<u>УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП</u>

ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА

ФИНАНСИСКА И АКТУАРСКА МАТЕМАТИКА

Штип

Лилјана Василева

АНАЛИЗА И ПРИМЕНА НА НЕКОИ ОД КВАНТИТАТИВНИТЕ МЕТОДИ ВО ДЕЛОВНОТО ОДЛУЧУВАЊЕ

МАГИСТЕРСКИ ТРУД

Штип, август 2014 година

UNIVERSITY "GOCE DELCEV" - STIP

FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

FINANSIAL AND ACTUARIAL MATHEMATICS

Stip

Liljana Vasileva

ANALYSIS AND APPLICATION OF SOME OF THE QUANTITATIVE METHODS IN BUSINESS DECISION MAKING

MASTER'S THESIS

Stip, august 2014

КОМИСИЈА ЗА ОЦЕНКА И ОДБРАНА

ПРЕТСЕДАТЕЛ:

Проф. Д-р Ристо Фотов,

Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип,

Економски факултет

ЧЛЕН:

Проф. Д-р Билјана Јолевска-Тунеска

Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип,

Електротехнички факултет

ЧЛЕН - МЕНТОР:

Проф. Д-р Татјана Атанасова – Пачемска,

Универзитет „Гоце Делчев“ – Штип,

Факултет за информатика

БЛАГОДАРНОСТ

Сакам да изразам посебна и една огромна благодарност до мојата фамилија за сета поддршка, љубов и мотивација за изработка и успешна реализација на овој магистерски труд.

Исто така голема благодарност и до мојот ментор проф. д-р Татјана Атанасова-Пачемска со која ми беше чест да соработувам и да ги следам нејзините стручни совети во текот на подготовката на магистерскиот труд.

Рецензирани и објавени/прифатени за објавување трудови:

1. Vasileva L., Atanasova - Pacemska T., Pacemska S.(2014). *Inventory Model for Different Kind of Products - the Capacity of Storage Space as a Constraining Factor.* XL Symposium on Operational Research (SYMPOSIUM 2014) “New business models and sustianble competitevness”, Zlatibor, Srbija, 1180-1185.

2. Атанасова- Пачемска, Т., Василева, Л.(2013). Модел за управување со залихите базиран на планирање на потребите за материјал (material requirement planning – MRP). Годишен зборник, Економски факултет, Универзитет „Гоце Делчев“ Штип, 209-216.

АНАЛИЗА И ПРИМЕНА НА НЕКОИ ОД КВАНТИТАТИВНИТЕ МЕТОДИ ВО ДЕЛОВНОТО ОДЛУЧУВАЊЕ

Краток извадок

Во секојдневното деловно работење доносителите на одлуки се соочуваат со многубројни неизвесности кои се вклучени во процесот на донесување на одлуки. Во услови кога постои неизвесност, процесот на деловно одлучување станува сѐ покомплексен. Веќе подолго време доносителите на одлуки не можат да се потпираат само на искуство и интуиција, туку во предвид мора да го земат и фактот дека сложеноста на економското и деловното однесување не може прецизно да се опфати при донесувањето на правилни одлуки кои ќе дадат максимални резултати.

Вклучувајќи ги бројните фактори кои го детерминираат ризикот и несигурноста во одлучувањето, доносителите на одлуки во тие околности не можат да извршат комплетна анализа од која ќе произлезат решенија кои ќе дадат позитивни резултати за поставениот проблем. Од таа причина, се наметнува примената на квантитативната анализа која вклучува низа квантитативни методи и алатки кои формираат широк спектар на нумерички методи кои овозможуваат увид и помош при донесувањето на одлуки.

Важноста на квантитативните методи во деловното одлучување се согледува во тоа што со нивната примена доносителите на одлуки можат логички и објективно да го набљудуваат дадениот проблем, да ги детерминираат клучните варијабли и резултатите при пресметките, да го анализираат проблемот и да пронајдат оптимално решение, да ги споредат алтернативните решенија и да го изберат најдоброто, да ги споредат перформансите преку различни операции и различни временски рамки, да ги објаснат можните решенија и да ја прикажат најдобрата алтернатива, да ја оправдаат донесената одлука, како и да ги надминат сите субјективни и пристрасни ставови.

Предмет на истражување во овој магистерски труд е примената на математичкото моделирање во процесот на деловно одлучување преку употребата на креирани математички модели. Целта е да се развијат модели во системот на донесување одлуки, кои инкорпорираат повеќе фактори, како ризик и можности, со кои можат да се предвидат и споредат резултатите од алтернативните одлуки или стратегии. На тој начин на доносителите на одлуки ќе им помогнат да ги детерминираат активностите насочени кон изнаоѓање на оптимална политика во деловното одлучување и поедноставувањето на постапката при решавањето на сложените реални проблеми.

Клучни зборови: деловно одлучување, квантитативна анализа, квантитативни методи, математички модели.

ANALYSIS AND APPLICATION OF SOME OF THE QUANTITATIVE METHODS IN BUSINESS DECISION MAKING

Abstract

In the daily business operation decision-makers are faced with many uncertainties involved in the decision making. In circumstances where there is uncertainty, the business decision-making process becomes more complex. Fora long time decision-makers cannot rely only on experience and intuition, but they must take into consideration the fact that the complexity of the economic and business behavior cannot precisely include in process of making right decisions which will give maximum results.

Including the numerous factors that determine the risk and uncertainty in decision making, decision-makers in these circumstances cannot perform a complete analysis which will provide solutions that will generate positive results for the given problem. From that reason, there is a need of using quantitative analysis which includes many quantitative methods and tools that create a wide range of numerical methods that enable review and help in decision making.

The importance of quantitative methods in business decision making is perceived from the fact that with their use decision-makers can logically and objectively observe the given problem, to determine the key variables and the results of the calculations, to analyze the problem and find an optimal solution, to compare alternatives and select the best, to compare performances across different operations and different time frames, to explain possible solutions and represent the best alternative, to justify the decision, and to overcome all subjective and biased attitudes.

The subject of research in this master's thesis is the use of mathematical modeling in the process of business decision making through the use of created mathematical models. The purpose is to develop models in the system of decision making, incorporating factors such as risk and opportunities, which can predict and compare the results of alternative decisions or strategies. In this way they will help the decision-makers to determine the activities in direction toward finding an optimal policy in business decision making and simplify the procedure of solving complex real problems.

Key words: business decisions, quantitative analysis, quantitative methods, mathematical models.

СОДРЖИНА

1. ВОВЕД

Со оглед на бројните фактори кои го детерминираат ризикот и несигурноста во одлучувањето, доносителите на одлуки не можат да извршат комплетна анализа од која ќе произлезат решенија кои ќе дадат позитивни резултати за поставениот проблем во процесот на деловното одлучување. Од таа причина, се наметнува примената на квантитативната анализа која вклучува низа квантитативни методи и алатки кои формираат широк спектар на нумерички методи и овозможуваат увид и помош при донесувањето на одлуки.

Квантитативната анализа на деловните системи за потребите на деловното работење, особено во нивниот динамички аспект, процесот на моделирање и креирање на математички модели има значајно место, бидејќи овозможува успешна апроксимација, проучување и насочување на сложената стопанска стварност.

Со текот на времето, како што секојдневниот живот и деловното работење стануваат сè покомплексни, и самото одлучување е сè посложено. Како последица на современиот живот и начин на работа, доносителите на одлуките кои учествуваат во процесот на управување во современите деловни организации, т.е. деловни системи, сé почесто носат важни одлуки во услови на постојани промени во опкружувањето, во услови на ризик и во ситуации кога не може да се дојде до егзактни податоци за сите параметри кои влијаат на донесувањето на некоја одлука. Поради тоа, запознавањето, анализата и примената на некои од квантитативните методи во одлучувањето претставува современ научно-истражувачки проблем.

Магистерскиот труд е структуриран во 7 поглавја, вовед во трудот и заклучок на крајот на истиот. Во прилог е даден осврт на секое од седумте поглавја.

Во првото поглавје од магистерскиот труд е реализиран осврт на тематската поставеност и применливост. Направен е преглед на теоретските основи на процесот на деловното одлучување, односно на математичкото моделирање кое се применува во реални и отворени проблеми со цел да се креираат моќни математички модели кои потоа можат да бидат елаборирани, прилагодени и искористени во други контексти во генерализирана форма.

Во второто поглавје од магистерскиот труд е даден теоретски преглед на моделите на управување со залихи како детерминистички модели. Притоа во овој дел е образложена улогата на залихите во деловното управување, која воглавно се состои во тоа што во репродукциониот процес се реализираат производство и клиентка кои се временски, квантитативно и квалитативно, соодветни на стопанските и пошироко на општествените потреби. Следно, наведени се предностите и недостатоците кои произлегуваат од чувањето на залихи и наведено е дека целта на системот за управување со залихи е тие да се одржуваат на оптимално ниво. Понатаму како предмет на разгледување во ова поглавје беше моделскиот пристап на залихите во деловното управување при што беа разработени повеќе видови на модели кои спаѓаат во групата на моделите на залихи со детерминирана побарувачкаи истите беа базирани на повеќе претпоставки кои воедно беа поткрепени и со формули, табели, слики и графички прикази.

Третото поглавје го опфаќа теоретскиот преглед на системите на масовното опслужување (СМО) како стохастички модели. Најнапред се дадени целта, задачите и предметот на проучување на системите на масовното опслужување, потоа се наведени основните карактеристики на системите на масовно опслужување, како и нивните клучни елементи. Понатаму во ова поглавје детално се објаснети елементите на СМО со дадени формули и теоретски пристап кон истите. Исто така се разгледани и видовите на системи за масовно опслужување кои можат да бидат едноканални и повеќеканални. Истите се дадени со нивните главни карактеристики кои се детерминирани и поткрепени со формули.

Четвртото поглавје ја објаснува целта на истражувањето во магистерскиот труд која се состои во градење на релативно едноставни модели кои обезбедуваат доволно блиска апроксимација на сложената реалност со што се добиени корисни претстави за проблемите. Потенциран е и предметот на истражување во трудот, проучување на методи за конструкција на едноставни математички модели лесни за толкување, но не и премногу поедноставени за да ги игнорираат важните надворешни влијанија.

Во петтото поглавје е дадена хипотетичката рамка според која е засновено нашето истражување. Поаѓајќи од целите на истражувањето ***генералната*** или ***главната хипотеза*** на нашето истражување се темели на сознанието дека во денешни услови доносителите на одлуки се соочуваат со голем број на проблем каде што при изнаоѓањето на алтернативните решенија и донесувањето на одлуки тие не користат (многу малку) квантитативни модели. Како резултат на тоа се наметнува потребата од примена на квантитативните методи во деловното одлучување кои ќе им овозможат на доносителите на одлуки да ги идентификуваат позитивните решенија кои ќе овозможат максимални резултати.

Шестото поглавје ги опфаќа методите на истражувачката работа меѓу кои се аналитичкиот метод, симулации, дескриптивната анализа, квалитативната анализа, квантитативната анализа како и компаративната анализа.Употребата на методите на квантитативната анализа е еден од начините да ја намалиме комплексноста на проблемската ситуација која е предмет на наше разгледување. Таа ни помогна да ја составиме листата на мерливи позитивни и негативни влијанија, како и да го формираме правецот на избор и делување, за да се надминат негативните тенденции во конкретната ситуација.

Во седмото поглавје е даден најважниот дел од магистерскиот труд, а тоа се резултатите добиени од теренското истражување на објект (супермаркет) со помош на креираните математички модели. Најнапред се прикажани резултатите добиени од креирањето на моделите на залихисо примена на табеларен и графички приказ во Excel 2007. Табеларно се прикажани 20 производи кои беа земени во истражувањето заедно со нивните карактеристики. Со конструкцијата на првиот модел на залиха со можно ограничување беа утврдени оптималните количества на нарачани производи во согласност со ограничениот магацински простор на супермаркетот во кој беше направено истражувањето. Одовде беа одредени и вкупните трошоци според Lagrange-овата функција. Резултатите од овој модел беа графички прикажани според добиените резултати од обработените податоци кои ни беа на располагање. Понатаму во овој дел се прикажани резултатите од конструкција на моделот со рамномерна дополна на залихи. Според овој модел целокупниот циклус на набавката се одвива во два временски интервали. Во првиот временски интервал супермаркетот прави набавка во насока на зголемување на општото ниво на залихи, а додека во вториот временски интервал постои само трошењето на залихите сѐ до нивно смалување на нула кога повторно започнува новиот циклус на набавка.

Креиран е и втор модел (рамномерна дополна на залихи) врз основа на реални податоци за 20 производи за кои се прави набавка во текот на 1 месец. Пресметката на оптималните големини за моделот на рамномерна дополна на залихи беше направена во Excel 2007. Резултатите кои се добиени прикажани се графички и толкувани. Во трудот е направена и дискусија за двата типа на модели на залихи како и согледување за тоа која е најдобрата стратегија која треба да ја применува супермаркетот кога е во прашање проблемот со залихите.

Во следниот дел од ова поглавје дадени се резултатите добиени од анализата на системите на масовно опслужување со изградба на квантитативни модели. Анализата беше направена за постоење на различни претпоставки кај едноканални и повеќеканални СМО. Дадената анализа за редовите на чекање беше неделна и истата се базираше на пресметки со формули, табеларни пресметки, како и графички приказ на истите. Сите резултати се поодделно дискутирани иизвршена е компаративна анализа. Податоците од последниот модел на повеќеканални СМО обработени се во софтверската апликација WinQSB и на крај беше дадена интерпретација на резултатите со потенцирање на наши предлози и сугестии кои доносителите на одлуки можат да ги искористат во иднина во нивното деловно работење.

2. ПРЕГЛЕД НА ЛИТЕРАТУРАТА

Деловното одлучување е процес во кој се врши избор на најпосакуваната опција од сет на алтернативи врз основа на дадени критериуми или стратегии (Wang, Wang, Patel & Patel, 2004; Wilson & Keil, 2001). Деловното одлучување е еден од 37-те фундаментални когнитивни процеси (Wang et al., 2004;Wang, 2007b). Студијата за донесување на одлуки е заинтересирана за повеќе дисциплини како што се информатика, компјутерска информатика, психологија, науката на деловно одлучување, економијата, социологијата, политичките науки, и статистика (Berger, 1990; Edwards& Fasolo, 2001; Hastie, 2001; Matlin,1998;Payne & Wenger, 1998; Pinel, 1997; Wald,1950; Wang et al., 2004; Wilson et al., 2001). Секоја од овие научни дисциплини ги нагласува посебните аспекти на донесување на одлуки.

Според Zachary, Wherry, Glenn, and Hopson (1982) постојат три основни елементи во деловното одлучување: проблемска ситуација, доносител на одлука и процес на донесување на одлука (Wang, 2003a; Wang & Gafurov, 2003; Wang & Wang, 2004; Wang et al., 2004).

Okubo (1980) смета дека во процесот на деловното одлучување е неопходна примената на математички третман, односно примената на математички модели со цел доносителите на одлуки да ја анализираат иквантитативно да ја предвидат динамиката на деловното однесување.

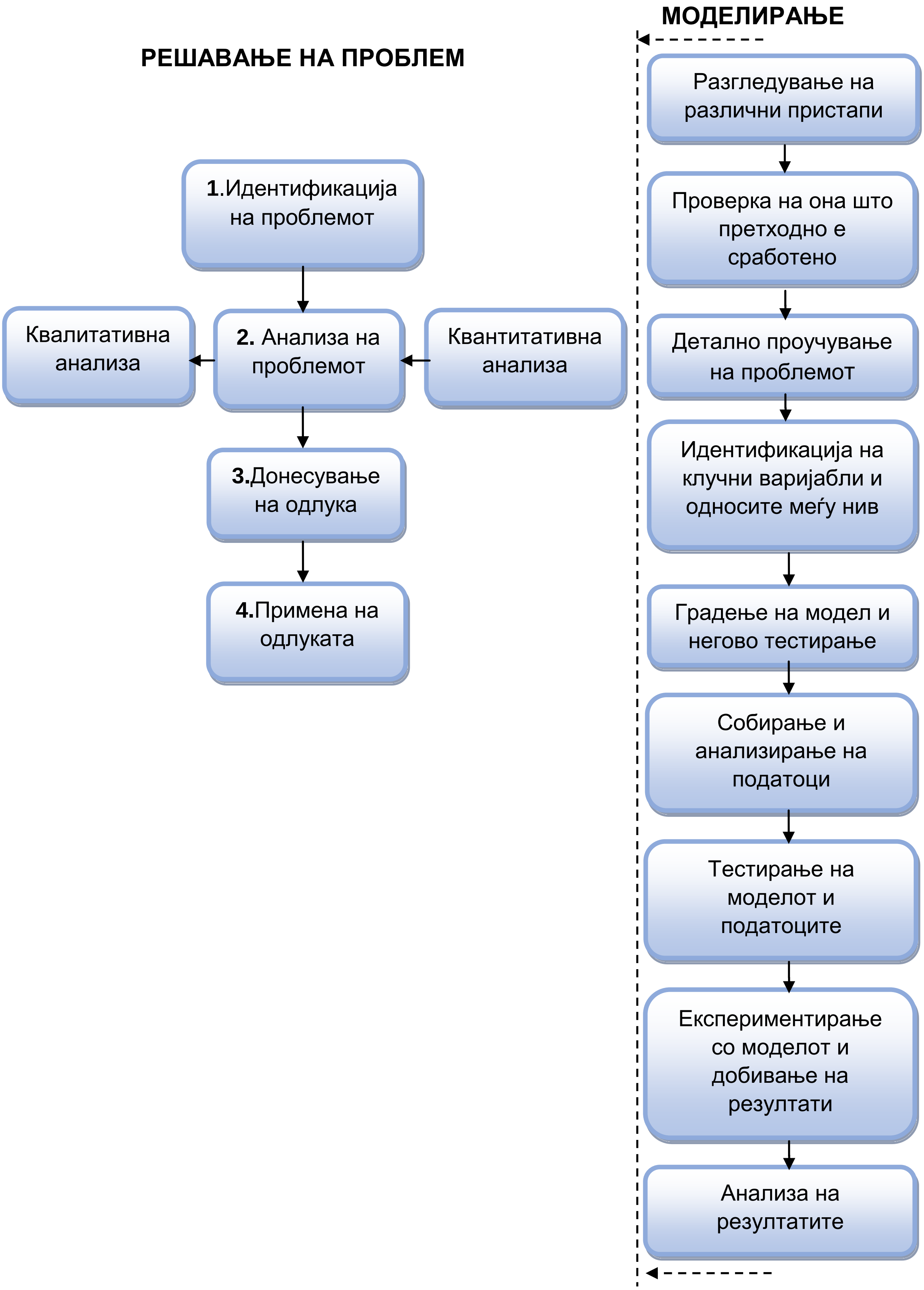
Eppen (1998) дава дефиниција според која ***моделот претставува симплифицирана слика на оригиналот која овозможува проучување на набљудуваниот систем, а постапката за конструкција на моделот се нарекува моделирање.*** *Во основните особини на моделот спаѓаат и: соодветната коресподенција со системот што се моделира, способност да го заменува реалниот систем во одредени односи, можноста на моделот во тек на испитувањето да даде некоја дозволена експериментална проверка во алтернативни менаџмент ситуации, односно информации и доволно јасни правила за премин од информации на моделот кон информации за реалниот систем.*

Различни автори користат различни термини за фазите на процесот на деловното одлучување и примената на квантитативните методи во него. Finlay и King (1986) даваат опис на концептуализација, вербализација, симболизација, манипулација и застапеност. Waters (1998) опишува набљудување, моделирање, експериментирање и имплементација. Ackoff (1962) опишува шест фази на дефинирање на проблемот, изградба на модел, тестирање на моделот, добивање на решение за проблемот, имплементација на решението и контрола на решението. Според претходните автори на Слика 1 даден е детален преглед на фазите на деловното одлучување, при што се дадени и етапите на градење на математички модели кои се основа на математичкото моделирање во деловните процеси.

Dossey, McCrone, Giordano и Weir (2002) моделирањето го дефинираат како процес преку кој реалните ситуации се претставени преку употребата на математиката. Во текот на овој процес се учат значајни математички поими преку кои реалноста може да се разбере, да се предвиди и да се контролира.

Во математичкото моделирање математиката се применува во реални и отворени проблеми со цел да се креираат моќни математички модели кои потоа можат да бидат елаборирани, прилагодени и искористени во други контексти во генерализирана форма (Lesh & Doerr 2003; Maass & Gurlitt 2009).

Niss, Blum и Galbraith (2007) сметаат дека математичкото моделирање е важен начин за да се разберат проблемските ситуации во реалниот свет. За време на процесот на моделирање доносителите на одлуки ја изучуваат математиката, што е доста значајно и притоа нивната способност да ги применуваат математичките знаења е подобрена.



Слика 1. Улогата на процесот на моделирање во решавањето на проблеми
Figure 1. The role of modeling in solving problems

3. ТЕОРЕТСКИ ПРЕГЛЕД НА МОДЕЛИТЕ НА УПРАВУВАЊЕ СО ЗАЛИХИ КАКО ДЕТЕРМИНИСТИЧКИ МОДЕЛИ

3.1 Улога на залихите во деловното управување

Главната улога на деловното управување во однос на залихите се состои во тоа во репродукциониот процес да се реализираат производство и клиентка кои се временски, квантитативно и квалитативно, соодветни на стопанските и пошироко на општествените потреби. Многу претпријатија се соочуваат со проблеми во деловното управување кои го попречуваат пронаоѓањето на оптимална политика на управување со залихите: непредвидливоста на побарувачката, долго време на испорака, несигурност во процесот на испорака, голем број на артикли (производи), за кратко време побарувачка за одредени производи. Оптималното управување со процесите во претпријатието бара усогласување на сите производни, набавни и други активности поврзани со дистрибуцијата, кои спаѓаат во рамките на синџирот на логистика. *Залихите претставуваат акумулирање на стока за да се надмине расчекорот во движењата на набавките, производството и клиентката, со цел да се обезбеди континуирано и нормално одвивање на процесите на репродукција.*[1]

Проблемот на управување со залихите често претставува комплексен проблем и притоа математичките модели можат да опфатат дел од комплексноста на дадениот проблем. Примената на математичките модели како и останатите квантитативни методи овозможуваат да се обезбедат научни методи и техники со кои полесно ќе се надминат проблемите со кои се соочуваат доносителите на одлуки во врска со управувањето на залихите.

Денес со развојот на информатичката технологија е овозможен развој, решенија и имплементација на многу модели кои сè повеќе се дел од секојдневното деловно работење.

[1] Тодосисоска, Б. (2001). Наука за менаџмент. Универзитет „Св. Кирил и Методиј" – Скопје, 161-163.

Со оглед на претходното, дека проблемот со залихите во денешно време е сѐ повеќе актуелен и зема широк замав во процесот на деловното одлучување и работењето на претпријатијата, овој труд има за цел да ги опфати моделите на залиха, нивното разгледување, одредувањето на техниките за менаџирање со залихите, притоа одржувајќи ги истите на оптимално ниво каде соодветните трошоци ќе бидат минимални.Овие модели се од доста големо значење за доносителите на одлуки, бидејќи сѐ повеќе се воведуваат во практика и притоа со нивно познавање и примена се овозможува постигнување на поголема продуктивност и добивка во работата.

3.2 Предности и недостатоци кои произлегуваат од чување на залихи

Во деловното планирање и управување секоја рационална политика води сметка за потребите од формирање на залихи врз основа на стохастичкиот карактер на побарувачката, со цел претпријатието да не дојде до губиток на одредени количества за продажба како потенцијална добивка, вклучувајќи ја репутацијата, а за стопанството во целина да се оневозможат последиците од незадоволената побарувачка.Мошне е важно да не дојде до прекумерни залихи кои имобилизираат средства неопходни за задоволување на други потреби, како и до дефицит, особено на оние залихи чиј недостиг може да го попречи нормалното функционирање на стопанските капацитети, што ги имобилизира средствата за производство.

Целта на системот за управување со залихи е тие да се одржуваат на оптимално ниво.Оптимално ниво на залихи е таа количина на залихи која ќе ја имаме и која ќе биде најекономична (со најмалку трошоци), а од друга страна ќе обезбеди непречено функционирање на работата на бизнисот.Пристапот за согледување на предностите ќе го претставиме преку недостатоци на преголемите и премалите залихи, за да можеме на крајот да ги согледаме предностите на оптималното ниво на залихите.[2]

---

[2] Pupavac, D. (2011). Modern approaches to inventory management. 14-th Scientific Conference Business Logistics in Modern Management, Osijek, Croatia, Proceedings, 47-58.

- **Недостатоци на чување на залихи**

Преголеми залихи значат:

- **Непотребно блокирање на капитал –** произлегува од прекумерните количини на набавени производи.
- **Потреба од поголем складишен простор –** преголемото ниво на залихи бара и поголем магацин за чување на производите.
- **Повеќе трошоци за осигурување** – поголемиот обем на производи бара повеќе средства наменети за нивно осигурување.
- **Застарување на нарачаните производи кои се чуваат на залиха** – кај трговските претпријатија на пр. може да дојде до расипливост на производите или до истек на нивните рокови на употреба.
- **Поголеми административни, фиксни и др. трошоци на чување на залихи** итн.

Премалку залихи значат:

- **Премногу нарачки**. На ваков начин претпријатието ќе мора да има повеќе нарачки во кратки временски интервали. Ова значи зголемени трошоци за комуникација со добавувачите.
- **Губење на клиенти –** доколку не се достапни производите во моментот на барање од страна на клиентите.
- **Губење на количински попусти –** кога се достапни помали количини потрошувачот губи можност за добивање попуст за поголеми количини.
- **Поголеми трошоци за транспорт** – помалите количини на производи детерминираат поголеми транспортни трошоци.

- **Предности на оптимални залихи**

Оптималните залихи ги имаат следниве предности:

- Помалку врзани пари во данок;
- Помали трошоци за магацински простор;
- Помали трошоци за осигурување, фиксни и административни трошоци;

- Помала веројатност за застарување на производите што претпријатието ги има на залиха;
- Оптимално ниво на нарачки и постојано подобрување на времетраењето на нарачките;
- Се овозможува да се задоволи побаувачката од страна на клиентите кога таа е поголема од очекуваното ниво;
- Можат да се искористат предностите кои произлегуваат од одобрени попусти на големи количества на нарачки;
- Намалени транспортни трошоци итн.

Разгледувањето на проблемот со управување со залихите опфаќа испитување на повеќе карактеристични модели. Истите модели на залихи ќе бидат разработени подетално во следниот дел од трудот.[3]

3.3 Моделски пристап на залихите во деловното управување

3.3.1 Модели на залиха со детерминирана (позната) побарувачка

Детерминистичките модели на залихи не се засновани врз претходно искуство и спаѓаат во редот на математички односно строго дефинирани априорни модели[4] кои апсолутно детерминистички го опишуваат системот,со можна апроксимација,но без случајни променливи[5].

Општите карактеристики на моделите залихи од овој вид се состојат во тоа што побарувачката е позната и константна за одреден период кој може да се подели на еднакви временски интервали и за секој од нив се порачува дел од

[3]Stojanovic, D. (1968). Matematicke metode u ekonomiji preduzeca. Beograd, Rad.

[4]*Под строго дефинирани се подразбираат математички модели кои со своите односи и соодветните функции апсолутно детерминистички ги опишуваат врските меѓу променливите големини на системот. Математичкото моделирање во деловното одлучување се сведува на строго дефинирани модели, кои можат да содржат апроксимација, но без случајни променливи.*

[5] Mortom, T. (1999). Production and Operations Management. Cincinnati, Ohio, 15-16.

побарувачката. Критериум за оптималност е минимизирањето на вкупните трошоци на системот залихи кој се моделира.

Трошоците за подготовка на една циклус (нарачка) се фиксни во однос на нејзината големина, што значи дека по единица залихи се обратно пропорционални со големината на циклусот (нарачката). Во овие трошоци спаѓаат оперативни подготовки во врска со планирањето, како и други трошоци во кои се содржани трошоците на интерниот транспорт во колку се константни по циклус или нарачка, трошоци за уходување на производството, трошоци за евидентирање и документација.

Трошоците за складирање се пропорционални со складираното количество и затоа се пресметуваат по единица залихи во единица време. Во нив спаѓаат: трошоци кои се директно врзани за залихите – за нивно одржување, камати на обртни средства, осигурување, трошоци врзани за просториите на складирање – кирија, закупнина, амортизација и осигурување на складишните простори, како и амортизацијата на средствата за работа.

Како најпознати видови модели на залиха кои спаѓаат во групата на *модели на залихи со детерминирана побарувачка* се:

- ***I. Модел без дефицит и сигнално ниво на залихи***
- ***II. Модел со дефицит на залихи***
- ***III. Модел со рамномерна дополна на залихи***
- ***IV. Модел на залихи со количински попуст***
- ***V. Модел на залихи за различни производи со можно ограничување***

I. Модел без дефицит и сигнално ниво на залихи

Ќе обработиме модел без дефицит и сигнално ниво на залихи одреден со следните ***претпоставки:***

- побарувачката Q е константна и позната за даден временски период $[0, T]$, која е расподелена на n еднакви делови q, односно $Q = nq$;

- дополната на залихите се врши на почетокот од временскиот интервал со должина $t = \frac{T}{n}$ кога нивото на залихите е нула, каде излезниот тек има форма на континуирано и рамномерно смалување на залихите;
- не е дозволен недостиг на залихи во даден временски период и во неговите интервали;
- фиксните трошоци за подготовка на една циклус изнесуваат c парични единици;
- трошоците за складирање не единица производ во единица време изнесуваат c_1 парични единици.

