клучен фактор за побрзо или побавно воведување на финансиските деривати во Македонија ќе биде процесот на приближување и интегрирање со ЕУ. Тоа го потврдува во литературата често експлоатираниот пример на Атинската берза *(Athens Exchange),* која по либерализирањето на капиталните текови, на што Грција беше обврзана поради задолжителната примена на ЕУ директивите, од провинциски стана динамичен и иновативен финансиски пазар. Во 2002 година, обратот на дериватите изнесувал 89% од прометот на спот пазарот.[7]

Се разбира, моментно, развитокот на дериватните пазари не претставува приоритет за нашата земја. Далеку поважно е да оживее економската и инвестиционата активност и да се развијат основните облици на тргување на пазарот на капитал (со оглед на тоа што прометот, ниту со приватните ниту со државните инструменти, сè уште не е на задоволително ниво).

Доколку овие процеси се одвиваат со посакуваната динамика, заедно со процесот на институционално приближување кон ЕУ, тие би можеле да придонесат дериватните инструменти во Македонија да не бидат прашање на далечната иднина, како што можеби денес изгледа.

[7] www.adex.ase.gr

ГЛАВА 2. БИНОМЕН МОДЕЛ НА ЦЕНА НА ОПЦИЈА. МОДЕЛИРАЊЕ НА ЦЕНА НА ОПЦИЈА ВО ДИСКРЕТНО ВРЕМЕ

Оваа глава е посветена на основниот модел за моделирање на случајното движење на цената на активата и цената на опцијата, т.е. на моделот на Кокс-Рос-Рубинстеин (*Cox-Ross-Rubinstein)*. Со примена на програмскиот пакет *Mathematica* ќе биде претставено биномното дрво од вредности на цената на активата и опцијата во биномен модел.

2.1. Својства на портфолио хартии од вредности

За да се објасни случајноста во чии рамки функционира пазарот на хартии од вредност, во рамките на дискректен простор на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ се воведува поимот стохастичка база $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathcal{P})$ со филтрација $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ т.е. растечка фамилија σ −полиња во која важи $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, при што $0 < m \leq n$.

Филтрација $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, разгледана во контекс на финансиската математика означувa проток на информации, а секој член од оваа низа претставува множество од сите информации за финансискиот инструмент до моментот n, вклучувајќи го и n, достапни за сите учесници на пазарот.

Дефиниција 2.1.1: Стохастичката низа $(S_n)_{n\geq 0}$ е *адаптирана* во однос на филтрацијата $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ако случајната променлива $S_n \in \mathcal{F}_n$, за секој $n \geq 0$ и случајната променлива S_n е $\mathcal{F}_n$-мерлива.

Дефиниција 2.1.2: Нека $X: \Omega \to \mathbb{R}$ е интеграбилна случајна променлива која не е мерлива во однос на σ −полето $\mathcal{F}_n$,$n > 0$. Условното математичко очекување на случајната променлива X во однос на σ −полето $\mathcal{F}_n$ е случајната променлива $E(X|\mathcal{F}_n): \Omega \to \mathbb{R}$, при што $\mathcal{F}_n$ е мерлива и за неа важи:

$$\int_A E(X|\mathcal{F}_n)\, dP = \int_A X dP, \qquad A \in \mathcal{F}_n.$$

Дефиниција 2.1.3: Мерата на веројатност $\tilde{P}$ е апсолутно непрекината во однос на мерата на веројатност P (се означува $\tilde{P} \ll P$), ако $(\forall\ \mathrm{A} \in \Omega)\tilde{P} = 0 \Rightarrow P(A) = 0$. Ако мерите $\tilde{P} \ll P$ и $P \ll \tilde{P}$, тогаш тие се еквивалентни (означуваме $P \sim \tilde{P}$).

Теорема 2.1.4 (*Теорема на (Радон-Никодим) Radon-Nikodim*):
Ако мерите на веројатност P и $\tilde{P}$ се дефинирани на мерливиот простор$(\Omega, \mathcal{F})$ и ако важи $\tilde{P} \ll P$, тогаш постои единствена случајна променлива Y која е $\mathcal{F}$ -мерлива и за која важи: $\tilde{P}(A) = \int_A YdP \quad , A \in \mathcal{F}$.

Егзистенција и единственоста на условното математичко очекување произлегува од ***теоремата на Radon-Nikodim*** за $Y = E(X|\mathcal{F}_n)$.

Дефиниција 2.1.5:Случајната низа $\left\{\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n, n \geq 0\right\}$ е *мартингал (субмартингал)* во однос на проток на информација $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ако случајните променливи $\frac{S_n}{B_n}$ се $\mathcal{F}_n$-мерливи,$\tilde{E}\left|\frac{S_n}{B_n}\right| < \infty$ и $\tilde{E}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right) = \frac{S_n}{B_n}$ $\left(\tilde{E}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right) \geq \frac{S_n}{B_n}, \tilde{E}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}}\middle|\mathcal{F}_n\right) \leq \frac{S_n}{B_n}\right)$.

Со $\tilde{E}$ е означено математичкото очекување во однос на мерата на веројатност $\tilde{P}$.

Нека со (B, S) го означиме пазарот на хартии од вредност кој се состои од $m + 1$ финансиски инструменти и тоа:
безризични инвестиции (банкарски сметки, обврзници) и m различни ризични инвестиции (акции). Промената на вредноста на банкарската сметка се опишува со позитивна стохастичка низа $B = (B_n)_{n\geq 0}$, при што $B_n \mathcal{F}_{n-1}$е мерливо за секој $n \in \mathcal{N}$. Промената на на вредноста на i –тиот ризичен финансиски инструмент (акција) се опишува со позитивна стохастичка низа $S^i = \left(S_n^i\right)_{n\geq 0}$, при што $S_n^i \mathcal{F}_{n-1}$ е мерливо за секој $i = \overline{1, m}$.
Апсолутниот профит на i –та акција во моментот n е еднаков на разликата $S_n^i - S_{n-1}^i$. Релативен профит претставува однос од заработените (остварени) и вложените средства. Релативниот профит уште се нарекува и обрат (*return*).

Обратите на банкарските сметки и i –та акција во моментот n се соодветно:

$$r_n = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}, \qquad \rho_n^i = \frac{\Delta S_n^i}{S_{n-1}^i}, n \geq 1$$

Во тој случај, вредноста на банкарската сметка и i –та акција во моментот n се еднакви на, соодветно :

$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1}, \qquad S_n^i = \left(1 + \rho_n^i\right)S_{n-1}^i$$

при што $r_n \mathcal{F}_{n-1}$ се мерливи случајни променливи и $\rho_n^i \mathcal{F}_n$ се мерливи случајни променливи.

За да се обезбеди нормално функционирање на финансискиот пазар со сите финансиски инструменти, неопходно е да се очекува обратот на акциите или други ризични инструменти биде еднаков на безризичната каматна стапка, во однос на веројатноста на неутрален ризик, т.е.

$$\tilde{E}\left(\rho_n^i \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = r_n \qquad (2.1.1.)$$

Дефиниција2.1.6: Портфолио или пазарна стратегија од хартија од вредности на (B, S) пазарот е стохастичка низа $\Pi = (a, b)$, каде $a = (a_n)_{n\geq 0}$,

$b = (b^1, \dots, b^m), b^i = \left(b_n^i\right)_{n\geq 0}$, а a_n и $b_n^i, i = \overline{1, m}$, се $\mathcal{F}_{n-1}$ мерливи случајни променливи за секој $n \in \mathcal{N}_0$ $(\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0)$.

Случајната променлива a_n претставува број на безризични инвестиции во составот на портфолиото во момент n, додека случајната променлива b_n^i претставува број на позиција во i –та ризична инвестиција во состав на портфолиото во моментот n.

Дефиниција 2.1.7: Капитал на портфолиото Π од хартии од вредности е стохастичка низа $V^\Pi = (V_n^\Pi)_{n\geq 0}$ со општ член:

$$V_n^\Pi = a_n B_n + \sum_{i=1}^{m} b_n^i S_n^i$$

Ако за векторите $b_n = (b_n^1, \dots, b_n^m)_{n\geq 0}$ и $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^m)_{n\geq 0}$ со $b_n S_n$ го означиме скаларниот производ:

$$b_n S_n = \sum_{i=1}^{m} b_n^i S_n^i$$

Тогаш $V_n^{\Pi} = a_n B_n + b_n S_n$.

Почетниот капитал на портфолиото $V_0^{\Pi} = a_0 B_0 + b_0 S_0$ се нарекува почетна инвестиција на пазар на стратегија Π.

Со примена на формулата за пресметување стохастички диференцијал $\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n-1}\Delta a_n$ се добива промената на капиталот на портфолиото Π , $\Delta V_n^{\Pi} = (a_n \Delta B_n + b_n \Delta S_n) + (B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n)$.

Оваа формула покажува дека промената на капиталот на портфолиото зависи од промената на банкарската сметка и промената на цената на акција, како и од промената на составот на портфолиото.

Дефиниција 2.1.8: Портфолио хартии од вредности Π е *самофинансирачко* доколку содветниот капитал ${V_n^{\Pi}}_{n\geq 0}$ во произволен момент n е

$$V_n^{\Pi} = V_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{m} ((a_k \Delta B_k + b_k \Delta S_k)$$

Теорема 2.1.9: Портфолио хартии од вредности Π е самофинансирачко ако и само ако е $B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n = 0$.

Доказ: Нека портфолиото хартии од вредности Π е самофинансирачко.
Бидејќи, врз основа на $\Delta V_n^{\Pi} = (a_n \Delta B_n + b_n \Delta S_n) + (B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n)$,се добива:

$$V_n^{\Pi} = V_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{m} ((a_k \Delta B_k + b_k \Delta S_k) =$$

$$= V_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{m} (a_n \Delta B_n + b_n \Delta S_n + B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n)$$

За да портфолиото биде самофинансирачко, мора да важи
$B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n = 0$, за секое $n \geq 1$.
Обратно, нека $B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n = 0$, за секое $n \geq 1$.
Тогаш од $\Delta V_n^{\Pi} = (a_n \Delta B_n + b_n \Delta S_n) + (B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n)$
се добива дека $V_n^{\Pi} = a_n \Delta B_n + b_n \Delta S_n$, од каде со замена во $V_n^{\Pi} = V_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{m} ((a_k \Delta B_k + b_k \Delta S_k)$,се добива $V_n^{\Pi} = V_0^{\Pi} + \sum_{k=1}^{m} ((a_k \Delta B_k + b_k \Delta S_k)$,

што по дефиниција значи дека портфолиото хартии од вредности Π е самофинансирачко, со што доказот е завршен. ■

Со други зборови, кај самофинансирачкото портфолио нема одлив или прилив на капитал, туку можно е само да се зголеми бројот на едни инвестиции на сметка на намалување на други.

При формирање на портфолија хартии од вредности потребно е да се редуцира бројот на финансиски инструменти од кои се состои, или барем да се упрости неговата структура. Најприменливата метода е онаа кај која вредноста на банкарската сметка секогаш е 1. Паралелно со (B,S) пазарот се разгледува пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$, при што $\tilde{B}=\left(\tilde{B}_n\right)_{n\geq 0}$ и $\tilde{B}_n=1$ за секој $n\geq 0$, а $\tilde{S}=\left(\tilde{S}^1,\dots,\tilde{S}^m\right)$, каде $\tilde{S}^i=\left(\tilde{S}_n^i\right)_{n\geq 0}$ и $\tilde{S}_n^i=\frac{S_n^i}{B_n}$.

Капитал $\tilde{V}_n^{\Pi}$ на портфолиото Π на $(\tilde{B},\tilde{S})$ пазарот е еднаков на :

$$\tilde{V}_n^{\Pi}=a_n\tilde{B}_n+b_n\tilde{S}_n=a_n\frac{B_n}{B_n}+b_n\frac{S_n}{B_n}=\frac{1}{B_n}(a_nB_n+b_nS_n)=\frac{V_n^{\Pi}}{B_n}$$

Бидејќи

$$\tilde{B}_{n-1}\Delta a_n+\tilde{S}_{n-1}\Delta b_n=\frac{B_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta a_n+\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta b_n=\frac{1}{B_{n-1}}(B_{n-1}\Delta a_n+S_{n-1}\Delta b_n)=0$$

може да се заклучи врз основа на Теорема 2.1.8. дека портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко на пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$ ако и само ако е самофинансирачко на пазарот (B,S).

Теорема 2.1.10: Портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко ако и само ако е : $\Delta\left(\frac{V_n^{\Pi}}{B_n}\right)=b_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$.

Теорема 2.1.11: На (B,S) пазарот, дисконтираниот капитал $(V_n^\Pi)_{n\geq 0}$ е мартингал во однос на филтрацијата $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Доказ: Нека портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко на (B,S) пазарот. Тогаш е самофинансирачко и на пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$. Бидејќи $\Delta\tilde{B}_n = 0$,за секое $n \geq 0$,тогаш $\tilde{V}_n^\Pi = \tilde{V}_0^\Pi + \sum_{k=1}^n b_k \Delta\tilde{S}_k$, од каде се добива дека промената на капиталот на пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$ е еднаква на $\Delta\tilde{V}_n^\Pi = \tilde{V}_n^\Pi - \tilde{V}_{n-1}^\Pi = b_n\Delta\tilde{S}_n$.

Обратно, нека важи $\Delta\left(\frac{V_n^\Pi}{B_n}\right) = b_n\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$. Треба да докажеме дека портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко на (B,S) пазарот.

Со замена на $\Delta\tilde{V}_k^\Pi = b_k\Delta\tilde{S}_k$ во $\tilde{V}_n^\Pi = \tilde{V}_0^\Pi + \sum_{k=1}^n \Delta\tilde{S}_k$ се добива дека $\tilde{V}_n^\Pi = \tilde{V}_0^\Pi + \sum_{k=1}^n b_k\Delta\tilde{S}_k$, врз основа на Дефиниција 2.1.7., следува дека портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко на пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$. Од каде, портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко на пазарот(B,S). ■

Промената на капиталот на портфолиото на (B,S) пазарот опишана со формулата $\Delta V_n^\Pi = a_n\Delta B_n + b_n\Delta S_n$ претставува наједноставен случај бидејќи не ја вклучува дивидендата.

Нека $D = (D^1, \dots, D^m)$,каде $D^i = \left(D_n^i\right)_{n\geq 0}$, при што $D_0^i = 0, D_n^i$ се $\mathcal{F}_n$-мерливи случајни променливи за секој $i = \overline{1,m}$ и D_n^i претставува вкупна дивиденда која ја остварила i-тата ризична инвестиција заклучно со моментот n.

Кај самофинансирачкото портфолио хартија од вредност капиталот на портфолиото во моментот n е :

$$V_n^\Pi = a_nB_n + b_nS_n + b_n\Delta D_n = a_nB_n + b_n(S_n + \Delta D_n)$$

додека промената на капитал на портфолиото е

$$\Delta V_n^\Pi = a_n\Delta B_n + b_n\Delta S_n + b_n\Delta D_n + B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n - b_{n-1}\Delta D_{n-1}.$$

Дефиниција 2.1.12: Портфолиото е самофинансирачко ако V_n^Π е во облик:

$$V_n^\Pi = V_0^\Pi + \sum_{k=1}^m (a_k\Delta B_k + b_k\Delta S_k + b_k\Delta D_k)$$

Теорема 2.1.13: Портфолиото е самофинансирачко ако и само ако

$$B_{n-1}\Delta a_n + S_{n-1}\Delta b_n - b_{n-1}\Delta D_{n-1} = 0.$$

И во овој случај важи дека портфолиото е самофинансирачко на пазарот $(\tilde{B},\tilde{S})$ ако и само ако е самофинансирачко на (B,S) пазарот .

Теорема 2.1.14: Портфолиото Π хартија од вредности е самофинансирачко ако и само ако $\Delta\left(\frac{V_n^{\Pi}}{B_n}\right) = b_n\left(\Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) + \frac{\Delta D_n}{B_n}\right).$

Во претходните согледувања е претпоставено неограничено време на функционирање на пазарот, $n \geq 0$. Сите дефиниции и согледувања можат да се применат и ако се ограничи времето, односно ако се претпостави дека $0 \leq n \leq N$.

Основната претпоставка на повеќето математички модели во финансии, е отсуството на арбитража. Сите учесници на берзата постојано ја следат евентуалната можност за арбитража, бидејќи на тој начин може да се оствари голем профит. Меѓутоа, поради брзиот проток на информации брзо доаѓа до изедначување на цената, па се претпоставува дека не постои можност за арбитража.

Дефиниција 2.1.15: Самофинансирачкото портфолио Π реализира арбитража во момент N ако за почетен капитал $V_0^{\Pi} = 0$, капитал во момент N е ненегативен т.е. $P\{V_N^{\Pi} \geq 0\} = 1$, и позитивен со позитивна веројатност $P\{V_N^{\Pi} > 0\} > 0$.

Нека SF_a е класа од сите арбитражни самофинансирачки портфолија.

Дефиниција 2.1.16: На (B,S) пазарот не постои арбитражна можност т.е. пазарот е безарбитражен, ако $SF_a = \emptyset$.

Ако на арбитражниот пазар почетниот капитал е $V_0^{\Pi}=0$, паралелно со позитивната добивка $P\{V_N^{\Pi}>0\}>0$ мора да има и некои загуби. Со други зборови, на безарбитражниот пазар секоја нетривијална пазарна стратегија Π(т.е. ако $V_0^{\Pi}=0$ тогаш $P\{V_N^{\Pi}\neq 0\}=1$) мора да биде ризична односно истовремено да важи и $P\{V_N^{\Pi}>0\}>0$ и $P\{V_N^{\Pi}<0\}>0$.

Теорема2.1.17:(***Прва фундаментална теорема за цена на финансисиките инструменти***) Пазарот (B,S) е безарбитражен ако и само ако стохастичката низа $\left\{\frac{S_n}{B_n},\mathcal{F}_n,n\geq 0\right\}$ е мартингал.

Нека $f_N\mathcal{F}_N$- е мерлива функција која претставува некоја платежна обврска во момент N.

Дефиниција 2.1.18: Портфолиото Π хартија од вредности е одгоре (долу) заштитено од ризик ако се задоволени следните услови:

1. $V_0^{\Pi}\equiv x$,при што $x\geq 0$;
2. . $V_N^{\Pi}\geq f_N$ т.е. $(V_N^{\Pi}\leq f_N)$.

Дефиниција 2.1.19: (B,S) пазарот хартија од вредности е N-*совршен* ако секоја $\mathcal{F}_N$ –мерлива платежна обврска е остварлива т.е. репродуктивна. Во спротивно, пазарот е N-несовршен.

Остварлива т.е. репродуктивна платежна обврска значи дека за почетен капитал x може да се конструира портфолио чиј капитал во момент N ќе биде еднаков на f_N.

Совршенство на пазар е многу строг услов со кој (B,S) пазарот наметнува големи ограничувања. Поради тоа, тоа не е неопходно за постоење на совршен пазар кој ги бара сите $\mathcal{F}_N$ –мерливи обврски за плаќање, туку е доволно да се работи со ограничен капацитет на обврски за плаќање .

Дефиниција 2.1.20: (B,S) пазарот хартија од вредности е N –*комплетен,* (комплетен во однос на момент N), ако секоја ограничена $\mathcal{F}_N$-мерлива обврска за плаќање е остварлива.

2.2.Биномен модел на цена на опција *Cox-Ross-Rubinstein*

Биномниот модел на цена на опција или моделот Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* се применува за моделирање за цена на хартија од вредности во дискретно време.

Овој модел, во пракса, за доволен број на чекори претставува добра апроксимација на континуиран модел. Биномниот модел претставува наједноставен модел за разбирање на теорија на арбитража и се користи како важен модел за одредување цена на различни хартии од вредности. Корисна техника за утврдување на цената на опциите е конструкцијата на биномното стебло, кое уште се нарекува и биномно дрво. Биномното дрво е дијаграм со кој се претставени различните можни патеки по кој се движи странската валута во текот на траењето на опцијата.

Нека (B, S) пазарот се состои од една безризична инвестиција и една ризична инвестиција, на пример акција, чија цена се опишува со низата $B = (B_n)_{n\geq 0}$ и $S = (S_n)_{n\geq 0}$,соодветно.

Цената на овие инвестиции во момент $n,\ n \geq 1$, се еднакви :

$$B_n = (1+r)B_{n-1} = e^r B_{n-1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}.$$

Во текот на конструкција на биномниот модел се претпоставува дека $\rho = (\rho_n)_{n\geq 0}$ е низа од независни идентично распределени случајни променливи, при што секоја од случајните променливи има една од двете вредности x_1 и x_2, каде $x_1 < x_2$.

Биномниот модел кој најчесто се изучува е оној за кој

$x_1 = d - 1,\quad x_2 = u - 1,$ каде $0 < d < 1 < u.$ Ако се разгледува цената на акцијата во почетен момент $S_0 > 0$, во следен момент нејзината цена може да биде dS_0 или uS_0.