Со оглед што временскиот интервал со должина t почнува кога нивото на залихи е q, а завршува за $q = 0$ просечното ниво залихи во тој интервал изнесува $\frac{q}{2}$.

Вкупните трошоци f на еден циклус, за даден временски интервал t изнесуваат:

$$f = c + \frac{c_1 qt}{2} \tag{1}$$

Функцијата на вкупните трошоци $F(q)$ за број на n циклуси изнесува:

$$F(q) = \frac{cQ}{q} + \frac{c_1 Tq}{2} \tag{2}$$

Функцијата $F(q)$ опаѓа за вредности $q < q_0$, т.е достигнува минимум во точката q_0 каде $F_1(q_0) = F_2(q_0)$, а монотоно расте за $q > q_0$.

Трошоците се изразени со релацијата (2) на непрекината функција од непрекината променлива $q \neq 0$ оптималната големина на циклусот q_0 се добива од потребниот и доволен услов за минимум на функцијата (2):

$$F'(q) = \frac{cQ}{q^2} + \frac{c_1 T}{2}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cQ}{c_1 T}} \tag{3}$$

$$F''(q_0) = \frac{2cQ}{{q_0}^3} = c_1 T \sqrt{\frac{c_1 T}{2cQ}} > 0$$

затоа што се сите големини позитивни; следува дека функцијата (2) има минимум за $q = q_0$.

Економската интерпретација на релацијата (3) е следната: производствениот циклус е во толку поголем во колку се поголеми трошоците за складирање на единица производ во единица време. Тоа значи дека е во интерес на економската рентабилност, ефикасност и просперитетот на претпријатието, врз основа на истражување на пазарот и правилно водена политика да осигури што поголема и побрза испорака на артиклите.

Оптималниот број на циклусите изнесува:

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 QT}{2c}} \tag{4}$$

Оптималното времетраење на еден циклус изнесува:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2cT}{c_1\, Q}} \tag{5}$$

Минималните вкупни трошоци за овој моделот, врз основа на релацијата (2), а земајќи ја предвид и релацијата (3), изнесуваат:

$$F(q_0) = \sqrt{2cc_1QT} \tag{6}$$

Ќе прикажеме случај кога порачките не пристигнуваат во моментот кога ќе се потроши залихата $(q = 0)$, туку за пристигнување е потребен одреден временски интервал t^*. Тогаш се јавува и ***сигналното ниво на залихи*** q^*, *а трошоците за чување единица количество залихи во единица време ги инкорпорираат и трошоците за врзување парични средства во залихи изразени како процент од набавната цена за единица количество залихи во единица време.*

II. Модел со дефицит на залихи

За овој модел од интерес е да се анализира случај кога во дел од интервал на одреден временски период нивото на залихите ќе биде еднакво на нула, а со оглед на тоа што побарувачката има карактер на тек кој е непрекинат и рамномерен системот неможе да задоволи дел од побарувачката. Тоа значи дека ќе се јави дефицит на залихи и неможност да се задоволи вкупната побарувачка.

Моделот со дефицит на залихи ги задоволува следните ***претпоставки***:

- побарувачката Q е позната во даден временски период $[0,T]$ и константна, која може да се расподели на n еднакви делови $Q = nq$ и $T = nt$;
- пополнувањето на залихите е на почетокот од временски интервал со должина t, а излезниот тек кој не може во потполност да ја задоволи побарувачката во интервал со должина t има форма на континуирано и рамномерно смалување на залихите до нула по што внатре во интервалот се јавува недостиг на залихи;
- фиксните трошоци за подготовка на секој циклус изнесуваат c парични единици;
- трошоците за складирање на единица залихи во единица време изнесуваат c_1 парични единици;
- трошоците за недостиг на единица залихи во единица време изнесуваат c_2 парични единици.

Во временскиот подинтервал со должина t_1 просечните залихи се $\frac{z}{2}$, а трошоците за складирање на тие залихи изнесуваат $c_1\frac{z}{2}t_1$.

Во временскиот подинтервал со должина t_2 просечниот недостиг на залихи е $\frac{q-z}{2}$, а трошоците поради дефицит на залихите изнесуваат $c_2\frac{q-z}{2}t_2$.

Вкупните трошоци за еден циклус, во временски интервал со должина t, изнесуваат:

$$f = c + \frac{c_1 z t_1}{2} + \frac{c_2(q-z)t_2}{2} \tag{1}$$

Временските подинтервали t_1 и t_2 зависат од нивото на залихите: за повисоко ниво залихи подинтервалот на задоволување на побарувачката t_1 е подолг, а подинтервалот на недостиг на залихи t_2 е покус и обратно.

Побарувачката во единица време е $\frac{q}{t}$, залихите кои ја задоволуваат побарувачката во временскиот подинтервал t_1 изнесуваат $z = \frac{q}{t}t_1$ од каде $t_1 = \frac{z}{q}\, t$.

Временскиот подинтервал за недостиг на залихи $t_2 = t - t_1$ може да се изрази со релацијата $t_2 = \frac{q-z}{q}\, t$.

Вкупните трошоци за еден циклус, во временски интервал со должина t се добиваат со замена на претходните вредности за t_1 и t_2 во функцијата (1) и можат да се изразат:

$$f = c + \frac{c_1 z^2 t}{2q} + \frac{c_2 (q-z)^2 t}{2q} \tag{2}$$

Функцијата на вкупните трошоци за моделот на системот залихи, во временскиот период $[0, T]$, односно за n циклуси, е

$$F(z, q) = \frac{cQ}{q} + \frac{c_1 T z^2}{2q} + \frac{c_2 T (q-z)^2}{2q} \tag{3}$$

Оптималните големини на циклусот q_0 и нивото залихи z_0 се добиваат од потребниот и доволниот услов за минимум на функцијата, т.е со првите парцијални изводи на функцијата (3). Се добива:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cQ}{c_1 T} \frac{c_1 + c_2}{c_2}} \tag{4}$$

$$\frac{z_0}{q_0} = \frac{c_1 + c_2}{c_2}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cQ}{c_1 T} \frac{c_2}{c_1 + c_2}} \tag{5}$$

Оптималниот број циклуси е $n_0 = \frac{Q}{q_0}$, а со замена за q_0 се добива:

$$q_0 = \sqrt{\frac{c_1 Q T}{2c} \frac{c_2}{c_1 + c_2}} \tag{6}$$

Оптималната должина на временскиот подинтервал е:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2cT}{c_1 Q} \frac{c_1 + c_2}{c_2}} \tag{7}$$

Оптималната должина на временскиот подинтервал за исполнување на побарувачката е:

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cT}{c_1 Q} \frac{c_2}{c_1 + c_2}} \tag{8}$$

Оптималната должина на временскиот подинтервал за недостиг на залихи е:

(9) $$t_{20} = \sqrt{\frac{2cT}{c_2 Q}\frac{c_1}{c_1+c_2}}$$

Врз основа на релациите (8) и (9) се добива следниот однос:

$$\frac{t_{10}}{t_{20}} = \frac{c_2}{c_1}$$

Минималните вкупни трошоци за моделот на системот залихи во временскиот период $[0, T]$, врз основа на функцијата (3) изнесуваат:

(10) $$F(z_0, q_0) = \sqrt{2cc_1 QT \frac{c_2}{c_1+c_2}}$$

III. Модел со рамномерна дополна на залихи

Моделите што ги опишавме, во основа, се однесуваат на случаи во кои елементите на залихи се купуваат, односно во кои целата порачка пристигнува во еден временски момент, со тоа што соодветниот излезен тек има форма на континуирано и рамномерно смалување на залихите. Такви модели можат адекватно да се опишат стопански процеси со залихи на суровини и материјали, каде набавките имаат дисконтинуиран карактер, додека производствената клиентка која во овој случај има улога на излезен тек, се одвива рамномерно и континуирано, како и во трговските претпријатија кои набавуваат стока во одредени моменти и во поголеми количества, а ја продаваат континуирано и со воедначено темпо. Во деловното работење мошне се чести ситуации во кои процесот за пополнување со залихи нема така строго дискретен карактер, а пристигнувањето на стоката се одвива во извесен период на време. За разлика од веќе опишаните модели, кои претпоставуваат повремено и моментално зголемување на залихите, *во моделите со рамномерна дополна на залихите доаѓа до повремено активирање на влезните текови*, така што функционираат само во одредено временски интервали. *Целиот циклус на системот залихи се состои од два дела. Во првиот дел функционираат и влезен и излезен тек, така што интензитетот на влезниот тек е поголем, што го зголемува општото* *ниво на залихите.* Тоа е случај кога залихите се формираат со производство, кое трае до некое ниво на залихи (најчесто готови производи), потоа производството престанува за да продолжи по истрошувањето нас залихите. *Во вториот дел од циклусот функционира само излезниот тек, така што нивото на залихи се смалува.* При тоа постои можност познатата побарувачка да се задоволи или да се јави дефицит на залихи[6].

Ќе го обработиме ***моделот со рамномерна дополна на залихи*** до одредено ниво, ***без дефицит***, кој се карактеризира со следните ***претпоставки***:

- стопанската активност се одвива во временски период $[0, T]$ со n еднакви циклуси, така што времетраењето на еден циклус изнесува $t = \frac{T}{n}$ временски единици;
- производството и побарувачката во единица време изнесуваат q_v и q_i единици стока, респективно;
- во првиот дел на циклусот со траење t_1 временски единици континуирано функционираат влезен и излезен тек, така што интензитетот на влезниот тек е поголем од излезниот односно $q_v > q_i$, што го зголемува општото ниво на залихи;
- во вториот дел од циклусот со траење t_2 временски единици континуирано функционира само излезниот тек, поради што нивото на залихи се смалува до нула кога повторно почнува производството;
- не е дозволен недостиг на залихи;
- фиксните трошоци за подготовка и организација на секој циклус изнесуваат c парични единици;
- трошоците за складирање на единица количество залихи во единица време изнесуваат c_1 парични единици ;
- трошоците за производство по единица производ изнесуваат c_3 парични единици.

Залихите се формираат во временскиот подинтервал со должина t_1 со влезниот тек на производство q_v и излезниот тек на побарувачка q_i така што

[6] Moore, J., & Weatherford, L. (1998). Management Science, Prentice Hall Intern, USA, p.375.

достигнуваат ниво $z = q_v - q_i$ кое се истрошува во временскиот подинтервал t_2, односно $z = q_i t_2$ следува:

(1) $$t_1 = \frac{z}{q_v - q_i}$$

(2) $$t_2 = \frac{z}{q_i}$$

(3) $$t = \frac{q_v z}{q_v - q_i}$$

Производството q во еден циклус може да се изрази со релацијата:

(4) $$q = q_v t_1 = z + q_i t_1 = q_i t = \frac{q_v z}{q_v - q_i}$$

Вкупните трошоци за еден циклус во временски интервал со должина $[0, T]$ можат да се изразат како збир на: фиксни трошоци за подготовка и организација, трошоци за складирање на залихите и трошоци за производство.

(5) $$f = c + c_1 \frac{z}{2} t + c_3 q$$

Врз основа на релациите (3) и (4) се добива дека:

- трошоците за складирање изнесуваат $c_1 \frac{z}{2} t = \frac{c_1 q_v z^2}{2\, q_i (q_v - q_i)}$, а
- трошоците за производство изнесуваат $c_3 q = \frac{c_3 q_v z}{q_v - q_i}$

Со замена на добиените изрази во релацијата (5), вкупните трошоци за еден циклус во временски интервал со должина t можат да се изразат:

(6) $$f = c + \frac{q_v}{q_v - q_i} \left(\frac{c_1 z^2}{2 q_i} + c_3 z \right)$$

Бројот на циклусите во периодот $[0, T]$ може да се изрази со следната релација:

(7) $$n = \frac{T\, q_i}{q} = \frac{T\, q_i\, (q_v - q_i)}{q_v\, z}$$

Функцијата на вкупните трошоци за моделот на системот залихи за n циклуси, во временски период $[0, T]$, е:

(8) $$F(z) = nf = \frac{cT\, q_i\, (q_v - q_i)}{q_v z} + \frac{c_1 T}{2} + c_3\, T\, q_i$$

Оптималното ниво залихи z_0 се одредува со анулирање на првиот извод од функцијата (8):

$$F'(z) = nf = \frac{cT\, q_i\, (q_v - q_i)}{q_v z} + \frac{c_1 T}{2} = 0 / \frac{1}{T}$$

(9) $$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}}$$

За вака одредена вредност z_0 – вкупните трошоци за моделот на системот залихи, за n циклуси, за да бидат минимални потребно е да биде задоволен и условот: $F''(z) = \frac{2c\, q_i\, T(q_v - q_i)}{q_v\, z^3} > 0$, а тоа е можно за $q_v > q_i$;

Оптималниот обем на производство во еден циклус, врз основа на релацијата (4) е:

(10) $$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1(q_v - q_i)}}$$

Оптималниот број циклуси, врз основа на релацијата (7) е:

(11) $$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i(q_v - q_i)}{2cq_v}}$$

Оптималното времетраење на производството во еден циклус, врз основа на (1), е:

(12) $$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}}$$

Оптималното време на трошење на залихите во еден циклус без нивна дополна поради престанок на производството, врз основа на (2), е:

(13) $$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}}$$

Оптималното времетраење на еден циклус, врз основа на (3), е:

(14) $$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}}$$

Минималните вкупни трошоци за моделот на системот залихи во временски период $[0, T]$, се добиваат со замена на релацијата (9) во функцијата (8):

(15) $$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i$$

IV. Модел на залихи со количински попуст

Моделот се карактеризира со следните претпоставки[7]:

- побарувачката Q е позната за даден временски период $[0, T]$ и константна, а може да се расподели на n еднакви делови $q = \frac{Q}{n}$;
- пополнувањето на залихите е на почетокот од временскиот интервал со должина $t = \frac{T}{n}$ кога нивото на залихи е нула, а излезниот тек има форма на континуирано и рамномерно смалување на залихите;
- не е дозволен недостиг на залихи во дадениот временски период и неговите интервали;
- фиксните трошоци за една порачка изнесуваат c парични единици;
- трошоците за складирање во единица време изнесуваат r проценти од вредноста на просечниот обем залихи;
- цената по единица производ изнесува p парични единици.

Со помош на функцијата на вкупните трошоци се одредува оптималната големина на секоја порачка со минимизирање на тие трошоци како критериум. Соодветните изрази за формирање на наведената функција се:

Вкупните трошоци за една порачка во временски интервал t се:

$$f = pq + c + \left(\frac{pTq^2}{2Q} + \frac{cTq}{2Q}\right) r \tag{1}$$

Функцијата на вкупните трошоци за моделот на системот залихи за n порачки, е:

$$F(q) = pQ + \frac{cQ}{q} + \frac{pTq}{2} r + \frac{cT}{2} r \tag{2}$$

Оптималната големина на порачката q_0 се добива со анулирање на првиот извод на функцијата (2), при $F''(q) > 0$:

$$F'(q) = -\frac{cQ}{q^2} + \frac{pT}{2} r = 0$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2}{r} \frac{c}{p} \frac{Q}{T}} \tag{3}$$

[7] William, S. (1996). Production/Operations Management, IRWING, Chicago, p.545.

Оптималниот број порачки изнесува:

$$n_0 = \sqrt{\frac{r}{2}\frac{p}{c}QT} \tag{4}$$

Оптималната должина на временскиот интервал помеѓу порачките изнесува:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2}{r}\frac{c}{p}\frac{T}{Q}} \tag{5}$$

Со замена на релацијата (3) во (2) се добиваат минималните вкупни трошоци за моделот на системот залихи :

$$F(q_0) = pQ + \frac{rcT}{2} + \sqrt{2rpcQT} \tag{6}$$

Од релацијата (3) заклучуваме дека оптималната големина на порачката е обратно пропорционална со цената, додека врз основа на релацијата (4) бројот на порачките е пропорционален со цената на производите, ако останатите големини се константни. Во деловната практика се јавува можност за одредување попуст во цената за поголем обем на порачка, што упатува на соодветна сензитивна анализа за варирањето на цената во зависност од големината на порачката.

Означуваме со:

- p_1 цена на единица производ за порачка која е по обем помала од k единици;
- p_2 снижена цена на единица производ за порачки кои се еднакви или поголеми од k единици, ($p_2 < p_1$)

Со оглед на тоа што $p_2 < p_1$, од релацијата (3) следува дека $q_{0(p_2)} > q_{0(p_1)}$

За да бидат најмали вкупните трошоци за моделот на системот залихи во временскиот период , се врши следната анализа.

За цената p_2, од релацијата (3), оптималната големина на порачката изнесува $q_{0(p_2)} = \sqrt{\frac{2}{r}\frac{c}{p_2}\frac{Q}{T}}$. Ако се добие:

1. $q_{0(p_2)\geq k}$, треба да се порачаат $q_{0(p_2)}$ единици по снижена цена p_2, затоа што е врз основа на релацијата (6) $F\left[q_{0(p_2)}\right] < F\left[q_{0(p_1)}\right]$;

2. $q_{0(p_2)<k}$ тогаш $q_{0(p_2)}$ претставува фиктивно количество затоа што е попустот условен за порачка еднаква или поголема од количество k единици. Во тој случај врз основа на релацијата (3) се одредува $q_0(p_2) = \sqrt{\frac{2}{r}\frac{c}{p_1}\frac{Q}{T}}$; а потоа се споредаат вкупните трошоци за моделот на системот залихи $F\left[q_{0(p_1)}\right]$ добиени врз основа на релациите (6) или (2) добиени врз основа на релацијата (2) во која големината q се заменува со големината k, при што :

-ако е $F\left[q_{0(p_1)}\right] < F\left[k_{(p_2)}\right]$ треба да се порача $q_{0(p_1)}$ единици по цена p_1, а

- ако е $F\left[k_{(p_2)}\right] < F\left[q_{0(p_1)}\right]$ треба да се порача k единици по снижена цена.

V. Модел на залихи за различни производи со можно ограничување

Досега утврдивме дека количеството на залихи е независно за секој производ поединечно во рамките на компаниите, па според тоа може да се пресмета оптималната политика на набавка за секој производ. Побарувачката за секој производ поединечно обично е независна една од друга, меѓутоа компаниите на залихи држат најчесто повеќе различни производи кои меѓусебно се разликуваат по своите физички својства, функцијата или намената која ја имаат во активностите на компанијата итн. Затоа се јавува проблем на интеракција, во различна форма, помеѓу различните категории производи кои се држат на залихи. До ефекти на интеракција доаѓа и затоа што различни видови стока на залихи ангажираат одреден складишен простор или финансиски средства, а тоа се по правило лимитирачки фактори. Кај системи залихи во сферата на трговијата различни производи заземаат различен складишен простор и предизвикуваат различни нивоа на трошоци кои бараат определен обем на инвестирање на финансиски средства. Сето тоа го поставува проблемот за изнаоѓање на оптималната големина на набавка за секој производ, без нарушување на постојните ограничувања. Решавањето на наведените проблеми ќе го илустрираме на соодветен модел.

Проблемот на залихи нека е одреден со следните ***претпоставки:***

- системот на снабдување има n различни производи, со позната константна побарувачка која во даден временски период $[0, T]$ со единица должина изнесува $k_1, k_2, ..., k_j, ..., k_n$ единици производ;
- не е дозволен недостиг на залихи во даден временски период;
- фиксните трошоци за подготовка и организација на секој циклус за j-тиот производ изнесуваат c_1 парични единици;
- трошоците за складирање на j-тиот производ изнесуваат r_j проценти од вредноста на залихите во даден временски период;
- трошоците за производство по единица j-ти производ изнесуваат a_j.

Се одредуваат оптималните големини на производствените циклуси q_j за секој j- ти *(j= 1, 2..,n)* производ под услов вкупните трошоци во системот на снабдување да бидат минимални. Овие трошоци можат да се изразат со збирот на поодделните трошоци на: производството, подготовката, организацијата на производствениот циклус и складирањето.

Трошоците за производство изнесуваат:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, k_j$$

Трошоците за подготовка и организација на производствениот циклус изнесуваат:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{q_j} k_j$$

Трошоците за складирање на производите се одредени со изразот:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \frac{q_j}{2} \left(a_j + \frac{c_j}{q_j} \right)$$

Вкупните трошоци за моделот на системот залихи за сите производи се дефинирани со функцијата:

$$F(q_j) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_j k_j + \frac{c_j}{q_j} k_j + \frac{r_j}{2} (a_j q_j + c_j) \right] \quad (1)$$

Оптималната големина на производствената серја на j –тиот производ q_{j0}, за која се претпоставува дека е непрекината променлива, мора да го задоволува условот:

$\frac{\partial F(q_j)}{\partial q_j} = \frac{1}{2} r_j a_j - \frac{c_j}{{q_j}^2} k_j = 0$,од каде следува:

(2) $$q_{j0} = \sqrt{\frac{2c_j k_j}{r_j a_j}}$$

Минималните вкупни трошоци за моделот на системот залихи, врз основа на (1), се одредени со изразот:

(3) $$F(q_{j0}) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_j k_j + \frac{c_j}{q_{j0}} k_j + \frac{r_j}{2} (a_j q_{j0} + c_j) \right]$$

Процесите кои се дел од деловното работење, по правило, се одвиваат во услови кои се проследени со бројни ограничувања, така што проблемите на оптимизација често се сведуваат на изнаоѓање на некој апсолутен екстрем. Една од основните, а воедно и битна карактеристика е тоа што се настојува врз основа на ретки ограничени ресурси да се постигне максимален ефект во работењето во корист на процесот на деловното одлучување и решавањето на проблемите. Во доменот на залихите најчестите ограничувања се врзани за капацитетот на складишниот простор, за расположливите средства со кои се финансира држењето стока на залихи, за условите на транспорт и сл. Кога на залихи се држат повеќе различни производи, вкупното ниво на залихи може да да биде преголемо во однос на дадено ограничување. Поради тоа треба да се пронајде начин како да се намалат залихите сè додека не бидат во рамките на прифатливите граници. Во овој модел за систем залихи, како пример, *за лимитирачки фактор се зема капацитетот на складиштето.*

Ако единица на *j*-ти производ зазема волумен v_j од расположливиот волумен на складиштето кој изнесува V, тогаш е:

$\frac{q_j}{2} v_j$ – потребен простор за просечен обем на залихи од j-тиот производ; а

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} v_j q_j$$

Дадениот израз претставува вкупно потребен простор за просечен обем на залихи за сите производи.

Лимитирачкиот услов е изразен со релацијата:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j \leq \mathrm{V}; \qquad q_j > 0, \qquad j = 1,2,\dots,\mathrm{n}$$

Поврзувајќи ја функцијата (1) со ограничувањето (4) задачата се сведува на примена на Lagrange-оватафункција:

$$(5) \qquad F(q_j) = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \left[a_j k_j + \frac{c_j}{q_j} k_j + \frac{r_j}{2} (a_j q_j + c_j) \right] + \lambda \left(\mathrm{V} - \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} v_j q_j \right)$$

Оптималната големина на производствениот циклус на *j*-тиот производ се добива со анулирање на парцијалниот извод на функцијата (5) по q_j.

$\frac{\partial F(q_j)}{\partial q_j} = -\frac{c_j k_j}{q_j{}^2} + \frac{r_j}{2} a_j - \frac{\lambda}{2} v_j = 0,$ од каде следува:

$$(6) \qquad q_{j0} = \sqrt{\frac{2 c_j k_j}{r_j a_j - \lambda v_j}}$$

Посебен проблем на релацијата (6) претставува квантификацијата на *Lagrange* – овиот множител λ. Во принцип λ може да се одреди со решавање на систем од $n+1$ равенки: со анулирање на парцијалните изводи на функцијата (5) по q_j и неравенката (4), што е за голем број различни производи пресметковната постапка посложена.

Во практика се применува табеларна метода. Со оглед што секогаш е $q_j > 0$, λ мора да го задоволи условот $r_j a_j - \lambda v_j > 0$, од каде следува дека λ мора да ја задоволи релацијата $\lambda < \frac{r_j a_j}{v_j}$.

Меѓутоа, затоа што по природата на проблемот ограничениот капацитет на складиштето влијае така што обемот на $\lambda \leq 0$, порачката ќе опаѓа, затоа што во спротивно ограничувањето е без влијание на решението на проблемот. Врз основа на релацијата (6), за различни вредности $\lambda \leq 0$, се одредуваат соодветните големини на производствените циклуси q_j, како и вредностите на изразот

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j$$

кои се внесуваат во соодветна табела.

За формирање на наведената табела од кој се изнаоѓа вредноста на множителот λ се дефинираат следните односи:

$\lambda < 0$ за $V - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j = 0;$

$\lambda < 0$ за $V - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j > 0;$

Случајот,

$$V - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j < 0$$

не се зема во предвид затоа што со тоа се пречекоруваат ограничувањата.

Множителот λ одговара на решенијата q_{j0} чиј заеднички волумен е најблиску до ограничувањето (4).

3.3.2 Модели на залихи со стохастичка побарувачка

Покрај претходно разгледаните детерминистички модели на залихи неопходно е да се спомене дека покрај нив остојат и веројатносни модели на залихи. Основна односно главна карактеристика на овој вид на модели е тоа што кај нив побарувачката е случајна, т.е. има стохастички карактер. Стохастичкиот карактер на залихите претпоставува соодветен методолошки пристап кога се во прашање истражувањата во деловното управување и процесот на одлучување и затоа е потребно побарувачката да се вклучи во анализата како алеаторна променлива така што да се оперира и со параметри на законите за веројатност на побарувачката, кои се добиваат со соодветни снимања и следења, респектирајќи ги карактеристиките и својствата на проучуваните појави и процеси. Таков пристап овозможуваат апостериорните модели на системи залихи, засновани врз статичко моделирање на стохастичките појави и процеси, со помош на соодветни закони за веројатност на побарувачката, до кои се доаѓа врз основа на искуство.

Групата *модели на системи залихи со стохастичка побарувачка*, воглавно се детерминирани од следните ***претпоставки:***

- залихите се формираат на почетокот од временскиот период $[0, t]$ со единица должина $(t = 1)$;
- во периодот $[0, t]$ постојат две можности – во секој момент да постојат залихи за случај кога побарувачката е помала од нивото на залихи или да се јави дефицит во случај на поголема побарувачка од нивото на залихите;
- за побарувачка помала од нивото на залихите трошоците за складирање по единица залихи изнесуваат c_1 парични единици;
- за побарувачка поголема од нивото на залихите трошоците за интервентна набавка во текот на временскиот период изнесуваат c_2 парични единици по единица незадоволена побарувачка.

Како основни модели кои спаѓаат во групата на *модели на залихи со стохастичка побарувачка* се:

- ***Модел со дискретна распределба на веројатностите на побарувачката***
- ***Модел со континуирана распределба на веројатностите на побарувачката***
- ***Модели со константен интензитет на клиентка***
- ***Модел со сезонска побарувачка***

4. ТЕОРЕТСКИ ПРЕГЛЕД НА СИСТЕМИТЕ НА МАСОВНО ОПСЛУЖУВАЊЕ КАКО СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ

4.1 Цел, задачи и предмет на проучување на системите за масовно опслужување

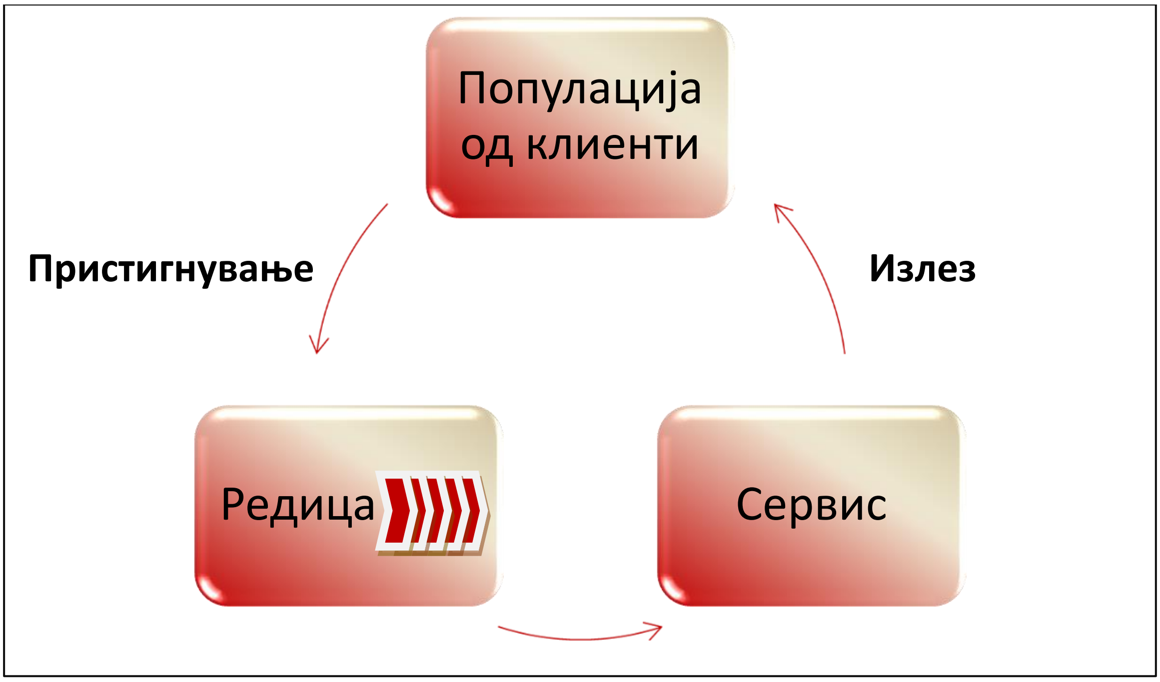
Теоријата за масовно опслужување ги изучува квантитативните својства за организација и менаџмент на масовните појави и процеси, нивната структура и релевантните зависности сѐ со цел за ефикасно и економично функционирање на деловниот систем. Називот системи за масовно опслужување (СМО) се употребува бидејќи ги опфаќа основните својства на појавите и процесите кај системите кои се карактеризираат со масовност и опслужување, при што наведуваме дека во англо-саксонската литература се користи и називот **Теорија на редови** или **феномен на чекање**. Целта на анализата на системите со редови на чекање е да им понуди разумно задоволителна услуга на клиентите што чекаат во редот. Во анализата на СМО често се користат симулациските методи.

Задачите и методите на теоријата на масовно опслужување заземаат значајно место во проучувањето на реалните системи. Тие имаат голема примена во науката и техниката. Теоријата на масовно оспслужување го користи апаратот на теоријата на веројатност и ги проучува веројатносните ситуации поврзани со елементот на случајност во системите за масовно опслужување.

Предмет на проучување на моделите на системите на масовно опслужување е квантифицирањето на феноменот на чекање во ред користејќи репрезентативни показатели на функционирање, како што се искористеноста на серверот, должината на редицата на чекање и задржувањето на клиентите во системот, при што тие го снабдуваат аналитичарот со моќна алатка за дизајнирање и развој на перформансите на системите за масовно опслужување.

Теоријата на масовно опслужување како и анализата со помош на симулации се користат за да ги предвидат мерите (величините) на системските перформанси како функција од влезните параметри. Влезните параметри се: интензитетот на доаѓање на клиенти, интензитетот на опслужување на серверите, бројот на сервер и др.

За релативно едноставните системи, овие мери на перформансите на системот може да бидат пресметани математички, но за поголема сигурност добиените резултати може да се споредат со резултатите добиени со користење на симулации. Обично кај покомлексните системи пресметките во процесот на анализа најчесто се вршат со помош на симулации. Еден систем за масовно опслужување се смета за изучен, ако се определени величините кои го карактеризираат и кои во општ случај се случајни променливи.



Слика 2. Карактеристики на системите на масовно опслужување
Figure 2. Characteristics of the queuing systems

Клучни елементи на системите за масовно опслужување се ***клиентите*** и ***серверите (опслужувачи)***. Поимот *„клиент”* може да се однесува на луѓе, автомобили, машини, пациенти, авиони, односно на сè што побарува опслужување (услуга). Поимот *„сервер”* се однесува на ресурси кои го извршуваат опслужувањето, тоа може да бидат каса, рецепционер, механичар, мајстор, медицински персонал, процесор на компјутер итн. Влез (input) на СМО претставуваат клиентите на кои им е потребна некоја услуга, а излез (output) - направените услуги. Состојбата на системот е одредена со бројот на клиентите во него, така што системот преминува од една состојба во друга со доаѓање на клиенти или со извршените услуги, односно со заминувањето на клиентите.

4.2 Популација од клиенти

Популацијата од клиенти може да се смета како:

- ограничена (конечна) и
- неограничена (бесконечна).

Бесконечна популација е теориски модел на систем со голем број на корисници, на пример клиетни кои побаруваат услуга од банка, продавница, бензинска пумпа , ресторант, и слично. Како примери на конечна популација може да се сметаат бројот на процеси што треба да ги изврши компјутерот, или бројот на машини што треба да бидат поправени од сервисерот. Главната разлика меѓу конечните и бесконечните популации од клиенти е начинот на кој интензитетот на доаѓање (среден број на пристигнувања во единица време) е дефиниран. Кај бесконечните популации од клиенти интензитетот на доаѓање не зависи од бројот на клиенти кои се наоѓаат во процес на опслужување (се опслужуваат или чекаат за опслужување). Од друга страна , кај конечните популации од клиенти интензитетот на доѓање зависи од бројот на клиенти кои се опслужуваат или чекаат за опслужување. Ако на пример, популација се состои од само еден клиент, тогаш ако клиентот се опслужува, интензитетот на доаѓање ќе биде нула.

4.3 Влезен поток

Влезниот поток го карактеризира начинот на кој клиентите влегуваат во системот. Пристигнувањата можат да бидат во одредено време или во случајно време. Во поголемиот број на системи пристигнувањата на клиентите настапува на случаен начин.

Нека t_1, $t_{2,\dots}$ се моменти на пристигнување на клиенти во системот.

Тогаш T_i = t_i, - t_{i-1}, i=1, 2,... е должината на временскиот интервал помеѓу пристигнувањето на i-1-тата и i-тата група од клиенти. Нека со Z_t е означен бројот на клиенти пристигнати во системот во моментот t.

Влезниот поток се наракува **поток со ограничено последејство**, ако случајните променливи T_1, T_2,... и Z_1, Z_2, ... се независни во целина.

Влезниот поток е **ординарен**, ако не е возможно (со позитивна веројатност) да се појават два или повеќе клиенти во еден ист момент на време.

Влезниот поток се нарекува **поток без последејствие**, ако веројатноста да се појават k клиенти во интевалот $[T, T+t]$ не зависат од тоа колку клиенти се појавиле пред тој интервал.

Влезниот поток е **стационарен** ако веројатноста да се појават n клиенти во интервалот $[T, T+t]$ не зависи од T, туку од t и n.

$$P\{n \text{ клиенти во } [T, T+t]\} = P\{n \text{ клиенти во } [0, t]\}$$

Ако T_i се независни и еднакво распределени случајни променливи и потокот е ординарен тогаш потокот се нарекува **рекурентен поток**.

Потокот од клиенти кој е:

- стационарен
- без последејствие
- ординарен

се нарекува прост **(Пуасонов) поток.**

Poisson-овиот закон за распределба на веројатностите е даден со изразот:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$$

каде:

λ е интензитет на текот на доаѓање

e претставува основа на природен логаритам ($e \approx 2{,}72$ – Неперова константа)

Стационарноста на текот на доаѓање се изразува со фактот дека веројатноста $P_n(t)$ зависи од должината на временскиот интервал и од бројот на доаѓањата, а не и од почетокот на интервалот. Текот на доаѓање е „тек без последици" ако доаѓањето на една клиент не зависи од другите (претходните), односно веројатноста $P_n(t)$ не зависи од бројот на доаѓања пред почетокот на временскиот интервал t. Ординарноста на текот на доаѓања значи дека во некој произволно мал временски интервал може да дојде само еден или ниеден клиент, односно во доволен мал временски интервал неможат да се појават две или повеќе доаѓања.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sum_{i=2}^{n} p_i(t)}{t} = 0$$

што значи дека

$$\sum_{i=2}^{n} p_i(t)$$

е бесконечно мала големина од повисок ред од t .

Ако за временски интервал се земе временска единица $(t = 1)$, Poisson-овиот распределба добива форма:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$$

Средната вредност и варијансата на овој распределба меѓу себе се еднакви и имаат вредност $\boldsymbol{\lambda}$.

Веројатноста дека во временскиот интервал t_0 нема да има доаѓања $\left(p_0 = \mathrm{e}^{-\lambda t_0}\right)$ одговара на веројатноста дека временскиот интервал меѓу две взастопни доаѓања ќе бидат поголеми или еднакви на t_0 при што функцијата на распределба на временскиот интервал меѓу две доаѓања има форма:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Законот на распределба е:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Средната вредност на должината на временскиот интервал меѓу две доаѓања изнесува

$$\alpha = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

односно варијансата е

$$\sigma_t^2 = \int_0^\infty (t - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

Кај непростите текови на доаѓање најчесто се јавува отстапување од стационарноста, односно веројатноста за појавување на доаѓањата зависи и од моментот на почетокот на набљудувањата т.е $p_n = p_n(n, t, \tau)$ каде τ е моментот на почетокот на временскиот интервал t . Во тој случај се добива:

$$p_n = p_n(t,\tau) = \frac{[\lambda(\tau,t)]^n}{n!} \cdot e^{-\lambda(\tau,t)}$$

што претставува Poisson-ов закон на веројатност за нестационарен тек на доѓања. Ако средната вредност и варијансата на некој стохастички се доста блиски по вредност, тогаш тој процес може да се анализира како Poisson-ов. При одредени услови можно е некои други теоретски распределбаи да се сведат на Poisson-ов. Доколку некој конкретен процес не може да се сведе на теоретски модел, најефикасно е да се решава со метод на симулација. Кај овие системи се настојува да се скрати времето на опслужување, што најадекватно се опишува со експоненцијална распределба изразена со функцијата:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

односно законот на веројатноста $f(t) = \mu e^{-\mu t}$

Средната вредност на времето за опслужување е $\frac{1}{\mu}$, а варијансата е $\sigma_t^2 = \frac{1}{\mu^2}$ при што μ е интензитет на опслужување т.е среден број на клиенти што се опслужуваат во единица време.

4.4 Редици на чекање

Редицата претставува точен број на клиенти кои треба да бидат опслужени (се разбира редицата може да биде и празна). Обично клиентот што се опслужува се смета дека не е во редицата. Максималната должина на редицата е вкупниот број на клиенти кои чекаат во редицата (плус оние кои се опслужуваат). Во практичните симулации редицата е ограничена, но некои теориски модели претпоставуваат дека редицата е со неограничена должина. Ако редицата е со ограничена должина некои клиенти ќе мора да бидат вратени без да бидат опслужени.

4.5 Дисциплини на редицата

Дисциплината го претставува начинот на кој се организира редицата (правила според кои клиентите влегуваат или излегуваат од редицата).

Врз основа на дисциплината во опслужувањето СМО може да се класифицираат различно. Една група системи се оние кај кои опслужувањето се врши според принципот „прв дојден-прв опслужен” **(FIFO)**. Друга група системи се оние кај кои опслужувањето се врши по спротивен ред „последен дојден-прв опслужен” **(LIFO)**. Друг начин на опслужување според дисциплината на редицата е **SIRO** (опслужување по случаен редослед), **редици со приоритет** (прво се опслужуваат клиентите со приоритет) како и многу други посложени методи на редење според кои се опслужуваат клиентите.

4.6 Опслужување

Опслужувањето (или сервисот) преставува активноста за која клиентите чекаат. Обично времетраењето на опслужувањето е случајно. Теоретските модели се базираат на случајна т.е. на експоненцијална распределба на времето на опслужување. Исто така важен параметер е и бројот на сервери. Според бројот на сервери - канали за опслужување СМО се делат на системи со еден сервер и системи кај кои опслужувањето се врши во повеќе сервери одеднаш.

Едноканални СМО се оние кај кои постои само еден сервер и опслужуваат само по еден клиент. *Повеќеканалните* СМО располагаат со повеќе сервери и тие опслужуваат повеќе клиенти истовремено. Ако во исто време опслужуваат k-клиенти се нарекуваат k-канални системи на масовно опслужување.

4.7 Квантитативен пристап на СМО

Системите на масовно опслужување се разгледуваат како стохастички процеси со квантитативен пристап заснован на нивните карактеристики.

Во првата фаза на квантитативното опфаќање на процесите на масовно опслужување се изнесуваат претпоставките врз кои се засновува моделот кои се однесуваат на:

а) текот на доаѓање;

б) времето на опслужување;

в) бројот на клиенти во системот;

г) режимот на редот на чекање.

Во втората фаза на квантитативното опфаќање на процесот на масовно опслужување се формира „математичкиот модел”, односно се формира систем на диференцијално-диференцни равенки, поаѓајќи од основните равенки:

$$p_n(t+\Delta t)=\sum_{i=0}^{m} p_i(t)p_{in}(\Delta t) \qquad\qquad n=0,1,2\ldots\ldots m$$

каде што симболите го имаат следното значење:

$p_i(t)$ - веројатноста дека СМО во моментот t се наоѓа во состојба i односно дека во моментот t во системот се наоѓаат i-клиенти;

$p_{in}(\Delta t)$ – преодна веројатност на Марков процес, т.е веројатност дека во интервалот со должина Δt системот од состојба i ќе премине со состојба n;

m – број на потенцијални клиенти во системот.

Во третата фаза на квантитативното опфаќање на процесите на масовно опслужување се решава добиениот систем на диференцијално - диференцни равенки. Посебен интерес претставува пресметувањето на финалните веројатности p_n врз чија основа се пресметуваат различни показатели на функционирањето на системот на масовно опслужување.

1) Просечни бројни вредности на СМО

- просечен број на клиенти (клиенти) во системот,
- просечен број на клиенти кои можат да бидат опслужени,
- просечен број на клиенти кои се наоѓаат во ред на чекање,
- просечен број на клиенти во опслужувачкиот систем(апаратите),
- просечен број на клиенти кои го напуштиле системот неопслужени,
- просечен број на слободни апарати (сервери,канали) и
- просечен број на зафатени апарати (сервери,канали).

2) Просечни времиња во СМО

- просечно време на чекање во ред за услуга,
- просечно време на задржување на клиентите во системот,
- просечно време на опслужување и
- просечно време на неработеност на системот или одредени апарати.

3) Показатели за пропустливата моќ на СМО

- апсолутна пропустлива моќ на системот и
- релативна пропустливост на системот.

4.7.1 Кендалова класификација на СМО

Со оглед на разликите кои постојат кај моделите со редови на чекање, воведени се ознаки од страна на Кендал во 1953 година, кои се познати како Кендалова класификација на СМО. Оваа класификација ги означува главните карактеристики на системот и се користи со следните симболи:

A/B/s/q/c/p

Овие симболи го имаат следново значење:

- A - распределба на интервал меѓу две пристигнувања на клиенити,
- B - распределба на време на опслужување,
- s (к) - број на сервери,
- q - дисциплина на редење (FIFO, LIFO…),
- c- капацитет на системот и
- p-големина на популација (број на можни клиенти).

За A и B можат да се земат следниве ознаки:

- M-Пуасонов поток на пристигнувањата или заминувањата,
- E_m-Ерлангова распределба,
- D- симбол за детерминистичко (познато) пристигнување и константно време на опслужување,

- G- општа (било која) распределба и
- GI-општа (било која) распределба со независни случајни променливи.

4.7.2 Едноканални СМО

Моделите на СМО со еден канал се засноваат врз следните претпоставки:

- текот на доаѓање е прост тек со параметар λ кој изразува просечен број доаѓања во единица време;
- времето на масовно опслужување е алеаторна променлива со експоненцијален распределба со параметар μ кој изразува просечен број опслужувања во единица време;
- во системот постои еден канал за опслужување $k(s) = 1$;
- бројот на потенцијалните канали не е ограничен, односно во системот може да се најде неограничен број клиенти;
- во случај на зафатеност наканалот клиентот завзема место на чекање, при што клиентите се опслужуваат по редослед на доаѓање.

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

ако се означи со $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ факторот на опслужување на каналот/системот, се добива $p_1 = \rho p_0$ од каде што следува дека:

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} = \rho p_{n-1}$$

Ако се замени за $n = 1,2,3 \ldots.$ ќе се добијат веројатностите $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ изразени во функцијата на p_0 односно

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = (\frac{\lambda}{\mu})^2 p_0 = \rho^2 p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^3 p_0 = \rho^3 p_0$$

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} = (\frac{\lambda}{\mu})^n p_0 = \rho^n p_0$$

Од условот:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

се добива:

$$p_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots \right] = 1$$

бидејќи за $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

следува

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

од каде се добива

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho)\rho^n; \quad n = 0,1,2,3 \ldots$$

Во натамошното излагање ги даваме синтетизирано значајните показатели за функционирањето на едноканален систем за масовно опслужување.

Веројатноста за постојани состојби и n клиенти:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0 \frac{1}{1 - \rho} = 1$$

каде што

$p_0 = 1 - \rho$ - веројатност дека каналот е слободен;

$p_n = \rho p_{n-1} = \rho^n p_0 = \rho^n (1 - \rho)$ - веројатност дека системот има n клиенти;

Просечен број клиенти (клиенти):

- кои се опслужуваат $n_0 = \rho$
- во ред на чекање за услуга $n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

- во системот $n_s = n_0 + n_r = \frac{\rho}{1-\rho}$

Просечно време:

- на опслужување клиент $t_0 = \frac{1}{\mu}$
- на чекање клиент во ред за услуга $t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{n_s}{\mu} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}$
- на задржување клиент во системот $t_s = t_r + t_0 = \frac{n_s}{\lambda} = \frac{t_r}{\rho} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}$

Кај едноканалните СМО со откази клиентот пристапува кон серверот (касата) ако е таа слободна, но ако е зафатена добива отказ. Оттука произлегува дека системот има две можни состојби - зафатено или слободно, односно во системот нема ниту една клиент или има една клиент.

Ако p_0 е веројатност дека во системот нема да има клиент тогаш:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$$

Веројатностите p_0 и p_1 го задоволуваат условот $p_0 + p_1 = 1$, од каде се добива:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \text{ и } p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

За познати веројатности p_0 и p_1 можат да се одредат останатите параметри на системот на масовно опслужување со откази:

- просечен број на клиенти во системот $n_s = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$
- просечно време на задржување на клиент во системот $t_s = \frac{1}{\lambda} p_1 = \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{1}{\lambda} n_s$
- просечно време на опслужување, бидејќи $t_r = 0$ $t_0 = \frac{1}{\lambda+\mu}$

Релативната пропустлива моќ на системот се одредува преку веројатноста за отказ. Бидејќи се работи за систем со една станица и со отказ, тоа значи дека секоја клиент која ќе дојде во системот кога во него има веќе една клиент добива отказ. Веројатноста за добивање отказ изнесува:

$$p_{otk} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

и произлегува дека релативната пропустлива моќ на системот е

$$r_p = 1 - p_{otk} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = p_0$$

Апсолутната пропустлива моќ е

$$a_p = \lambda r_p = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$$

Овие параметри се однесуваат за стационарни системи на масовно опслужување со една станица и можност за добивање отказ.

4.7.3 Повеќеканални СМО

Многу проблеми на масовно опслужување наложуваат решавање со истовремено опслужување на повеќе клиенти. Во пракса такви случаи се јавуваат кај сервисните служби, во продавници, сообраќајот на раскрсници при што растеретувањето на формираните редови се врши на тој начин што истовремено се опслужуваат повеќе клиенти, а не само една како во случајот со едноканалните СМО.

Моделите на СМО со повеќе канали (сервери) ќе ги разгледаме под исти или слични претпоставки, односно дека доаѓањата во системот се распределени по Poisson-овиот закон, а времетраењето на опслужувањата има експоненцијална распределба. Ако системот има k-канали[8], можно е да се јават следните случаи:

- ако бројот на клиентите (клиентите) n е помал од бројот на каналите $k\ (s)$ т.е $n < k$, не доаѓа до формирање на ред на чекање, бидејќи секоја клиент која ќе влезе во системот веднаш се упатува кон слободен канал на опслужување;
- кога бројот на клиентите во системот е поголем или еднаков со бројот на каналите т.е $n \geq k$ постои можност за формирање ред на чекање, така што во редот се наоѓат $n - k$ клиенти.

Ќе бидат користени параметрите:

λ е интензитет (брзина) на текот на доаѓања (просечен број доаѓања во единица време);

[8] Во литературата се користат различни ознаки за бројот на канали и притоа покрај $\boldsymbol{\kappa}$ исто така се користи и ознаката $\boldsymbol{s}$.

μ е интензитет (брзина) на опслужување по канал;

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ претставува фактор на опслужување по канал;

$\rho_s = \frac{\lambda}{k\mu} = \frac{\rho}{k}$ е фактор на опслужување на системот.

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0 \qquad\qquad 0 < n < k$$

$$p_n = \frac{\rho^n}{k!\,k^{n-k}} \qquad\qquad n \geq k$$

Користејќи го фактот дека сумата на веројатностите мора да биде 1, се добива:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0(\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{1}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{k^{n-k}}) = 1$$

и

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s}\right)^{-1}$$

е веројатност дека сите канали се слободни, односно во системот не се наоѓа ниту еден клиент.

За систем со откази:

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

Веројатноста дека во системот има n клиенти е дадена со изразите:

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho}{n} \rho_{n-1} & n < k \\ \rho_s \rho_{n-1} & n \geq k \end{cases}$$

Во натамошното излагање ги даваме карактеристичните и позначајни показатели за функционирањето на повеќеканалните системи на масовно опслужување:

$r_p = 1 - p_{otk}$ - релативна пропустлива моќност на системот (однос меѓу опслужени и пристигнати клиенти);

$a_p = \lambda \cdot r_p$ - апсолутна пропустлива моќ на системот (остварени опслужувања во единица време).

Просечен број клиенти (клиенти):

- кои се опслужуваат n_0 :

$$n_0 = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + (k-1)p_{k-1} + k(1 - p_0 - p_1 - p_2 - p_k - \cdots - p_{k-1})$$

- во ред на чекање за услуга n_r :

$$n_r = p_{k+1} + 2p_{k+2} + 3p_{k+3} + \cdots + (n-k)p_n + \cdots = p_0 \frac{\rho^k}{k!} \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2}$$

- во системот $n_s = n_0 + n_r$:

$$n_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = p_0[\sum_{n=o}^{\infty} n\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s}(k + \frac{1}{1-\rho_s})]$$

Просечен број (q) на неискористени канали (сервери) во системот:

$$q = \sum_{n=0}^{k} (k-n)p_n = k - \rho$$

Постои врска меѓу просечните вредности n_s, n_r и q, изразена во следната форма:

$$n_s = n_r + k - q = n_r + \rho$$

Просечно време:

- $t_0 = \frac{1}{\mu}$ - на опслужување клиент;

- $t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{1}{k\mu} \cdot \frac{\rho^k}{k!} \frac{1}{(1-\rho)^2}$ - на чекање клиент во ред за услуга;

- $t_s = t_r + t_0 = \frac{1}{\mu} + t_r$ - на задржување клиент во системот.

5. ЦЕЛ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

Наша **цел** во овој магистерски труд е да се изградат релативно едноставни модели (детерминистички и стохастички) кои ќе обезбедат доволно блиска апроксимација на сложената реалност со што ќе се добијат корисни претстави за проблемите. Уметноста на градење модели ја препознава неможноста да бидат претставени сите од многуте поединечни влијанија врз зависната променлива и настојува да ги избере највлијателните променливи. Потоа, неопходно е да се формулира модел за прикажување на зависностите помеѓу овие фактори.

Предмет на нашето истражување е проучувањето на методи за конструкција на едноставни математички модели лесни за толкување, но не и премногу поедноставени за да ги игнорираат важните надворешни влијанија. Детерминистичките модели се креирани на случаен примерок од супермаркет во Струмица. Стохастичките модели беа изградени и анализирани со примена на симулациски методи користејќи софтверска апликација.

Резултатите од направеното истражување беа толкувани и беа дадени предлози за решенија на проблемите преку анализа на креираните модели.

6. ХИПОТЕТИЧКА РАМКА

Поаѓајќи од целите на истражувањето ***генералната*** или ***главната хипотеза*** на нашето истражување се темели на сознанието дека во денешни услови компаниите односно доносителите на одлуки не ги користат (многу малку) квантитативните методи во деловното одлучување. Како резултат на тоа се наметнува потребата од примена на квантитативните модели во процесот на донесување на одлуки. Во контекст на тоа, во вршењето на квантитативната анализа во деловното одлучување клучна алатка при донесувањето на одлуки се *математичките модели* кои даваат поедноставена претстава за реалните проблеми, инкорпорирајќи ги само релевантните податоци кои на доносителите на одлуки им се потребни во процесот на решавање на дадените проблеми.

Поставувањето на хипотезата е детерминирано од придобивките и неопходноста на воведување на конструирани модели во современиот деловен свет кои ќе дадат попрецизна и поедноставена илустрација на различни проблеми. Како ***посебни*** односно ***споредни хипотези кои*** ја потврдуваат генералната хипотеза во трудот се следните:

- ✓ Многу е поефтино проблемите во деловната практика да се анализираат со користење на математички модели. Исто така, покрај ниските финансиски трошоци за изградба на модел, анализата со помош на моделирање на доносителите на одлуки може да им помогне да ги избегнат грешките кои носат големи трошоци предизвикани од погрешни одлуки. Пример, како дел од истражувањето во магистерскиот труд се моделите на залиха, при што со нивното креирање и резултатите добиени од нив, ние утврдивме дека многу полесно е да се пронајдат оптималните нивоа на залихи како и другите оптимални големини доколку се користат овие детерминистички модели, бидејќи во спротивно деловните компании би се соочиле со големи трошоци и низа потешкотии за нивно утврдување.
- ✓ Математичките модели побрзо и понавремено ги доставуваат потребните информации. Ажурноста е од големо значење, особено кога се работи за важни информации кои се неопходни на доносителите на

одлуки да им бидат достапни навреме, бидејќи во спротивно истите нема да бидат валидни. Во овие случаи, можеме да креираме модели кои на на нив ќе им помогнат да ги предвидат податоците кои им недостасуваат и со тоа полесно да ги донесат тековните одлуки.

- ✓ Примената на математичките модели често овозможува да се разгледаат работи кои речиси е невозможно да бидат направени во реалноста. На пример, во нашето истражување се земени системите на масовно опслужување во супермаркетите „Хоризонт“ – Струмица. Притоа преку процесот на моделирање ние имавме можност да направиме предвидувања за просечниот број на клиенти кои ќе доаѓаат на час, за колку време секој ќе биде опслужен, која ќе биде искористеноста на системот итн. Без употребата на тие стохастички модели доносителите на одлуки во деловните компании многу тешко или речиси невозможно е да ги направат тие предвидувања и да донесат правилни одлуки кои ќе дадат максимални резултати.

7. МЕТОДИ НА ИСТРАЖУВАЧКАТА РАБОТА

Во процесот на реализација на истражувањето беа користени повеќе истражувачки методи меѓу кои: аналитички метод, симулации, дескриптивна анализа, квалитативна анализа, квантитативна анализа како и компаративна анализа.

Употребата на методите на квантитативната анализа е еден од начините да ја намалиме комплексноста на проблемската ситуација која е предмет на наше разгледување. Таа ни помогна да ја составиме листата на мерливи позитивни и негативни влијанија, како и да го формираме правецот на избор и делување, за да се надминат негативните тенденции во конкретната ситуација. При квантитативната анализа користевме некои од квантитативните методи, кај кои податоците и информациите се прикажани со бројки, што овозможува откривање и утврдување на точни, квантитативни релации, врски и односи на одредениот проблем. Параметрите добиени во рамките на квантитативната анализа, ни служат како инпути во примената на математичките модели и компјутерската обработка.

Аналитичкиот метод беше користен во креирањето на детерминистичките модели односно моделите на залиха. Употребата на аналитичките методи особено е корисна за донесувањето на т.н. тешки одлуки во деловното одлучување. Тие овозможуваат изградба на добар стратегиски пристап за одлучување. Добиените информации со помош на аналитичките методи го смалуваат ризикот и неизвесноста, овозможуваат алтернативите да се погледаат од голем број различни перспективи, како и помагаат доносителот на одлуката да донесе цврсти заклучоци.

Исто така беше користена и квалитативна анализа која е доста важна при структурирање на проблемот и неговото анализирање. Притоа преку анализата беше извршена оценка на можните алтернативни решенија кои произлегоа како резултат на процесот на моделирање, при што беше избрано најдоброто.

Симулацискиот метод беше користен во конструкцијата на стохастичките модели односно системите на масовно опслужување. Симулацијата беше извршена со користење на софтверската апликација **WinQSB** *за симулација на системи на масовно опслужување.*

Податоците кои се добиени од компанијата „Хоризонт“ - Струмица се обработени во Excel 2007 во насока на креирање на моделите кои се предмет на разгледување.

На крајот применивме компаративна анализа каде беше извршена споредба помеѓу различните модели и дадовме сугестии за конструкција на модели за кои сметаме дека се применливи во деловната практика во нашата држава.

8. РЕЗУЛТАТИ ОД СПРОВЕДЕНОТО ИСТРАЖУВАЊЕ

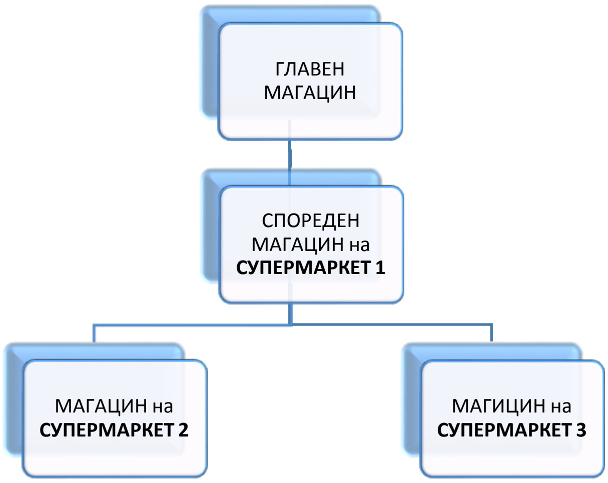
Теренското истражување беше реализирано во компанијата „Хоризонт“ - Струмица која располага со ланец на супермаркети и магацини во склоп на истите. Податоците кои ги добивме во периодот на опсервација од 1.3.2014 до 31.3.2014 беа обработени и истите се искористени во процесот на моделирање и обработка на некои од основните модели опфатени во нашиот труд.