Ако се земе во предвид претпоставката дека вредностите d и u го задоволуваат условот $0 < d < 1 < u$, тогаш промената на цената од S_0 на dS_0 претставува пад на цената на акцијата, додека промената на цената од S_0 на uS_0 претставува раст на цената на акцијата.

Случајното движење на цената на акцијата во биномниот модел може да се опише со модел на фрлање паричка на тој начин што ако падне грб (G), тогаш цената на акцијата расте, а ако падне лице (P), тогаш цената на акцијата опаѓа. Нека цената на акцијата после извесен период (во момент $N = 1$) се означува со $S_1(G) = uS_0$ ако падне грб, а со $S_1(P) = dS_0$ ако падне лице.

Во момент $N = 2$ цената на акцијата ќе биде еднаква на една од следните вредности:

$$S_2(GG) = uS_1(G) = u^2S_0$$

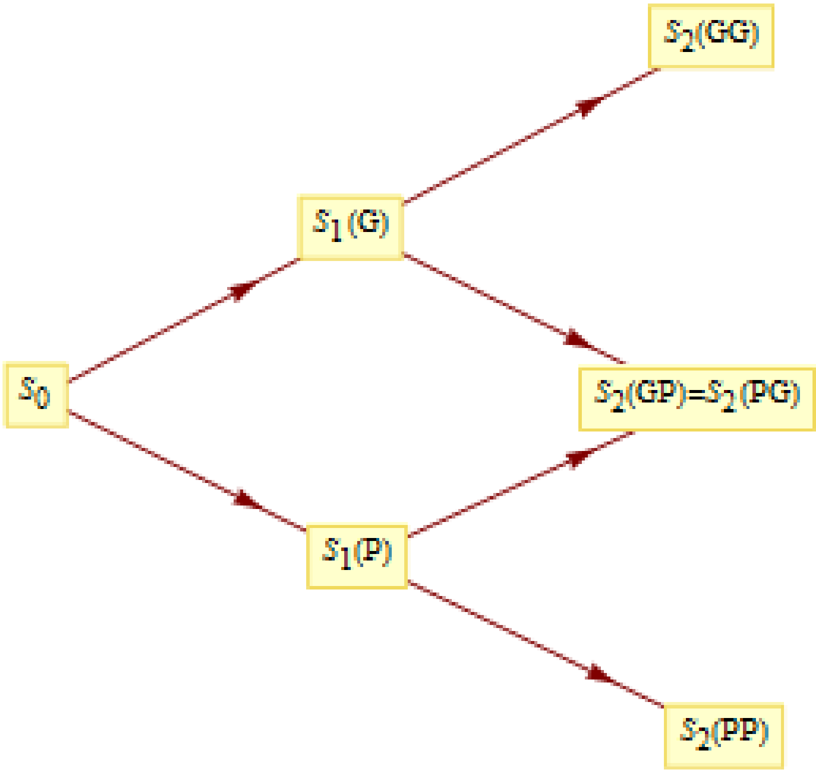
$$S_2(GP) = dS_1(G) = duS_0$$

$$S_2(PG) = uS_1(P) = udS_0$$

$$S_2(PP) = dS_1(P) = d^2S_0.$$

Случајното движење на цената на акцијата во биномниот модел може графички да се претстави со помош на биномното дрво на следниот начин:

In[1] ≔ TreePlot[{"S_0"→"S_1(P)","S_0"→"S_1(G)","S_1(G)"→"S_2(GP)=S_2(PG)", "S_1(G)"→"S_2(GG)", "S_1(P)"→"S_2(PP)","S_1(P)"→"S_2(GP)=S_2(PG)"},Left,VertexLabeling →True, DirectedEdges→True]



Слика 4:Графички приказ со помош на биномно дрво на случајно движење на цена на активата.
Figure4:Graphic display using the binomial tree accidental movement of asset prices.

Паралелно со евалуацијата на цената на акцијата се разгледува и евалуација на цена на безризична инвестиција т.е. банкарска сметка. Доколку во почетниот момент се инвестира во банкарската сметка на една парична единица валута, чија вредност се менува со формулата $B_n = e^r B_{n-1}$, во моментот $N = 1$ вредноста на банкарската сметка изнесува e^r . Во овој случај r претставува каматна стапка која одговара на овој период.

Секако, важи $0 < d < e^r < u.$

Во општ случај, за N периоди, секој елементарен исход $\omega \epsilon\, \Omega$ е од облик $\omega = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N)$ каде $\omega_i = \{P, G\}$ за секој $i = \overline{1, N}$.

Истовремено со промената на курсот на странската валута се менува и состојбата на банкарската сметка, па банкарската сметка во домашниот пазар после еден период се менува за зголемена камата $(1+r)$, а на странскиот пазар за $\left(1+r_j\right)$.

Следната пропозиција, аналогна на $\tilde{E}\left(\rho_n^i \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = r_n$ е од големо значење за остварување на стабилен финансиски пазар, во смисла дека на пазарот хартии од вредност треба да има и ризични и безризини инвестиции.

Пропоцизија 2.2.1: На безарбитражниот пазар на хартии од вредности важи:

$$0 < d < 1 < \frac{1+r}{1+r_j} < u$$

2.3. Биномен модел на цена на европска опција

Ќе разгледаме европска опција чија актива е акција со договорена цена E, со датумот на доспевање на опцијата N и f_N -плаќање на опцијата во моментот N. Продавачот на опцијата, за да може на датумот на доспевање на опцијата да обезбеди плаќање, во времето $k = 0, \ldots, N-1$ зазема $\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k)$ позиција во акцијата, при што:

$$\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = \frac{f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}{S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}$$

Случајната променлива $\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k)$ е $\mathcal{F}_k$-мерлива, бидејќи во моментот k продавачот на опцијата зазема позиција во акцијата за да се заштити од ризик кој настанува поради промената на цената на акцијата на пазарот.

Вредноста на капиталот на портфолиото инвеститори во моментот $k+1$ е еднаква на:

$$\begin{aligned} &V_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) \\ &= \Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) \\ &+ e^r [V_k(\omega_1 \cdots \omega_k) - \Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) S_k(\omega_1 \cdots \omega_k)] \end{aligned}$$

од каде може да се заклучи дека случајната променлива $V_k \mathcal{F}_k$ –е мерлива.

Арбитражната вредност на опцијата во моментот k изнесува

$$f_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = e^{-r}[\tilde{p} f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) + \tilde{q} f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)] = e^{-r} \tilde{E}(f_{k+1} | \mathcal{F}_k)$$

каде $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ е веројатноста за растење и опаѓање на цената на активата во однос на веројатноста $\tilde{P}$ и за нив важат следните формули:

$$\tilde{p} = \frac{e^r - d}{u - d} \quad , \tilde{q} = \frac{u - e^r}{u - d} = 1 - \tilde{p}$$

Секоја од вредностите $\Delta_k, k = 0, \ldots, N-1,$ се нарекува делта опција и претставува број на позиција во активата што треба да ги преземат за секоја кратка позиција во опцијата со цел да се заштити портфолиото од ризик. Таквата заштита на портфолиото се нарекува делта заштита на портфолиото од ризик.

Теорема 2.2.2: Во биномниот модел на цената со N период постои единствена мера на веројатност $\tilde{P}$ на неутрален ризик дефинирана со :

$$\tilde{P}(\omega_1 \cdots \omega_N) = \tilde{p}^{\sum_{i=1}^{N} \gamma_G(\omega_i)} \cdot \tilde{q}^{N-\sum_{i=1}^{N} \gamma_G(\omega_i)}$$

каде, $\gamma_G(\omega_i) = \begin{cases} 1, \omega_i = G \\ 0, \omega_i = P \end{cases}$.

Доказ: Познато е дека $\tilde{P}$ е мера на веројатност на неутрален ризик ако за секое $\omega \in \Omega$, важи $\tilde{P}(\Omega) > 0$ и ако $\left\{\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n, n = 0,1, \dots, N\right\}$ е мартингал. Ако за некое $\omega \in \Omega$ важи $\tilde{P}(\omega) = 0$, тогаш веројатноста да падне грб или писмо е еднаква на нула, што не е точно.

Бидејќи $B_n = (1 + r)B_{n-1}$ и $S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}$ останува да се покаже дека $\left\{\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n, n = 0,1, \dots, N\right\}$ е мартингал. Навистина,

1. $\frac{S_n}{B_n}$ е $\mathcal{F}_n$- мерлива случајна променлива
2. $\tilde{E}\left|\frac{S_n}{B_n}\right| < \infty$,
3. $\tilde{E}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \middle| \mathcal{F}_n\right) = \frac{(1+\rho_n)S_n}{(1+r)B_n} \tilde{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{(1+\rho_n)S_n}{(1+r)B_n}(uS_n\tilde{p} + dS_n\tilde{q}) =$
   $\frac{(1+\rho_n)S_n}{(1+r)B_n} S_n \frac{(1+r)}{(1+\rho_n)} = \frac{S_n}{B_n}$ ■

2.3.1.Биномен модел на цена на опција чија актива обезбедува непрекинат принос на дивиденда

Ќе разгледаме европска опција со актива која обезбедува непрекинат принос на дивиденда q, со договорена цена E и датум на доспевање N.

Продавачот на опција во моментот $k = 0, \dots, N-1$ зазема $\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k)$ позиција во акцијата, при што:

$$\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = e^{-q} \frac{f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}{S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}$$

Вредноста на капиталот на портфолиото инвеститори во моментот $k+1$ е еднаква на:

$$f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) = V_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) =$$

$$= \Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) e^{-q} S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) + e^r [V_k(\omega_1 \cdots \omega_k) - \Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) S_k(\omega_1 \cdots \omega_k)].$$

Арбитражната вредност на опцијата во моментот k изнесува

$$f_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = e^{-r}[\tilde{p} f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) + \tilde{q} f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)]$$

односно,

$$f_k = e^{-r} \tilde{E}\left(f_{k+1} \middle| \mathcal{F}_k\right)$$

при што веројатноста на растење и опаѓање на цената на активата се :

$$\tilde{p} = \frac{e^{r-q} - d}{u-d} \quad , \tilde{q} = \frac{u - e^{r-q}}{u-d}$$

Во случај кога активата на опцијата е странска валута важи $q = r_j$, каде r_j е каматна стапка земена од каде што е странската валута.

2.3.2.Биномен модел на цена на опција чија актива е фјучерс

Ќе разгледаме европска опција чија актива е фјучерс со спот цена F_0, со договорена цена E и датум на доспевање N.

Продавачот на опција во моментот $k = 0, \dots, N-1$ зазема $\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k)$ позиција во акцијата при што:

$$\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = \frac{f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}{F_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - F_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}$$

Вредноста на капиталот на портфолиото инвеститори во моментот $k+1$ е еднаква на:

$$f_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) = V_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) =$$

$$= \Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k)[F_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_{k+1}) - F_k(\omega_1 \cdots \omega_k)] + e^r f_k(\omega_1 \cdots \omega_{k+1})$$

Арбитражната вредност на опцијата во моментот k изнесува

$$f_k = e^{-r}\tilde{E}(f_{k+1}|\mathcal{F}_k),$$

при што

$$\tilde{p} = \frac{1-d}{u-d} \quad , \tilde{q} = \frac{u-1}{u-d} = 1 - \tilde{p}.$$

2.4.Биномен модел на цена на американска опција

Ќе разгледаме американска опција чија актива е акција со договорена цена E и датум на доспевање N, при што g_k е арбитражна цена на опцијата во моментот k. Се разгледува случајна низа $\{F_k\}_{k=0}^{N}$, при што F_k се ненегативни $\mathcal{F}_k$-мерливи случајни променливи и претставуваат наплата на американската опција во моментот k.

Американски опции се разликуваат од европските опции по тоа што, освен на датум на доспевање, може да се реализират и пред тој датум. Поради тоа постапката за пресметување на цената на американската опција се разликува од постапката за пресметување на цената на европската опција.

Движејќи се назад во времето, арбитражната цена g_{n-1} се добива со дисконтирање на очекуваните вредности g_n ако опцијата не се реализира, а ако се реализира во моментот $N-1$ тогаш $g_{N-1}=F_{N-1}$, т.е.

$$g_{N-1} = max\{F_{N-1}, \tilde{E}(e^{-r}g_N|\mathcal{F}_{N-1})\}$$

Доколку во некој момент арбитражната цена на американската опција е еднаква на својата наплата, сопственикот на опција може да ја реализира. Меѓутоа, доколку не ја искористи приликата за реализација, продавачот на опцијата има можност да сумата (износот):

$$C_k = g_k - e^{-r}\tilde{E}(g_{k+1}|\mathcal{F}_k)$$

која е ненегативна, да ја потроши или вложи во банка, а и понатаму да остане заштитен од ризик.

За да се заштити од ризик, продавачот на американската опција во секој момент k зазема Δ_k позиција во активата на опцијата, каде

$$\Delta_k(\omega_1 \cdots \omega_k) = \frac{g_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - g_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}{S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k G) - S_{k+1}(\omega_1 \cdots \omega_k P)}$$

Вредноста на капиталот на портфолиото во почетниот момент е $V_0 = g_0$, додека во моментот $k+1$ се дефинира како

$$V_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + e^r(V_k - C_k - \Delta_k S_k)$$

Во моментот k неговиот капитал е еднаков на арбитражната цена на опцијата т.е. $V_k = g_k, k = 0, \dots, N$.

2.5.Избор на параметри во биномниот модел во зависност од волатилноста σ

Како што беше наведено претходно, биномното дрво претставува движење на цената на активата наведена во опцијата. Сепак, потребно е параметрите кои го одредуваат движењето на цената на активата u и d, да се совпаѓаат со волатилноста на цената на активата σ. Имено, тешко е во одредени случаи да се одредат параметрите на нагорното и надолното движење на цената на активата u и d додека параметарот на волатилност кој се одредува стохастички е достапен на веб сајтовите на берзата. Се претпоставува дека за мал временски период Δt и одредени вредности на параметрите u и d, волатилноста σ е иста и во реални случаи и во случаи на неутрален ризик.

Биномниот модел претпоставува дека цената на активата на опцијата во секој период може да расте или опаѓа, т.е.

1) почетната цена на активата S_0 може да се зголеми на вредност S_u со веројатност $\tilde{p} = p_u$,

2) почетната цена на активата S_0 може да се намали на вредност S_d со веројатност $\tilde{q} = p_d = 1 - p_u$,

каде u и d се фактори за зголемување и намалување, соодветно.

Параметрите p_u, p_d, u, d се избрани во согласност со фактот дека за мали временски интервали Δt биномниот модел конвергира кон непрекинат модел.

Врз основа на (4.1.6) и во согласност на Линберговата (Linberg – овата) централна гранична теорема, следните услови се доволни за обезбедување на оваа конвергенција:

1) Цените на активата се независни од нивото или цените на активата секогаш имаат иста распределба;

2) Очекуваната распределба на цената на активата во биномниот модел е еднаква на очекуваната log-нормална распределба:

$$p_u u + p_d d = e^{r\Delta t} \tag{2.3.1}$$

Врз основа на фактот дека важи теорема (2.1.3), очигледно е дека $\mu = r$.

3) Дисперзијата на распределба на цената на активата во биномниот модел е еднаква на дисперзија на log-нормална распределба:

$$p_u S_0^2 u^2 + p_d S_0^2 d^2 - (\, p_u S_0 u + p_d S_0 d)^2 = S_0^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$$

$$\overset{(2.3.1)}{\Longleftrightarrow} p_u u^2 + p_d d^2 - e^{2r\Delta t} = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - e^{2r\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow p_u u^2 + p_d d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \tag{2.3.2}$$

4) Веројатностите p_u и p_d се позитивни и се наоѓаат во интервал помеѓу 0 и 1:

$$0 < p_u, p_d < 1 \tag{2.3.3}$$

5) Збирот на веројатностите е 1:

$$p_u + p_d = 1 \tag{2.3.4}$$

Понатаму, постојат три равенки со четири непознати $p_u, p_d, u\,, d$. Равенките (2.3.1), (2.3.2) и (2.3.4) ги дефинираат сите статистички важни особини на дискретното случајно движење. Изборот на четирите равенки е прилично произволен. Сите правилно избрани параметри во биномниот модел конвергираат кон иста теорија, т.е. *Black-Scholes* теорија за непрекинат случај, со константна волатилност. Како резултат се добиваат бесконечен број на биномни стебла. Ако сите цени на активата кои се наоѓаат во биномното стебло се помножат со некоја константа (многу мала), која е фактор на растење, се добива биномно стебло кое има различна веројатност, но ја претставува истата теорија на непрекинатост. Добро познатото биномно дрво Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* (1979) има особина сите јазли со исти просторни индекси да имаат иста вредност.

Биномното дрво Рендлман-Бартер *(Rendlemann-Bartter)* (1979) има особина сите веројатности да се еднакви на $\frac{1}{2}$. Исто така, биномното дрво расте ако

$$u \cdot d = e^{2r\Delta t}.$$

Кокс, Рос и Рубинстеин *(Cox, Ross и Rubinstein)* ја поставиле четвртата равенка во облик $u \cdot d = 1$. Заедно со дадените услови (2.3.1)-(2.3.4), кога Δt тежи кон нула, се добива дека важи:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} \qquad p_d = \frac{u-e^{r\Delta t}}{u-d} \tag{2.3.5}$$

Така, моделот Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* станал стандарден за биномни модели, иако постојат модели кои обезбедуваат точни решенија на равенките (2.3.1) и (2.3.2).

Параметрите (2.3.5) кои ги пресметале *Cox, Ross и Rubinstein* ја задоволуваат равенката (2.3.1), а само апроксимативно ја задоволуваат равенката (2.3.2) за доволно мало Δt. Во случај кога $\Delta t > \frac{\sigma^2}{r^2}$ една од веројатноста од (2.3.5) е поголема од 1, а друга помала од 0, што претставува најголема забелешка на моделот на Кокс, Рос и Рубинстеин *(Cox, Ross и Rubinstein)*.

Друг начин на одредување на факторот на растење и опаѓање на цената на активата на опцијата е моделот на Рендлман-Бартер (Rendlemann-Bartter)

$$p_u = p_d = 0{,}5$$

$$u = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$u \cdot d = e^{2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} \tag{2.3.6}$$

Врз основа на (2.3.6) очигледно е дека $u \cdot d \neq 1$, со што е нарушена особината на централност т.е. особина со која вредноста на активата во средниот јазол во вториот период е како во претходниот момент. Предност на Рендлман-Бартер *(Rendlemann-Bartter)* е тоа што параметрите (2.3.6) ги задоволуваат условите (2.3.1)-(2.3.4).

Врз основа на претходно разгледаните биномни модели може да се заклучи дека стандардната девијација на промена на цената на активата за мал временски интервал Δt е приближно еднаква на $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Според тоа, волатилноста може да се интерпретира како процент од стандардната девијација на промената на цената на активата. Со цел да се применуваат методите на оценување со помош на биномното дрво се користи фактор дека временскиот интервал Δt е мал. Според тоа, наместо $\sigma\sqrt{\Delta t}$ може да се користи прецизен израз за стандардна девијација на промена на цената на активата согласно приближното равенство дека:

$$\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} \approx \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad (2.3.7)$$

Биномното стебло може да се конструира така што ќе важи условот $u \cdot d = e^{2r\Delta t}$

На тој начин и кога Δt не е толку мало се добива модел со фактори на растење и опаѓање на цената на активата, u и d, соодветно, и со веројатностите p_u и p_d

$$u = e^{\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} + r\Delta t}$$

$$d = e^{-\sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1} + r\Delta t}$$

$$p_u = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \qquad p_d = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} \qquad (2.3.8)$$

Оваа дрво може да се смета како додаток на моделот на Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* и како додаток на моделот на Рендлман-Бартер *(Rendlemann-Bartter).* Во тој случај и факторите на растење и опаѓање на цената на активата, u и d соодветно се менуваат. Како последица на оваа се јавува дека во централниот ред на дрвото има безризична каматна стапка.

ГЛАВА 3. ТРИНОМЕН МОДЕЛ НА ЦЕНА НА ОПЦИЈА

Триномниот модел на цена на опцијата бил проучуван од многу научници. Бојл, Кокс, Рубинстеин, Рендлман, Бартер *(Boyle, Cox, Ross, Rubinstein, Rendlemann, Bartter)* се само дел од научниците кој се занимавале со оваа проблематика и конструирале модели за пресметување на цената на опцијата. Во оваа глава претставени се различни избори на параметри за триномен модел на цена на опција применети на конкретни примери. Со примена на програмскиот пакет *Mathematica* претставено е триномното дрво од вредности на цената на активата, како и пресметување на арбитражната вредност на европската и американската опција. Последниот дел од оваа глава е посветен на анализа на параметрите за заштита на портфолио од ризик.