Најпрво, се дадени резултатите кои се добиени при креирањето на *моделите на залихи*, со примена на табеларен и графички приказ во Excel 2007. Притоа во прилог е претставен шематски приказ на текот на одвивање на набавните активности на компанијата „Хоризонт“ и ќе бидат земени во предвид можните алтернативи за изнаоѓање на оптималните големини, со посебен осврт на оптималните количества на залихи со кои треба да располага компанијата, се со цел постигнување на поголема ефикасност во работењето.

Во другата фаза е направен детален опис на излезните резултати од конструкцијата на стохастичите модели т.е. од системите на масовно опслужување, врз основа на кои ќе се понуди разумна задоволителна услуга на клиентите што чекаат во редот на опслужување. Основните показатели на функционирање на редовите на чекање беа пресметани во Excel 2007, при што даваме графички и табеларен приказ на истите. Ќе бидат анализирани и резултатите добиени со симулација на некои од моделите и ќе бидат дадени предлози во однос на имплементациија на резултатите кои произлегуваат од нашето истражување на редовите на чекање.

8.1 Тек на набавните активности на супермаркетите

Компанијата има еден голем магацин и три супермаркети во кои е сместен еден од споредните магацини во кој се врши главната набавка на производите наменети за продажба во супермаркетите. Набавката на производите се врши на одреден временски период, при што понатаму подетално е разгледан, и истата е проследена со одделни видови на трошоци. Во прилог даваме шематски приказ на одвивањето на циклусот на набавка.



Слика 3. Шематски приказ на текот на набавните активности во компанијата

Figure 3. Schematic representation of the procurement activities

Според шематскиот приказ даден на Слика 3 набавните активности на компанијата започнуваат најпрво со пристигнување на нарачаните количини во главниот магацин. Оттаму, нарачките се примаат во споредниот магацин на првиот супермаркет во Струмица, од кој понатаму се распределуваат нарачаните количини на производи во магацините на другите два супермаркети.

Кога станува збор за магацинскиот простор, во нашето истражување како предмет на разгледување беше земен *споредниот магацин*, бидејќи нарачката од главниот магацин на компанијата се доставува директно во него. Одовде, важноста на овој магацин е голема затоа што преку него се снабдуваат и останатите два маркети. Од таа причина многу е важно да се детерминира

оптималното количество на производи кои треба да бидат испорачани во споредниот магацин, а притоа да нема дефицит или суфицит на залихи.
Можните алтернативни решенија произлегоа од резултатите кои ги добивме при процесот на моделирање т.е. во процесот на градење на математички модели на залихи.

8.2 Резултати од конструкција на модели на залихи за различни производи со можно ограничување

Во овој труд креиравме модел на залихи каде постои можно ограничување за супермаркетите, односно постои ограничен складишен простор во кој се чуваат набавените производи на залиха. Во нашиот случај, компанијата „Хоризонт“ набавките со кои се снабдува првиот супермаркет, а воедно и другите два, ги прима во споредниот магацин на првиот супермаркет кој има ограничен простор. Од таа причина ние креиравме модел со кој беа утврдени оптималните количини на набавка, каде беше детерминирана најсоодветната големина на набавката на производите кои заземаат различен дел од магацинскиот простор на супермаркетот.
Притоа за време на истражувањето беа земени 20 различни производи кои во супермаркетите „Хоризонт“ се набавуваат секој месец. Со изградбата на моделот воедно ќе бидат прикажани и оптималните количини на набавка за сите 20 производи кои истовремено ги инкорпорираат сите трошоци кои произлегуваат во текот на работењето.
Подолу е даден табеларен приказ на 20 различни производи во супермаркетите, како и нивните карактеристики.

Табела 1. Преглед на различни производи во супермаркетот и нивните главни карактеристики
Table 1. Review of a different kind of products of a supermarket and their main characteristics

Вид на производ Type of product	Побарувачка (парче) кј Demand (pcs) **кј**	фиксни трошоци (МКД)[9] **cj** fixed costs (MKD)**cj**	трошоци на набавка (МКД) **aj** procurement costs (MKD) **aj**	трошоци на складирање[10] (МКД) **rj** storage costs (MKD) **rj**	складишен простор по п-вод (м ^{3})[11] **vj** storage space per product (m^3) **vj**
I	100	30000	26000	0.007	1.5
II	84	30000	22560	0.009	0.9
III	70	30000	23100	0.01	0.7
IV	83	30000	24900	0.009	0.8
V	90	30000	26200	0.008	1.1
VI	94	30000	25700	0.008	1.2
VI	87	30000	24850	0.009	1.3
VIII	85	30000	25780	0.009	0.9
IX	78	30000	24000	0.009	0.8
X	97	30000	26360	0.007	1.2
XI	90	30000	25880	0.007	1.1
XII	76	30000	23820	0.01	0.7
XIII	92	30000	25450	0.008	1.1
XIV	67	30000	24480	0.02	0.8
XV	70	30000	24500	0.01	0.7
XVI	87	30000	25900	0.008	0.8
XVII	95	30000	24700	0.008	1.1
XVIII	80	30000	22300	0.01	0.8
XIX	75	30000	24370	0.02	0.7
XX	86	30000	24780	0.01	0.9

Во Табела 1 е прикажана побарувачката за производите која однапред е детерминирана, фиксните трошоци во магацинот на супермаркетот 1, потоа трошоците на набавка кои произлегуваат од цените што се плаќаат за набавка на производите. Овие трошоци можат да бидат променливи, односно зависат од количината на нарачаните производи, па поради тоа ние креиравме модел со кој се определуваат оптималните количества, каде беа одредени и вкупните трошоци. Исто така дадени се и трошоците на складирање чија вредност е изразена процентуално од вредноста на залихите, како и складишниот простор

[9] Изразено во македонски денари (МКД).
[10] Овие трошоци се изразени процентуално, односно изнесуваат процент од вредноста на залихите.
[11] Изразено во метри кубни (м^3).

кој го зазема секој од производите во вкупниот простор на магацинот. Целокупниот магацински простор во супермаркетот 1 изнесува **1460 м^3**. Според тоа просторот кој го заземаат овие производи не треба да го надминува волуменот на вкупниот магацински простор во супермаркетот. Притоа конструкцијата на нашиот математички модел ни овозможува да се пронајде отималната политика на набавка на производите која треба да ја води супермаркетот, а истовремено да не биде надминат лимитирачкиот фактор.

За утврдување на оптималните количини кои супермаркетот треба да ги нарача, беше користен Lagrange – овиот множител λ, кој треба да одговара на решенијата за одредување на оптималните големини на нарачките чијшто волумен е најблиску до вкупниот волумен на капацитетот на магацинот. Меѓутоа $\lambda \leq 0$, затоа што множителот треба да влијае во однос на намалувањето на нарачката, што произлегува од постоењето на ограничен магацински простор, бидејќи во спротивно ограничувањето нема да има влијание врз решавањето на проблемот со кој се соочува супермаркетот.

Во табела 1 се внесени карактеристиките на различните производи и врз основа на дадените вредности беше одредена оптималната големина на набавка за секој производ, а исто така беше пронајдена и вредноста на Lagrange – овиот множител λ според кој набавката зазема простор кој е најблиску до ограничувањето. Големините на набавката за различни вредонсти $\lambda \leq 0$ беа детерминирани врз основа на релацијата:

$$q_{j0} = \sqrt{\frac{2c_j k_j}{r_j a_j - \lambda v_j}}$$

Вкупниот магацински простор кој го заземаат производите, без да се надмине ограничениот простор беше одреден врз основа на изразот:

$$V \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} v_j q_j \qquad q_j > 0, \qquad \mathrm{j} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$$

Вкупниот волумен на магицинот е $V =$**1460 м^3**.

Врз основа на наведените пресметки се формира следнава табела во која се одредува оптималното решение:

1	lambda λ	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}	q_{16}	q_{17}	q_{18}	q_{19}	q_{20}	Вкупно складишен простор
2	0	181.5683	157.5522	134.84	149.0712	160.5097	165.6258	152.7745	148.2594	147.196	177.5987	172.6497	138.3603	164.6572	90.6134	130.9307	158.7232	169.8416	146.7129	96.0867	144.3026	1463.180533
3	-0.001	181.5675	157.5518	134.84	149.0709	160.5093	165.6253	152.774	148.2592	147.1957	177.5981	172.6491	138.3601	164.6567	90.6133	130.9305	158.7229	169.8411	146.7126	96.0867	144.3024	1463.176912
4	-0.002	181.5668	157.5515	134.84	149.0707	160.5088	165.6248	152.7736	148.2589	147.1955	177.5975	172.6486	138.3599	164.6563	90.6132	130.9304	158.7226	169.8406	146.7123	96.0866	144.3021	1463.173292
5	-0.003	181.566	157.5512	134.84	149.0704	160.5084	165.6244	152.7731	148.2586	147.1952	177.5969	172.6481	138.3597	164.6558	90.6132	130.9302	158.7223	169.8401	146.7121	96.0865	144.3018	1463.169672
6	-0.01	181.5608	157.5487	134.84	149.0685	160.5055	165.621	152.77	148.2566	147.1933	177.5929	172.6444	138.3583	164.6527	90.6126	130.9289	158.7201	169.8368	146.7102	96.0861	144.3	1463.144329
7	-0.015	181.557	157.547	134.84	149.0672	160.5034	165.6186	152.7678	148.2551	147.1919	177.59	172.6418	138.3573	164.6505	90.6123	130.9279	158.7186	169.8345	146.7089	96.0857	144.2987	1463.126229
8	-0.02	181.5533	157.5452	134.84	149.0659	160.5013	165.6161	152.7656	148.2537	147.1906	177.5871	172.6392	138.3562	164.6483	90.6119	130.927	158.7171	169.8321	146.7076	96.0854	144.2974	1463.108129
9	-0.025	181.5496	157.5435	134.83	149.0645	160.4992	165.6137	152.7634	148.2523	147.1892	177.5843	172.6366	138.3552	164.6461	90.6115	130.9261	158.7155	169.8297	146.7063	96.085	144.2961	1463.09003
10	-0.03	181.5458	157.5417	134.83	149.0632	160.4971	165.6113	152.7612	148.2508	147.1878	177.5814	172.6339	138.3542	164.6438	90.6112	130.9251	158.714	169.8274	146.705	96.0847	144.2948	1463.071931
11	-0.04	181.5383	157.5382	134.83	149.0606	160.4928	165.6065	152.7567	148.2479	147.1851	177.5756	172.6287	138.3522	164.6394	90.6104	130.9233	158.7109	169.8226	146.7023	96.084	144.2921	1463.035737
12	-0.05	181.5309	157.5347	134.83	149.0579	160.4886	165.6016	152.7523	148.2451	147.1824	177.5698	172.6235	138.3502	164.9349	90.6097	130.9214	158.7079	169.8179	146.6997	96.0833	144.2895	1462.999545
13	-0.1	181.4935	157.5173	134.82	149.0446	160.4676	165.5775	152.7301	148.2307	147.1688	177.541	172.5973	138.34	164.6127	90.606	130.912	158.6926	169.7943	146.6866	96.0798	144.2764	1462.818632
14	-0.15	181.4561	157.4998	134.81	149.0313	160.4465	165.5533	152.7079	148.2163	147.1551	177.5121	172.5711	138.3298	164.5905	90.6023	130.9027	158.6772	169.7707	146.6734	96.0764	144.2633	1462.637794
15	-0.25	181.3815	157.465	134.79	149.0047	160.4045	165.5051	152.6636	148.1876	147.1279	177.4545	172.5188	138.3095	164.5461	90.5949	130.884	158.6466	169.7235	146.6471	96.0695	144.2371	1462.276341
16	-0.3	181.3442	157.4475	134.78	148.9914	160.3835	165.481	152.6414	148.1733	147.1143	177.4257	172.4926	138.2994	164.5239	90.5912	130.8747	158.6313	169.6999	146.634	96.0661	144.2241	1462.095727
17	-0.4	181.2697	157.4127	134.76	148.9649	160.3415	165.4328	152.5972	148.1446	147.0871	177.3681	172.4404	138.2791	164.4795	90.5838	130.856	158.6008	169.6528	146.6077	96.0592	144.1979	1461.734721
18	-0.5	181.1953	157.3779	134.74	148.9383	160.2995	165.3847	152.553	148.1159	147.0599	177.3106	172.3882	138.2588	164.4352	90.5764	130.8373	158.5702	169.6057	146.5815	96.0523	144.1718	1461.374012
19	-0.6	181.121	157.3431	134.72	148.9118	160.2576	165.3366	152.5088	148.0872	147.0327	177.2532	172.336	138.2385	164.3909	90.569	130.8187	158.5397	169.5586	146.5552	96.0454	144.1456	1461.036
20	-0.65	181.0839	157.3257	134.71	148.8985	160.2366	165.3125	152.4867	148.0729	147.0192	177.2245	172.31	138.2284	164.3688	90.5653	130.8093	158.5244	169.5351	146.5421	96.0419	144.1326	1460.833506
21	-0.7	181.0468	157.3083	134.7	148.8853	160.2157	165.2885	152.4646	148.0586	147.0056	177.1958	172.2839	138.2182	164.3467	90.5616	130.8	158.5091	169.5116	146.529	96.0385	144.1195	1460.653485
22	-0.8	181.0468	157.3083	134.7	148.8853	160.1738	165.2405	152.4205	148.0299	146.9784	177.1385	172.2319	138.198	164.3025	90.5542	130.7814	158.4786	169.4646	146.5028	96.0316	144.0934	1460.382628
23	-0.85	180.9356	157.2562	134.67	148.8455	160.1529	165.2165	152.3985	148.0156	146.9649	177.1099	172.2058	138.1878	164.2804	90.5505	130.772	158.4634	169.4411	146.4897	96.0282	144.0804	1460.113867
24	-0.87	180.9208	157.2493	134.66	148.8402	160.1445	165.2069	152.3896	148.0099	146.9594	177.099	172.1954	138.1838	164.2716	90.549	130.7683	158.4573	169.4318	146.4844	96.0268	144.0752	1460.041968
25	-0.88	180.9134	157.2458	134.66	148.8376	160.1403	165.2021	152.3852	148.0071	146.9567	177.0927	172.1902	138.1818	164.2671	90.5483	130.7664	158.4542	169.4271	146.4818	96.0261	144.0726	1460.006023
26	-0.881	180.9126	157.2455	134.66	148.8373	160.1399	165.2016	152.3848	148.0068	146.9565	177.0921	172.1897	138.1816	164.2667	90.5482	130.7663	158.4539	169.4266	146.4816	96.026	144.0723	1460.002429
27	-0.882	180.9119	157.2451	134.66	148.8371	160.1395	165.2011	152.3844	148.0065	146.9562	177.0915	172.1892	138.1814	164.2663	90.5482	130.7661	158.4536	169.4261	146.4813	96.0259	144.072	1459.998834
28	-0.883	180.9112	157.2448	134.66	148.8368	160.1391	165.2007	152.3839	148.0062	146.9559	177.091	172.1887	138.1811	164.2658	90.5481	130.7659	158.4533	169.4257	146.481	96.0259	144.0718	1459.99524

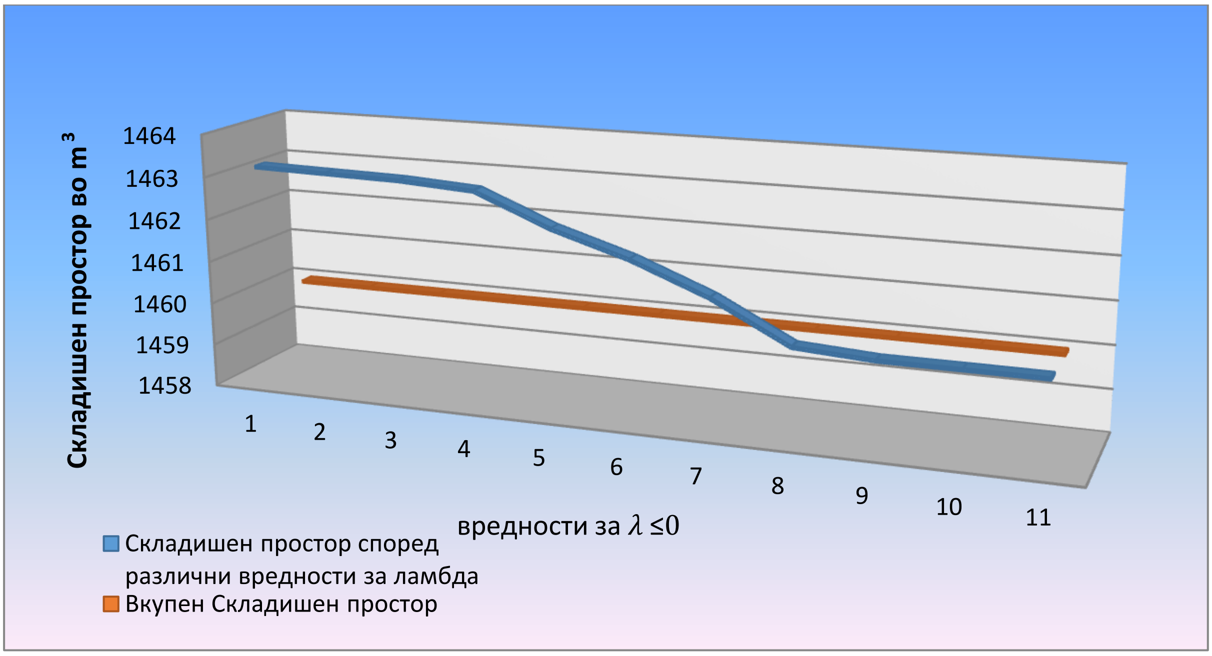
Слика 4. Пресметка на оптималните количини на нарачка за 20 различни производи при ограничен складишен простор
Figure 4. Calculation of optimal order quantity for 20 different products in a limited storage space

Табеларната пресметка во Excel 2007 која е дадена на Слика 4 ги претставува пресметаните оптимални количини на набавка за сите 20 различни производи кои треба да ги набави супермаркетот месечно. При пресметката користевме различни вредности за λ се додека не беше пронајдена соодветната вредност која ќе го задоволи ограничувањето. Согласно на тоа утврдивме дека за $\boldsymbol{\lambda = -0.882}$ оптималните големини на набавката на производите не го надминуваат вкупниот ограничен волумен од **1460 м^3**. Во тој случај оптималната политика на набавка која треба да ја води супермаркетот ги вклучува следните количества на 20-те производи:

q_1 =180.91191;	q_2 =157.24512;	q_3 =134.66;	q_4 =148.83707;	q_5 =160.13948;
q_6 =165.20113;	q_7 =152.38436;	q_8 =148.00648;	q_9 =146.95618;	q_{10} =177.09153;
q_{11} =172.1892;	q_{12} =138.1814;	q_{13} =164.26625;	q_{14} =90.54815;	q_{15} =130.76607;
q_{16} =158.4536;	q_{17} =169.4261;	q_{18} =146.4813;	q_{19} =96.02595;	q_{20} =144.072;

Заедничкиот волумен кој го заземаат овие нарачки изнесува **1459.998834 м^3** кој е најблиску и не го надминува вкупниот волумен на магацинот кој изнесува **1460 м^3**.

Резултатите добиени од пресметките во Excel 2007 дадени на Слика 4, графички се прикажани и истите се протолкувани врз база на добиените вредности.



Слика 5. Графички приказ на оптимални количини на нарачка детерминирани според различни вредности на Lagrange – овиот множител ($\boldsymbol{\lambda \leq 0}$)
Figure 5. Graphic presentation of the optimal order quantity determinated by different values of Lagrange multiplier ($\boldsymbol{\lambda \leq 0}$)

Според Слика 5 можеме да заклучиме дека колку што е помала вредноста на Lagrange – овиот множител $\boldsymbol{\lambda}$ волуменот на вкупниот простор кој е потребен за чување на просечно ниво на залихи за сите 20 производи, исто така опаѓа и се приближува кон 1460 м^3 што претставува вкупен капацитет на магацинот на супермаркетот.

Најпрво, за $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ оптималното количество зазема простор од **1463.180533 м^3,** кој не е во рамките на просторот на магацинот со кој располага супермаркетот. Затоа со цел да го намалиме волуменот, а истовремено и да ја утврдиме оптималната набавка, земаме помали вредности се додека не стигнавме до $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{0.882}$ за чија вредност волуменот одговара според даденото ограничување.

Како резултат на оваа анализа и податоците добиени од неа беа пресметани вкупните трошоци со кои супермаркетот се соочува. При пресметката на трошоците ние ја користевме Lagrange – овата функција дадена со изразот:

$$(q_{20}) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} \left[a_j k_j + \frac{c_j}{q_j} k_j + \frac{r_j}{2} (a_j q_j + c_j) \right] + \lambda \left(\mathrm{V} - \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} v_j q_j \right)$$

Видовите на трошоци се земени од Табела 1, а додека $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{0.882}$ бидејќи го задоволува условот поставен од лимитирачкиот фактор кој се однесува за сите 20 производи (q_{20}).

Одовде, со примена на функцијата на Лагранж вкупните трошоци кои ги има супермаркетот „Хоризонт“ утврдени во периодот на опсервација од 1 месец изнесуваат **98.920.150,47 МКД.**

8.3 Резултати од конструкција на моделот со рамномерна дополна на залихи

Предмет на наша задача во однос на овој модел беше да се одредат оптималните големини детерминирани со основните претпоставки на моделот со кои треба да биде проследена набавката што ја прави супермаркетот. Според овој модел целокупниот циклус на набавката се одвива во два временски интервали. Во првиот временски интервал супермаркетот прави набавка во насока на зголемување на општото ниво на залихи, а додека во вториот временски интервал постои само трошењето на залихите сѐ до нивно смалување на нула кога повторно започнува новиот циклус на набавка.

Моделот беше креиран врз основа на податоците кои се прикажани подолу во Табела 2. Во нашата анализа беа земени 20 производи за кои се прави набавка во текот на 1 месец.

Во Табелата се дадени количствата за побарувачката и клиентката на производите, количеството и вредноста на моменталната залиха како и видовите на трошоци. Фиксните трошоци кои се дадени во табелата се земени дневно со просечна вредност согласно со месечниот износ на фиксни трошоци, трошоците на набавка се пресметани според количествата на набавка и набавните цени, а додека трошоците на складирање се пресметани како процент од вредноста на залихите, при што нивниот процент на износ е даден во табелата.

Пресметката на оптималните големини за моделот на рамномерна дополна на залихи беше направена во Excel 2007.

Табела 2. Преглед на различни видови на п-води со приказ на одделни видови т-ци дневно по единица производ
Table 2. Review of a different kind of products with presented certain types of costs daily per unit product

	ПОБАРУВАЧКА qv (kj)	**КЛИЕНТКА qi**	**МОМЕНТАЛНА ЗАЛИХА**					
вид на производ Type of product	количина (парче) Quantity (pcs)	количина (парче) Quantity (pcs)	количина (парче) Quantity (pcs)	износ (МКД) Amount (MKD)	фиксни трошоци c - дневно (МКД) fixed costs c per day (MKD)	трошоци на набавка c_3 (МКД) procurement costs c_3 (MKD)	трошоци на складирање r_j (%) storage costs (%)	трошоци на складирање c_1 (МКД) storage costs c_1 (MKD)
I	100	83	17	4947	1000	26000	0.007	34.629
II	84	69	15	4425	1000	22560	0.009	39.825
III	70	57	13	4654	1000	23100	0.01	46.54
IV	83	69	14	4676	1000	24900	0.009	42.084
V	90	75	15	4905	1000	26200	0.008	39.24
VI	94	78	16	4880	1000	25700	0.008	39.04
VII	87	72	15	4680	1000	24850	0.009	42.12
VIII	85	71	14	4648	1000	25780	0.009	41.832
IX	78	64	14	4802	1000	24000	0.009	43.218
X	97	80	17	5066	1000	26360	0.007	35.462
XI	90	73	17	5372	1000	25880	0.007	37.604
XII	76	63	13	4550	1000	23820	0.01	45.5
XIII	92	76	16	4704	1000	25450	0.008	37.632
XIV	67	58	9	3330	1000	24480	0.02	66.6
XV	70	57	13	4810	1000	24500	0.01	48.1
XVI	87	71	16	4960	1000	25900	0.008	39.68
XVII	95	79	16	4608	1000	24700	0.008	36.864
XVIII	80	66	14	4228	1000	22300	0.01	42.28
XIX	75	66	9	3132	1000	24370	0.02	62.64
XX	86	72	14	4228	1000	24780	0.01	42.28

Од креирањето на моделот со рамномерна дополна на залихи според дадените карактеристики т.е. вредности за производите I - XX добиени се резултати преку кои беа одредени оптималните големини со кои треба да се карктеризира набавниот циклус на супермаркетот и притоа беа одредени минималните трошоци за секој производ поединечно.

Производ I

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2 c q_v}} = 14.83$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 167.92$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 28.55$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2 c q_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.68$ дена (1ден и 16 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2 c c_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i$ =64.769.656,49 парични единици

Врз основа на добиените резултати супермаркетот треба да организира 14.83 циклуси со времетраење по 2.02 дена за период од 30 дена и во секој циклус да набавува 167.92 единици производи во временски подинтервал од 1.68 дена (1 ден и 16 часа), а набавката на производите мирува 0.34 дена = 8 часа за кое време ќе се потроши оптималното ниво на залихи од 28.55 единици производи. Минималните трошоци изнесуваат 64.769.656,49 парични единици.

Производ II

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2 c q_v}} = 14.86$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 139.30$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 24.85$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.66$ дена (1ден и 16 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.36$ дена (21.6 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 6.819.319{,}72$ парични единици

Резултатите укажуваат дека супермаркетот треба да ја организира својата набавка во 14.86 циклуси месечно, со оптимална големина на секој циклус од 139,30 единици така што интервалот помеѓу два циклуси изнесува 2.02 дена. Залихите достигнуваат оптимално ниво од 24.85 единици кои се трошат на секои 1.66 дена (1 ден и 16 часа), додека набавката мирува 0.36 дена (21,6 часа). Вкупните минимални трошоци изнесуваат 6.819.319,72 парични единици.

Производ III

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 21.33$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 114.85$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 21.33$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.54$ дена (1ден и 13 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.37$ дена (9 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 6.206.298{,}96$ парични единици

Во текот на месец дена треба да се организираат 21.33 циклуси со оптимална големина од 114.85 единици, при што оптмалното ниво на залиха треба да изнесува 21.33 единици. Интервалот помеѓу два циклуси е 2.01 дена така што во 1.54 дена (1 ден и 13 часа) задоволувањата на потребите е без застој, а во 0.37 = 9 часа набавката на производите ќе мирува. При вака организирано снабдување вкупните трошоци се минимални и изнесуваат 6.206.298,96 парични единици.

Производ IV

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i(q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.85 \text{ циклуси}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1(q_v - q_i)}} = 139.43 \text{ единици}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 23.52 \text{ единици}$$

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\,(q_v - q_i)}} = 1.68 \text{ дена (1ден и 16.5 часа)}$$

$$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34 \text{ дена (8 часа)}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}} = 2.02 \text{ дена}$$

$$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\,(q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 9.858.052{,}33 \text{ парични единици}$$

Од добиените резултати произлегува дека во интерес на обезбедување на оптимални трошоци за испорака на производите потребно е да се организираат 14.85 циклуси во тек на месецот со 139.43 количински единици од производот во секоја испорака. Интервалот помеѓу два циклуси е 2.02 дена. Оптималното ниво на залихи изнесува 23.52 количински единици од производот, при што побарувачката се задоволува во 1.68 дена (1 ден и 16.5 часа) а во 0.34 = 8 часа мирува. Ако испораката биде организирана на овој начин вкупните минимални трошоци ќе изнесуваат 9.858.052,33 парични единици.

Производ V

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.86$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 151.46$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 25.24$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.68$ дена (1ден и 16.5 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 6.595.213{,}633$ парични единици

Резултатите укажуваат дека супермаркетот во текот на месец дена треба да организира 14.86 циклуси со времетраење од 2.02 дена и во секоја да врши набавка од 151.46 производи за временски подинтервал од 1.68 дена (1 ден и 16.5 часа) за кое време се формираат залихи од 25.24 производи што се трошат за 0.34 дена = 8 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 6.595.213,633 парични единици.

Производи VI

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.27$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 153.22$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 26.08$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.63$ дена (1ден и 15 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.33$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}} = 1.96$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 9.308.644{,}606$ парични единици

Анализата покажува дека супермаркетот треба да организира 15.27 циклуси месечно, со времетраење на секој циклус 1.96 дена и да набавува 153.22 единици производи во временски интервал од 1.63 дена (1 ден и 15 часа), кога се формираат залихи од 26.08 единици производи што се трошат за 0.33 = 8 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 9.308.644,606 парични единици.

Производи VII

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.34$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 140.82$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 24.28$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.62$ дена (1ден и 15 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}} = 1.96$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 1.585.878{,}399$ парични единици

Врз основа на резултатите добиени од супермаркетот треба да организира 15.34 циклуси со времетраење по 1,96 дена за период од 30 дена и во секој циклус да набавува 140.82 единици производи во временски подинтервал од 1.62 дена (1 ден и 15 часа), а набавката на производите мирува 0.34 дена = 8 часа за кое време ќе се потроши оптималното ниво на залихи од 24.28 единици производи. Минималните трошоци изнесуваат 1.585.878,399 парични единици.

Производ VIII

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.84 \text{ циклуси}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1(q_v - q_i)}} = 143.56 \text{ единици}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 23.64 \text{ единици}$$

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.69 \text{ дена (1ден и 16.6 часа)}$$

$$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.33 \text{ дена (8 часа)}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02 \text{ дена}$$

$$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 8.187.573{,}877 \text{ парични единици}$$

Добиените резултати покажуваат дека во интерес на обезбедување на оптимални трошоци за испорака на производите потребно е да се организираат 14.84 циклуси во тек на 30 дена со 143.56 количински единици од производот во секоја испорака. Интервалот помеѓу два циклуси е 2.02 дена. Оптималното ниво на залихи изнесува 23.64 количински единици од производот, при што побарувачката се задоволува во 1.69 дена (1 ден и 16.6 часа) а во 0.33 = 8 часа мирува. Ако испораката биде организирана на овој начин вкупните минимални трошоци ќе изнесуваат 8.187.573,877 парични единици.

Производ IX

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.95 \text{ циклуси}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1(q_v - q_i)}} = 128.46 \text{ единици}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 23.06 \text{ единици}$$

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.65 \text{ дена (1ден и 15.6 часа)}$$

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}}$ = 0.36 дена (8.6 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 6.327.493{,}398$ парични единици

Од анализата на резултатите произлегува дека треба да се организираат 14.95 циклуси со времетраење од 2.01 дена и во секоја да врши набавка од 128.46 производи за временски подинтервал од 1.65 дена (1 ден и 15.6 часа) за кое време се формираат залихи од 23.06 производи што се трошат за 0.36 дена = 8.6 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 6.327.493,398 парични единици.

Производ X

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.96$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 160.45$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 28.12$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.65$ дена (1ден и 15.6 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}}$ = 0.35 дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 2.324.315{,}857$ парични единици

Резултатите укажуваат дека супермаркетот во текот на 30 дена треба да организира 14.96 циклуси со времетраење од 2.01 дена и во секоја да врши набавка од 160.45 производи за временски подинтервал од 1.65 дена (1 ден и 15,6 часа) за кое време се формираат залихи од 28.12 производи што се трошат за 0.35 дена = 8 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 2.324.315,857 парични единици.

Производ XI

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.27 \text{ циклуси}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 143.37 \text{ единици}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 27.08 \text{ единици}$$

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.59 \text{ дена (1ден и 14 часа)}$$

$$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.37 \text{ дена (9 часа)}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 1.96 \text{ дена}$$

$$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 8.659.150{,}471 \text{ парични единици}$$

Резултатите добиени покажуваат дека во интерес на обезбедување на оптимални трошоци за испорака на производите потребно е да се организираат 15.27 циклуси во тек на 30 дена со 143.37 количински единици од производот во секоја испорака. Интервалот помеѓу два циклуси е 1.96 дена. Оптималното ниво на залихи изнесува 27.08 количински единици од производот, при што побарувачката се задоволува во 1.59 дена (1 ден и 14 часа) а во 0.37 = 9 часа мирува. Ако испораката биде организирана на овој начин вкупните минимални трошоци ќе изнесуваат 8.659.150,471 парични единици.

Производ XII

$$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.85 \text{ циклуси}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 127.24 \text{ единици}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 21.76 \text{ единици}$$

$$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.67 \text{ дена (1ден и 16 часа)}$$

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34$ дена (8.2 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 5.359.508{,}252$ парични единици

Од анализата на резултатите произлегува дека треба да се организираат 14.85 циклуси со времетраење од 2.02 дена и во секоја да врши набавка од 127.24 производи за временски подинтервал од 1.67 дена (1 ден и 16 часа) за кое време се формираат залихи од 21.76 производи што се трошат за 0.34 дена = 8.2 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 5.359.508,252 парични единици.

Производ XIII

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.96$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 152.39$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 26.50$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.66$ дена (1ден и 16 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.35$ дена (8.4 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 6.242.921{,}804$ парични единици

Анализата покажува дека супермаркетот треба да организира 14.96 циклуси месечно, со времетраење на секој циклус 2.01 дена и да набавува 152.39 единици производи во временски интервал од 1.66 дена (1 ден и 16 часа), кога се формираат залихи од 26.50 единици производи што се трошат за 0.35 = 8.4 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 6.242.921,804 парични единици.

Производ XIV

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.28$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 113.87$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 15.29$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.69$ дена (1ден и 16.6 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.26$ дена (6 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 1.96$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 9.287.361{,}257$ парични единици

Врз основа на резултатите добиени од супермаркетот треба да организира 15.28 циклуси со времетраење по 1,96 дена за период од 30 дена и во секој циклус да набавува 113.87 единици производи во временски подинтервал од 1.69 дена (1 ден и 16.6 часа), а набавката на производите мирува 0.26 дена = 6 часа за кое време ќе се потроши оптималното ниво на залихи од 15.29 единици производи. Минималните трошоци изнесуваат 9.287.361,257 парични единици.

Производ XV

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.14$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 112.97$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 20.98$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.61$ дена (1ден и 14.6 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} =$ 0.37 дена (9 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}} = 1.98$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 7.020.753{,}935$ парични единици

Анализата покажува дека супермаркетот треба да организира 15.14 циклуси месечно, со времетраење на секој циклус 1.98 дена и да набавува 112.97 единици производи во временски интервал од 1.61 дена (1 ден и 14.6 часа), кога се формираат залихи од 20.98 единици производи што се трошат за 0.37 = 9 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 7.020.753,935 парични единици.

Производ XVI

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 15.27$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1(q_v - q_i)}} = 139.49$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 25.65$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.60$ дена (1ден и 14.4 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} =$ 0.36 дена (8.6 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i(q_v - q_i)}} = 1.96$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 5.632.438{,}776$ парични единици

Од добиените резултати произлегува дека во интерес на обезбедување на оптимални трошоци за испорака на производите потребно е да се организираат 15.27 циклуси во тек на 30 дена со 139.49 количински единици од производот во секоја испорака. Интервалот помеѓу два циклуси е 1.96 дена. Оптималното ниво на залихи изнесува 25.65 количински единици од производот, при што побарувачката се задоволува во 1.60 дена (1 ден и 14.4 часа) а во 0.36 = 8.6

часа мирува. Ако испораката биде организирана на овој начин вкупните минимални трошоци ќе изнесуваат 5.632.438,776 парични единици.

Производ XVII

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2 c q_v}} = 14.86$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 159.52$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2 c q (q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 26.87$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2 c q_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.68$ дена (1ден и 16.3 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2 c (q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.34$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2 c c_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 4.428.433{,}186$ парични единици

Резултатите укажуваат дека супермаркетот во текот на 30 дена треба да организира 14.86 циклуси со времетраење од 2.02 дена и во секоја да врши набавка од 159,52 производи за временски подинтервал од 1.68 дена (1 ден и 16.3 часа) за кое време се формираат залихи од 26.87 производи што се трошат за 0.34 дена = 8 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 4.428.433,186 парични единици.

Производ XVIII

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2 c q_v}} = 14.82$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2 c q_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 133.57$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2 c q (q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 23.37$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.67$ дена (1ден и 16 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.35$ дена (8.4 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.02$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 4.464.847{,}954$ парични единици

Врз основа на добиените резултати супермаркетот треба да организира 14.82 циклуси со времетраење по 2.02 дена за период од 30 дена и во секој циклус да набавува 133.57 единици производи во временски подинтервал од 1.67 дена (1 ден и 16 часа), а набавката на производите мирува 0.35 дена = 8.4 часа за кое време ќе се потроши оптималното ниво на залихи од 23.37 единици производи. Минималните трошоци изнесуваат 4.464.847,954 парични единици.

Производ XIX

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.94$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 132.52$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 15.90$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.77$ дена (1ден и 18.5 часа)

$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.24$ дена (5.8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 3.985.923{,}036$ парични единици

Во текот на месец дена треба да се организираат 14.94 циклуси со оптимална големина од 132.52 единици, при што ооптмалното ниво на залиха треба да изнесува 15.90 единици. Интервалот помеѓу два циклуси е 2.01 дена така што во 1.77 дена (1 ден и 18.5 часа) задоволувањата на потребите е без застој, а во 0.24 = 5.8 часа набавката на производите ќе мирува. При вака организирано снабдување вкупните трошоци се минимални и изнесуваат 3.985.923,036 парични единици.

Производ XX

$n_0 = \sqrt{\frac{c_1 T^2 q_i (q_v - q_i)}{2cq_v}} = 14.93$ циклуси

$q_0 = \sqrt{\frac{2cq_v q_i}{c_1 (q_v - q_i)}} = 144.64$ единици

$z_0 = \sqrt{\frac{2cq(q_v - q_i)_i}{c_1 q_v}} = 23.55$ единици

$t_{10} = \sqrt{\frac{2cq_i}{c_1\, q_v\, (q_v - q_i)}} = 1.68$ дена (1ден и 16.3 часа)

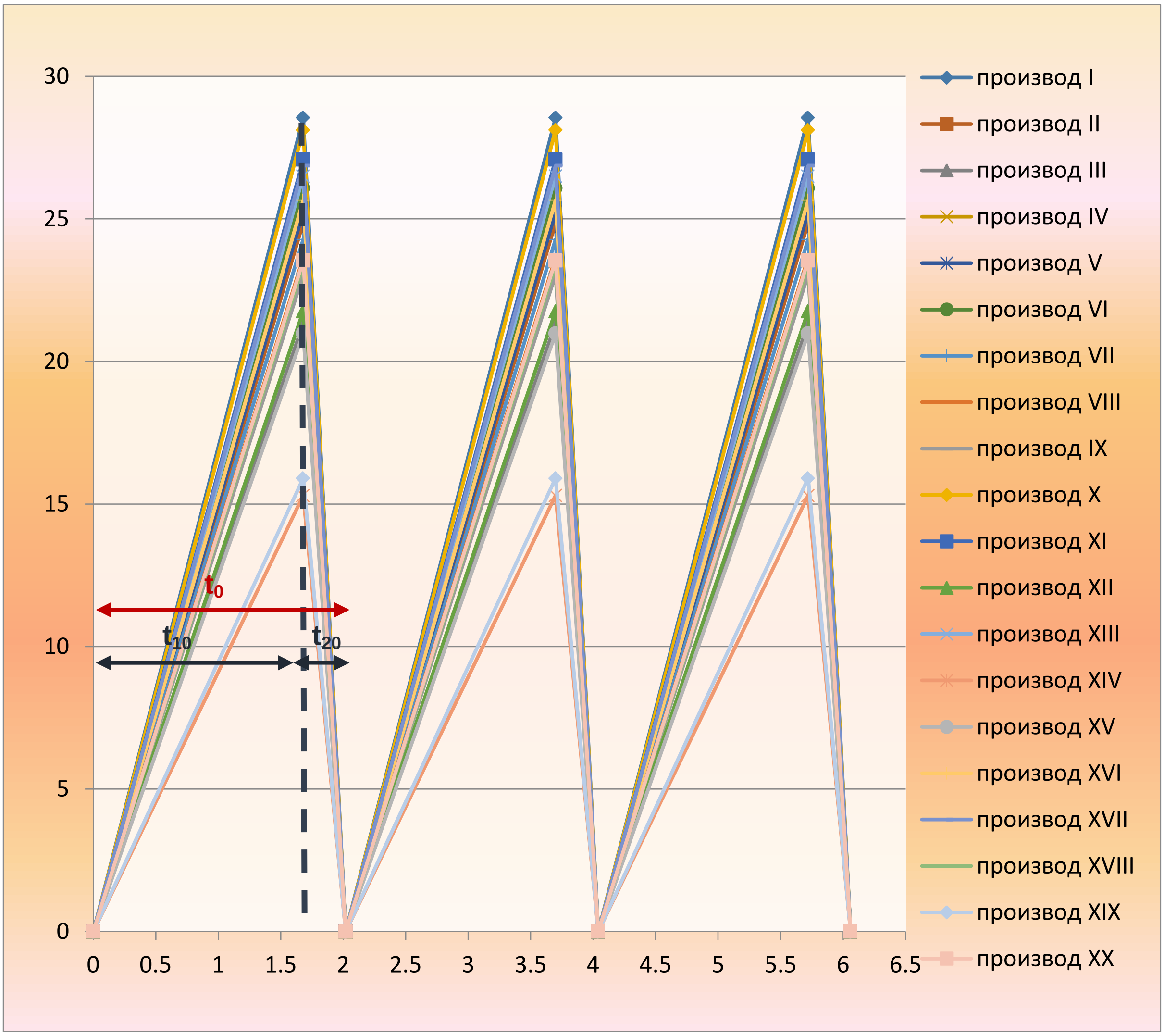
$t_{20} = \sqrt{\frac{2c(q_v - q_i)}{c_1\, q_v\, q_i}} = 0.33$ дена (8 часа)

$t_0 = \sqrt{\frac{2cq_v}{c_1\, q_i (q_v - q_i)}} = 2.01$ дена

$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\, T^2 q_i\, (q_v - q_i)}{q_v}} + c_3 T q_i = 5.041.066{,}531$парични единици

Резултатите добиени за овој производ покажуваат дека во текот на месец дена треба да организира 14.93 циклуси со времетраење од 2.01 дена и во секоја да врши набавка од 144.64 производи за временски подинтервал од 1.68 дена (1 ден и 16.3 часа) за кое време се формираат залихи од 23.55 производи што се трошат за 0.33 дена = 8 часа. Вкупните минимални трошоци изнесуваат 5.041.066,531 парични единици.

Графички приказ на обработениот модел за секој производ поединечно е даден на следната слика:



Слика 6. Графички приказ на моделот со рамномерна дополна на залихи за 20 различни производи
Figure 6. Grahic representation of the inventory model with steady addition

Според графичкиот приказ на Слика 6 се забележува дека набавниот циклус трае 2,02 дена, каде првиот временски интервал t_{10} е околу 1,68 дена, а вториот интервал t_{20} се движи околу 0,32 дена во кој се врши трошење на залихите, се додека не настапи нов набавен циклус на производите. Според одвивањето на овој процес воочуваме дека графикот на моделот со рамномерна дополна на залихи има циклично движење.

Минималните вкупни трошоци за моделот со рамномерна дополна на залихи беа пресметани со следнава функција:

$$F(z_0) = \sqrt{\frac{2cc_1\,T^2q_i\,(q_v - q_i)}{q_v}} + c_3Tq_i$$

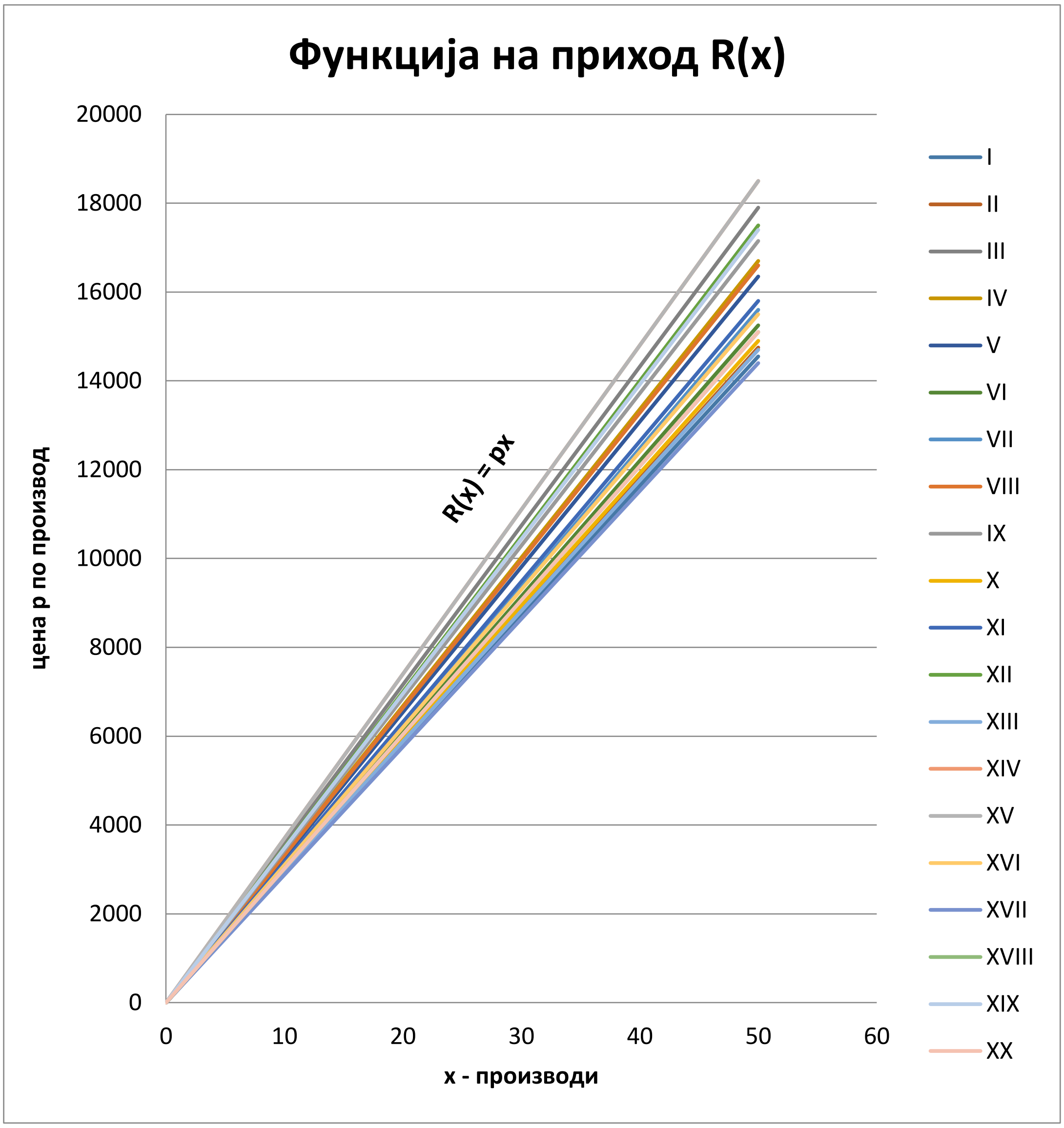
Со замена на параметрите дадени во функцијата добивме дека минималните вкупни трошоци на супермаркетот ќе изнесуваат **182.104.852,5 МКД** ако набавката се врши на секои 2,02 дена.

Табела 3: Табеларен преглед на остварен приход од продажба на производите за различна количина **x**
Table 3: Table review of realized revenue from sale of products for different quantity **x**

Вид на производ Type of product	**m**	Количина Quantity **x**	Количина Quantity **x**	Количина Quantity **x**	Количина Quantity **x**	Количина Quantity **x**	Количина Quantity **x**	Цена Price **p**	Фиксни Т-ци дневно Fixed Costs per day (MKD) **c**	**R(x)**	**R(x)**	**R(x)**	**R(x)**	**R(x)**	**R(x)**
I	260	0	10	20	30	40	50	291	1000	0	2910	5820	8730	11640	14550
II	268	0	10	20	30	40	50	295	1000	0	2950	5900	8850	11880	14750
III	330	0	10	20	30	40	50	358	1000	0	3580	7160	10740	14320	17900
IV	300	0	10	20	30	40	50	334	1000	0	3340	6680	10020	13360	16700
V	291	0	10	20	30	40	50	327	1000	0	3270	6540	9810	13080	16350
VI	273	0	10	20	30	40	50	305	1000	0	3050	6100	9150	12200	15250
VII	286	0	10	20	30	40	50	312	1000	0	3120	6240	9360	12480	15600
VIII	203	0	10	20	30	40	50	332	1000	0	3320	6640	9960	13280	16600
IX	308	0	10	20	30	40	50	343	1000	0	3430	6860	10290	13720	17150
X	272	0	10	20	30	40	50	298	1000	0	2980	5960	8940	11920	14900
XI	287	0	10	20	30	40	50	316	1000	0	3160	6320	9480	12640	15800
XII	313	0	10	20	30	40	50	350	1000	0	3500	7000	10500	14000	17500
XIII	277	0	10	20	30	40	50	294	1000	0	2940	5880	8820	11760	14700
XIV	365	0	10	20	30	40	50	370	1000	0	3700	7400	11100	14800	18500
XV	350	0	10	20	30	40	50	370	1000	0	3700	7400	11100	14800	18500
XVI	298	0	10	20	30	40	50	310	1000	0	3100	6200	9300	12400	15500
XVII	260	0	10	20	30	40	50	288	1000	0	2880	5760	8640	11520	14400
XVIII	279	0	10	20	30	40	50	302	1000	0	3020	6040	9060	12080	15100
XIX	325	0	10	20	30	40	50	348	1000	0	3480	6960	10440	13920	17400
XX	288	0	10	20	30	40	50	302	1000	0	3020	6040	9060	12080	15100

Табела 4. Табеларен преглед на трошоците и остварената добивка од продажба на производите за различна количина **x**
Table 4. Table review of costs and realized profit from sale of products for different quantity **x**

Вид на производ Type of product	**C(x)**	**C(x)**	**C(x)**	**C(x)**	**C(x)**	**C(x)**	**P(x)**	**P(x)**	**P(x)**	**P(x)**	**P(x)**	**P(x)**
I	1000	3600	6200	8800	11400	14000	-1000	-690	-380	-70	240	550
II	1000	3680	6360	9040	11720	14400	-1000	-730	-460	-190	80	350
III	1000	4300	7600	10900	14200	17500	-1000	-720	-440	-160	120	400
IV	1000	4000	7000	10000	13000	16000	-1000	-660	-320	20	360	700
V	1000	3910	6820	9730	12640	15550	-1000	-640	-280	80	440	800
VI	1000	3730	6460	9190	11920	14650	-1000	-680	-360	-40	280	600
VII	1000	3860	6720	9580	12440	15300	-1000	-740	-480	-220	40	300
VIII	1000	4030	7060	10090	13120	16150	-1000	-710	-420	-130	160	450
IX	1000	4080	7160	10240	13320	16400	-1000	-650	-300	50	400	750
X	1000	3720	6440	9160	11880	14600	-1000	-740	-480	-220	40	300
XI	1000	3870	6740	9610	12480	15350	-1000	-710	-420	-130	160	450
XII	1000	4130	7260	10390	13520	16650	-1000	-630	-260	110	480	850
XIII	1000	3770	6540	9310	12080	14850	-1000	-830	-660	-490	-320	-150
XIV	1000	4650	8300	11950	15600	19250	-1000	-950	-900	-850	-800	-750
XV	1000	4500	8000	11500	15000	18500	-1000	-800	-600	-400	-200	0
XVI	1000	3980	6960	9940	12920	15900	-1000	-880	-760	-640	-520	-400
XVII	1000	3600	6200	8800	11400	14000	-1000	-720	-440	-160	120	400
XVIII	1000	3790	6580	9370	12160	14950	-1000	-770	-540	-310	-80	150
XIX	1000	4250	7500	10750	114000	17250	-1000	-770	-540	-310	-80	150
XX	1000	3880	6760	9640	12520	15400	-1000	-860	-720	-580	-440	-300

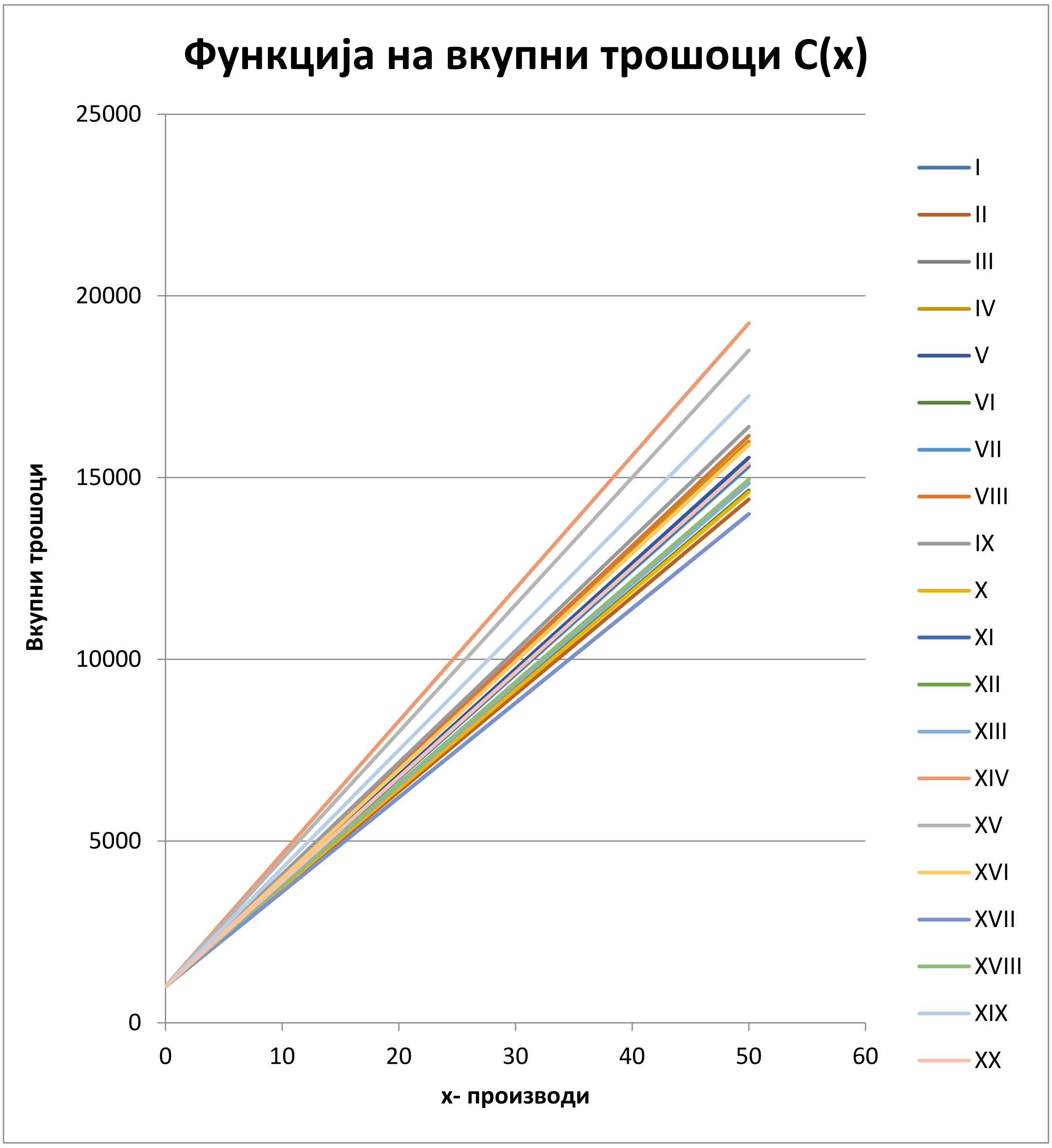


Слика 7. Функција на приход за 20 различни производи
Figure 7. Function of revenue for 20 different products

Според добиените резултати даваме графички приказ за функцијата на приход. Треба да се напомене дека функцијата на приход е правопропорционална со бројот на набавени и продадени единици од еден производ.

Од графичкиот приказ (Слика 7) можеме да заклучиме дека со зголемување на бројот на продадените единици расте и функцијата на приходот за секој производ поединечно и за нула продадени единици се остварува нула денари приход.

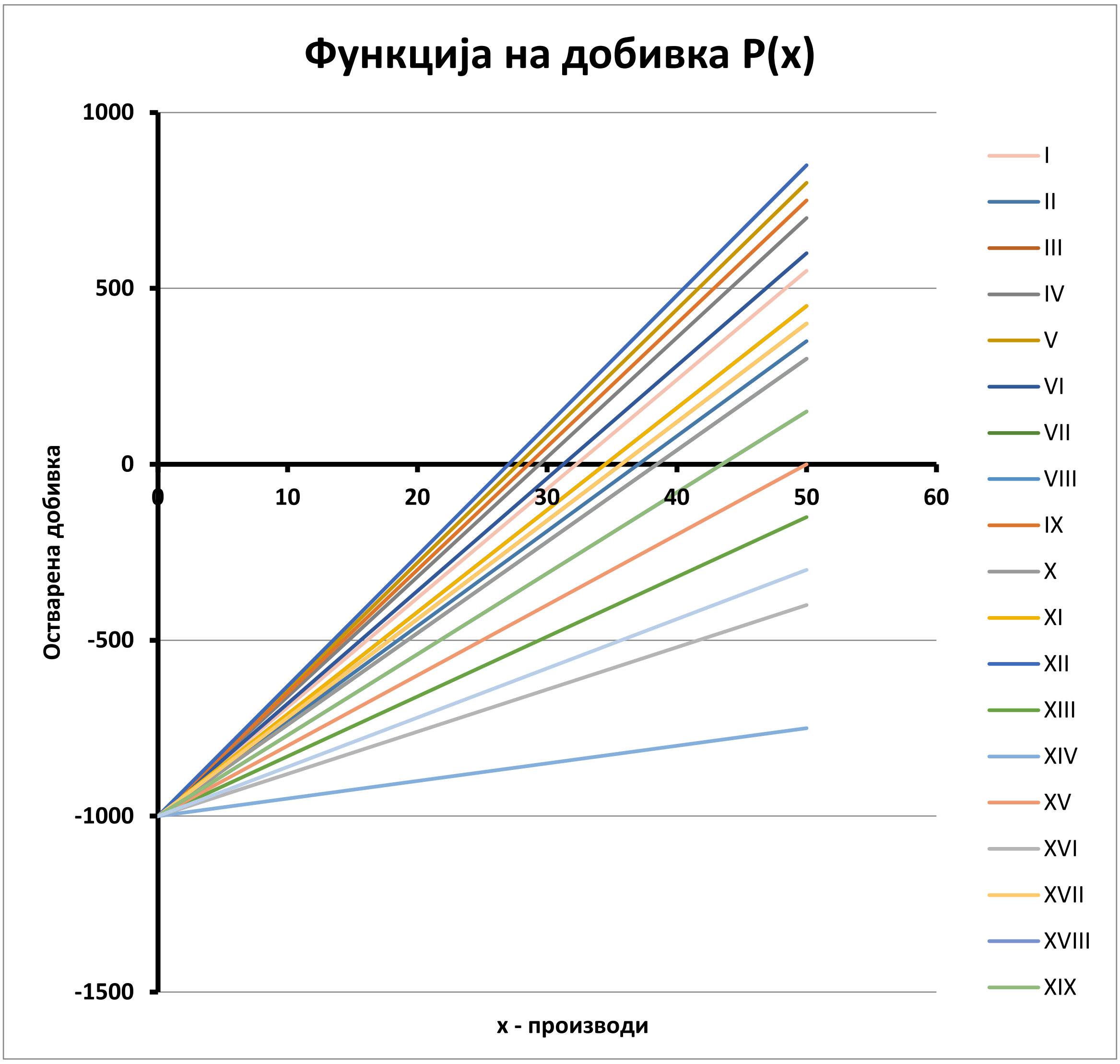
.