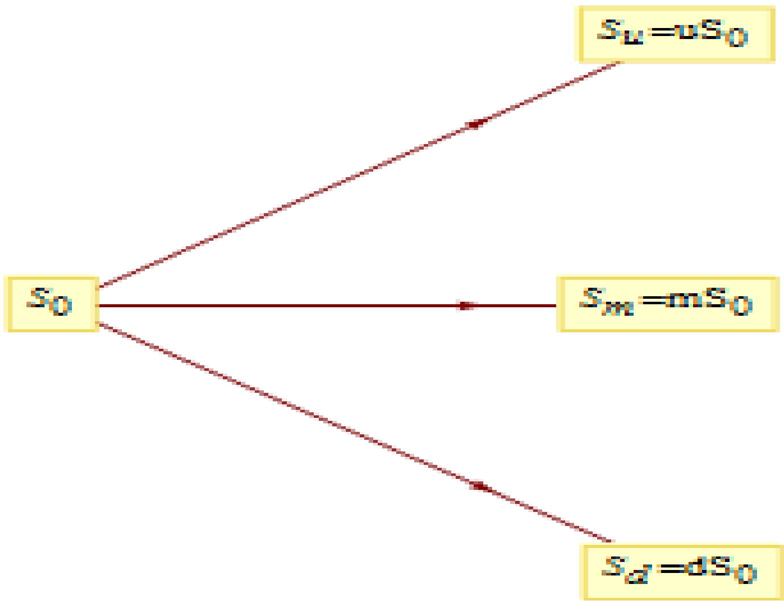
3.1.Триномно стебло од цената на активата

Триномниот модел претставува напреден модел во однос на биномниот, бидејќи се претпоставува дека цената на активата може во секој период да расте, опаѓа, да се менува или да остане иста со одредена веројатност. Факторите на растење, опаѓање, промена или непроменливата цена на активата се означува со u, d и m, соодветно. Нека вредноста на активата на опцијата во почетниот момент е S_0. Вредноста на активата S_0 во момент $N = 1$ може да се промени на еден од следните три начини:

1) Да се зголеми до вредност S_u со веројатност p_u,
2) Да се промени на вредност S_m или да остане иста, т.е. нејзината вредност S_0 да е со веројатност p_m,
3) Да се намали на вредност S_d со веројатност p_d.

Бидејќи цената на активата после првиот период може да биде една од вредностите S_u, S_m и S_d со веројатност p_u, p_m и p_d соодветно, збирот на овие веројатности е еднаков на 1, па $p_m = 1 - p_u - p_d$.

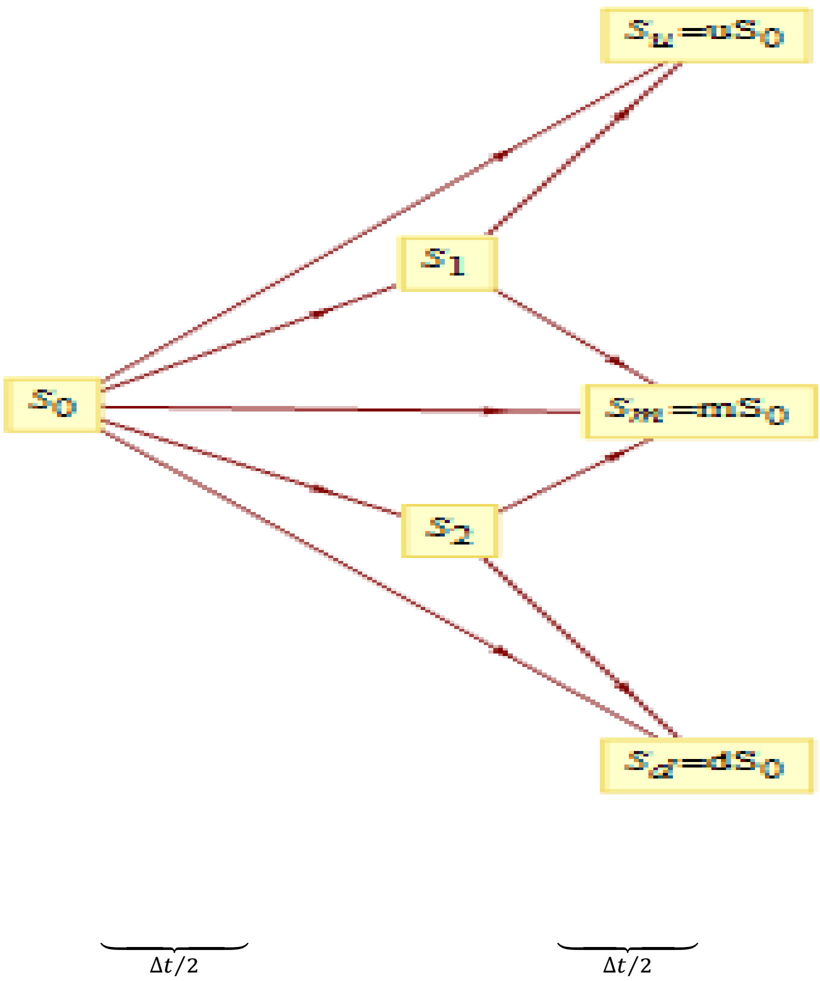
Во моментот $N = 1$ непознати параметри во моделот се: веројатностите p_u, p_m и p_d,и параметрите u, d и m кои ги одредуваат вредностите на активата S_u, S_m и S_d.



Слика 5:Конструкција на триномно стебло со вредност на активата S_0 во момент $N = 1$.
Figure 5:Construction trinomial tree with S_0 value of assets at a time N = 1.

Триномното стебло за еден период може да се конструира како комбинација на биномното стебло со два периоди. Овој начин на конструкција на триномното стебло може да се примени на сите стандардни биномни стебла со константна волатилност, како што се биномните стебла во моделите на Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)*, Рендлман-Бартер *(Rendlemann – Bartter)*, итн.

Го разгледуваме биномниот модел Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* со два периоди со должина $\Delta t/2$. Вредностите на активата добиени со помош на биномниот модел после два периоди, односно после временски интервал Δt се истовремено и вредности на активата добиени со помош на триномниот модел после еден период, што е илустрирано на следната слика.



Слика 6: Конструкција на триномното стебло за еден период како комбинација на биномното стебло со два периоди.
Figure 6:Construction trinomial tree for a period as a combination of the binomial tree with two periods.

Врз основа на формулата (2.3.5) во биномниот модел се добива дека параметрите на нагорното и надолното движење на цената на активата соодветно се:

$$\tilde{u} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} \qquad ,\tilde{d} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}$$

А веројатноста на зголемување и намалување на цената соодветно се:

$$\tilde{p} = \frac{e^{r\Delta t/2} - \tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} \qquad ,\tilde{q} = \frac{\tilde{u} - e^{r\Delta t/2}}{\tilde{u} - \tilde{d}}$$

Тогаш параметрите на нагорното и надолното движење на цената на активата за триномниот модел соодветно се:

$$u = \tilde{u} \cdot \tilde{u} = \left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$d = \tilde{d} \cdot \tilde{d} = \left(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

Веројатностите на движење на цената на активата се:

$$p_u = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - \tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}}\right)^2$$

$$p_d = \tilde{q} \cdot \tilde{q} = \left(\frac{\tilde{u} - e^{r\Delta t/2}}{\tilde{u} - \tilde{d}}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Понатаму, со примена на биномниот модел Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* со два периоди со должина $\Delta t/2$, се добива триномниот модел со параметри.

$$S_u = S_0 e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$S_m = S_0$$

$$S_d = S_0 e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \qquad (3.1.1.)$$

Триномниот модел може да се моделира тргнувајќи од истите основни претпоставки и ограничувања кои се користени за биномниот модел и врз основа на (4.1.6):

1) Веројатноста на движење на цената на активата на опцијата p_u, p_m и p_d се позитивни, тие се наоѓаат помеѓу 0 и 1 а збирот е еднаков на 1

$$0 < p_u, p_m \ , p_d < 1 \ , p_m + p_u + p_d = 1 \tag{3.1.2}$$

2) Очекуваната распределба на цената на активата во триномниот модел после еден период е еднаква на очекуваната log-нормална распределба

$$p_u S_0 u + p_m S_0 m + p_d S_0 d = S_0 e^{r\Delta t}$$

односно,

$$p_u u + p_m m + p_d d = e^{r\Delta t} \tag{3.1.3}$$

3) Дисперзијата на распределба на цената на активата во триномниот модел после еден период е еднаква на дисперзијата на log-нормална распределба

$$p_u S_0^2 u^2 + p_m S_0^2 m^2 + p_d S_0^2 d^2 - (p_u S_0 u + p_m S_0 m + p_d S_0 d)^2 = S_0^2 e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$$

од каде, врз основа на (3.1.3) се добива:

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 - e^{2r\Delta t} = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right)$$

односно

$$p_u u^2 + p_m m^2 + p_d d^2 = e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} \tag{3.1.4}$$

Првиот триномен модел го претставил Бојл *(Boyle)* во 1986 година, а во 1988 година го проширил на две активи. Врз основа на (3.1.2) - (3.1.4) и од условот $u \cdot d = 1$, Бојл *(Boyle)* ги добил следните веројатности на движење на цената на активата:

$$p_u = \frac{\left(e^{\sigma^2 \Delta t} + e^{2r\Delta t} - e^{r\Delta t}\right)u - \left(e^{r\Delta t} - 1\right)}{(u-1)(u^2-1)}$$

$$p_d = \frac{u^2\left(e^{\sigma^2 \Delta t} + e^{2r\Delta t} - e^{r\Delta t}\right) - u^3\left(e^{r\Delta t} - 1\right)}{(u-1)(u^2-1)}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \qquad (3.1.5)$$

Со замена на параметрите u и d од моделот Кокс-Рос-Рубинстеин (Cox-Ross-Rubinstein), односно (2.3.5) и од претпоставката дека $m = 1$, се добива дека некоја од веројатностите во (3.1.5) нема да биде помеѓу 0 и 1. Поради тоа, Бојл (Boyle) предложил користење на параметар на дисперзија $\lambda > 1$ за факторот на растење и фактор на опаѓање на цената на активата, односно

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad , d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (3.1.6)$$

Сепак, оваа параметризација дава негативна веројатност на движење на цената на активата за мали вредности на параметарот λ. Бојл *(Boyle)* открил дека точноста на триномниот модел со 5 периоди одговара на моделот на Кокс-Рос-Рубинстеин *(Cox-Ross-Rubinstein)* со 20 периоди.

Комрад*(Komrad)* (1990) го подобрил моделот за одредување на потенцијалните проблеми на негативните веројатности.

Бојл*(Boyle)* пронашол оптимално решение на системот (3.1.2) - (3.1.4) така што веројатностите на движење на цената на активата да се приближно еднакви, а Тјан*(Tian)* (1993) како и Дерман*(Derman),* Кани*(Kani)* и Крис *(Chriss)* (1996) ја докажале еднаквоста на веројатноста во триномниот модел. Еден од изборот на параметри во триномниот модел со еднаква веројатност на движење на цената на активата е:

$$S_u = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{3\Delta t/2}}$$

$$S_m = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}$$

$$S_d = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t - \sigma\sqrt{3\Delta t/2}}$$

$$p_m = p_u = p_d = \frac{1}{3} \tag{3.1.7}$$

Конструкција на триномното стебло е можна со помош на биномниот модел Рендлман-Бартер (Rendlemann-Bartter) со два периоди, аналогно како и за моделот на Кокс-Рос-Рубинстеин (Cox-Ross-Rubinstein) при што се добиени следните параметри на моделот:

$$S_u = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$S_m = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}$$

$$S_d = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$p_u = p_d = \frac{1}{4} \qquad , p_m = \frac{1}{2} \tag{3.1.8}$$

Уште еден начин на моделирање на цената на активата во триномниот модел ако се задоволени следните услови е:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad , \quad d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}}$$

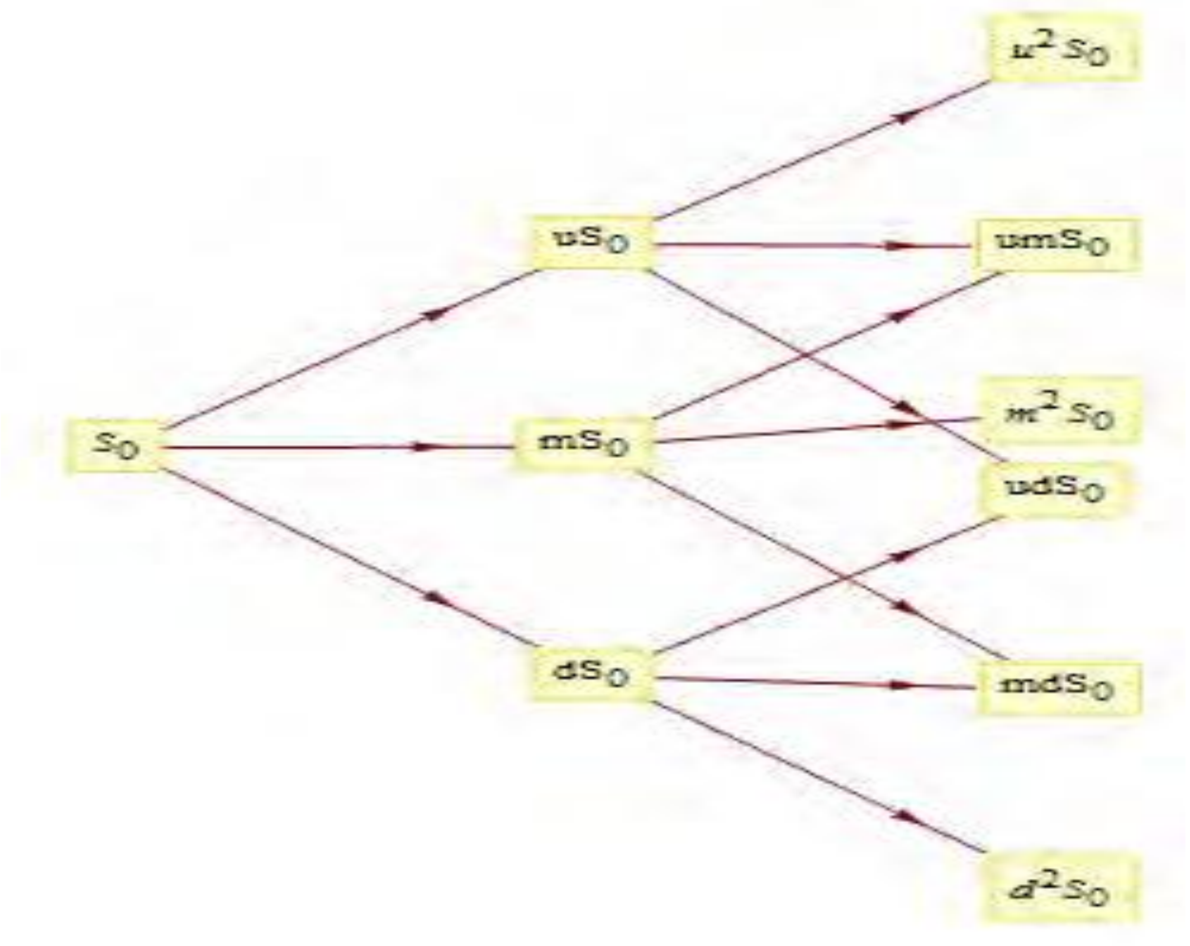
$$p_u = p_d = \frac{1}{6} \qquad , p_m = \frac{2}{3} \tag{3.1.9}$$

Понатаму, можна е конструкција на различни типови на триномното стебло врз основа на условите (3.1.2) - (3.1.4).

Триномниот модел има поголем број на параметри за разлика од биномниот модел, па цената на активата на опцијата има поголем избор на можни позиции на стеблото во текот на времето. Бидејќи триномниот модел содржи шест параметри, а (3.1.2) - (3.1.4) претставуваат три услови, неопходно е да се пресметат уште три непознати параметри. Изборот на тие параметри може да се добие од различните позииции на цената на активата во триномното стебло.

3.2.Рекомбинација на триномното стебло со променлива волатилност

Како што претходно рековме, постојат само три равенки за да се пресмета веројатноста на три движења на цените на активата (p_u, p_m, p_d) и три фактори за движење на цената на активата (u, m, d), но потребни се уште три за одредување на конечното решение. Очигледно е дека само еден услов од нив обезбедува рекомбинација на триномното стебло и тоа условот $u \cdot d = m^2$. Без рекомбинација, бројот на јазли на триномното стебло во N –тиот период е $(3^{N+1} - 1) \cdot 0.5$, додека со рекомбинација се намалува на $(N+1)^2$.



Слика7: Рекомбинација на триномното стебло со променлива волатилност.
Figure7: Recombinant trinomial tree with variable volatility.

Нека ги разгледаме равенките (3.1.3) и (3.1.4). Тогаш, во равенката (3.1.2) се заменува p_m од (3.1.3) и (3.1.4). Потоа се пресметува p_u и p_d од (3.1.3) и се заменува во изразот (3.1.4). После одредени поедноставувања, равенката може да се реши при што се добиваат следните изрази за p_u, p_m, p_d:

$$p_u = \frac{e^{2r\Delta t}e^{\sigma^2\Delta t} - e^{r\Delta t}d - e^{r\Delta t}m + md}{u^2 + md - um - ud}$$

$$p_d = p_u\frac{m-u}{d-m} + \frac{e^{r\Delta t} - m}{d-m}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \tag{3.2.1}$$

Бидејќи условот $u \cdot d = m^2$ обезбедува рекомбинација на триномното стебло, Дерман*(Derman)* (1996) од тој услов покажал дека цената на активата се земаат вредности:

$$S_u = S_0 e^{\pi\Delta t + \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$S_d = S_0 e^{\pi\Delta t - \lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$S_{ud} = S_{du} = S_0 e^{2\pi\Delta t} \tag{3.2.2}$$

за $\lambda > 1$ и за некоја произволна вредност на π. Со изборот на параметри кои го исполнуваат условот $u \cdot d = m^2$ може да се конструира триномно стебло.

Ако волатилноста стане приближно нула или точно нула, веројатно е дека следните движења на цената на активата на триномното стебло треба да се извршат со веројатност 1 до очекуваната вредност во нарениот временски период. Врз основа на претпоставката дека очекуваната вредност на активата во триномниот модел после еден период е еднаква на очекуваната log-нормална распределба, очекуваната вредност на активата се зголемува во согласност со безризична каматна стапка. Исто така, ако $u > m > d$, мора $m = e^{r\Delta t}$. Како резултат, се добива дека во изразот (3.2.2) важи дека $\pi = r$.

Во претходните изрази може да се забележи дека фигурира $\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}$, каде параметар на дисперзија е $\lambda > 1$. Потребно е да одреди приближната вредност на овој параметар.

Помал параметарот на дисперзија условува помалку фактори на растење и опаѓање на цената на активата, u, d. Поради тоа вредностите на цената на активата, кои се наоѓаат во иста вертикална оска на стеблото т.е. во исто ниво, се приближни една на друга. Меѓутоа, кога вредноста на дисперзија λ е приближна до 1, веројатноста дека цената на активата ќе остане непроменета во наредниот момент е приближно нула. Од таа причина, некои вредности на активата во триномното стебло тешко се постигнуваат, па триномното стебло има особина на биномно стебло. Оттука, предностите на триномниот модел во однос на биномниот исчезнуваат и точноста на триномниот модел се намалува.

Кога параметарот на дисперзија λ се зголемува, се зголемуваат и факторите на растење и намалување на цената на активата на опцијата , u, d, но веројатноста на движењето на цената на активата p_u, p_m, p_d се такви што секоја вредност на активата во триномното стебло може да биде постигната. Доколку вредноста на параметарот на дисперзија , $\lambda = 1.5^{0.5} \approx 1.2247$, се добива дека веројатноста на движење на цената на активата е еднаква на $\frac{1}{3}$, кога $\Delta t \to 0$. Оттука, параметарот на дисперзија $1 < \lambda < 1.5^{0.5}$.Оптималната вредност за $\lambda = 1.12$. Во тој случај, триномното стебло е густо и веројатноста на движење на цената на активата се доволно добри.

Понатаму за помала вредност на λ веројатноста дека цената на активата ќе остане непроменета е многу мала. За поголема вредност на λ, факторите на растење и опаѓање на цената на активата во првиот период ќе бидат приближно еднакви, па веројатноста на движење на цената на активата се многу мали и со мала волатилност во текот на времето.

Друга модификација е употребата на повеќе точна проценка на отстапувањето во дадениот израз (2.3.7) наместо $\sigma\sqrt{\Delta t}$. По овие модификации, ќе ги добиеме следните параметри во триномниот модел:

$$u = e^{r\Delta t + \sqrt{e^{\lambda^2\sigma^2\Delta t} - 1}} \quad (3.2.3)$$

$$d = e^{r\Delta t - \sqrt{e^{\lambda^2\sigma^2\Delta t} - 1}} \quad (3.2.4)$$

$$p_u = \frac{m^2\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)}{u^2 + md - um - ud} \quad (3.2.5)$$

$$p_d = p_u \frac{m-u}{d-m} \quad (3.2.6)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d \quad (3.2.7)$$

Факторите за растење и опаѓање на цената на активата на опцијата, u и d, добиени врз основа на (3.2.3) и (3.2.4) се пресметуваат во согласност со највисоката волатилност која важи за време на траење на опцијата, така што $\sigma = max\sigma_i$. Вредностите кои се добиваат за u и d се користат за целото време на траење на опцијата без разлика на промената на волатилноста. Меѓутоа, веројатноста на движење на цената на активата на опцијата добиена со помош на изразите (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) важи само за временски период во кој волатилноста е највисока. Веројатноста на движење на цената на активата во останатиот временски период се пресметува така што (3.1.3) да важи за очекуваната вредност, а (3.1.4) за локална волатилност.