Слика 8. Функција на вкупни трошоци за 20 различни производи
Figure 8. Function of total costs for 20 different products

Трошоците за набавка и продажба на еден производ се состојат од два дела: фиксни и променливи (варијабилни) трошоци.Фиксните трошоци ги претставуваат трошоците за набавка и продажба на одреден производ независно од бројот на набавени едници.Фиксните трошоци се константа и ги означуваме со k. Променливите трошоци зависат од бројот x на набавени единици од производот т.е. тие се функција од x и се означуват со $F(x)$. Најчесто овие трошоци се пропорционални со бројот x на набавени единици каде $F(x) = mx$ а m ги означува трошоците за набавка и продажба по единица производ.Вкупните трошоци на еден производ го наоѓаме по формулата $C(x) = k + F(x)$

Од графичкиот приказ (Слика 8) гледаме дека како расте бројот на продадени x единици така расте и функцијата на трошоци за единица производ и дека трошоците за нула продадени единици се еднакви на фиксните трошоци.



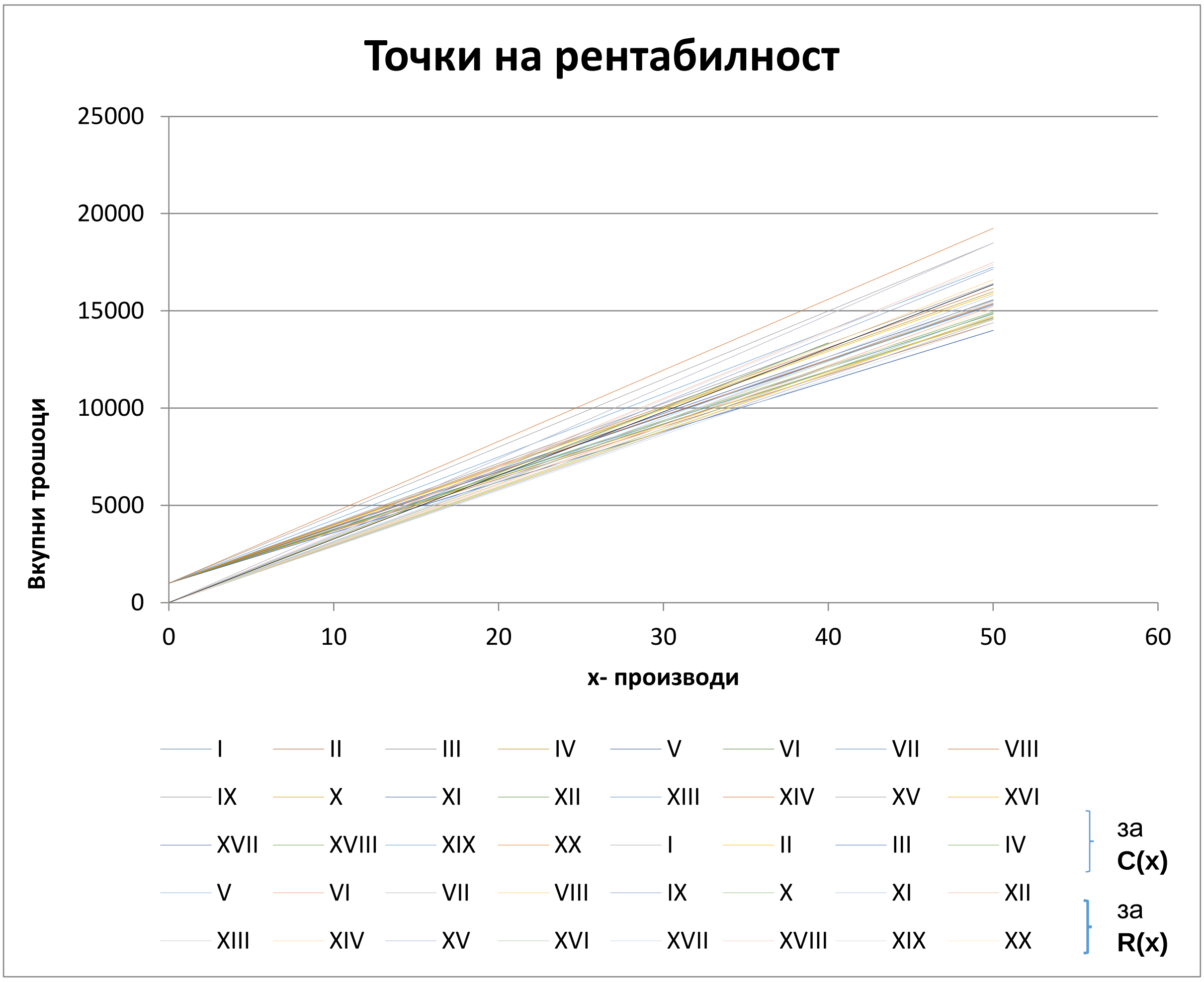
Слика 9. Функција на добивка за 20 различни производи

Figure 9. Function of profit for 20 different products

Функција на добивка:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Од графикот на функција на добивка (Слика 9) забележуваме дека за нула продадени производи се јавува загуба од 1000 денари, со зголемување на бројот на продадени производи расте и функцијата на добивка, а за продадени x = 50 за производ XV се остварува добивка од нула денари.



Слика 10. Точки на рентабилност за 20 различни производи
Figure 10. Points of ROI for 20 different products

Точката во која добивката е 0 се вика точка на рентабилност. Точката на рентабилност се наоѓа од формулата:

$$P(x) = 0 \text{ или } C(x) = R(x)$$

Од графикот гледаме дека C(x) е права, а и R(x) е права и тие се сечат во една точка каде добивката е нула.

- За производ I точката на рентабилност е $x = 32.26$ производи што значи дека за 32.26 се остварува добивка од нула денари.
- За производ II точката на рентабилност е $x = 37.04$ производи што значи дека за 37.04 се остварува добивка од нула денари.

- За производ III точката на рентабилност е $x = 35.7$ производи што значи дека за 35.7 се остварува добивка од нула денари.
- За производ IV точката на рентабилност е $x = 29.4$ производи што значи дека за 29.4 се остварува добивка од нула денари.
- За производ V точката на рентабилност е $x = 27.77$ производи што значи дека за 27.77 се остварува добивка од нула денари.
- За производ VI точката на рентабилност е $x = 31.25$ производи што значи дека за 31.25 се остварува добивка од нула денари.
- За производ VII точката на рентабилност е $x = 38.5$ производи што значи дека за 38.5 се остварува добивка од нула денари.
- За производ VIII точката на рентабилност е $x = 34.5$ производи што значи дека за 34.5 се остварува добивка од нула денари.
- За производ IX точката на рентабилност е $x = 28.6$ производи што значи дека за 28.6 се остварува добивка од нула денари.
- За производ X точката на рентабилност е $x = 38.5$ производи што значи дека за 38.5 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XI точката на рентабилност е $x = 34.5$ производи што значи дека за 34.5 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XII точката на рентабилност е $x = 27.03$ производи што значи дека за 27.03 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XIII точката на рентабилност е $x = 58.8$ производи што значи дека за 58.8 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XIV точката на рентабилност е $x = 200$ производи што значи дека за 200 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XV точката на рентабилност е $x = 50$ производи што значи дека за 50 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XVI точката на рентабилност е $x = 83.3$ производи што значи дека за 83.3 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XVII точката на рентабилност е $x = 35.7$ производи што значи дека за 35.7 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XVIII точката на рентабилност е $x = 43.5$ производи што значи дека за 43.5 се остварува добивка од нула денари.

- За производ XIX точката на рентабилност е $x = 43.5$ производи што значи дека за 43.5 се остварува добивка од нула денари.
- За производ XX точката на рентабилност е $x = 71.4$ производи што значи дека за 71.4 се остварува добивка од нула денари.

8.3.1 Дискусија

Според резултатите кои ги добивме за двата типа на модели на залиха можеме да ја детерминираме оптималната политика на нарачка на производите, а со тоа да се согледа и која е најдобрата стратегија која треба да ја применува компанијата кога е во прашање проблемот со залихите.

Моделот со ограничен волумен на магацинскиот простор ни дава решенија за тоа како може компанијата да се справи со проблемот на нарачка на оптимално ниво на производи без да постои загуба во работењето. *Со креирањето на овој математички модел ние бевме во можност да согледаме која е оптималната количина на производи што компанијата „Хоризонт“- Струмица треба да ја нарачува месечно во услови на постоење на детерминирана побарувачка и при постоење на ограничен магацински простор.* Трошоците кои беа пресметани не се високи и пред сè треба да се земе во предвид тоа што висината на овие трошоци произлегува како резултат на тоа што нарачката се врши месечно.

Моделот со рамномерна дополна на залихи ни овозможи резултати за *оптиманите големини* поврзани со проблемот на залихите. *Преку конструкцијата на овој модел беше одреден оптималниот временски период на кој треба да се врши нарачката во супермаркетот и оптималното ниво на залихи кое треба да постои во определен временски интервал.* Исто така и кај овој модел ги одредивме вкупните трошоци предизвикани од набавката, при што истите беа повисоки за разлика од трошоците кај претходниот модел. Тоа произлегува оттаму што кај овој модел нарачката се врши на секои 2 дена, а според другиот модел производите се нарачуваат месечно.

И двата модели обезбедуваат релевантни податоци за различни услови под кои се разгледува проблемот поврзан со залихите, така што од конструирањето на моделите компанијата има можност да избере стратегија која ќе ја задоволува побарувачката и каде ќе постои оптимално ниво на залихи кое нема да предзвика високи и дополнителни трошоци. Исто така на тој начин можноста да постои недостиг на залихи во одреден временски период ќе биде отстранета, така што клиентите во секој момент ќе може да бидат опслужени.

Поради тоа наша сугестија е да бидат користени овие математички модели со цел компанијата да може однапред точно и навремено да ги предвиди оптималните големини кои треба да ги вклучи во своето работење во насока на остварување на поголема добивка и намалување на соодветните трошоци поврзани со залихите и активностите околу набавката.

8.4 Анализа и основни конифгурации на системот и редовите на чекање во него

Во нашата анализа беа креирани неколку квантитативни модели кои можат да им помогнат на доносителите на одлуки, а воедно и на менаџментот на супермаркетот да ги воочат проблемите кои секојдневно произлегуваат како резултат на редовите на чекање, како и да донесуваат подобри одлуки за тоа како да управуваат со нив.

Поимот систем со редови на чекање се користи за да означи збир на еден или повеќе редови на чекање заедно со серверот или збир на сервери кои обезбедуваат услуги за овие редови на чекање.

Резултатите од истражувањето се добиени врз основа на податоците од супермаркетот „Хоризонт“ кој претставува пример за систем со редови на чекање. Притоа беа изградени следниве модели кои вклучуваат:

- *еден ред на чекање и еден сервер (каса)*
- *еден ред на чекање и два сервери (каси)*
- *два реда на чекање и два сервери (каси)*

Првиот модел спаѓа во групата на едноканални системи на масовно опслужување, а останатите два спаѓаат во групата на повеќеканални СМО.

Супермаркетот располага со три каси т.е. три сервери кои се поставени покрај влезот на супермаркетот и на секоја каса опслужувањето го врши еден вработен. Работното веме на супермаркетот е во текот на сите денови од неделата и поради тоа истражувањето го вршевме за сите 7 дена. Секој ден од понеделник до петок просечно пристигнуваат различен број на клиенти, додека интензитетот на опслужување на системот е еднаков.При конструкцијата на моделите се раководевме од следните претпоставки кои беа поставени:

1) Пристигнувањето на клиентите во супермаркетот го следи *Поасоновиот закон за распределба*
   - Бројот на потрошувачи кои пристигнуваат во редот на опслужување од касата во временски период $[T, T+t]$, зависи само од должината на временскиот период t, но не и од односот со почетниот временски период T.
   - Доколку времето t е доволно мало, ќе посто најмногу еден клиент кој пристигнува во редот на касата за време на временскиот период $[T, T+t]$.

Притоа бројот на клиенти кои пристигнуваат во интервал $[T, T+t]$ ја следат Пуасоновата распределба, при што доаѓањата во редот го следат Пуасоновиот процес. Пуасоновиот процес е низа на настани „случајно распределени во времето“.

2) Времето помеѓу пристигнувањата на Пуасноновиот процес е опишано со експоненцијална распределба.

   Нека τ е времето до следното пристигнување почнувајќи од t_0 до t_1 т.е. (t_0- t_1) .

   $P(\tau_1 > t) = P_0(t) = e^{-\mu t}$

   Тогаш $P(\tau_1 \leq t) = F_{\tau_1}(t) = 1 - e^{-\mu t}$ и $f_{\tau_1}(t) = \mu e^{-\mu t}$ за $t > 0$

   Слично на ова, случајните променливи τ_1, τ_2,..., τ_n,…на времето помеѓу пристигнувањата се меѓусебно независни и секоја од нив се карактеризира со експоненцијална распределба со средна вредност $\frac{1}{\mu}$.

3) Времето на опслужување подлежи на експоненцијална распределба. Должината на времето помеѓу пристигнувањата и заминувањата ја содржи должината на редот и времето на опслужување. Па, согласно на тоа временските интервали на опслужување на клиентите се експоненцијално распределени.
4) Ослужувањето кое се врши е идентично за сите каси кои се наоѓаат паралелно една до друга.

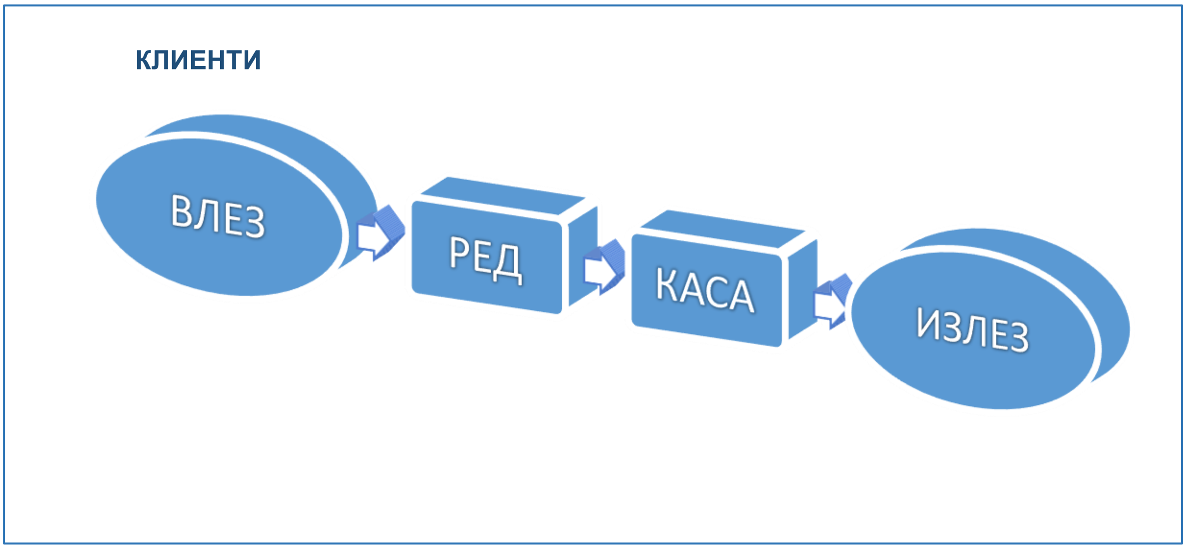
5) Ниту еден клиент не го напушта редот сѐ додека не биде опслужен.
6) Постои неограничена популација од клиенти во системот (супермаркетот) т.е. не постои ограничен капацитет на должината на редот на чекање.
7) Клиентите се опслужуваат според методот FIFO (прв дојден – прв опслужен). Сите тие имаат еднаков третман во однос на чекањето во редот за услуга и притоа се почитува редоследот на доаѓање. Бидејќи клиентите во редот се опслужуваат по истиот редослед по кој доаѓаат, тоа значи дека првиот клиент кој доаѓа во редот е прв кој заминува од него.

8.5 Резултати од примена на едноканален систем на масовно опслужување

Модел со еден ред и еден сервер (каса)M/M/1

Кај овој модел ги поставуваме следните претпоставки:

- Потои еден сервер т.е. една каса $s(k) = 1$
- λ – просечен број на доаѓања (различен за секој ден од неделата)
- Интензитетот на опслужување е еднаков во текот на цела недела $\mu = 30$ (понеделник - недела)



Слика 11. Едноканален СМО со еден ред и една каса **M/M/1**
Figure 11.Single Stage Queuing system with Single- Queue and Single –Server **M/M/1**

Овој модел е означен како **M/M/1**, каде првата ознака **M** претставува Марков процес или Маркова експоненцијална распределба[12] на времето помеѓу пристигнувањата, втората ознака **M** претставува Маркова експоненцијална распределба на времето на опслужување, а ознаката **1** (во општ облик позната како s (е позитивен цел број)) го означува бројот на сервери, во нашиот случај бројот на каси.

❖ НЕДЕЛНА АНАЛИЗА НА РЕДОВИТЕ НА ЧЕКАЊЕ

Во ***понеделник*** пристигнуваат просечно 18 клиенти на час ($\lambda = 18$) кои се одвиваат според Пуасоновата дистрибуција, при што 30 клиенти просечно се опслужуваат на час од еден продавач ($\mu = 30$) проследени со експоненцијална распределба.

Табела 5. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 18$)
Table 5. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 18$)

n	Pn
0	0.00000001
1	0.00000027
2	0.00000247
3	0.0000148
4	0.00006661
5	0.000239817
6	0.000719452
7	0.00185002
8	0.004162544
9	0.008325088
10	0.014985159
11	0.024521169
12	0.036781753
13	0.050928581
14	0.065479604
15	0.078575525
16	0.088397466
17	0.093597316

ПРОДОЛЖУВА	
18	0.093597316
19	0.088671142
20	0.079804028
21	0.068403452
22	0.055966461
23	0.043799839
24	0.032849879
25	0.023651913
26	0.016374401
27	0.010916268
28	0.007017601
29	0.004355752
30	0.002613451
31	0.001517488
32	0.000853587
33	0.000465593
СУМА	**1**

[12] Еден стохастички процес претставува Марков процес (според Рускиот математичар Andrey Andreyevich Markov) ако во било кое време t условната веројатност за произволен иден настан даден со претходната состојба на процесот, т.е. дадено $X(s)$за $s \leq t$ - е еднаква на условната веројатност на тој иден настан даден само како $X(t)$. Така, со цел да се направи преглед на веројатноста за случување на настани во иднината се користат Маркови процеси.

Слика 12.Пуасонова распределба на доаѓањатасо средна вредност $\lambda = 18$
Figure 12. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 18$

Во Табела 5 вредностите во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се поврзани сосекоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$. На пример, втората вредност која е прикажана во првата колона покажува дека 0.00000027 постои веројатноство супермаркетот да пристигне 1 клиент.

Подолу даваме графички приказ за Пуасоновата распределба на пристигнувањата на клиентите на час.

Графикот на Слика 12 покажува дека според Пуасоновиот закон за распределба, просечно може да се очекуваат 18 клиенти на час, но бидејќи Пуасоновата распределба на пристигнувањата оди кон десно тоа значи дека може да пристигнат многу повеќе клиенти (во овој случај 30 и повеќе) во време од 1 час.

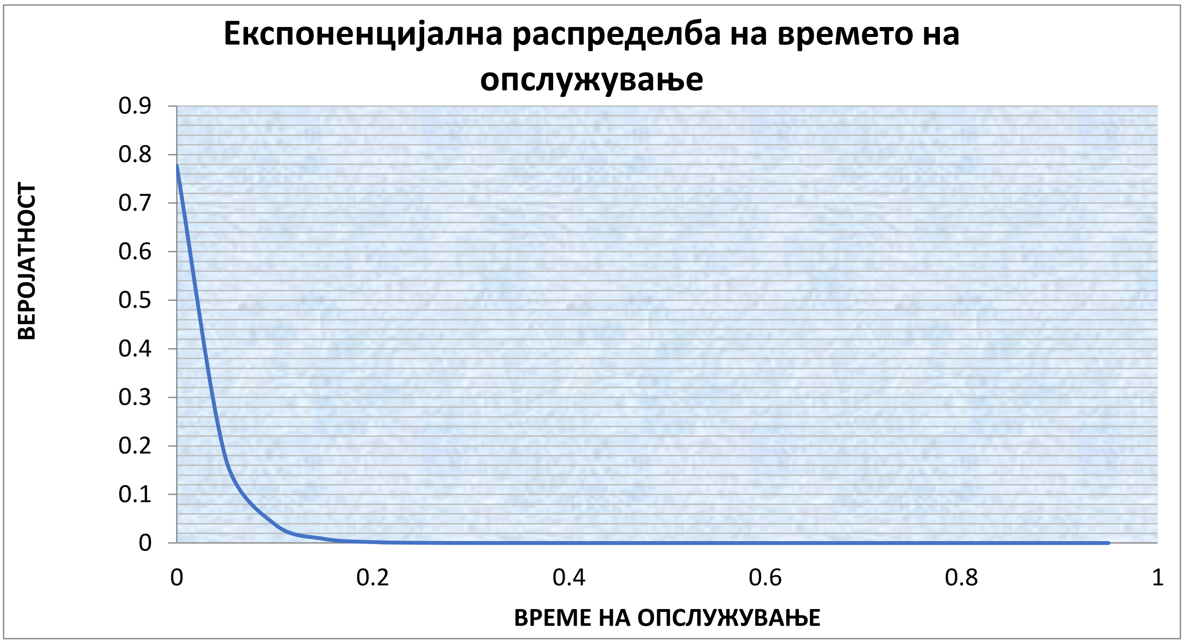
Согласно на Табела 5 и Слика 12 веројатноста да пристигнат 6 клиенти е 0.000719452. Меѓутоа тие 6 пристигнувања сигурно нема да се случат во исто време. Во некој случаен временски интервал повторно ќе се појави ново пристигнување. Овој период е познат како период или време помеѓу две пристигнувања. Доколку времето на пристигнување на клиентите на час е проследено со Пуасоновата распределба со средна вредност λ, тогаш може да се согледа дека времето помеѓу две пристигнувања е проследено со експоненцијална распределба со средна вредност $\frac{1}{\lambda}$.

Ако во понеделник просечно пристигнуваат 18 клиенти на час $\lambda = 18$ според Пуасоновиот поток, времето помеѓу две пристигнувања проследено со експоненцијална распределба има просечна вредност $\frac{1}{18} = 0.055$ часа. Тоа значи дека клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 3.3 минути $(0.05 \times 60\ min = 3.3\ min)$.

Табела 6.Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 6. Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.05**	0.77686984
0.05	до	**0.1**	0.173343092
0.1	до	**0.15**	0.038678072
0.15	до	**0.2**	0.008630244
0.2	до	**0.25**	0.001925668
0.25	до	**0.3**	0.000429675
0.3	**до**	**0.35**	9.58734E-05
0.35	до	**0.4**	2.13922E-05
0.4	до	**0.45**	4.77325E-06
0.45	до	**0.5**	1.06506E-06
0.5	до	**0.55**	2.37646E-07
0.55	до	**0.6**	5.30261E-08
0.6	до	**0.65**	1.18317E-08
0.65	до	**0.7**	2.64001E-09
0.7	до	**0.75**	5.89066E-10
0.75	до	**0.8**	1.31438E-10
0.8	до	**0.85**	2.93279E-11
0.85	до	**0.9**	6.54393E-12
0.9	до	**0.95**	1.46015E-12
0.95	до	**1**	3.25803E-13

Во Табела 6 е прикажана веројатноста за времето на опслужување која опаѓа во различни временски интервали. На пример, првата вредност за веројатноста покажува дека 0.77686984 постои веројатност дека времето на опслужување ќе се движи во временскиот интервал меѓу 0 и 0.05 часа.



Слика 13.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 13. Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Графикот на Слика 13 покажува дека за експоненцијална распределба пократките временски периоди на опслужување имаат поголема веројатност за да се случат. Поради тоа графичкиот приказ кој ја претставува екпоненцијалната распределба на времето на опслужување има тенденција на опаѓање. Во реалноста обично е потребно малку време за да се обезбедат повеќето услуги.

Од применaта на моделот добивме:

$\lambda = 18$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час се опслужуваат од една каса

$s = 1$ - работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{18}{30} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \rho = 60\%$ изнесува просечната искористеност на системот

Просечниот број на клиенти кои се наоѓаат во ред на чекање за услуга

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.6^2}{1-0.6} = \frac{0.36}{0.4} = 0.9 \sim 1$$

Го одредуваме просечниот број на клиенти кои се наоѓаат во супермаркетот:

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.6}{1-0.4} = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат во супермаркетот е:

$$n_0 = \rho = 0.6$$

Просечното време за опслужување на еден клиент на час е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1.998\, min$$

Просечното време на чекање на клиентот во ред за услуга изнесува:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{0.9}{18} = 0.05 = 3min$$

Просечното време на задржување на клиентот во системот:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.6} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.4} = 0.0333 \cdot 2.5 = 0.0833 = 4{,}998\, min$$

Веројатноста дека касата е слободна е $P_0 = 1 - \rho = 0.4 = 40\%$

Интерпретација на резултатите добиени од моделот М/М/1 за понеделник

Извршувањето на услугата е многу добро. Во понеделник, просечното време на чекање на клиентите во ред за услуга ($t_r = 3min$) не е толку долго, додека во просек 1 клиент на час мора да чека во ред.Бидејќи процентот на неискористеност на серверот е еднаков на веројатноста дека нема клиент во системот $P_0 = 0.4$ значи 40% серверот е слободна. ***Можеме да заклучиме дека касата ги задоволува потребите на клиентите.***

Во ***вторник*** пристигнуваат просечно 20 клиенти на час ($\lambda = 20$) кои ја следат Пуасоновата распределба, каде исто така 30 клиенти просечно се опслужуваат на час од еден продавач ($\mu = 30$) и истите се проследени со експоненцијална распределба.

Табела 7. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 20$)
Table 7. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 20$)

n	P_n
0	8.472E-28
1	4.12231E-08
2	4.12231E-07
3	2.7482E-06
4	1.3741E-05
5	5.49641E-05
6	0.000183214
7	0.000523468
8	0.001308669
9	0.002908153
10	0.005816307
11	0.010575103
12	0.017625171
13	0.027115648
14	0.03873664
15	0.051648854
16	0.064561067
17	0.075954196
18	0.084393552
ПРОДОЛЖУВА	
19	0.088835317
20	0.088835317
21	0.084605064
22	0.076913695
23	0.066881474
24	0.055734561
25	0.044587649
26	0.034298192
27	0.025406068
28	0.018147191
29	0.012515304
30	0.008343536
31	0.005382927
32	0.003364329
33	0.002038987
34	0.001199404
35	0.000685374
СУМА	**1**

Во Табела 7 вредностите кои се прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се во однос со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти.Во овој случај акоземеме пример, третата вредност која е прикажана во првата колона покажува дека 0.000000412 постои веројатност во супермаркетот да пристигнат 2 клиенти.

Исто така и овде е даден графички приказ за пристигнувањата на клиентите проследени од Пуасонова распределба.

Слика 14. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 20$
Figure 14. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 20$

Како што покажува графичкиот приказ може да се забележи дека најголема е веројатноста за пристигнување на 20 клиенти во просек на час, но со оглед на движењето на Пуасановата распределба сепак не е исклучена можноста да пристигнат поголем број клиенти, дури и повеќе од 30 (Сл. 14).

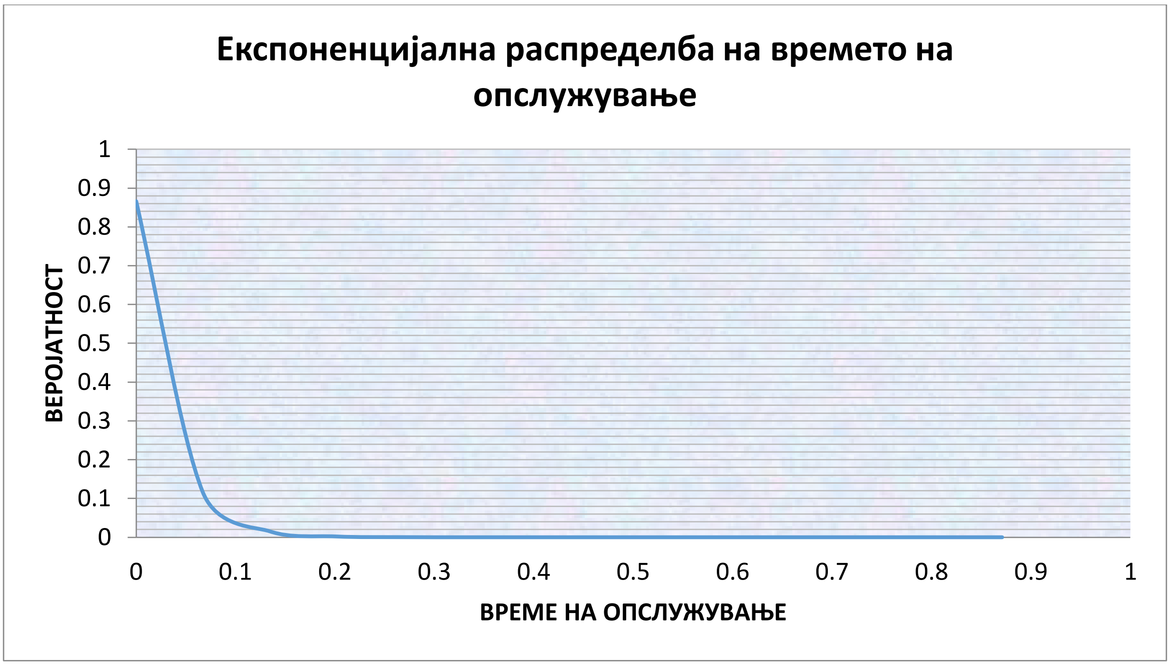
Во вторник просечно пристигнуваат 20 клиенти на час $\lambda = 20$ според Пуасоновата распределба, тогаш времето помеѓу две пристигнувања проследено со експоненцијална распределба има просечна вредност $\frac{1}{20} = 0.05$ часа. Одовде произлегува дека клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 3 минути $(0.05 \times 60 \text{ min} = 3 \text{ min})$.

Табела 8. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 8.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			ВЕРОЈАТНОСТ
0	до	**0.067**	0.866011325
0.067	до	**0.134**	0.11603571
0.134	до	**0.201**	0.015547471
0.201	до	**0.268**	0.002083185
0.268	до	**0.335**	0.000279123
0.335	до	**0.402**	3.73993E-05
0.402	до	**0.469**	5.01109E-06
0.469	до	**0.536**	6.71429E-07
0.536	до	**0.603**	8.99639E-08
0.603	до	**0.67**	1.20541E-08
0.67	до	**0.737**	1.61512E-09
0.737	до	**0.804**	2.16408E-10
0.804	до	**0.871**	2.89962E-11
0.871	до	**0.938**	3.88516E-12

Во Табела 8 се прикажани веројатностите за времето на опслужување. Притоа дадени се различни временски интервали заедно со веројатноста за случување. Пример, 0.11603571 постои веројатност времето на опслужување да биде во интервалот меѓу 0.067 и 0.134 часа.



Слика 15. Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 15.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Графичкиот приказ за експоненцијалната распределба на времето на опслужување има опаѓачки тренд, што ни укажува дека постои најголема веројатност опслужувањето да се случува во пократките временски интервали (сл.15).

*Од извршената анализа за **вторник** ги добивме следниве резултати:*

$\lambda = 20$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = 1$ – работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{30} = 0.6667 \Rightarrow \rho = 66.67\%$ - просечна искористеност на системот

Просечниот број на клиенти кои чекаат во ред за услуга е:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.6667^2}{1-0.6667} = \frac{0.44448}{0.3333} = 1.3336$$

Просечно во системот се наоѓаат:

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.6667}{1-0.6667} = \frac{0.6667}{0.3333} = 2.0003 \ \textit{клиенти}$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат е добиен со изразот:

$$n_0 = \rho = 0.6667$$

Го одредуваме и просечното време потребно за опслужување на еден клиент:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1.998\, min$$

Просечно време на чекање на клиент во ред за услуга

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{1.3336}{20} = 0.0666 = 3.996\, min$$

Просечното време на задржување на клиент во супермаркетот (системот) е :

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.6667} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.3333} = 0.0333 \cdot 3.0003 = 5,994\, min$$

Веројатноста дека касата е слободна, односно дека нема клиенти е:

$$p_0 = 1 - \rho = 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

Интерпретација на резултатите за моделот М/М/1

Во вторник, просечното време на чекање во редица ($t_r = 3{,}996min$) додека во просек 1.3336 клиент на час мора да чека на ред.Веројатноста дека серверот ќе биде слободен е помала и изнесува $33{,}33\%$ *тоа произлегува од зголемениот просечен број на доаѓање на клиенти.*

Во ***<u>среда</u>*** пристигнуваат просечно 22 клиенти на час ($\lambda = 22$) кои ја следат Пуасоновата распределба, каде просечно се опслужуваат 30 клиенти на час од еден продавач ($\mu = 30$).

Табела 9. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 22$)
Table 9. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 22$)

n	P_n
0	2.7895E-10
1	6.1368E-09
2	6.7505E-08
3	4.9504E-07
4	2.7227E-06
5	1.198E-05
6	4.3926E-05
7	0.00013805
8	0.00037965
9	0.00092803
10	0.00204167
11	0.00408334
12	0.00748612
13	0.01266881
14	0.01990814
15	0.0291986
16	0.04014807

ПРОДОЛЖУВА	
17	0.05195633
18	0.06350218
19	0.07352884
20	0.08088172
21	0.08473323
22	0.08473323
23	0.08104918
24	0.07429508
25	0.06537967
26	0.05532126
27	0.04507658
28	0.03541732
29	0.02686831
30	0.01970343
СУМА	**1**

Во Табела 9 вредностите кои се прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се меѓусебно зависни со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти. На пример, четвртата вредност за $n = 3$ која е прикажана во првата колона покажува дека 0.000000495 постои веројатност во супермаркетот да пристигнат 3 клиенти.

Следува графички приказ за пристигнувањата на клиентите според Пуасоновата распределба.

Слика 16. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 22$
Figure 16. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 22$

Според графичкиот приказ даден на Слика 16 може да се воочи дека најголема е веројатноста да пристигнуваат 22 клиенти на час, меѓутоа не е исклучена можноста да пристигнуваат поглем број на клиенти кои може да достигнат и 30 клиенти на час, земајќи ја во предвид насоката во која се движи Пуасоновиот поток на доаѓања.

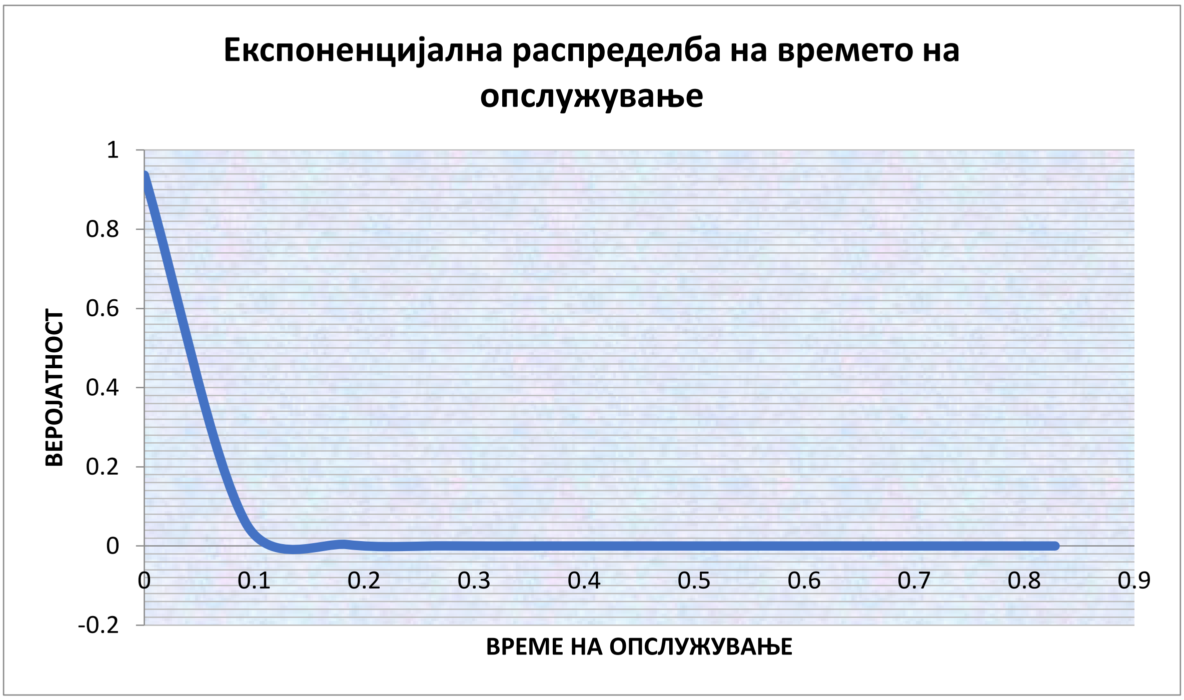
Знаеме дека пристигнувањето на клиентите не се случува во исто време и затоа го пресметуваме просечниот временски интервал помеѓу две пристигнувања на час.Според дадената средна вредност на пристигнувањата во супермаркетот $\lambda = 22$, времето помеѓу две доаѓања ќе ни биде $\frac{1}{22} = 0.045$ часа, односно клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 2.73 минути $(0.045 \times 60\ min)$.

Табела 10. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 10.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.092**	0.936708232
0.092	до	**0.184**	0.05928592
0.184	до	**0.276**	0.003752311
0.276	до	**0.368**	0.00023749
0.368	до	**0.46**	1.50312E-05
0.46	до	**0.552**	9.5135E-07
0.552	до	**0.644**	6.02126E-08
0.644	до	**0.736**	3.81096E-09
0.736	до	**0.828**	2.41203E-10
0.828	до	**0.92**	1.52661E-11

Табела 10 ни ги покажува веројатностите за времето на опслужување на клиентите во среда. На пример, 0.936708232 постои веројатност дека времето на опслужување ќе биде во интервалот меѓу 0 и 0.092 часа.



Слика 17.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 17.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Од Слика 17 може да се забележи дека времето на опслужување подлежи на експоненцијална распределба која има опаѓачки тренд, што ни дава сознание дека веројатноста за опслужување во различни временски интервали е најголема во помалите временски интервали и се движи надолу односно опаѓа за сѐ поголемите временски интервали.

Резултати од примена на моделот:

$\lambda = 22$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = 1$ - работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{22}{30} = 0.7333 \;\; \Rightarrow \;\; \rho = 73{,}33\%$ - просечна искористеност на системот

Просеченот број на клиенти кои чекаат во ред за услуга е:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.7333^2}{1-0.7333} = \frac{0.53777}{0.2667} = 2.0164$$

Просечниот број на клиенти во системот (супермаркетот) изнесува:

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.7333}{1-0{,}7333} = \frac{0.7333}{0.2667} = 2.7495$$

Со дадениот израз е детерминиран бројот на клиенти кои просечно се опслужуваат:

$$n_0 = \rho = 0.7333$$

Просечното време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1{,}998\, min$$

Просечно време на чекање на клиент во ред за услуга:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{2.0164}{22} = 0.0916 = 5.496\, min$$

Просечно време на поминување на клиентот во системот е:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.7333} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.2667} = 0.0333 \cdot 3.7495 = 7{,}488\, min$$

$p_0 = 1 - \rho = 0.2667 = 26{,}67\%$ *постои веројатност дека касата ќе биде слободна.*

Интерпретација на резултатите добиени од моделот M/M/1

Просечното време на чекање во редот ($t_r = 5.496min$), додека во просек 2.0164 клиенти на час мораат да чекаат на ред.Просечната искористеност на системот е многу висока и изнесува 73.33%, *тоа значи дека таа е правопропорционална со просечниот број на клиенти кои доаѓаат во системот, што значи дека просечниот број на клиенти расте со искористеноста на системот.*

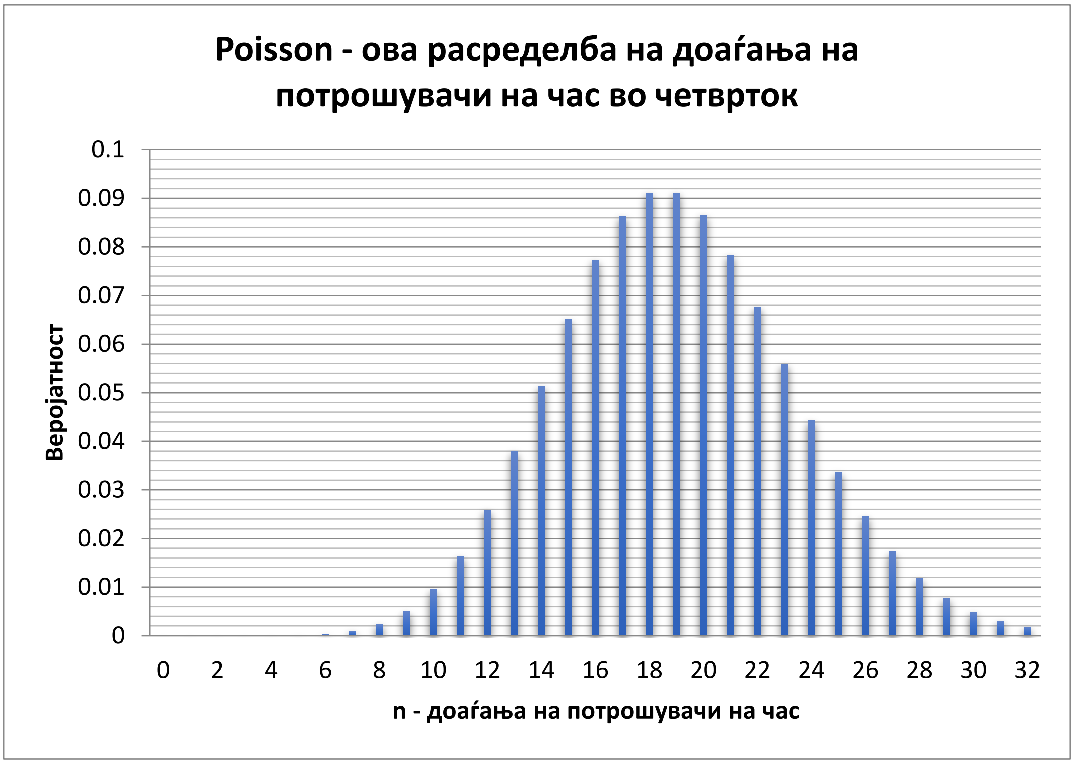
Во ***четврток*** просечно пристигнуваат 19 клиенти на час ($\lambda = 19$), каде текот на пристигнувањата го следи Пуасоновиот закон за распределба на веројатностите.Интензитетот на опслужување е 30 клиенти на час ($\mu = 30$).

Табела 11. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 19$)
Table 11. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 19$)

n	P_n
0	5.6028E-09
1	1.06453E-07
2	1.0113E-06
3	6.40493E-06
4	3.04234E-05
5	0.000115609
6	0.000366095
7	0.000993687
8	0.002360006
9	0.004982235
10	0.009466247
11	0.01635079
12	0.025888751
13	0.037837405
14	0.051350763
15	0.0650443
16	0.077240107
17	0.086327178
18	0.091123132
19	0.091123132
20	0.086566976
21	0.078322502
22	0.067642161
23	0.055878307
24	0.044236993
25	0.033620115
26	0.024568545
27	0.017288976
28	0.011731805
29	0.007686355
30	0.004868025
31	0.002983628
32	0.001771529
СУМА	**1**

Во Табела 11 вредностите прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се меѓусебно зависни со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти. На пример, да ја земеме петтата вредност за $n = 4$ која е прикажана во првата колона, таа покажува дека 0.0000304 постои веројатност во супермаркетот да пристигнат 4 клиенти.

Пристигнувањата на клиентите според Пуасоновата распределба се прикажани подолу на дадениот график.



Слика 18. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 19$
Figure 18. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 19$

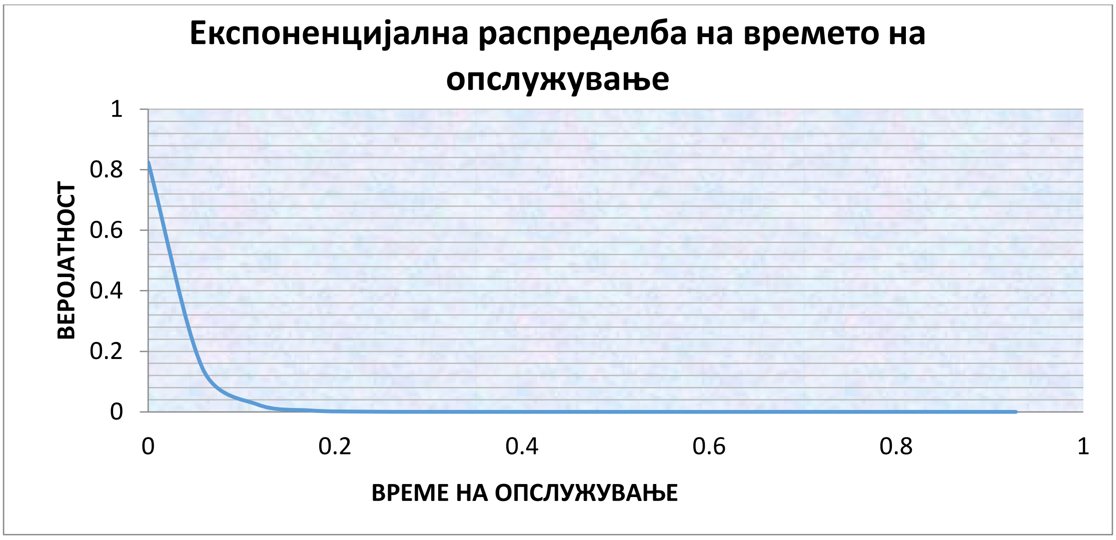
Графичкиот приказ даден на Слика 18 покажува дека просечно може да се очекуваат 19 клиенти на час. Со оглед на тоа што Пуасоновата распределба е искривена кон десно постои веројатност да пристигнуваат поглем број на клиенти кои може да бидат и повеќе од 31.

Како и претходните денови од неделата, клиентите не пристигнуваат во ист временски период, па поради тоа е детерминиран просечниот временски интервал помеѓу две пристигнувања на час. Ако во четврток средната вредност на пристигнувањата во супермаркетот $\lambda = 19$, времето помеѓу две доаѓања ќе ни биде $\frac{1}{19} = 0.053$ часа, односно клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 3.16 минути $(0.053 \times 60\ min)$.

Табела 12. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 12.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.058**	0.824479599
0.058	до	**0.116**	0.14471299
0.116	до	**0.174**	0.025400082
0.174	до	**0.232**	0.004458233
0.232	до	**0.29**	0.000782511
0.29	до	**0.348**	0.000137347
0.348	до	**0.406**	2.41071E-05
0.406	до	**0.464**	4.23129E-06
0.464	до	**0.522**	7.42678E-07
0.522	до	**0.58**	1.30355E-07
0.58	до	**0.638**	2.288E-08
0.638	до	**0.696**	4.01591E-09
0.696	до	**0.754**	7.04873E-10
0.754	до	**0.812**	1.2372E-10
0.812	до	**0.87**	2.17153E-11
0.87	до	**0.928**	3.81148E-12
0.928	до	**0.986**	6.68993E-13

Дадената Табела 12 ги претставува веројатностите за времето на опслужување во четврток кое е проследено со експоненцијална распределба и се случува во различни временски интервали.Веројатноста е различна за секој од дадените временски интервали во кои може да бидат опслужувани клиентите. Анализата е извршена во период од еден час.



Слика 19.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 19.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Податоците од табеларниот приказ (таб.12) се дадени на следниот график кој ја покажува експоненцијалната распределба на времето на опслужување во различни временски интервали. Исто како и претходните денови во неделата поголема е веројатноста во помалите временски интервали да се изврши опслужувањето. Тоа може да се забележи од графичкиот приказ кој се карактеризира со тренд на опаѓање на веројатностите за различните временски интервали.

Резултати за четврток добиени со примена на моделот M/M/1

$\lambda = 19$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = 1$ - работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{19}{30} = 0.6333 \Rightarrow \rho = 63{,}33\%$ - просечна искористеност на системот

Просечен број на клиенти кои чекаат во ред за услуга:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.6333^2}{1-0.6333} = \frac{0.40107}{0.3667} = 1.0937$$

Просечениот број на клиенти кои се наоѓаат во системот е:

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.6333}{1-0.6333} = \frac{0.6333}{0.3667} = 1.72702$$

Одредено е колку клиенти во просек се опслужуваат:

$$n_0 = \rho = 0.6333$$

Просечното време на опслужување на еден клиент изнесува:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1.998\, min$$

Просечно време на чекање на клиент во ред за услуга:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{1.0937}{19} = 0.0576 = 3.456\, min$$

Просечното време на задржување на клиентот во системот е:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.6333} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.3667} = 0.0333 \cdot 2.7270 = 5{,}448\, min$$

Веројатноста дека касата ќе биде слободна, односно дека нема да има ниту еден клиент е:

$$p_0 = 1 - \rho = 0.3667 = 36.67\%$$

Интерпретација на резултатите за моделот М/М/1

Просечното време на чекање во редица за четврток ($t_r = 3.456\, min$), додека во просек 1.0937 клиент на час мора да чека на ред. Веројатноста дека ссерверот ќе биде слбоден е 36,67 %. *Во однос на просечната искористеност на системот времето на чекање на клиентот во редот не е долго, од каде може да се извлече заклучок дека опслужувањето во системот е ефикасно.*

Следниот ден од неделата кој го анализиравме беше ***<u>петок</u>***. Просечно пристигнуваат 26 клиенти на час ($\lambda = 26$) според Пуасоновиот тек на доаѓања. Средниот број на клиенти кои се опслужуваат на час е 30 ($\mu = 30$).

Табела 13. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 26$)
Table 13. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 26$)

n	P_n
0	5.10909E-12
1	1.32836E-10
2	1.72687E-09
3	1.49662E-08
4	9.72805E-08
5	5.05858E-07
6	2.19205E-06
7	8.14191E-06
8	2.64612E-05
9	7.64435E-05
10	0.000198753
11	0.00046978
12	0.001017857
13	0.002035714
14	0.003780611
15	0.006553059
16	0.010648721
17	0.016286279
18	0.023524625
19	0.032191592
20	0.04184907
ПРОДОЛЖУВА	
21	0.051813135
22	0.061233704
23	0.069220709
24	0.074989102
25	0.077988666
26	0.077988666
27	0.075100197
28	0.069735897
29	0.062521839
30	0.054185594
31	0.045445982
32	0.03692486
33	0.029092314
34	0.022247064
35	0.01652639
36	0.011935726
37	0.008387267
38	0.005738656
39	0.003825771
СУМА	**1**

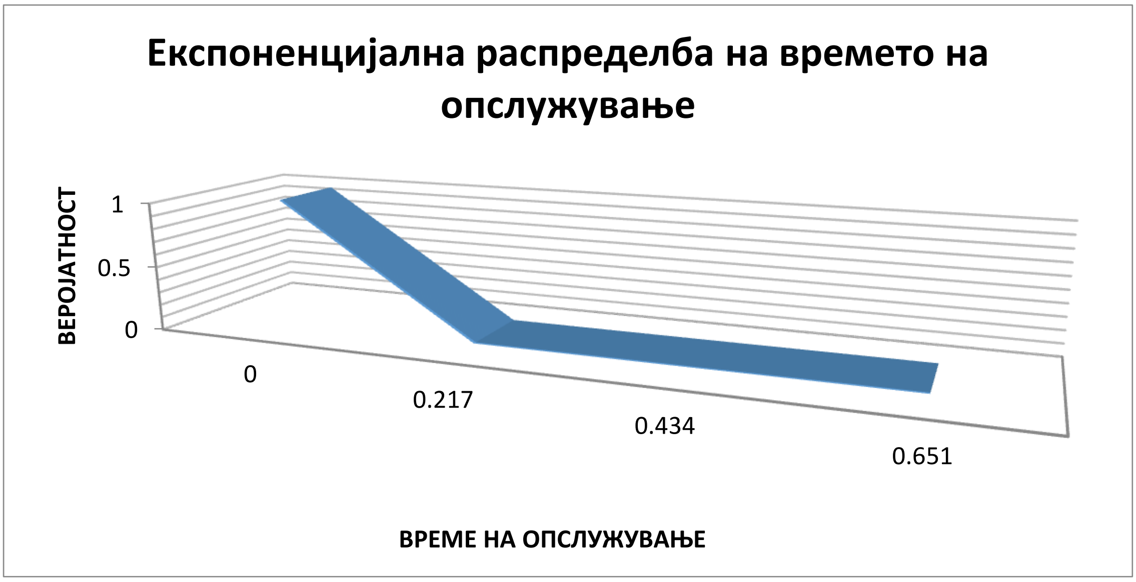
Во Табела 13 вредностите прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се поврзани со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти. На пример, да ја земеме шестата вредност за $n = 5$ која е прикажана во првата колона, таа покажува дека 0.00000050 постои веројатност во супермаркетот да пристигнат 5 клиенти.

Слика 20. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 26$
Figure 20. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 26$

На Слика 20 се прикажани пристигнувањата на клиентите според Пуасоновата распределба на веројатност. Графичкиот приказ покажува дека просечно може да се очекуваат 26 клиенти на час. Со оглед на тоа што Пуасоновата распределба оди кон десно постои веројатност да пристигнуваат поглем број на клиенти кои може да бидат и повеќе од 35.
Со оглед на тоа што клиентите не пристигнуваат во исти временски период е одреден просечниот временски интервал помеѓу две пристигнувања на час. Ако средната вредност вредност на пристигнувањата во супермаркетот $\lambda = 26$, времето помеѓу две доаѓања ќе ни биде $\frac{1}{26} = 0.038$ часа, односно клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 2.31 минути $(0.038 \times 60\, min)$.

Табела 14. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 14.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.217**	0.99851152
0.217	до	**0.434**	0.001486264
0.434	до	**0.651**	2.21227E-06
0.651	до	**0.868**	3.29293E-09



Слика 21.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 21.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Податоците кои се прикажани на во Табела 14 и графички на Слика 21 ни ја покажуваат експоненцијалната распределба на времето на опслужување во Петок при што поголема е веројатноста клиентите да бидат опслужени во помалите временски интервали. Пример, веројатноста клиентот да биде опслужен во интервалот меѓу 0.217 и 0.434 часа изнесува 0.001486264 која е помала од веројатноста одредена за првиот временски интервал меѓу 0 и 0.217 часа.

Од примената на моделот за петок одредуваме:

$\lambda = 26$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = 1$ - работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{26}{30} = 0.8667 \implies \rho = 86.67\%$ - просечна искористеност на системот

Просечениот број на клиенти во ред за чекање на услуга изнесува:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.8667^2}{1-0.8667} = \frac{0.75116}{0.1333} = 5.6352$$

Просечен број на клиенти кои се наоѓаат во системот (супермаркетот):

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.5666}{1-0.8667} = \frac{0.8667}{0.1333} = 6.5019$$

Одредуваме просечен број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \rho = 0.8667$$

Просечното време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1{,}998\, min$$

Просечното време на чекање на клиентот во ред за услуга изнесува:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{5.6352}{26} = 0.2167 = 13.002\, min$$

Просечно време кое клиентот го поминува во системот е:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.8667} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.1333} = 0.0333 \cdot 7.5019 = 15 min$$

Веројатноста дека касата ќе биде слободна е детерминирана на следниов начин:

$$p_0 = 1 - \rho = 0.1333 = 13.33\%$$

Интерпретација на резултатите добиени за петок за моделот М/М/1

Анализата покажува дека во петок, просечното време на чекање во редица ($t_r = 13.002\, min$) е малку подолго, додека во просек 5.6352 клиенти на час мораат да чекаат на ред.*Бидејќи просечната искористеност на системот е многу висока системот ќе работи потешко што може да доведе до поголема должина на редот.*

Во ***<u>сабота</u>*** просечниот број на пристигнувања на клиенти на час е најголем и изнесува 28 ($\lambda = 28$) кој го следи Пуасановиот закон за распределба на веројатностите. Интензитетот на опслужување на клиентите е ист, односно изнесува 30 клиенти на час ($\mu = 30$).