Врз основа на изразите (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) за p_u, p_m, p_d, кои важат за временски период со највисока волатилност, може да се добијат веројатностите на движење на цената на активата p_u^i, p_d^i и p_m^i за некој друг временски период i:

$$p_u^i = p_u \left(\frac{\sigma_i}{\sigma}\right)^2$$

$$p_d^i = p_d \left(\frac{\sigma_i}{\sigma}\right)^2$$

$$p_m^i = 1 - p_u^i - p_d^i \quad (3.2.8)$$

Добиена е параметризација за конструирање на рекомбинираното триномно стебло со променлива волатилност. Примена на така конструирано триномно стебло е слична со примена на биномното стебло.

Вредноста на опцијата се пресметува така што се тргнува од последниот временски момент, а потоа се движи наназад кон триномното стебло со примена на програмирање. Во таа постапка се користи веројатноста на движење на цената на активата (3.2.8).

3.3. Моделирање на цената на опцијата во триномниот модел

Постапката за пресметување на арбитражната вредност на опцијата во триномниот модел е аналогна како и во биномниот модел.

Меѓутоа, пазарот на триномниот модел на цената, за разлика од оној со биномниот модел, не е комплетен. Покрај тоа, веројатноста на неутрален ризик веројатно постои, но не е единствена. Како последица на тоа, не е можно да се создаде уникатно протфолио чија вредност ќе ги покрие обврските за купување, односно, на датумот на доспевање ќе биде еднаква на наплатата на опцијата.

Во случај за европска опција, наплатата на куповната опција на датумот на доспевање T е:

$$c_T = max\{S_T - E, 0\} = (S_T - E)^+$$

а за продажната е:

$$p_T = max\{E - S_T, 0\} = (E - S_T)^+$$

каде S_T е вредноста на активата на опцијата во моментот T , а E е договорената цена. Арбитражната вредност на опцијата се утврдува од страна на приносите од датумот на доспевање на опцијата T и потоа се движи наназад кон триномното стебло со примена на динамичко програмирање. На тој начин, се добива дека вредноста на европската опција чија актива не обезбедува никаква добивка во моментотот $t-1$ е:

$$f_{t-1} = e^{-r\Delta t}\left[p_u f_{t,u} + p_m f_{t,m} + p_d f_{t,d}\right]$$

каде $f_{t,u}, f_{t,m}, f_{t,d}$ се вредности на опциите во моментот t ако вредноста на цената на активата измегу периодот $t-1$ и t се зголемила, останува непроменета или се намалила соодветно, додека r е непрекинат каматен фактор.

Во случај на американска опција, наплатата на куповната опција на датумот на доспевање T е :

$$C_T = max\{S_T - E, 0\} = (S_T - E)^+$$

додека за продажната е :

$$P_T = max\{E - S_T, 0\} = (E - S_T)^+$$

Аналогно на биномниот модел, со примена на програмирање, се добива вредноста на американската опција во момент $t-1$ е еднаква на

$$f_{t-1} = max\{F_{t-1,}e^{-r\Delta t}[p_u f_{t,u} + p_m f_{t,m} + p_d f_{t,d}]\}$$

каде $F_{t-1,}$ е наплата на опцијата во момент $t-1$.

3.3.1. Триномен модел на цена на европска опција

Пример: Нека цената на активата на опцијата е 32 евра, а волатилност на цената на активата е 9%. Ако каматната стапка е 0.8% годишно, нацртај триномно стебло за цената на активата за два периоди. Да се одреди вредноста на за една година на европската куповна опција со договорена цена од 34 евра.

Решение:

Може да се заклучи дека :

$$S_0 = 32, \quad r = 0{,}008, \ E = 34, \quad \sigma = 0{,}09 \ \ , \Delta t = 0.5$$

Оваа задача може да се реши со примена на различни триномни модели.

Прв модел:

Со примена на формулата (3.1.1) се добива

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1{,}09$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0{,}91$$

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}26$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}24$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - 0{,}26 - 0{,}24 = 0{,}5$$

Со помош на програмскиот пакет *Mathematica* и неговиот потпакет *Finance*, многу едноставно се пресметува идната вредност на цената на активата после еден или два периоди, со примена на следните кодови:

$\mathrm{In}[1] \coloneqq \mathrm{up} = 1.09;$

$\mathrm{down} = 0.91;$

$\mathrm{middle} = 1;$

$\mathrm{stock} = \mathrm{Table}\ [32 * \mathrm{up}^{\wedge}(i-1) * \mathrm{down}\ ^{\wedge}(j-i) * \mathrm{middle}^{\wedge}(\mathrm{k}-\mathrm{j}), \{\mathrm{k}, 1{,}3\}, \{\mathrm{j}, 1, \mathrm{k}\}, \{\mathrm{i}, 1, \mathrm{j}\}];$

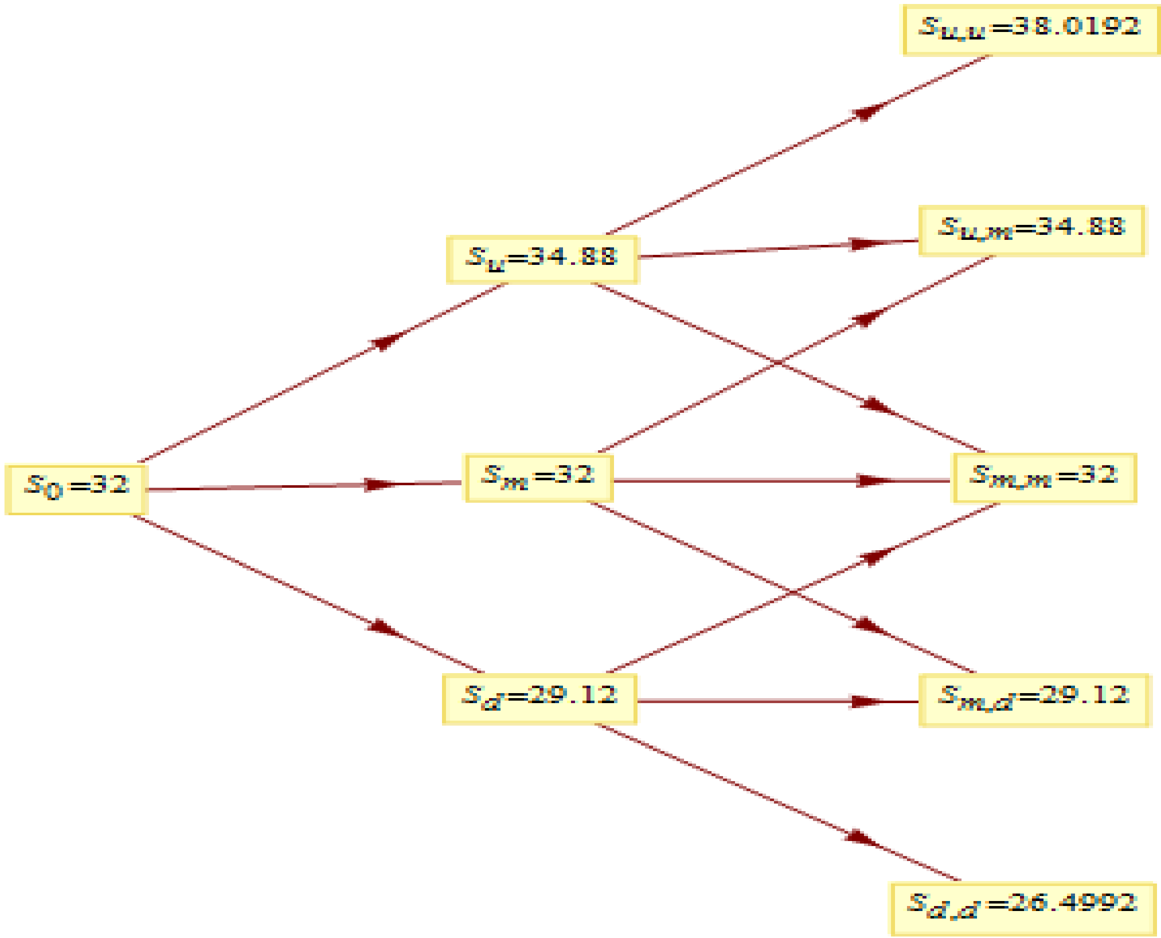
$\mathrm{MatrixForm[stock]}$

$\mathrm{Out[7]//MatrixForm} =$

$$\begin{pmatrix} \{32\} \\ \{29{,}12{,}32{,}34{,}88\} \\ \{26{,}4992{,}29.12{,}32{,}34.88{,}38.0192\} \end{pmatrix}$$

Следниот код креира демонстрација која е користена за добивање на триномното стебло кое одговара на вредноста на активата.

In[13] ≔ TreePlot[{"S_0=32"→"S_d=29.12","S_0=32"→"S_m=32","S_0=32"→"S_u=34.88",
"S_u=34.88"→"$S_{m,m}$=32","S_u=34.88"→"$S_{u,m}$=34.88", "S_u=34.88"→"$S_{u,u}$=38.0192"
"S_m=32"→"$S_{m,d}$=29.12","S_m=32"→"$S_{m,m}$=32", "S_m=32"→"$S_{u,m}$=34.88"
"S_d=29.12"→"$S_{d,d}$=26.4992","S_d=29.12"→"$S_{m,d}$=29.12", "S_d=29.12"→"$S_{m,m}$=32"},
,Left,VertexLabeling →True,DirectedEdges→True]



Арбитражната цена на опцијата после една година т.е. за $N = 2$, се:

$c_{u,u} = max\{S_{u,u} - E, 0\} = 4{,}0192$

$c_{u,m} = c_{m,u} = max\{S_{u,m} - E, 0\} = 0{,}88$

$c_{m,m} = c_{u,d} = c_{d,u} = max\{S_{m,m} - E, 0\} = 0$

$c_{m,d} = c_{d,m} = max\{S_{m,d} - E, 0\} = 0$

$c_{d,d} = max\{S_{d,d} - E, 0\} = 0$

Арбитражната цена на опцијата во моментот $N = 1$ се:

$$c_u = e^{-r\Delta t}\left[p_u c_{u,u} + p_m c_{u,m} + p_d c_{u,d}\right] = 1{,}48$$

$$c_m = e^{-r\Delta t}\left[p_u c_{m,u} + p_m c_{m,m} + p_d c_{m,d}\right] = 0{,}228$$

$$c_d = e^{-r\Delta t}\left[p_u c_{d,u} + p_m c_{d,m} + p_d c_{d,d}\right] = 0$$

Премијата на оваа опција е еднаква на :

$$c_0 = e^{-r\Delta t}[p_u c_u + p_m c_m + p_d c_d] = 0{,}497$$

Пресметувањето на арбитражните вредности на опцијата може да се пресмета во програмскиот пакет *Mathematica* со примена на кодот:

$$\mathrm{In}[43] \coloneqq \quad \mathrm{r} = 0.008;$$

$$\sigma = 0.09;$$

$$\Delta\mathrm{t} = 0.5;$$

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

```
Clear[payoffCall, payoffPut, ];
payoffCall[s_] := Max[s − x, 0];
payoffPut[s  ] := Max[x − s, 0];
n = 2;
x = 34;
e = 2.72;
A0 = Table[0, {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];
A0[[n + 1]] = Table[payoffCall[stock[[n + 1, j]]], {j, 1, n + 1}];
A0[[n + 1]] = payoffCall / @stock [[n + 1]];
For[nn = n, nn ≥ 1, nn − −,
For[j = 1, j ≤ nn + 1, j + +,
```

$$A0[[nn, j]] = e^{-\frac{\tau}{2}} * (p_u * A0[[nn + 1, j + 2]] + p_m * A0[[nn + 1, j + 1]]$$

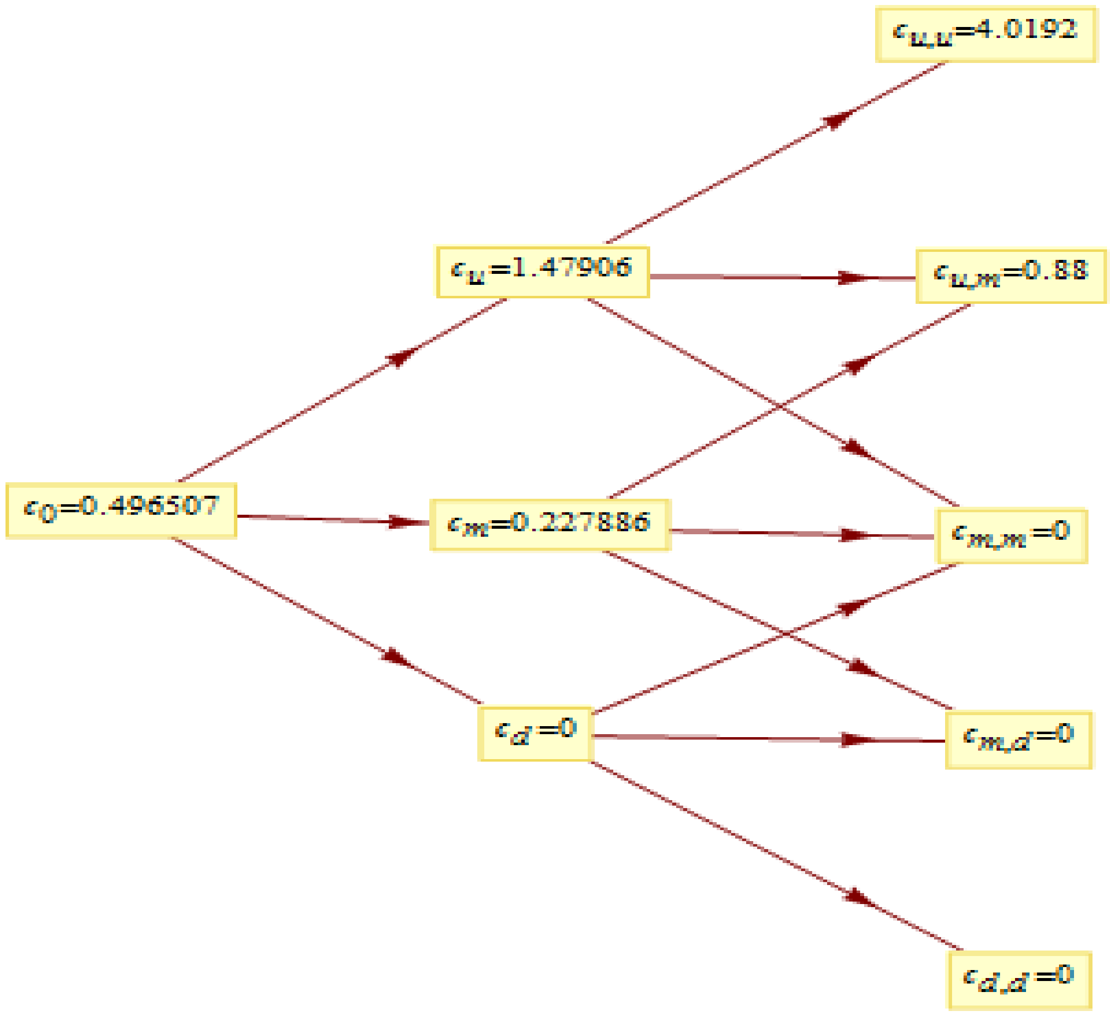
$$+p_d * A0[[nn + 1, j + 1]])]];$$

```
arbitrageprices = Table[A0[[i, j]], {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];
MatrixForm[arbitrageprices]
```

Out[29]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{0.496507\} \\ \{0, 0.227886, 1.47906\} \\ \{0, 0, 0, 0.88, 4.0192\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло од арбитражните цени на опцијата е во облик:



Арбитражната цена на европската продажна опција може да се добие аналогно на куповната. Во случај кога се познати арбитражните цени на европската куповна опција се применува продажно-куповниот партитет:

$$S_t + p_t - c_t = Ee^{-r(T-t)}$$

Во тој случај со додавање на следниот код може да се добие арбитражната цена на продажните опции:

```
In[24] :=

EP = Table[0, {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];
EP[[n + 1]] = Table[payoffPut[stock[[n + 1, j]]], {j, 1, n + 1}];
EP[[n + 1]] = payoffPut / @stock [[n + 1]];
For[nn = n, nn ≥ 1, nn − −,
For[j = 1, j ≤ nn + 1, j + +,
EP[[nn, j]] = EC[[nn, j]] − stock[[nn, j]] + x ∗ e^(−τ(n−j+1))]];
arbitrageprices2 = Table[EP[[i, j]], {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];
MatrixForm[arbitrageprices2]

Out[78]//MatrixForm =
```

$$\begin{pmatrix} \{2.33409\} \\ \{4.74118, 2.16253, 0.478083\} \\ \{7.5008, 4.88, 2, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Втор модел:

Врз основа на формулта (3.1.7) се добива

$$u = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{3\Delta t/2}} = 1{,}08$$

$$m = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} \approx 1$$

$$d = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{3\Delta t/2}} = 0{,}93$$

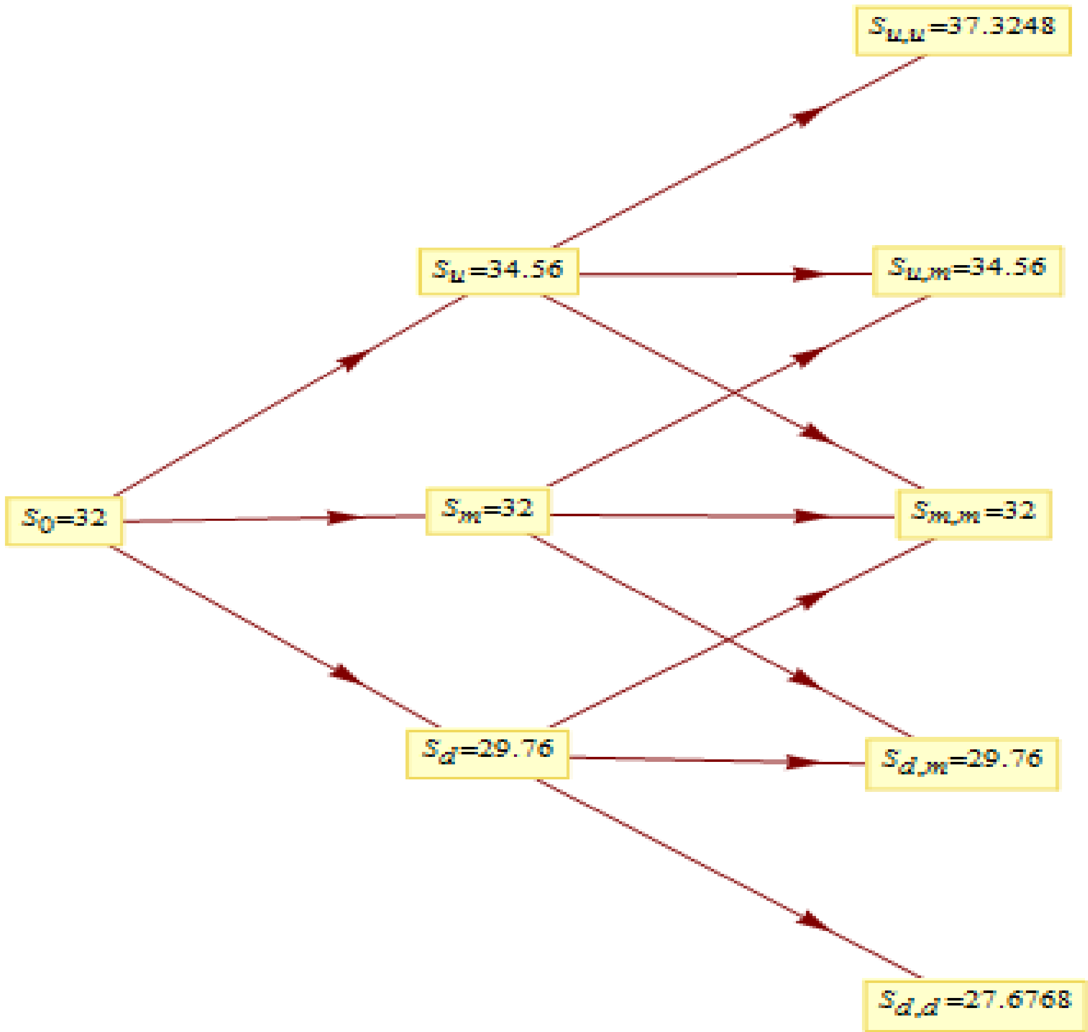
$$p_m = p_u = p_d = \frac{1}{3}$$

Со примена на код сличен како и во првиот модел се добиваат следните вредности на цената на активата:

Out[37]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{32\} \\ \{29.76, 32, 34.56\} \\ \{27.6768, 29.76, 32, 34.56, 37.3248\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло за цената на активата е:

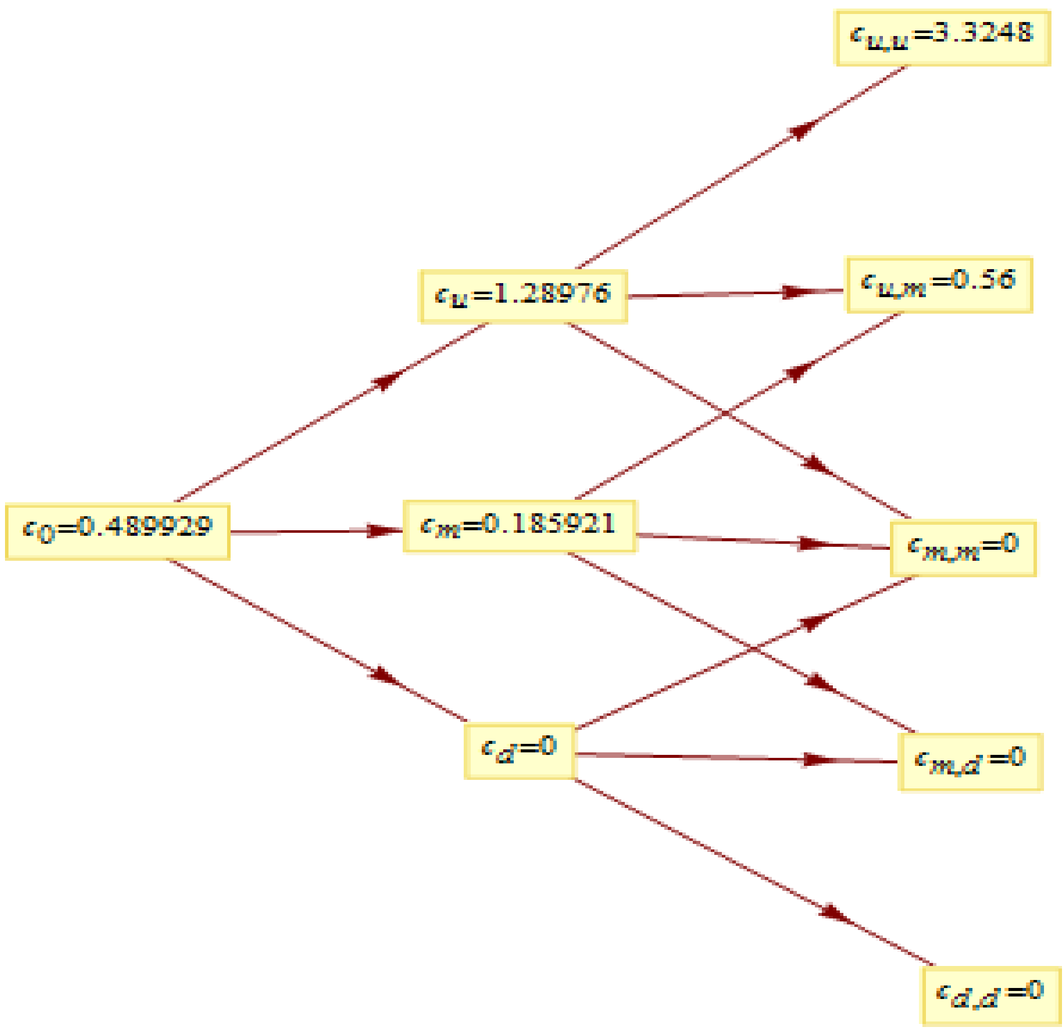


Арбитражната цена на опцијата се добива со мала корекција на кодот кој е користен во првиот модел (наместо да се пресметаат веројатностите p_u, p_m, p_d,се користи $p_m = p_u = p_d = \frac{1}{3}$), тогаш се добиваат следните вредности:

$\text{Out}[34]//\text{MatrixForm} =$

$$\begin{pmatrix} \{0.489929\} \\ \{0, 0.185921, 1.28976\} \\ \{0, 0, 0, 0.56, 3.3248\ \} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло на арбитражната цена на опцијата е во облик:



Трет модел:

Врз основа на формулата (3.1.8) се добива :

$$u = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t+\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1{,}09$$

$$m = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} \approx 1$$

$$d = e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0{,}91$$

$$p_u = p_d = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad , p_m = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

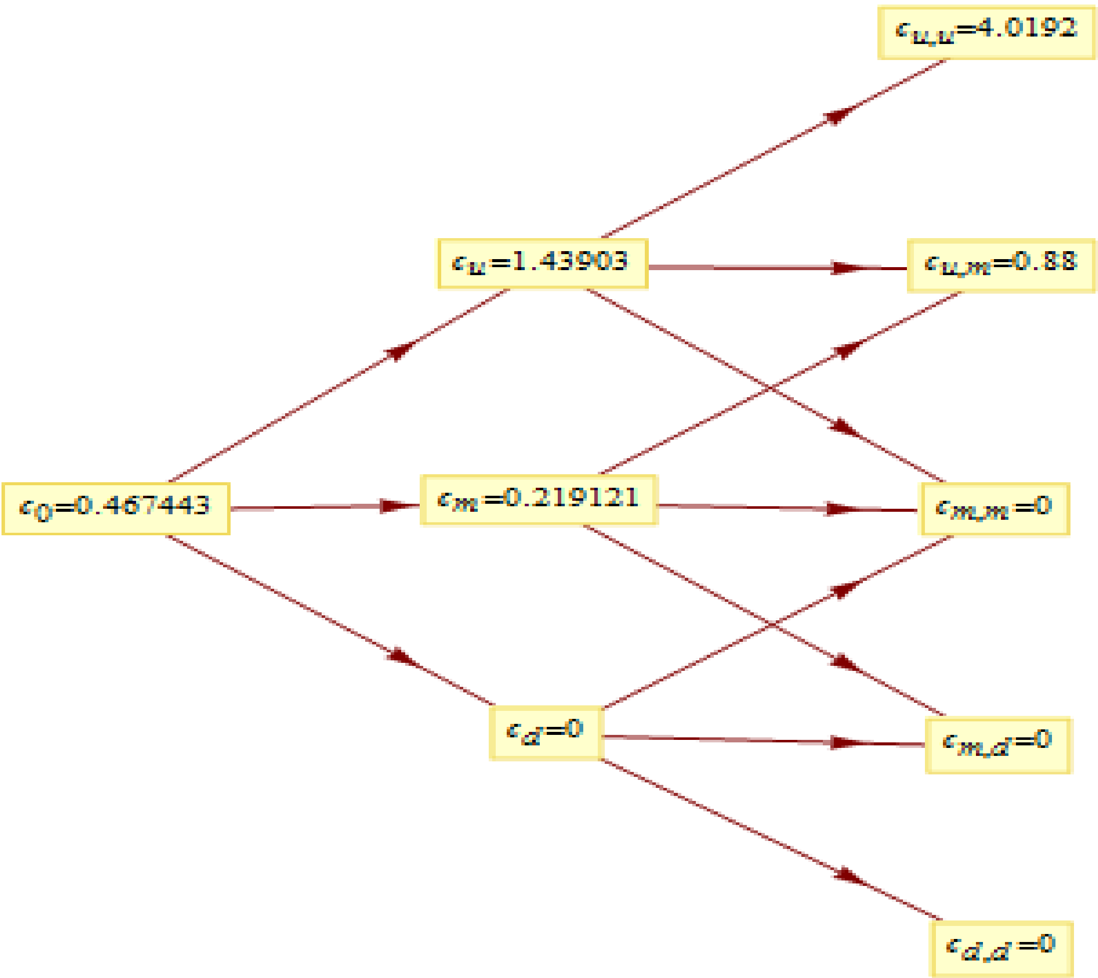
Бидејќи вредностите на параметрите u, m и d, се исти како и за првиот модел, се добива исто триномно стебло за цената на активата за два периоди.

Арбитражната цена се добива со корекција на кодот користен во првиот модел. Потребно е да за веројатностите p_u, p_m, p_d, да се земаат следните вредности : $p_u = p_d = 0{,}25 \qquad , p_m = 0{,}5$.

Се добиваат следните арбитражни цени за опцијата:

$\mathrm{Out[40]//MatrixForm} =$

$$\begin{pmatrix} \{0.467443\} \\ \{0, 0.219121, 1.43903\} \\ \{0, 0, 0, 0.88, 4.0192\} \end{pmatrix}$$



Четврти модел:

Со примена на формулата (3.1.9) се добива:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} = 1{,}12 \quad , \quad d = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} = 0{,}89 \qquad m = 1$$

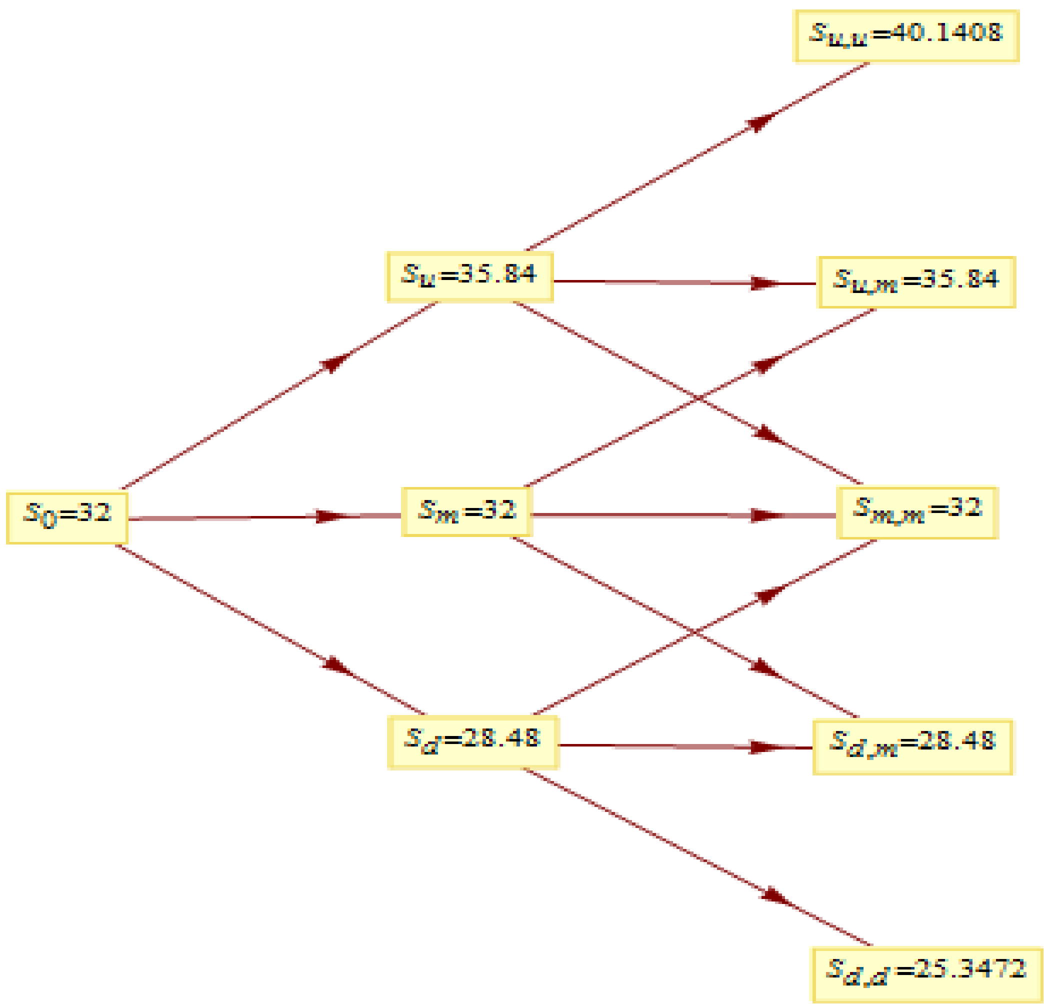
$$p_u = p_d = \frac{1}{6} \ , p_m = \frac{2}{3}$$

Со примена на соодветниот код во програмскиот пакет *Mathematica*, се добиваат следните цени на активата:

Out[74]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{32\} \\ \{28.48, 32, 35.84\} \\ \{25.3472, 28.48, 32, 35.84, 40.1408\} \end{pmatrix}$$

Додека триномното стебло на цената на активата е:

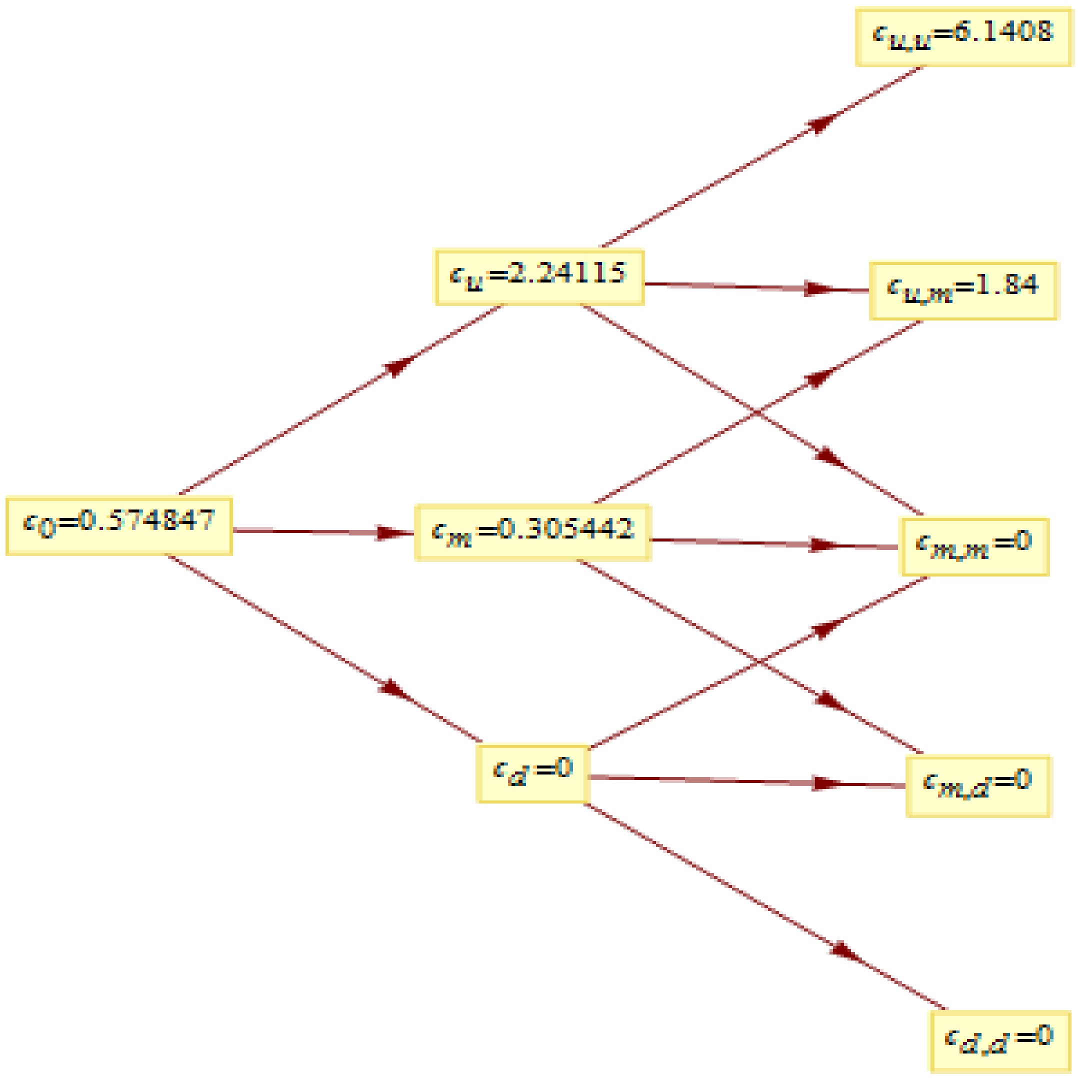


Арбитражната цена на опцијата се добива слично бидејќи кодовите и во вториот и третиот модел се еднакви:

Out[90]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{0.574847\} \\ \{0, 0.305442, 2.24115\} \\ \{0, 0, 0, 1.84, 6.1408\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло за арбитражната цена на опцијата е:



3.3.2.Триномен модел на цена на опцијата чија актива обезбедува непрекинат принос на дивидендата

Пример:Нека вредноста на активата на европска куповна едногодишна опција е 32 USD, и нека активата обезбедува непрекинат принос на дивидендата 5% годишно. Ако безризичната каматна стапка е 0,8%, волатилноста 9% годишно, да се нацрта триномното стебло за два периоди и да се пресмета премијата на дадената опција ако договорената цена е 34 USD.

Решение:

Може да заклучиме дека:

$$S_0 = 32, \quad r = 0{,}008, \;\; E = 34, \quad \sigma = 0{,}09 \;\; , \Delta t = 0.5 \;\; , q = 0{,}09$$

Со примена на формулата (3.1.1) се добива:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1{,}09$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0{,}91$$

$$p_u = \left(\frac{e^{(r-q)\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}11$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{(r-q)\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}44$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - 0{,}11 - 0{,}44 = 0{,}45$$

Бидејќи вредностите $S_0, r, \sigma\,, \Delta t$ и вредностите на параметрите u, m и d се исти како во претходниот пример за првиот модел, се добива исто триномно стебло за цената на активата за два периоди.

Арбитражните вредности на опцијата се добиваат со корекција на кодот кој е применет во претходниот пример за првиот модел, при што изразите за пресметување на веројатностите p_u, p_m, p_d се заменуваат со следните изрази:

$$p_u = \left(\frac{e^{(r-q)\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{(r-q)\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

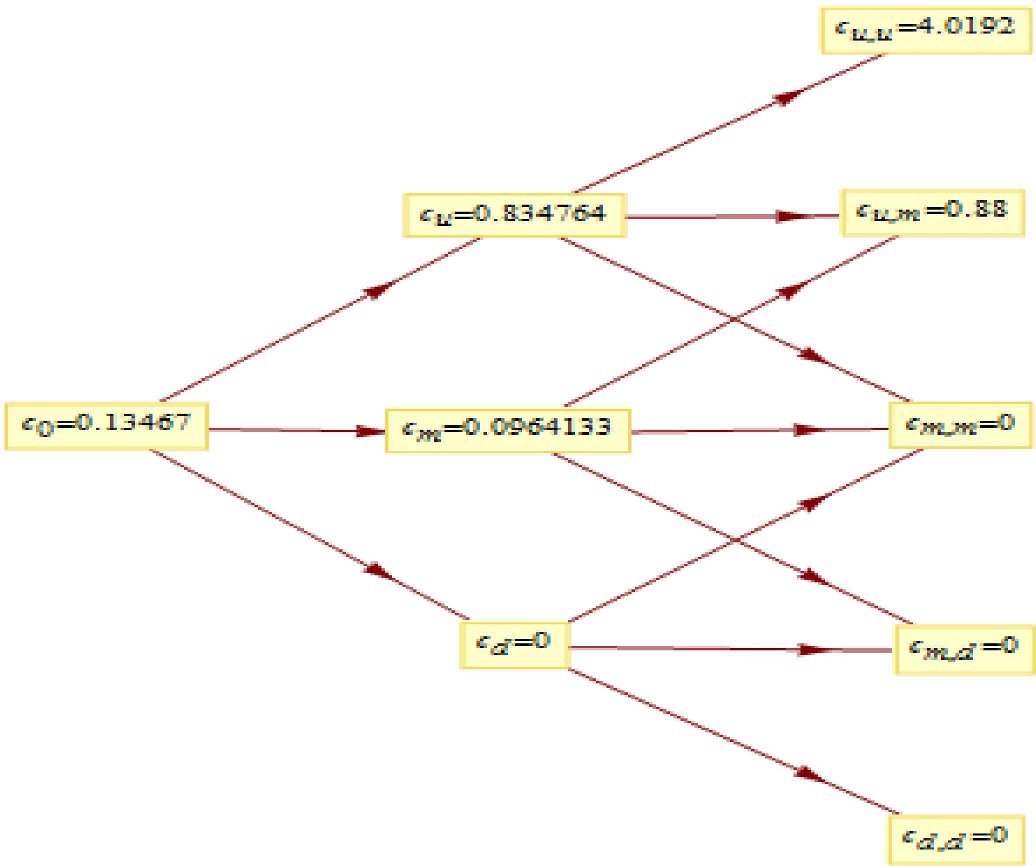
$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Се добиваат следните арбитражни цени за опцијата

Out[23]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{0.13467\} \\ \{0, 0.0964133, 0.834764\} \\ \{0, 0, 0, 0.88, 4.0192\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло за цената на опцијата е:



Со додавање на код кој се применува во продажно – куповниот партитет се добива :

$\mathrm{In}[40] \coloneqq \quad q = 0.05;$

$\mathrm{EP} = \mathrm{Table}[0, \{i, 1, n+1\}, \{j, 1{,}2i-1\}];$

$\mathrm{EP}\big[[n+1]\big] = \mathrm{Table}\Big[\mathrm{payoffPut}\Big[\mathrm{stock}\big[[n+1, j]\big]\Big], \{j, 1, n+1\}\Big];$

$\mathrm{EP}\big[[n+1]\big] = \mathrm{payoffPut} \,/\, @\mathrm{stock}\,\big[[n+1]\big];$

$\mathrm{For}[nn = n, nn \geq 1, nn - -,$

$\mathrm{For}[j = 1, j \leq nn + 1, j + +,$

$\mathrm{EP}\big[[nn, j]\big] = \mathrm{EC}\big[[nn, j]\big] - \mathrm{stock}\big[[nn, j]\big] * e^{-q(n-j+1)} + x * e^{-\tau(n-j+1)}]];$

$\mathrm{arbitrageprices2} = \mathrm{Table}\big[\mathrm{EP}\big[[i, j]\big], \{i, 1, n+1\}, \{j, 1{,}2i-1\}\big];$

$\mathrm{MatrixForm}[\mathrm{arbitrageprices2}]$

$\mathrm{Out}[82]//\mathrm{MatrixForm} =$

$$\begin{pmatrix} \{3.95148\} \\ \{5.69352, 3.03503, 0.876485\} \\ \{7.5008, 4.88, 2, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

3.3.3.Триномен модел на цената на опција чија актива е фјучерс

Пример: Нека моменталната цена на фјучерс е 32 EUR, безризичната каматна стапка е 0,8%. инвеститорот одлучува да инвестира во едногодишна европска продажна опција чија актива е овој фјучерс. Договорената цена е 34 EUR, а волатилноста 9%. Колкава е вредноста на опцијата во секој момент во текот на два шестмесечни периоди?

Решение :

Може да заклучиме дека:

$$F_0 = 32, \quad r = 0{,}008, \ \ E = 34, \quad \sigma = 0{,}09 \ \ , \Delta t = 0.5$$

Со примена на формулата(3.1.1) се добива:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1{,}09$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0{,}91$$

$$\tilde{p}_u = \left(\frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}198$$

$$\tilde{p}_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}309$$

$$\tilde{p}_m = 1 - \tilde{p}_u - \tilde{p}_d = 0{,}493$$

Бидејќи вредностите $S_0, r, \sigma\ , \Delta t$ и вредностите на параметрите u, m и d се исти како и за првиот модел во примерот за опција чија актива не обезбедува добивка, се добива исто триномно стебло за цената на активата за два периоди.Арбитражните вредности на опцијата се добиваат со корекција на кодот применет во тој пример за првиот модел, при што изразите за пресметување на веројатностите p_u, p_m, p_d се заменуваат со следните изрази:

$$p_u = \left(\frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

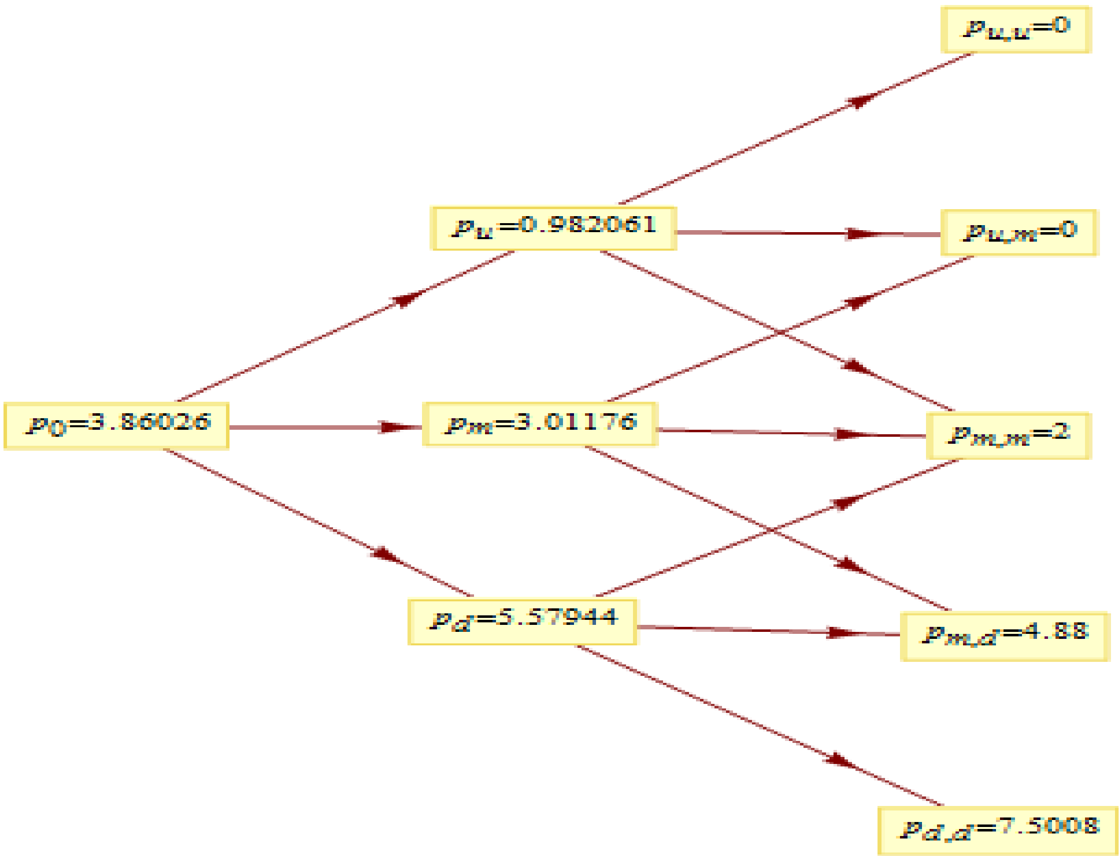
$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Се добиваат следите арбитражни цени на опцијата:

$$\mathrm{Out}[50]//\mathrm{MatrixForm} =$$

$$\begin{pmatrix} \{2.91043\} \\ \{5.09914, 2.48396, 0.615531\} \\ \{7.5008, 4.88, 2, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло за арбитражната цена на опцијата е:



3.3.4.Триномен модел на цена на американска опција

Пример: Нека цената на активата е 32 EUR, а волатилноста на цената на активата е 9%. Ако каматната стапка е 0,8%,нацртај триномно стебло за цената на активата за два периоди.Одреди ја вредноста на едногодишна американска купобна опција со договорена цена од 34 EUR.

Решение:

Може да се заклучи дека :

$$S_0 = 32, \quad r = 0{,}008, \ E = 34, \quad \sigma = 0{,}09 \ \ , \Delta t = 0.5$$

Оваа задача може да се реши со примена на различни триномни модели.

Прв модел:

Со примена на формулата (3.1.1) се добива

$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1{,}09$

$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0{,}91$

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}26$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2 = 0{,}24$$

$p_m = 1 - p_u - p_d = 1 - 0{,}26 - 0{,}24 = 0{,}5$

Бидејќи сите параметри се еднакви како во примерот за опција чија актива не обезбедува добивка во првиот модел, се добива исто триномно стебло за цената на активата како во тој пример за прв модел.

Арбитражните вредности на опцијата можат да се добијат со примена на следниот код:

In[43] ≔ r = 0.008;

σ = 0.09;

Δt = 0.5;

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Clear[payoffCall, payoffPut,];

payoffCall[s_] ≔ Max[s − x, 0];

payoffPut[s_] ≔ Max[x − s, 0];

n = 2;

x = 34;

e = 2.72;

AP = Table[0, {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];

AP[[n + 1]] = Table [payoffPut [stock[[n + 1, j]]] , {j, 1, n + 1}] ;

AP[[n + 1]] = payoffPut / @stock [[n + 1]];

For[nn = n, nn ≥ 1, nn − −,

For[j = 1, j ≤ nn + 1, j + +,

AP[[nn, j]] = Max [payoffPut [stock[[n + 1, j]]]]

$e^{-\frac{\tau}{2}} * (p_u * AP[[nn + 1, j + 2]] + p_m * AP[[nn + 1, j + 1]]$

$+p_d * AP[[nn + 1, j + 1]])]];$

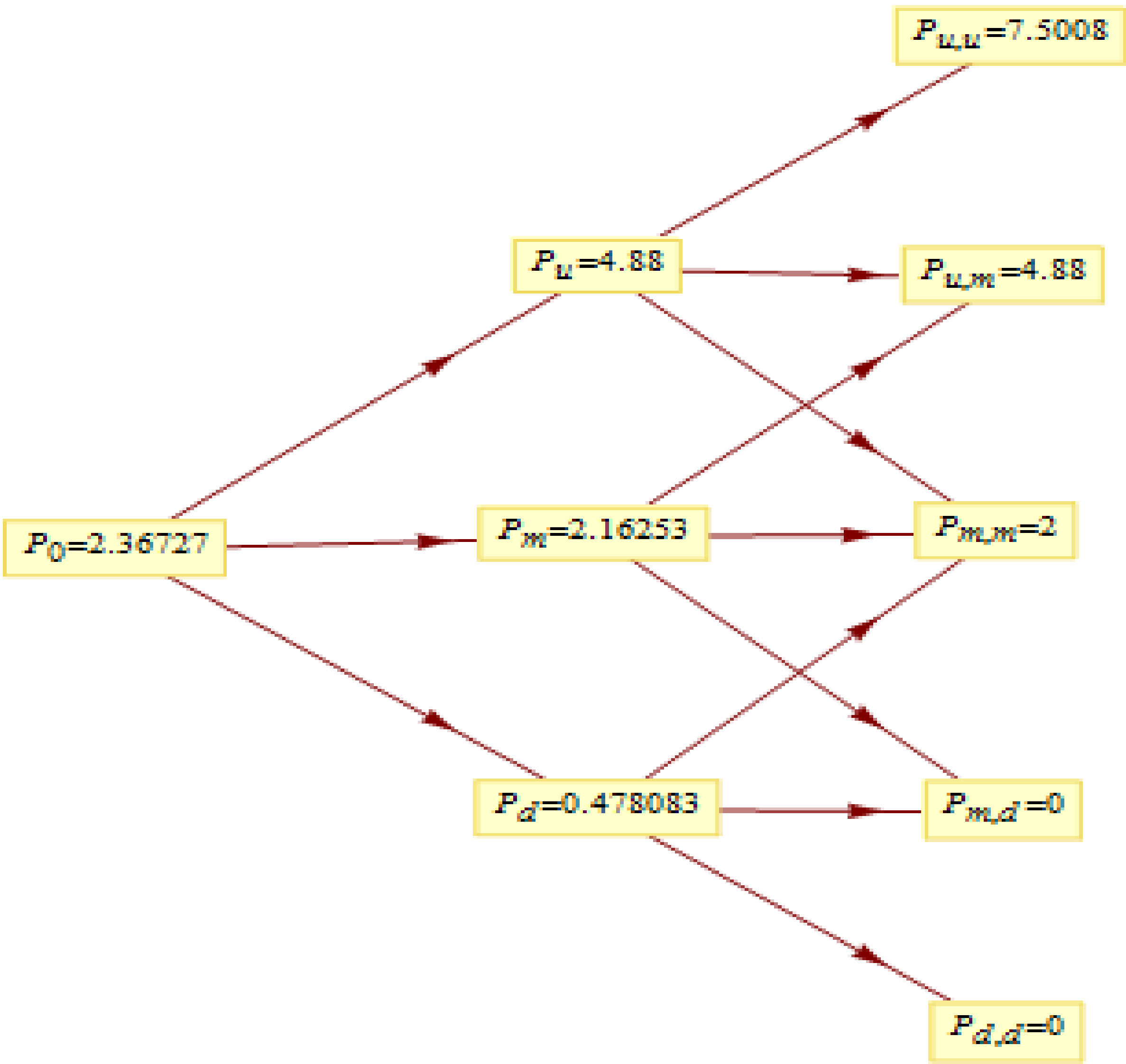
arbitrageprices = Table[AP[[i, j]], {i, 1, n + 1}, {j, 1,2i − 1}];

MatrixForm[arbitrageprices]

Out[57]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{2.36727\} \\ \{4.88, 2.16253, 0.478083\} \\ \{7.5008, 4.88, 2, 0, 0\} \end{pmatrix}$$

Триномното стебло од арбитражните вредности на опцијата е:



3.4. Параметри за заштита на портфолиото од ризик

Финансиските институции кои продаваат опции и други финансиски деривати за нивните клиенти се соочуваат со проблемот на управување со ризик, кој со себе носи и обврска за извршување на договор. Ако е продадена опција иста како со опцијата со која се тргува на пазарот, финансисиките институции можат да ја неутрализираат изложеноста на клиентот во однос на ризикот со купување на опција на пазарот од ист тип како што е продадена. Но, кога опцијата е дизајнирана за потребите на клиентите не соодветствува со стандардните опции кои се нудат на пазарот на хартии од вредност, заштитата на инвеститорите од изложеност на ризик е многу комплицирана.

Брзината на промената на арбитражната цена на опцијата во зависнот од цената на активата го покажува параметарот *делта*(Δ)*.* Во геометриска смисла, делта го претставува наклонот на кривата со која се опишува промената на цената на финансискиот дериват во однос на цената на активата. Позицијата на финансискиот дериват за кој делта е еднаква на нула се нарекува делта неутрална позиција. Δ-заштита на портфолиото се спроведува преку вклучување на одреден број на позиции во активата и на тој начин се неутрализира изложеност на ризик на портфолиото од промената на цената на активата. Позицијата на инвеститорот останува делта неутрална само за краток временски период,бидејќи делта се менува со промена на цената на активата. Оттутка, инвеститорот за да се заштити од ризик, без разлика дали се должи на промените на цените на активата, периодично зазема одреден број на позиции во активата. Колку често е потребно инвеститорот да ги менуваа позициите во активата покажува параметарот гама(γ), кој ја претставува брзината на промена на делта во однос на промената на цената на активата. Ако апсолутната вредност на гама е мала, делта полека се менува, при што релативно ретко има потреба да се ребалансира портфолиото за да биде делта неутрална.

Ако апсолутната вредност на гама е голема, делта е многу чуствителна на промените на цената на активата, па е ризично да се допушти да портфолиото не биде делта неутрално.

Гама, всушност, претставува мерка на кривината на кривата со која се опишува односот помеѓу цената на опцијата и цената на активата. Делта заштита во триномниот модел не е едноставна како во биномниот модел, па е потребно да се триномното стебло разложи на нови стебла. Наједноставен начин за пресметување на параметрите делта и гама во триномниот модел е промената на почетната цена на опцијата S_0 за некоја мала вредност ΔS и конструирање на две нови триномни стебла со почетна цена на активите $S_0 + \Delta S$ и $S_0 - \Delta S$. Меѓутоа, постои и друг метод на пресметување на параметрите делта и гама во триномниот модел, а тоа е конструирање на триномно стебло со започнување на еден период порано.

Вака проширеното триномно стебло има три јазли во почетниот момент,

$t = 0$. Очигледно е дека методот на проширување на триномното стебло е многу поефикасен во однос на методот на конструкција на две триномни стебла со почетни цени $S_0 + \Delta S$ и $S_0 - \Delta S$, бидејќи овие две триномни стебла скоро целосно се поклопуваат со проширеното триномно стебло.

Параметрите на заштита на портфолиото од ризик делта и гама, претставуваат прв и втор извод на цената на опцијата во однос на цената на активата, па тие се во следниот облик:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f(S_0 + \Delta S) - f(S_0)}{\Delta S} = \frac{f(S_0 + \Delta S) - f(S_0 - \Delta S)}{2\Delta S}$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f(S_0 + \Delta S) - 2f(S_0) + f(S_0 - \Delta S)}{\Delta S^2}$$

ГЛАВА 4. BLACK-SCHOLES МОДЕЛ . МОДЕЛИРАЊЕ НА ЦЕНА НА ОПЦИЈА ВО НЕПРЕКИНАТО ВРЕМЕ

Шкотскиот ботаничар Роберт Браун (*Robert Braun)* во 1828 година истурил полен на некои билки во течност и ја набљудувал дисперзијата на поленот по површината на таа течност при што го забележал неговото хаотично движење.

Прв математички т.е. формален опис на тоа неправилно движење, кое е наречено Брауново движење е воведен од страна на Норберт Винер (*Norbert Wiener)* 1923 година, па поради тоа Брауновото движење уште се нарекува Винеров процес.

Денес, Брауновото движење игра важна улога во опишувањето на различни појави кои се присутни во реалниот живот, а кои се проучуваат во различни научни дисциплини. Брауновото движење е основа на финансиската теорија, односно, на добро уреден финансиски пазар движењето на цената на финансисиките инструменти е пример за случајно движење.

Фишер Блек (Fischer Black) и Мајрон Шолс (Myron Scholes) во својот труд *„The Pricing of Options and Corporate Liabilities“* објавен во 1973 година, извеле еден од најважните резултати во финансиската наука до сега т.е. конструирале математички модел на финансискиот пазар за пресметување на цената на опција. Овој резултат довел до големи поместувања и раздвижувања во тргувањето со опции и со другите изведени финансиски инструменти, како отварање на нова берза *(„Chicago Board Options Exchange“*) и интензивен развој на најмладата применета економска наука, финансиска математика. Мајрон Шоулс (*Myron Scholes)* во 1997 година за овој резултат добил Нобелова награда за економија, како и Робер К. Мертон (*Robert C. Merton)* (кој прв дал целосно математичко објаснување и допринел за голема популаризација на овој резултат), но Фишер Блек (*Fischer Black)* останал без заслужена награда поради неговата смрт во 1995 година.

Black-Scholes – овиот модел за пресметување на цената на опцијата е едноставен и како и сите безарбитражни модели и не бараат познавање на ризикот на инвеститорите.

Овој модел се заснова на *Black-Scholes* парцијална диференцијална равенка од втор ред од параболичен тип кој има аналитичко решение. Аналитичката решливост на *Black-Scholes*–равенките е веројатно една од причините за широката примена на овој модел.

Основна цел во оваа глава е да покажеме како се моделира цената на опцијата во непрекинато време. Најпрво ќе воведеме теорема која дава доволни услови за постоење на решение на стохастичките диференцијални равенки како и формула на Ито *(Ito)* која е од суштинско значење за одредување на решението на таа равенка. Потоа ќе биде разгледан *Black-Scholes* модел за пресметување на цената на европската куповна и продажна опција.

4.1.Геометриско Брауново движење

Нека случајниот процес $S = \{S_t, t \geq 0\}$ претставува еволуција (движење) на цената на некоја хартија од вредности, при што S_t е цена на дадената хартија од вредности во моментот t. Постојат три фактори кои влијаат на цената и за тоа за колку ќе се промени. Две величини се потполно предвидливи и во наједноставниот непрекинат модел се константи. Една од нив е каматната стапка во земјата од каде е странската валута, додека другата величина, која се означува со μ е стапка на средниот пораст на приходи на инвеститорот. Стапката на средниот пораст е константна т.е. не зависи од цената на хартијата од вредност и секогаш има иста вредност, еднаква е на 10% без разлика колкава е цената. Трета величина која влијае на цената, која се смета за случајна величина е волатилност на цената и се означува со σ и претставува мера на несигурност во неговото идно движење. Параметрите μ и σ се одредуваат статистички, најчесто со примена на временски серии. Спомнатите величини ја одредуваат промената на цената и овозможуваат да се најде нејзиниот обрат. Стапката на средниот пораст на хартијата од вредности мора да биде намалена за износ со безризична каматна стапка r_j по која инвеститорот ја вложува хартијата од вредности на девизната сметка

За мал временски интервал dt цената на хартија од вредности се промени за dS_t. Обратот кој се остварува во даден временски интервал зависи од стапката на средниот пораст μ на хартија од вредности, која претставува предвидлива величина, и од волатилност σ на цената на хартија од вредности, која претставува случајна величина.

Во случај на едноставни континуирани модели, инвеститорот бара стапката на средниот пораст да не зависи од цената на хартија од вредности. Бидејќи капиталот на инвеститорот зависи од ризикот кој повлекува промени во цената на хартиите од вредност и не е во можност да се добие диверзификација, инвеститорот бара стапката на средниот раст (пораст) да биде во согласност со преземените ризични инвестиции.

Стапката на средниот раст зависи и од моменталната каматна стапка – повисока каматна стапка предизвикува поголем раст на приходите на секоја хартија од вредности.

Волатилност на акцијата најчесто е меѓу 20% и 40% и претставува многу важен параметар за пресметување на вредноста на секоја хартија од вредности.

Остварениот приход на хартија од вредности за даден временски период dt може да се претстави со следната стохастичка диференцијална равенка :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{4.1.1}$$

Во членот dW_t се содржат сите случајности на цената на хартија од вредности. Случајниот процес $\{W_t, t \geq 0\}$ претставува еднодимензионален стандарден Винеров процес дефиниран на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, кој е адаптиран во однос на растечката фамилија σ –поле $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, т.е. за секој $t \geq 0$ случајните променливи W_t се $\mathcal{F}_t$-мерливи. Бидејќи за секое фиксно t важи $S_t = f(W_t)$ за некоја инверзибилна функција $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\} = \sigma\{S_s, s \leq t\}$, односно протокот генериран од цената на хартии од вредности се совпаѓа со природната филтрација на Винеровиот процес. Тоа значи дека информационата структура на овој модел се заснова само на процеси кои ја опишуваат еволуцијата (движењето) на цената на хартии од вредност.

Стохастичката диференцијална равенка (4.1.1) може да се запише на следниот начин:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \ \ , t \geq 0 \tag{4.1.2}$$

при што S_0 е почетна цена на хартијата од вредности, односно во интегрален облик:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s \tag{4.1.3}$$

Равенката (4.1.2) го задоволува условот од теоремата за егзистенција и единственост на решението на стохастичката диференцијална равенка, па постои единствено решение $\{S_t, t \in [0,T]\}$ на оваа равенка, при што еволуцијата на цената на хартијата од вредости претставува геометриско Брауново движење. За да се добие решение на стохастичката диференцијална равенка (4.1.2), потребно е да се примени формулата на Ито *(Ito)* за стохастичко диференцирање.

Дефиниција 4.1.1: Случајниот процес $x = \{x_t, t \in [0,T]\}$ е единствено решение на стохастичката диференцијална равенка

$$x_t = \eta + \int_0^t a(s, x_s)ds + \int_0^t b(s, x_s)dW_s \quad , t \in [0,T] \tag{4.1.4}$$

ако се задоволени следните услови:

1.x_t е $\mathcal{F}_t$ -мерлива за секој $t \in [0,T]$;

2.$\int_0^T |a(t, x_t)|\, dt < \infty$, $\int_0^T |b(t, x_t|^2\, dt < \infty$;

3.$x_0 = \eta$;

4. Равенката (4.1.4) важи за секој $t \in [0,T]$.

Дефиниција 4.1.2: Стохастичката диференцијална равенка (4.1.4) има единствено решение ако за било кои две решенија x и y важи:

$$P\left\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t - y_t| > 0\right\} = 0$$

Потребно е прецизно да ги дефинираме условите при кои постои единствено решение на равенката (4.1.2).

Следната теорема за егзистенција и единственост на решението дава доволни услови при кои постои решение на равенката (4.1.2), кое е единствено и овозможува испитување на својствата на решенијата на стохастичка диференцијална равенка.

Теорема 4.1.3 (Теорема за егзистенција и единственост на решение на стохастичка диференцијална равенка): Нека коефициентите $a: [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $b: [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се стохастички диференцијални равенки на Ито *(Ito)*

$$dx_t = a(t, x_t)dt + b(t, x_t)dW_t \quad , x_0 = \eta \quad , t \in [0, T],$$

Борел мерливи и нека за нив важи Липшицовиот услов и условот на линерaниот раст по последниот аргумент т.е. нека постои константа $L > 0$ таква што за секој $x, y \in \mathbb{R}$ и $t \in [0, T]$ важи:

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L|x - y|,$$

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq L^2(1 + |x|^2).$$

Ако η е случајна променлива независна од W и $E|\eta|^2 < \infty$ тогаш стохастичката диференцијална равенка има единствено непрекинато решение $x = \{x_t, t \in [0, T]\}$ при што $E \underset{0 \leq t \leq T}{sup} |x_t|^2 < \infty$.

Коефициентите $a(t, x)$ и $b(t, x)$ во стохастичката диференцијална равенка (4.1.4) се нарекуваат, коефициент на пренос и коефициент на дифузија.

Од стохастичката диференцијална равенка (4.1.3) може да се заклучи дека коефициентите на таа равенка зависат само до процесот S, па бидејќи условите:

$$|(\mu x - \mu y)| + |(\sigma x - \sigma y)| \leq (|\mu| + \sigma)|x - y|$$

$$|\mu x|^2 + |\sigma y|^2 = (\mu^2 + \sigma^2)|x|^2 < (\mu^2 + \sigma^2)(1 + |x|^2)$$

се задоволени за позитивна констатнта $L = |\mu| + \sigma$, врз основа на претходната теорема постои единствено непрекинато решение $S = \{S_t, t \in [0, T]\}$ на равенката (4.1.3), при што еволуцијата на девизниот курс претставува Брауново движење.

За да се добие решение на стохастичката диференцијална равенка (4.1.2), потребно е да се примени формулата на Ито *(Ito)* за стохастичко диференцирање.

Теорема 4.1.4(*Формула на Ito*): Нека случајниот процес $\{x_t, t \in \mathbb{R}\}$ има стохастички диференцијал:

$$dx_t = a(t)dt + b(t)dW_t \qquad , t \in [0,T],$$

и нека функцијата $f: [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекината и со непрекинати парцијални изводи $f_t'(t,x_t), f_x'(t,x_t), f_{xx}''(t,x_t)$. Тогаш процесот $f(t,x_t)$ има стохастички диференцијал:

$$df(t,x_t) = \left[f_t'(t,x_t) + f_x'(t,x_t)a(t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,x_t)b^2(t)\right]dt + f_x'(t,x_t)b(t)dW_t,$$

$t \in [0,T]$ (4.1.5)

Со примена на формулата на Ито (4.1.5) на функцијата $lnS_t, t \in [0,T]$, се добива стохастичката диференцијална равенка:

$$d(lnS_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

$$lnS_t = lnS_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)d\,s + \int_0^t \sigma dW_s = lnS_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$$

од каде се добива дека е решение на стохастичката диференцијална равенка (4.1.5),

$$S_t = S_o e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \quad , t \in [0,T]$$

Потребно е прво да се одреди распределбата за

$$lnS_t = lnS_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t.$$

Бидејќи W_t има распределба $\mathcal{N}(0,t)$, може да се заклучи дека случајната променлива lnS_t има $\mathcal{N}\left(lnS_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ распределба за фиксно $t \in [0,T]$.

Со примена на овие факти се добива:

$$P\{S_t < e^x\} = P\{lnS_t < x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[y - lnS_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{e^x} \frac{1}{z\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[lnz - lnS_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2} dz$$

Понатаму, густината на распределба на случајната променлива S_t е:

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[lnx - lnS_0 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2}, x > 0,$$

па случајната променлива S_t има log-нормална распределба, при што

$$ES_t = S_0 e^{\mu t} \quad , DS_t = S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) \tag{4.1.6}$$

4.2. *Black-Scholes* –ов модел на цена на европска опција

Следните претпоставки на *Black-Scholes* се од суштинско значење за моделирање на цената на европската опција:

1. Цената опишана со стохастичкиот процес $S = \{S_t, t \in [0,T]\}$ е геометрсико Брауново движење со волатилност σ и стапката на средниот пораст μ намалена за странска каматна стапка;

2. Волатилност и каматната стапка на домашниот и на странскиот пазар се познати функции за сето време на траење на опцијата и во наједноставен случај, кој се разгледува во овој труд, се константни;

3. Во моделот не се вклучени трошоците за трансакциите;

4. Не постои можност за арбитража;

5. Трговијата се врши непрекинато;

6. Дава можност за кратка продажба и средствата се поделени.

Нека во произволен момент $t \in [0,T]$, V_t е капитал на портфолиото на продавачот на опцијата кој се заштитува од ризик со заземена Δ_t позиција во странска валута чија спот цена е S_t и вложување или позајмување со девизна сметка, така што за мал времеснки период dt промената на неговиот капитал, изразена во домашна валута, е еднаква на:

$$dV_t = \Delta_t dS_t + \Delta_t r_j S_t dt + r(V_t - \Delta_t S_t)dt$$

$$= \left[\Delta_t\left(\mu - r_j\right)S_t + \Delta_t r_j S_t + r(V_t - \Delta_t S_t)\right]dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t$$

$$= (\mu - r)\Delta_t S_t dt + rV_t dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t \tag{4.2.1}$$

Вредноста $\mu - r$ се нарекува премија на ризик и покажува зголемување (намалување) на капиталот ако $\mu > r(\mu < r)$. Поттик за инвеститорот да инвестира во странска валута е мерата на нејзиниот средниот раст секогаш ја надминува каматната стапка.

Нека $f(S_T)$ е вредност на европската опција на датумот на достасување, а $f(t, S_t)$ е арбитражна цена на таа опција во произволен момент $t \in [0, T]$. Нека $f(t, S_t)$ е најмалку еднаш непрекинато диференцијабилна по првиот и двапати непрекинато диференцијабилна по вториот аргумент. Со примена на формулата на Ито (Ito) за стохастичко диференцирање се добива:

$$df(t, S_t) = \left[f_t'(t, S_t) + (\mu - r_j)S_t f_s'(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{ss}''(t, S_t)\right] dt + \sigma S_t f_s'(t, S_t) dW_t \quad \textit{(4.2.2)}$$

Имајќи во предвид дека важи претпоставката на безарбитражност на пазар, капиталот на продавачот на опцијата во секој момент $t \in [0, T]$ мора да биде еднаква на арбитражната цена на опцијата т.е. $V_t = f(t, S_t)$,

од каде следува дека и неговите диференцијали се еднакви т.е.

$$dV_t = df(t, S_t) \quad (4.2.3)$$

Бидејќи е познато дека два диференцијала се еднакви ако им се еднакви коефициентите на дифузија и коефициентот на пренос во смисла на стохастичка еквиваленција, еднаквоста (4.2.3) важи ако

$$\Delta_t \sigma S_t = \sigma S_t f_s'(t, S_t)$$

од каде се добива дека $\Delta_t = f_s'(t, S_t)$ и

$$rf(t, S_t) + (\mu - r) f_s'(t, S_t) S_t == f_t'(t, S_t) + (\mu - r_j)S_t f_s'(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{ss}''(t, S_t)$$

од каде се добива дека :

$$f_t'(t, S_t) + (r - r_j)S_t f_s'(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f_{ss}''(t, S_t) = rf(t, S_t) \quad (4.2.4)$$

Равенката (4.2.4) ја претставува *Black-Scholes* парцијална диференцијална равенка од втор ред од параболичен тип, за одредување на арбитражната цена на европска опција. Од оваа равенка може да се заклучи дека арбитражната цена на европската опција не влијае мерата на среден раст на приходи μ ,така што инвеститорите може различно да ја отценат μ, но нивните арбитражни цени ќе се совпаѓаат. Очигледно ,Δ_t е брзина на промената на арбитражната цена на опцијата во зависност од промената на девизната цена.

4.2.1. Решавање на *Black-Scholes* равенка на европска куповна опција

Доколку арбитражната цена на европската куповна опција се означи со $c(t, S_t)$, равенката (4.2.4) може да се запише во следниот облик:

$$c_t'(t, S_t) + (r - r_j)S_t c_s'(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{ss}''(t, S_t) = rc(t, S_t) \qquad (4.2.5)$$

За решавање на на парцијалната диференцијална равенка (4.2.5) неопходно е да се воведат конечни и гранични услови. Конечниот услов се добива за $t = T$, додека граничниот услов по втората променлива т.е. ќе го разгледаме случајот кога $S_t = 0$ и кога $S_t \to \infty$. Во случај кога $S_t = 0, t \geq 0$, од (4.1.3) може да се заклучи дека и $dS_t = 0$. Девизната цена е непроменлива ако волатилноста е $\sigma = 0$, па во тој случај равенката (4.1.3) има облик :

$$dS_t = (\mu - r_j)S_t dt$$

со почетен услов S_0, чие решение е:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - r_j)t}$$

Од претходното равенство може да се заклучи дека ако во некој момент девизната цена е еднаква на нула ,т.е. $S_0 = 0$, тогаш странската валута е безвредна во секој момент потоа т.е. $S_t = 0$ за секој $t \geq 0$.

Конечниот услов е

$$c(t, S_t)|_{t=T} = c_T = max\{S_T - E, 0\}$$

Додека првиот граничен услов е

$$c(t, S_t)|_{S_t=0} = c(t, 0) = 0$$

Имајќи ја во предвид горната и долна граница на европската куповна опција

$$max\{S_t e^{-r_j(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}, 0\} < c(t, S_t) < S_t e^{-r_j(T-t)}$$

вториот граничен услов е: $c(t, S_t)|_{S_{t\to\infty}} \sim S_t e^{-r_j(T-t)} - Ee^{-r(T-t)}$.

Нека е $c(t, S_t) = e^{-r_j(T-t)} c_1(t, S_t)$.

Со замена на парцијалните изводи:

$$c_t' = r_j e^{-r_j(T-t)} c_1 + e^{-r_j(T-t)} (c_1)_t'$$

$$c_S' = e^{-r_j(T-t)} (c_1)_S'$$

$$c_{SS}'' = (c_S')_S' = e^{-r_j(T-t)} (c_1)_{SS}''$$

во (4.2.6) се добива:

$$r_j e^{-r_j(T-t)} c_1 + e^{-r_j(T-t)} (c_1)_t' + (r - r_j) S_t e^{-r_j(T-t)} (c_1)_S' + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 e^{-r_j(T-t)} (c_1)_{SS}'' - r e^{-r_j(T-t)} c_1 = 0$$

Со делење на $e^{-r_j(T-t)}$ следува дека:

$$(c_1)_t' + (r - r_j) S_t (c_1)_S' + \tfrac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 (c_1)_{SS}'' - (r - r_j) c_1 = 0 \qquad (4.2.6)$$

Понатаму, со цел на поедноставување на равенката (4.2.6), ќе бидат воведени променливи така што наместо променливите t и S_t ќе фигурираат променливите τ и x, додека функцијата $c_1(t, S_t)$ ќе биде заменета со функцијата $\nu(\tau, x)$.

Се воведуваат променливите:

$$S_t = E e^x \,, \tau = \tfrac{1}{2} \sigma^2 (T - t), \; c_1(t, S_t) = E \nu(\tau, x) \qquad (4.2.7)$$

Со замена на соодветните парцијални изводи:

$$(c_1)_t' = -E \frac{1}{2} \sigma^2 \nu_\tau'$$

$$(c_1)_S' = \frac{E}{S_t} \nu_x'$$

$$(c_1)_{SS}'' = ((c_1)_S')_S' = -\frac{E}{S_t^2} \nu_x' + \frac{E}{S_t^2} \nu_{xx}''$$

во (4.2.6) се добива:

$$-E\frac{1}{2}\sigma^2\nu'_\tau+(r-r_j)S_t\frac{E}{S_t}\nu'_x+\frac{1}{2}\sigma^2\left(-\frac{E}{S_t^2}\nu'_x+\frac{E}{S_t^2}\nu''_{xx}\right)-(r-r_j)E\nu=0$$

односно,

$$-(r-r_j)E\nu-E\frac{1}{2}\sigma^2\nu'_\tau+(r-r_j)E\nu'_x-\frac{1}{2}\sigma^2E\nu'_x+\frac{1}{2}\sigma^2E\nu''_{xx}=0$$

Со множење на претходната равенка со $\frac{1}{(r-r_j)E}$,за $r\neq r_j$, се добива

$$-\nu-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\nu'_\tau}{(r-r_j)}+\nu'_x-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\nu'_x}{(r-r_j)}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\nu''_{xx}}{(r-r_j)}=0$$

Од каде со делење со $\frac{\sigma^2}{2(r-r_j)}$ и воведување на смена $\frac{2(r-r_j)}{\sigma^2}=k$ се добива:

$$-k\nu-\nu'_\tau+k\nu'_x-\nu'_x+\nu''_{xx}=0 \qquad (4.2.7)$$

Значи, тргнувајќи од (4.2.5) и од воведувањето на соодветна смена се добива диференцијалната равенка со константни коефициенти:

$$\nu'_\tau=\nu''_{xx}+(k-1)\nu'_x-k\nu \qquad (4.2.8)$$

Оваа равенка со соодветнати смени може да се сведе на дифузна равенка. Во однос на новите променливи последниот услов е:

$$\nu(0,x)=max\{e^x-1,0\}$$

Нека

$$\nu(\tau,x)=e^{\alpha\tau+\beta x}u(\tau,x)$$

каде α и β се константи кои ќе ги одредиме понатаму. Со замена на соодветните парцијални изводи во (4.2.8):

$$\nu'_\tau = \alpha e^{\alpha\tau+\beta x}u + e^{\alpha\tau+\beta x}u'_\tau$$

$$\nu'_x = \beta e^{\alpha\tau+\beta x}u + e^{\alpha\tau+\beta x}u'_x$$

$$\nu''_{xx} = \beta^2 e^{\alpha\tau+\beta x}u + \beta e^{\alpha\tau+\beta x}u'_x + \beta e^{\alpha\tau+\beta x}u'_x + \beta e^{\alpha\tau+\beta x}u''_{xx}$$

и со делење со $e^{\alpha\tau+\beta x} \neq 0$, се добива:

$$\alpha u + u'_\tau = \beta^2 u + 2\beta u'_x + u''_{xx} + (k-1)(\beta u + u'_x) - ku$$

Со цел да се добие дифузната равенка, константите α и β се одбрани така што коефициентите пред u и u'_x бидат еднакви на нула т.е.

$$\alpha = \beta^2 + (k-1)\beta - k \quad \text{и } 2\beta + (k-1) = 0$$

од каде се добива :

$\alpha = -\frac{1}{4}(k+1)^2$ и $\beta = \frac{1-k}{2}$, па се добива дифузна равенка:

$$u'_\tau = u''_{xx} \tag{4.2.9}$$

Која важи за $-\infty < x < +\infty$ и $\tau > 0$.

Конечниот услов во однос на новата функција е:

$$u(0,x) = e^{-\beta x}\nu(0,x) = e^{-\beta x}max\{e^x - 1,0\}$$

Со воведување на ознака $u(0,x) = u_0(x)$ се добива

$$u_0(x) = max\{e^{(1-\beta)x} - e^{-\beta x}, 0\} = max\left\{e^{\frac{1+k}{2}x} - e^{\frac{k-1}{2}x}, 0\right\}.$$

Решението $u(\tau,x)$ на равенката (4.2.9) е познато и еднакво на

$$u(\tau,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(S)\, e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}ds$$

Воведуваме смена $\frac{x-s}{\sqrt{2\tau}} = y$, од каде $s = x - y\sqrt{2\tau}$, се добива:

$$u(\tau,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}u_0\left(x-y\sqrt{2\tau}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}\sqrt{2\tau}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}\left(e^{\frac{1+k}{2}(x-y\sqrt{2\tau})}-e^{\frac{k-1}{2}(x-y\sqrt{2\tau})}\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{\frac{1+k}{2}x}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}e^{-\frac{1}{2}\left(y+\frac{\sqrt{2\tau}}{2}(k+1)\right)^2}e^{\frac{1}{2}\frac{2\tau}{4}(k+1)^2}dy\right.$$

$$\left.-e^{\frac{k-1}{2}x}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}e^{-\frac{1}{2}\left(y+\frac{\sqrt{2\tau}}{2}(k-1)\right)^2}e^{\frac{1}{2}\frac{2\tau}{4}(k-1)^2}dy\right)$$

Со воведување на смените $y+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)=z_1$ и $y+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1)=z_2$ се добива

$$u(\tau,x)=e^{\frac{1+k}{2}x+\frac{\tau}{4}(k+1)^2}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_1^2}{2}}dz_1$$

$$-e^{\frac{k-1}{2}x+\frac{\tau}{4}(k-1)^2}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z_2^2}{2}}dz_2$$

Нека функцијата $N(d)$ е дефинирана со

$$N(d)=\int_{-\infty}^{d}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (4.2.10)$$

Со воведување ознаки :

$$d_1=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)\ ,\ d_2=\frac{x}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1)$$

и со користење на (4.2.10), $u(\tau,x)$ може да се запише во следниот облик

$$u(\tau,x)=e^{\frac{1+k}{2}x+\frac{\tau}{4}(k+1)^2}N(d_1)-e^{\frac{k-1}{2}x+\frac{\tau}{4}(k-1)^2}N(d_2)$$

од каде

$$v(\tau,x)=e^{-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau+\frac{1-k}{2}x}u(\tau,x)=e^{x}N(d_1)-e^{-\tau k}N(d_2)$$

Од претходната равенство и (4.2.7) се добива дека:

$$v(\tau, x) = \frac{c_1(t, S_t)}{E} = \frac{S_t}{E} N(d_1) - e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\frac{2(r-r_j)}{\sigma^2}} N(d_2)$$

Од каде следува :

$$c_1(t, S_t) = S_t N(d_1) - E e^{-(r-r_j)(T-t)} N(d_2)$$

Со множење на претходната равенка со $e^{-r_j(T-t)}$ се добива :

$$c_1(t, S_t) = S_t e^{-r_j(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \qquad (4.2.11)$$

каде

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1) = \frac{x + \tau(k+1)}{\sqrt{2\tau}} = \frac{ln\frac{S_t}{E} + \left(r - r_j + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

и

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1) = \frac{x + \tau(k-1)}{\sqrt{2\tau}} = \frac{ln\frac{S_t}{E} + \left(r - r_j - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Очигледно,

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Бидејќи се разгледува инвеститор кој зазема кратка позиција во европската куповна опција под претпоставка за безарбитрашноста на пазарот, потребно е да се одреди број на позиција во странската валута која инвеститорот ќе ја штити од ризик.

$$\Delta_t = c_S' = e^{-r_j(T-t)} N(d_1) + S_t e^{-r_j(T-t)} N_S'(d_1) - E e^{-r(T-t)} N_S'(d_2)$$

од каде, со замена на парцијалните изводи, врз основа на $N_S'(d_1) = N_S'(d_2)$,

$$N_S'(d_1) = N_S'(d_2) = N'(d_1) \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

се добива дека:

$$\Delta_t = e^{-r_j(T-t)}N(d_1) + \left(e^{-r_j(T-t)}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\right)N'(d_1)$$

Може да се покаже дека:

$$e^{-r_j(T-t)}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ee^{-r(T-t)}\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} = 0$$

па од претходната еднаквост следува дека бројот на позиција во странска валута која инвеститорот ја штити од ризик е еднаква на:

$$\Delta_t = e^{-r_j(T-t)}N(d_1)$$

Имајќи во предвид дека кај европската куповна опција $\Delta_t > 0$, со цел да се заштити продавачот на таа опција, потребно е да се купи Δ_t единица на странска валута.

4.2.2.Решавање на *Black-Scholes* - ова равенка на европска продажна опција

Ако арбитражната цена на евроспката продажна опција се означи со $p(t, S_t)$, равенката (4.2.4) може да се запише во следниот облик:

$$p'_t(t, S_t) + (r - r_j)S_t p'_s(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f''_{ss}(t, S_t) = rp(t, S_t) \qquad (4.2.12)$$

За решавање на *Black-Scholes*-овата парцијална диференцијална равенка (4.2.12) неопходно е да се воведат конечни и гранични услови.

Конечниот услов е

$$p(t, S_t)|_{t=T} = p_T = max\{E - S_T, 0\}$$

додека првиот граничен услов е

$$p(t, S_t)|_{S_t=0} = p(t, 0) = Ee^{-r(T-t)}$$

имајќи ги во предвид горната и долна граница на европската продажна опција

$$max\{Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-r_j(T-t)}, 0\} < p(t, S_t) < Ee^{-r(T-t)}$$

вториот граничен услов е

$$p(t, S_t)|_{S_{t\to\infty}} \sim 0.$$

Аналогно на решавањето на *Black-Scholes*-ова парцијална диференцијална равенка за европската куповна опција, равенката (4.2.12) со користење на конечниот и граничниот услов може да се реши со сведување на дифузна равенка:

$$u'_\tau = u''_{xx}, \quad \tau > 0, -\infty < x < +\infty.$$

Меѓутоа, бидејќи е веќе добиена *Black-Scholes*-ова формула за одредување на арбитражна цена на европска куповна опција, со примена на продажно-куповниот паритет:

$$S_t e^{-r_j(T-t)} + p(t, S_t) - c(t, S_t) = Ee^{-r(T-t)} \qquad (4.2.13)$$

може да се добие *Black-Scholes*-ова формула за одредување на арбитражната цена на европска продажна опција.

Значи,

$$
\begin{aligned}
p(t,S_t) &= Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-r_j(T-t)} + c(t,S_t) \\
&= Ee^{-r(T-t)} - S_t e^{-r_j(T-t)} + S_t e^{-r_j(T-t)} N(d_1) - Ee^{-r(T-t)} N(d_2) = \\
&= Ee^{-r(T-t)}\big(1 - N(d_2)\big) - S_t e^{-r_j(T-t)}\big(1 - N(d_1)\big) \\
&= Ee^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-r_j(T-t)} N(-d_1)
\end{aligned}
\tag{4.2.14}
$$

каде $N(-d_i) = 1 - N(d_i) \ \ , i = 1,2.$

Број на позиција во странска валута која инвеститорот го штити од ризик може да се добие врз основа на продажно-куповниот паритет (4.2.13):

$$\Delta_t = p'_S = c'_S - e^{-r_j(T-t)} = e^{-r_j(T-t)}(N(d_1) - 1)$$

Бидејќи $N(d_1) \in [0,1] \ \ , N(d_1) - 1 \leq 0$, па $\Delta_t \leq 0$. Понатаму, за да се заштити продавачот на таа опција, потребно е да се продаде Δ_t единица на странска валута.

4.2.3.Моделирање на цена на опција чија актива е фјучерс

Во овој дел ќе биде разгледана опција чија актива е фјучерс. Ќе покажеме дека фјучерсот претставува геометриско Брауново движење со стапка на средниот пораст на приходи од фјучерсот $\mu_F = \mu - r$ и волатилност на фјучерс $\sigma_F = \sigma$, каде σ е волатилност и μ е стапка на средниот пораст на приходи на инвеститорот од актива на фјучерсот, што е неопходен услов за примена на формулата на Ито *(Ito)* и докажување на главниот резултат.

Нека F_t е договорена цена на фјучерсот чија актива е странска валута во момент $t \in [0, T]$. Еволуцијата на цената на фјучерсот може да се опише со геометриско Брауново движење:

$$dF_t = \mu_F F_t dt + \sigma_F F_t dW_t$$

каде $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$ е стандарден еднодимензионален Винеров процес дефиниран на просторот на веројатност $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и адаптиран во однос на неопаднувачката фамилија σ -алгебри $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Нека F_0 е цена на фјучерсот во моментот $t = 0$.

Ќе покажеме дека познавањето на параметрите σ и μ е доволно за да се одреди стапката на средниот пораст на приходите од фјучерсот μ_F и волатилноста на фјучерсот σ_F. Всушност, бидејќи еволуцијата на девизната цена претставува геометриско Брауново движење т.е.

$$dS_t = (\mu - r_j) S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

бидејќи цената на фјучерсот е еднаква на

$$F_t = F(t, S_t) = S_t e^{(r - r_j)(T - t)}$$

за секој $t \in [0, T]$, каде r и r_j се каматни стапки на домашниот и странскиот пазар, соодветно, со примена на формулата на Ито *(Ito)* се добива дека :

$$dF_t = \left(F_t' + (\mu - r_j)S_t F_S' + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 F_{SS}''\right)dt + \sigma S_t F_S' dW_t =$$

$$= \left(-(r - r_j)S_t e^{(r-r_j)(T-t)} + (\mu - r_j)S_t e^{(r-r_j)(T-t)}\right)dt + \sigma S_t e^{(r-r_j)(T-t)} dW_t =$$

$$=(\mu - r)F_t dt + \sigma F_t dW_t$$

Цената на фјучерсот е геометриско Брауново движење со стапка на средниот пораст на приходи од фјучерсот $\mu_F = \mu - r$ и волатилноста на приходи од фјучерсот $\sigma_F = \sigma$.

За моделирање на цена на европска опција чија актива е фјучерс се разгледува инвеститорот кој зазема кратка позиција во таа опција. Нека T_1 е датумот на доспевање на европската опција и T е датум на достасување на фјучерсот. Очигледно, мора да биде $T_1 < T$. Нека $f(t, F_t)$ е арбитражна цена на европската опција чија актива е фјучерс и нека V_t е капитал на продавачот на опцијата во произволно време $t \in [0, T_1]$. За да ја заштити својата кратка позиција продавачот на опцијата зазема Δ_t позиција во фјучерсот. За мал временски период dt, промената на капиталот на продавачот на опцијата изнесува :

$$dV_t = rV_t dt + \Delta_t dF_t = (\Delta_t \mu_F F_t + rV_t)dt + \Delta_t \sigma_F F_t dW_t$$

Нека функцијата $f(t, F_t)$ е најмалку еднаш непрекинато диференцијабилна по првата и два пати непрекинато диференцијабилна по втората променлива. Бидејќи еволуцијата на цената на фјучерсот е опишана со геометриско Брауново движење, со примена на формулата на Ито (Ito) за стохастичко диференцирање се добива :

$$df(t, F_t) = \left[f_t'(t, F_t) + \mu_F F_t f_F'(t, F_t) + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F_t^2 f_{FF}''(t, F_t)\right]dt + \sigma_F F_t f_F'(t, F_t) dW_t$$

Врз основа на безарбитражноста на пазарот, капиталот на портфолиото на продавачот на опцијата чија актива е фјучерс во секој момент $t \in [0, T_1]$ мора да биде еднаква на арбитражната цена на таа опција, т.е. $V_t = f(t, F_t)$, од каде следува дека и неговите диференцијали се еднакви во смисла на стохастичка еквиваленција, т.е.

$$dV_t = df(t, F_t), \tag{4.2.15}$$

Како што е познато, два диференцијала се еднакви ако им се еднакви коефициентите на дифузија и коефициентот на пренос во смисол на стохастичка еквиваленција, па еднаквоста (4.2.15) важи ако е:

$$\Delta_t \sigma_F F_t = \sigma_F F_t f_F'(t, F_t)$$

Од каде следува дека:

$$\Delta_t = f_F'(t, F_t)$$

и $$rf(t, F_t) + \mu_F F_t f_F'(t, F_t) = f_t'(t, F_t) + \mu_F F_t f_F'(t, F_t) + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F_t^2 f_{FF}''(t, F_t)$$

од каде следува дека:

$$f_t'(t, F_t) + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F_t^2 f_{FF}''(t, F_t) - rf(t, F_t) = 0 \tag{4.2.16}$$

Равенката (4.2.16) претставува *Black- Scholes -ова* парцијална диференцијална равенка за пресметување на арбитражната цена на европската опција чија актива е фјучерс. Очигледно, равенката (4.2.16) претставува специјален случај на равенката (4.2.4) за $r_j = r$. Соодветно,ќе биде користена *Black-Scholes* –овата формула (4.2.11) и (4.2.14) за одредување на арбитражната цена на евроспката куповна и продажна опција чија актива е фјучерс.

Доколку арбитражната цена на европската куповна опција чија актива е фјучерс се означи со $c(t, F_t)$,равенката (4.2.16) може да се запише во облик:

$$c_t'(t, F_t) + \frac{1}{2}\sigma_F^2 F_t^2 c_{FF}''(t, F_t) - rc(t, F_t) = 0 \tag{4.2.17}$$

Со конечен услов

$$c(t, F_t)|_{t=T_1} = c_{T_1} = max\{F_{T_1} - E, 0\}$$

и граничен услов

$c(t,F_t)|_{F_t=0}=0$ и $c(t,F_t)|_{F_t\to\infty}\sim F_t e^{-r(T_1-t)}-Ee^{-r(T_1-t)}$.

Решение на равенката (4.2.17), добиено со примена на формулата (4.2.11)

за $r_j=r$,е

$$c(t,F_t)=e^{-r(T_1-t)}\left(F_tN(\bar{d}_1)-EN(\bar{d}_2)\right), \tag{4.2.18}$$

каде

$$\bar{d}_1=\frac{ln\frac{F_t}{E}+\frac{\sigma^2}{2}(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}}$$

и

$$\bar{d}_2=\frac{ln\frac{F_t}{E}-\frac{\sigma^2}{2}(T_1-t)}{\sigma\sqrt{T_1-t}}=\bar{d}_1-\sigma\sqrt{T_1-t}$$

Во секој момент $t\in[0,T_1]$, бројот на позиција на фјучерсот која инвеститорот го штити од ризик е :

$$\Delta_t=c'_F=e^{-r(T_1-t)}\left(N(\bar{d}_1)+F_tN'_F(\bar{d}_1)-EN'_F(\bar{d}_2)\right)=$$

$$=e^{-r(T_1-t)}\left(N(\bar{d}_1)+F_tN'(\bar{d}_1)\frac{\partial d_1}{\partial F_t}-EN'(\bar{d}_2)\frac{\partial d_2}{\partial F_t}\right)$$

$$=e^{-r(T_1-t)}\left(N(\bar{d}_1)+\frac{\partial d_1}{\partial F_t}\left(F_tN'(\bar{d}_1)-EN'(\bar{d}_2)\right)\right)=e^{-r(T_1-t)}N(\bar{d}_1)$$

при што е користено дека $\frac{\partial d_1}{\partial F_t}=\frac{\partial d_2}{\partial F_t}$ и $F_tN'(\bar{d}_1)-EN'(\bar{d}_2)=0$.

Доколку арбитражната цена на европската продажна опција чија актива е фјучерс се означи со $p(t,F_t)$, равенката (4.2.16) може да се запише во облик:

$$p'_t(t,F_t)+\tfrac{1}{2}\sigma_F^2F_t^2p''_{FF}(t,F_t)-rp(t,F_t)=0 \tag{4.2.19}$$

со конечен услов

$$p(t,F_t)|_{t=T_1} = p_{T_1} = max\{E - F_{T_1}, 0\}$$

и граничен услов

$$p(t,F_t)|_{F_t=0} = Ee^{-r(T_1-t)} \quad \text{и} \quad p(t,F_t)|_{F_t\to\infty} \sim 0.$$

Со примена на формулата (4.2.14) за $r_j = r$, се добива решението на равенката (4.2.19):

$$p(t,F_t) = e^{-r(T_1-t)}\left(\mathrm{E}N(-\bar{d}_2) - F_tN(-\bar{d}_1)\right).$$

Претходно добиената формула за одредување на арбитражната цена на европската продажна опција чија актива е фјучерс може да се добие врз основа на (4.2.18) со примена на куповно - продажниот паритет за опција чија актива е фјучерс :

$$F_te^{-r(T_1-t)} + p(t,F_t) - c(t,F_t) = Ee^{-r(T_1-t)}$$

бројот на позиција на фјучерсот која инвеститорот со кратка позиција во европската продажна опција го штити од ризик е :

$$\Delta_t = p'_F = c'_F - e^{-r(T_1-t)} = e^{-r(T_1-t)}\left(N(\bar{d}_1) - 1\right).$$

ЗАКЛУЧОК

Подемот на најпопуларните финансиски деривати се објаснува со фактот дека тие обезбедуваат релативно евтин начин на намалување и контрола на различни видови на ризик. Во однос на динамичниот развој на финансиските трансакции, финансиските деривати сѐ повеќе се користат од страна на банките, компаниите, институционални инвеститори, светски организации и владите.

Во овој магистерски труд се опишани начините на моделирање на цената на опцијата во дискретно време со примена на биномниот и триномниот модел и моделирање на цената на опцијата во непрекинато време со примена на *Black-Scholes* модел.

Двата модели за моделирање на цената на опции опишана во овој магистерски труд, биномниот и триномниот, се тесно поврзани. Двата модела се базираат на креирањето на биномното, односно триномното стебло на цената на активата чиј носител е опцијата. Стеблото, како многу напредна структура на податоци, овозможува брзо внесување на податоци на соодветната позиција, да ги менува или да прочита од дадена структура. Врз основа на тоа, можно е да се развие апликација што брзо ќе манипулира со голем број на податоци за движењето на цените на активата на финансиските пазари и за пресметување на цената на опциите, како и параметрите за заштита од ризик,со резултат заштита на портфолиото од ризик.

Триномниот модел, опишан во овој магистерски труд, сѐ повеќе се применува во праксата. Овој модел може да се прошири на реални опции кои во денешно време се многу често застапени на пазарот, што може да биде добра мотивација за натамошно истражување. Исто така, уште еден мотив за продолжување е и фактот дека триномниот модел може да се примени за пресметување на цената на бариерните опции.

Бидејќи финансиските пазари се побогати со текот на времето, разумно е да се очекува и забрзан развој на повеќе сложени математички модели, кои врската помеѓу теориските модели и праксата би ја направиле многу подобра.

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

[1] Alpha.C.Chiang,Kevin Wainwright (2010). *Fundamental methods of mathematical economics .*

[2] Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B (2008). *Financijsko modeliranje*, Zgombić & Partneri, Zagreb.

[3] Aljinović, Z., Marasović, B., Šego, B(2009). *Vrednovanje opcija Black-Scholesovim modelom I binomnim modelom upotrebom Excela,* Računovodstvo i revizija, br. 12. str. 118-124.

[4] Barone-Adesi G., Whaley R.E., (1987). "Efficient analytic approximation of American option values", *Journal of Finance* 42, 301-320.

[5] Black, F., Scholes, M. (1973). *„The Pricing ofOptions and Corporate Liablities",* The Journal of Political Economy, Vol. 81, No.3, pp. 637-659.

[6] Broadie M., Detemple J., (1996). "American option valuation: new bounds, approximations,and a comparison of existing methods", *Review of Financial Studies,* 9, 1211-1250.

[7] Chriss, N. A.(1997). *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*, McGraw-Hill, New York.

[8] Desmond J. Higham,(2001). *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*, SIAM Review 43 525-546.

[9] D. J. White, *Markov Decision Processes*, (1993). John Wiley & Sons.

[10] Dr Erić D., Dr Živković B.(2006). Finansijska tržišta i institucije, CID, Beograd.

[11] Dr Vesna Bogojević Arsić (2010). *„Tržište hartija od vrednosti",* izdavač Fakultet organizacionih nauka, Beograd.

[12] Ethier S. N., Kurtz T. G., (2005). *Markov Processes Characterization and Convergence,* Wiley.

[13] Ellis K., Michaely R. I O'Hara M.(2002), When the Underwriter Is the Market Maker, Journal of Finance, SAD.

[14] Embrechts P., Frey R, Furrer H, (2001), *Stochastic Processes in Insurance and Finance*, Elsevier.

[15] Фотов,Р .(2010) ,Финансиски менаџмент . Универзитет "Гоце Делчев"-Штип.

[16] *Foundations of Casualty Actuarial Science, 4th edition*, (2001). Casualty Actuarial Society .

[17] He, Y. (2007). “Real Option in energy markets”, PhD thesis , University of Twente.

[18] Hummel P., Seebeck C., (1956). *Mathematics of Finance*, McGraw-Hill, New York.

[19] Jacques Janssen, Raimondo Manca, Ernesto Volpe (2009). *Mathematical finance*: *Deterministic and stochastic models* .

[20] J. C. Hull ,(2006). *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall.

[21] J.Michael Steele, (2003).‘’Stochastic Calculus and Financial Applications’’, Springer.

[22] Lefebvre M., *Applied Stochastic Processes*, (2007) ,Springer.

[23] Matovina, H. (2007). “Opcije – mogućnosti primjene”, Računovodstvo, revizija i financije, br. 7., str. 89-97.

[24] Michael Johannes, Nicholas Polson, (2003). *MCMC Methods for Continuous/Time Financial Econometrics*, Columbia University, University of Chicago.

[25] M. Jovanović, Finansijsko modeliranje, autorizovana predavanja, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš.

[26] Mikosch T.(2009). *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer.

[27] Milan Merkle, (2002). *Verovatnoća i statistika za inženjere i studente tehnike*, Akademska misao .

[28] Mr Goranka Knežević (2006). *„Finansijski instrumentiZlatibor 2006",* Fakultet za menadžment„Braća Karić", Beograd.

[29] N. Bowers et al. (1997). *Actuarial Mathematics, 2nd edition*, Society of Actuaries.

[30] Orsag, S. *HUFA(2006)*,Zagreb.

[31] P. Clifford, O. Zaboronski,(2008).Pricing Options Using Trinomial Trees.

[32] Predrag S. Stanimirović, Gradimir V. Milovanović, (2002). Programski paket *Mathematica* i primene, Elektronski fakultet u Nišu, Niš.

[33] Петковски, Михаил (2004) .*Финансиски пазари и институции*, „Економски факултет “– Скопје.

[34] Prof. dr Zoran Jeremić (2008). *„Praktikumza finansjska tržišta*", Univerzitet "Singidunum" - fakultet za finansijski menadžment i osiguranje, Beograd.

[35] Saunders A., Cornett M.(2006), Finansijska tržišta i institucije, Masmedia, Zagreb.

[36] S.E.Shreve, (2004). *Stochastic Calculus for Finance I:* Binomial Asset Pricing Model,Springer.

[37] S.E.Shreve, (2004). *Stochastic Calculus for Finance II*: Continuous - Time Model, Springer.

[38] Soskic, Dejan (2009). *Hartije od vrednosti*: *Upravljanje portfoliom investicioni fondovi, peto izdanie*, Beograd.

[39] Stephen Figlewski ,Bin Gao, (1999).The Adaptive Mest Model:A New Approach To Efficient Option Pricing,338-339 ,Journal of Financial Economics 53.

[40] Dr.Stojanović Dragiša,(1968). Matematičke metode u ekonomiji preduzeća, Beograd.

[41] Tsay S. Ruey, (2002). *"Analysis of financial time series"*, John Wiley & Sons .

[42]V. Đorđević, Primena programskog paketa,(2009). "*Mathematica*" u finansijama, diplomski rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš.

[43] Џамди А. Таха (2010). *Операциони истражувања, Превод на осмо издание*, Магор-Скопје.

[44] Øksendal B.: *Black & Scholes-formelen,(1999). En triumf for matematisk modellering i finans*, Preprint Series Institute of Mathematics University of Oslo No. 14, September .

[45] http://www.aso.mk/

[46] https://www.boerse-stuttgart.de/en/stock-exchange/news/

[47] http://demonstrations.wolfram.com/BinomialTree/

[48] http://www.mse.mk/mk/

[49] ttps://www.nyse.com/index

[50]http://www.wolfram.com/solutions/industry/financial-engineering-and-mathematics/