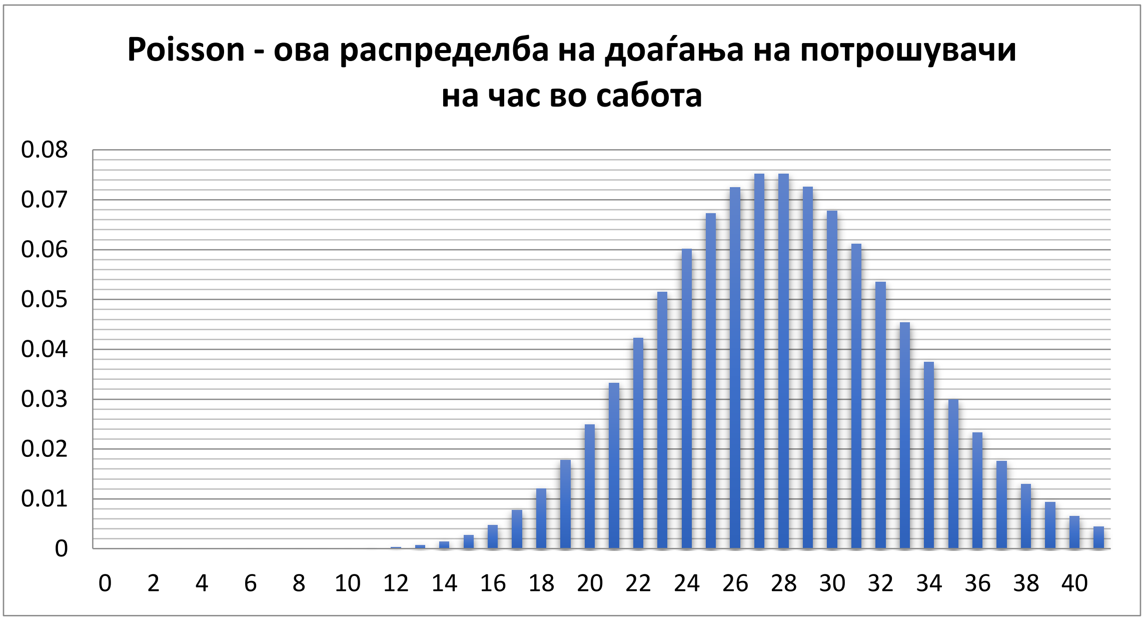
Табела 15. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 28$)

Table 15. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 28$)

n	**P_n**
0	6.9144E-13
1	1.93603E-11
2	2.71044E-10
3	2.52975E-09
4	1.77082E-08
5	9.91661E-08
6	4.62775E-07
7	1.8511E-06
8	6.47885E-06
9	2.01564E-05
10	5.6438E-05
11	0.00014366
12	0.000335208
13	0.000721986
14	0.001443971
15	0.002695413
16	0.004716973
17	0.007769132
18	0.012085317
19	0.017809941
20	0.024933917
21	0.033245223
ПРОДОЛЖУВА	
22	0.042312102
23	0.051510385
24	0.06009545
25	0.067306904
26	0.072484358
27	0.075168964
28	0.075168964
29	0.07257693
30	0.067738468
31	0.061183133
32	0.053535241
33	0.045423841
34	0.037407869
35	0.029926295
36	0.023276007
37	0.017614276
38	0.01297894
39	0.009318213
40	0.006522749
41	0.004454561
СУМА	**1**

Во Табела 15 вредностите прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се во однос со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти. На пример, втората вредност која е прикажана во првата колона покажува дека 0.0000000000193 постои веројатност во супермаркетот да пристигне 1 клиент.

Даваме графички приказ на Пуасоновиот тек на доаѓања на клиентите.



Слика 22. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 28$
Figure 22. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 28$

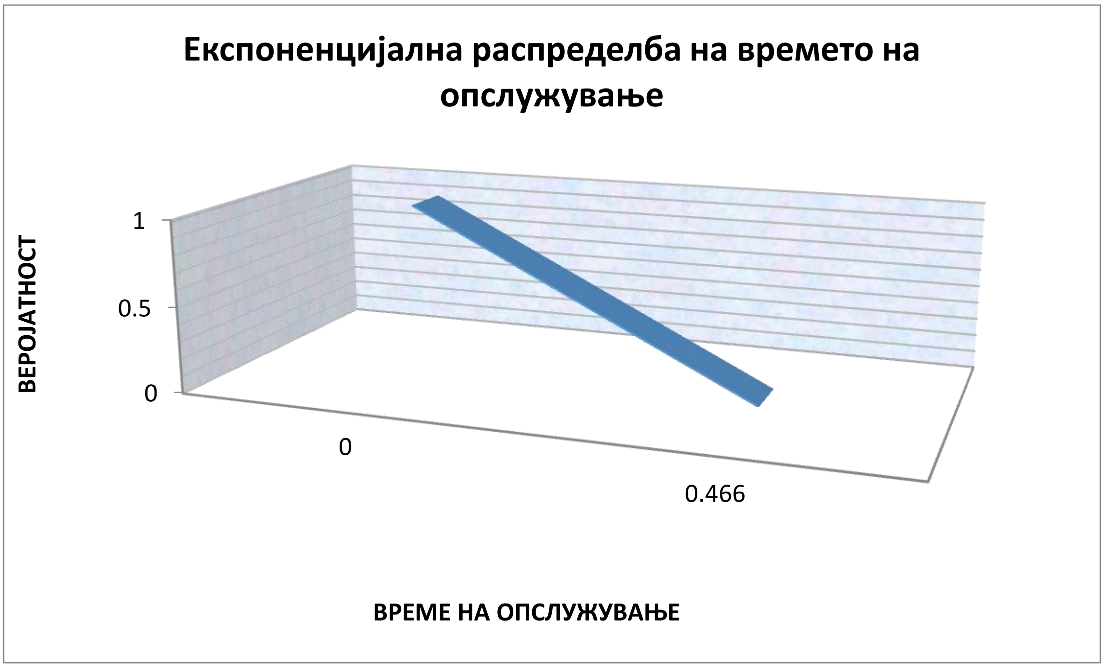
Графичкиот приказ на Слика 22 ги покажува пристигнувањата на клиентите според Пуасоновата распределба на веројатност. Може да се согледа дека просечно може да се очекуваат 28 клиенти на час. Со оглед на тоа што Пуасоновата распределба оди кон десно постои веројатност да пристигнуваат поглем број на клиенти при што постои веројатност и да има повеќе од 40 пристигнувања на час.

Знаејќи го фактот дека клиентите не пристигнуваат во ист временски период, го одредуваме просечниот временски интервал помеѓу две пристигнувања на час. Ако средната вредност вредност на пристигнувањата во супермаркетот $\lambda = 28$, времето помеѓу две доаѓања ќе ни биде $\frac{1}{28} = 0.036$ часа, односно клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 2.14 минути $(0.036 \times 60\ min)$.

Табела 16. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 16.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			ВЕРОЈАТНОСТ
0	до	**0.466**	0.999999152
0.466	до	**0.932**	8.48326E-07



Слика 23. Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 23.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Како што може да видиме од Табела 16 и Слика 23 дадена е експоненцијална распределба на времето на опслужување во различни временски интервали, како и веројатноста клиентите да бидат опслужени во дадениот временски интервал. Притоа, бидејќи во сабота во супермаркетот просечно доаѓаат најголем број на клиенти времето на опслужување е поделено на два интервала, бидејќи во просек најмногу време се чека во ред за услуга. Поголема е веројатноста опслужувањето на клиентите да се врши во првиот временски интервал.

Резултати добиени од извршената анализа:

$\lambda = 28$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = 1$ - работи само една каса

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{28}{30} = 0.9333 \quad \Rightarrow \quad \rho = 93.33\%$ - *просечна искористеност на системот*

Просечниот број на клиенти кои чекаат во ред за услуга е определен со изразот:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.9333^2}{1-0.9333} = \frac{0.87104}{0.0667} = 13.0592$$

Просечен број на клиенти во супермаркетот (системот):

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.9333}{1-0.9333} = \frac{0.9333}{0.0667} = 13.9925$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат изнесува:

$$n_0 = \rho = 0.9333$$

Просечното време за опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1{,}998\,min$$

Просечното време на чекање на клиентот во ред за услуга:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{13.0592}{28} = 0.4664 = 27.984\,min$$

Просечно време на задржување на клиентот во системот:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.9333} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.0667} = 0.0333 \cdot 14.9925 = 29{,}58\,min$$

$p_0 = 1 - \rho = 0.0667 = 6.67\%$ - *веројатност дека касата ќе биде слободна*

Интерпретација на резултатите за сабота за моделот М/М/1

Анализата покажува дека во сабота, просечното време на чекање во редица ($t_r = 27.984min$), капацитетот на системот е премногу зафатен 99.33% при што во просек 13.0592 потрошувачи ќе морат да чекаат во ред за услуга.*Ова значи дека зголемувањето на бројот на сервери во услови на зголемен број на доаѓања на потрошувачи може да доведе до намалување на должината на редот, а со тоа истовремено и на просечното време на чекање во редица.*

Последен ден кој беше земен за анализа и креирање модел е ***<u>недела</u>***. Просечно пристигнуваат 23 клиенти на час ($\lambda = 23$) според Пуасоновиот поток на доаѓања, а се опслужуваат 30 клиенти на час ($\mu = 30$).

Табела 17. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 23$)
Table. 17. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 23$)

n	**P_n**
0	1.02619E-10
1	2.36023E-09
2	2.71427E-08
3	2.08094E-07
4	1.19654E-06
5	5.50408E-06
6	2.1099E-05
7	6.93252E-05
8	0.00019931
9	0.000509348
10	0.0011715
11	0.0024495
12	0.004694874
13	0.008306316
14	0.013646091
15	0.020924006
16	0.030078259
17	0.040694115
18	0.051998036
19	0.062944992

ПРОДОЛЖУВА	
20	0.07238674
21	0.079280716
22	0.082884384
23	0.082884384
24	0.079430868
25	0.073076399
26	0.064644507
27	0.055067543
28	0.045234053
29	0.035875283
30	0.027504384
31	0.020406478
32	0.014667156
33	0.010222564
34	0.006915264
35	0.004544316
36	0.002903313
37	0.001804762
38	0.001092356
СУМА	**1**

Во Табела 17 вредностите прикажани во втората колона $\boldsymbol{Pn}$ претставуваат веројатности кои се во однос со секоја од вредностите од првата колона $\boldsymbol{n}$ кои означуваат број на доаѓања на клиенти. На пример, третата вредност која е прикажана во првата колона покажува дека 0.0000000271 постои веројатност во супермаркетот да пристигнат 2 клиенти.

Подолу е даден графички приказ на Пуасоновиот тек на доаѓања на клиентите.

Слика 24. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 23$
Figure 24. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 23$

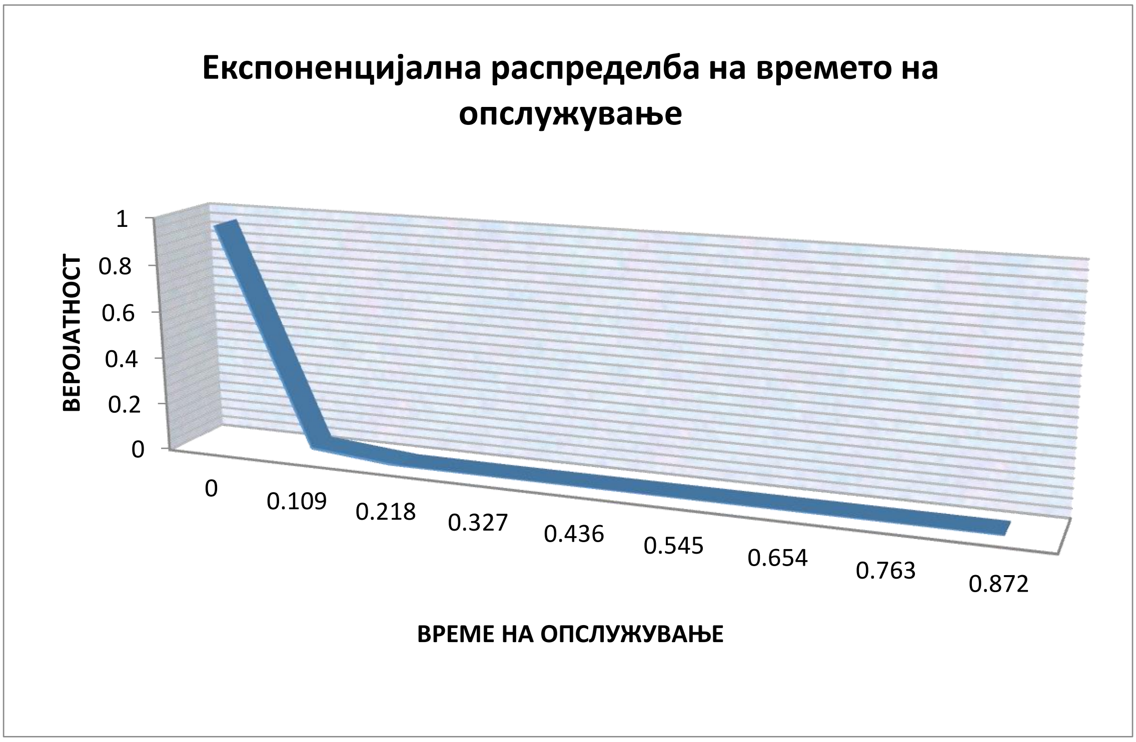
Прикажаниот график на Слика 24 покажува дека просечно може да се очекуваат 23 клиенти на час. Со оглед на тоа што Пуасоновата распределба е искривена кон десно постои веројатност да пристигнуваат поголем број на клиенти при што постои веројатност и да има повеќе од 36 пристигнувања на час.

Бидејќи клиентите не пристигнуваат во ист временски период, го одредуваме просечниот временски интервал помеѓу две пристигнувања на час. Ако средната вредност вредност на пристигнувањата во супермаркетот $\lambda = 23$, времето помеѓу две доаѓања ќе ни биде $\frac{1}{23} = 0.043$ часа, односно клиентите ќе пристигнуваат просечно на секои 2.61 минути $(0.043 \times 60\, min)$.

Табела 18. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 18.Probability of service time in different time intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.109**	0.961993573
0.109	до	**0.218**	0.036561939
0.218	до	**0.327**	0.001389589
0.327	до	**0.436**	5.28133E-05
0.436	до	**0.545**	2.00724E-06
0.545	до	**0.654**	7.62882E-08
0.654	до	**0.763**	2.89944E-09
0.763	до	**0.872**	1.10197E-10
0.872	до	**0.981**	4.18821E-12



Слика 25. Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 25.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Земајќи го во предвид тоа дека времето на опслужување е проследено со експоненцијална распределба и дека клиентите се опслужуваат помеѓу одреден временски период (помеѓу t_1 и t_2), во Табела 18 се прикажани различните временски интервали на кои е распределено времето и притоа може да се забележи дека најголема е веројатноста опслужувањето да се изврши меѓу 0 и 0.109 часа. Одовде, од графикот даден на Слика 25 може да се согледа дека колку е поголем временскиот интервал толку повеќе се намалува веројатноста дека во тоа време клиентот ќе биде опслужен. Тоа се потврдува со опаѓачкиот тренд со кој се карактеризира експоненцијалната распределба на времето на опслужување (сл.25).

Резултати добиени со примена на моделот:

$\lambda = 23$

$\mu = 30$

$s = 1$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{23}{30} = 0.7667 \quad \Rightarrow \quad \rho = 76.67\%$$

Просечен број на клиенти кои чекаат во ред за услуга:

$$n_r = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0.7667^2}{1-0.7667} = \frac{0.58783}{0.2333} = 2.5196$$

Просечниот број на клиенти во системот изнесува:

$$n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.7667}{1-0.7667} = \frac{0.7667}{0.2333} = 3.2863$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \rho = 0.7667$$

Просечното време на опслужувањето на клиент изнесува:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 0.0333 = 1{,}998\, min$$

Просечното време на чекање на клиентот во редот е:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{2.5196}{23} = 0.1095 = 11.7\, min$$

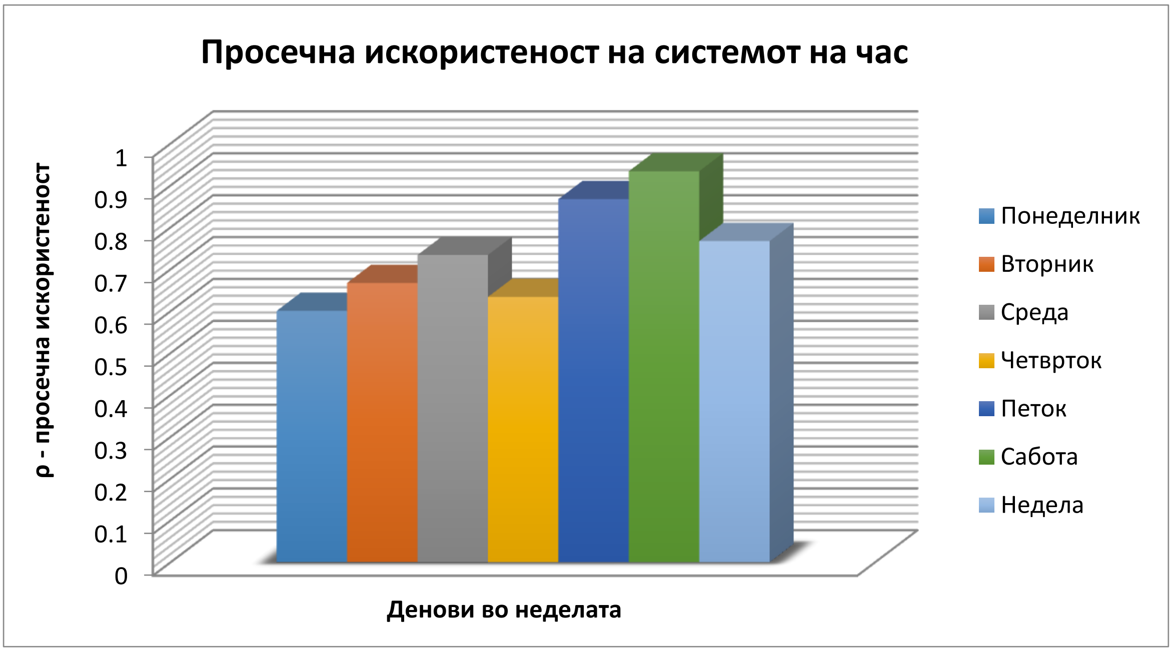
Го одредуваме просечното време на клиентот поминато во системот:

$$t_s = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-0.7667} = 0.0333 \cdot \frac{1}{0.2333} = 0.0333 \cdot 4.2863 = 8{,}568\, min$$

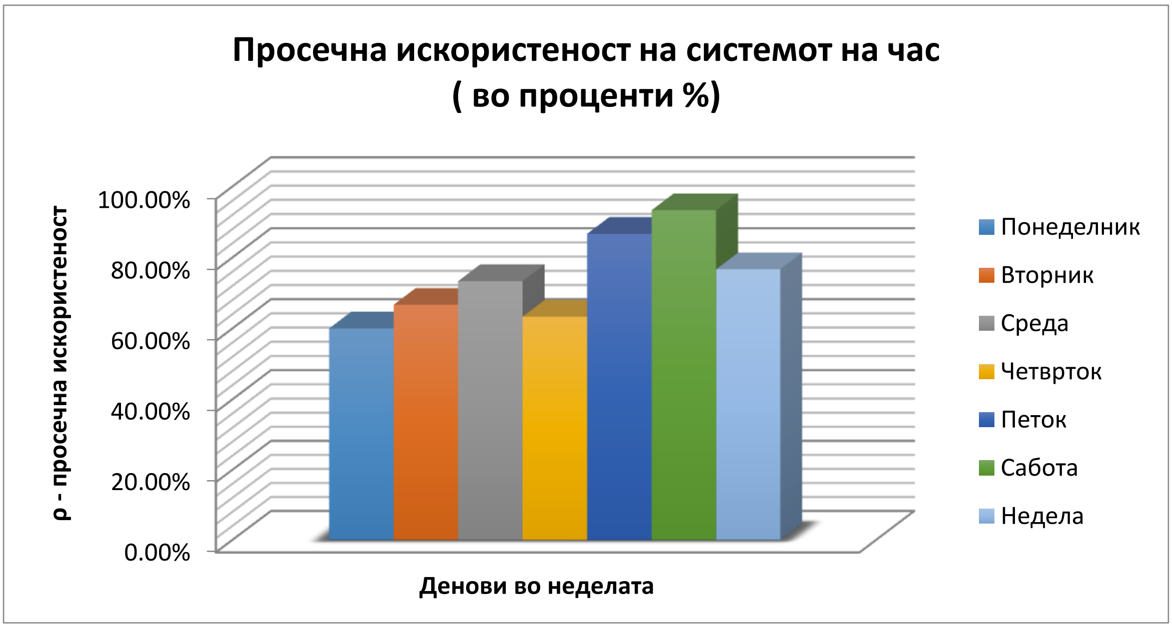
$p_0 = 1 - \rho = 0.2333 = 23.33\%$ - *веројатност дека касата е слободна*

Интерпретација на резултатите за недела за моделот М/М1

Анализата покажува дека во недела, просечното време на чекање во редица ($t_r = 11.7\, min$), додека во просек 2.5196 клиенти на час морат да чекаат на ред. Просечната искористеност на ссерверот е 76.67% што значи дека просечното време на чекање е доста повисоко за разлика од деновите преку неделата.*Во овој случај кога просечното време на чекање на еден клиент во ред за услуга е подолго просечниот број на клиенти кои може да бидат опслужени ќе биде помал.*



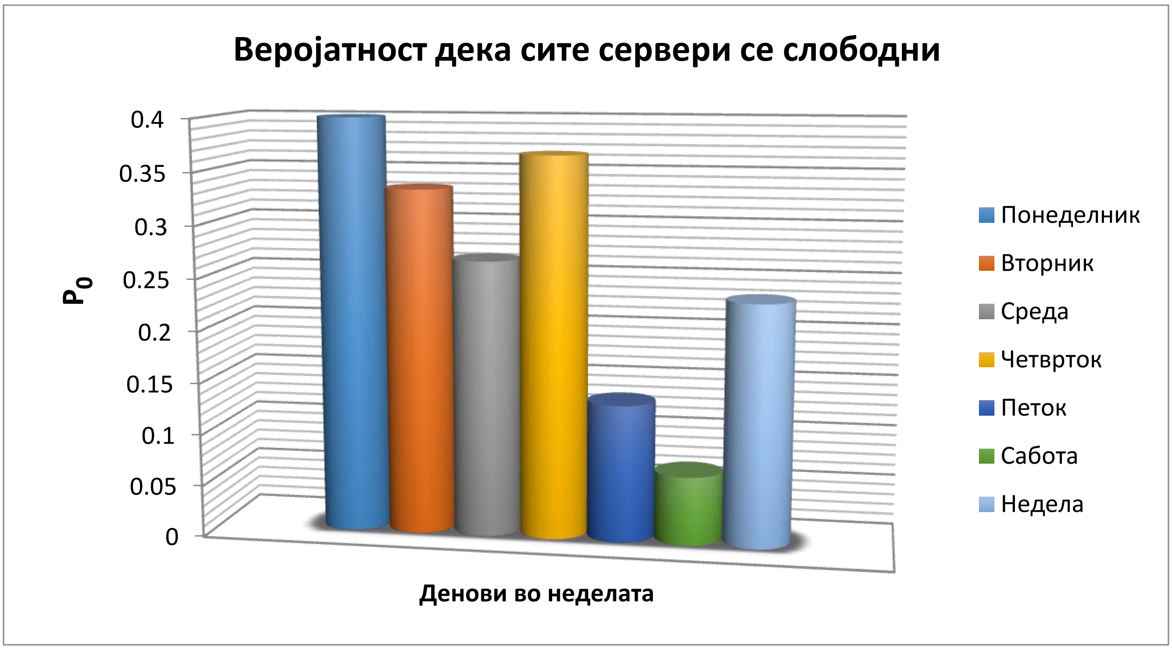
Слика 26. Просечна искористеност на системот за една недела
Figure 26. Average utilization of the system for one week



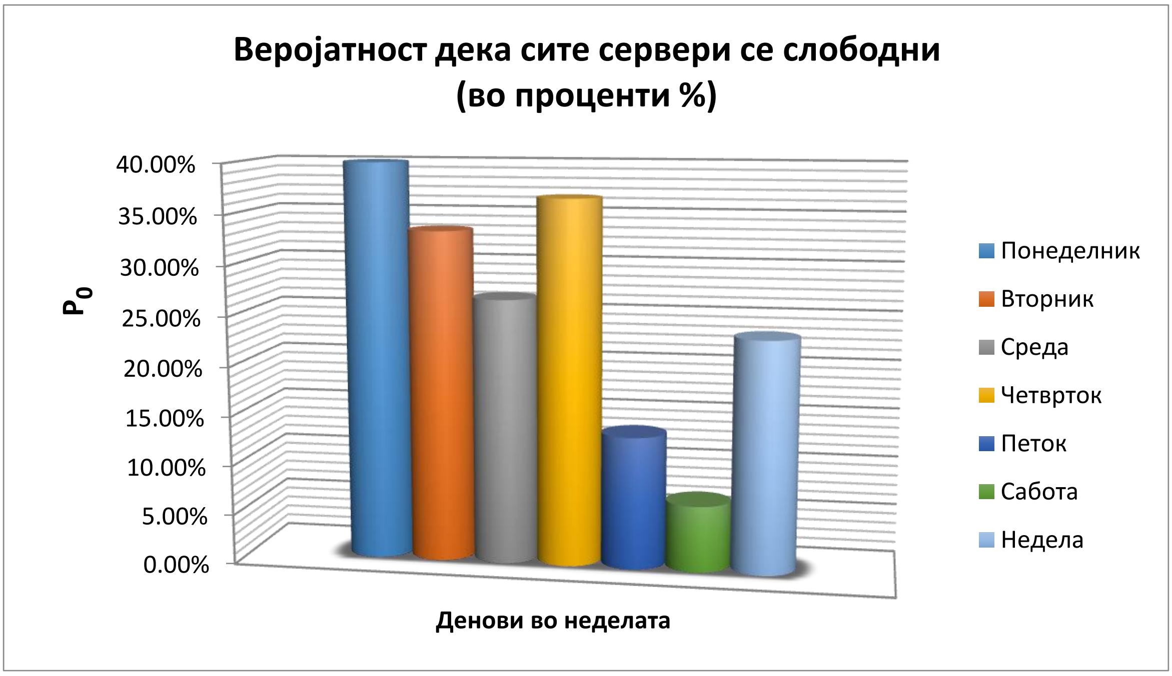
Слика 27. Просечна искористеност на системот за една недела (изразена во проценти)
Figure 27. Average utilization of the system for one week (expressed in percentage)

На Слика 26 и Слика 27 е дадена просечната искористеност на супермаркетот прикажана заедно со процентуален приказ. Како што може да се забележи од двата графици просечната искористеност на супермаркетот кога работи само една каса е во петок и сабота, бидејќи просечно доаѓаат поголем број на клиенти со оглед на тоа што е викенд.

Во продолжение на ова е прикажана и веројатноста за зафатеноста на касите во супермаркетот, во овој случај само на една каса бидејќи станува збор за моделот M/M/1.

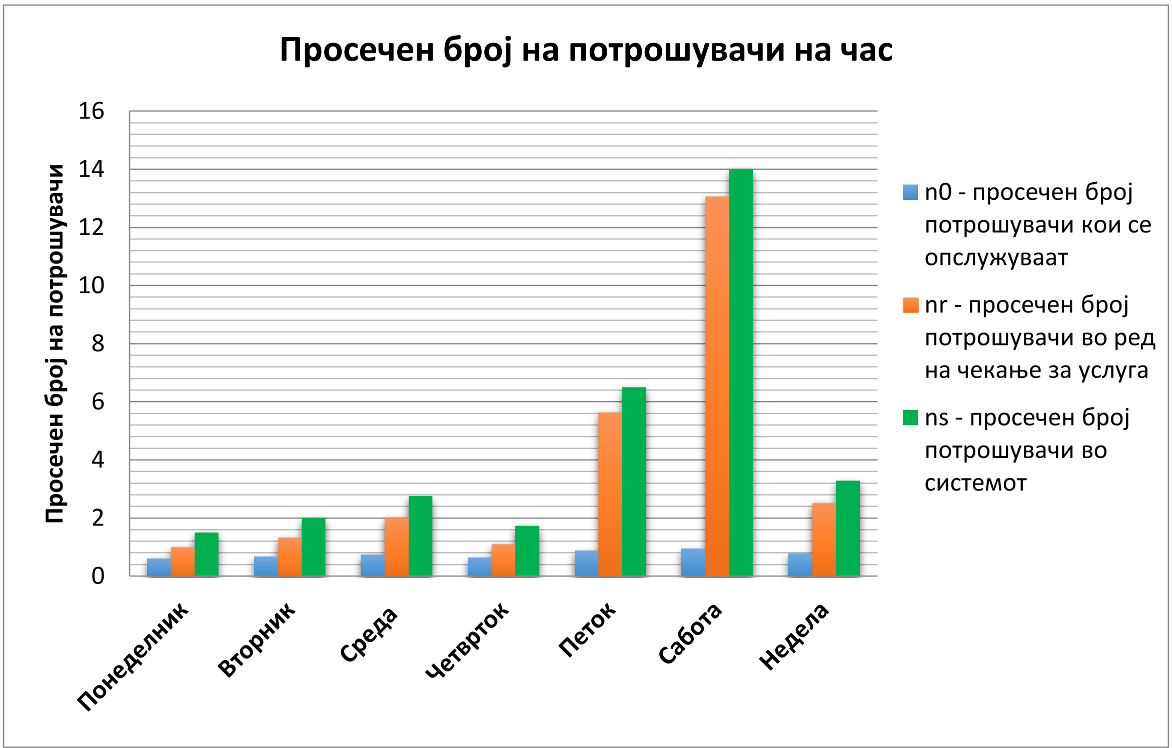


Слика 28. Веројатност дека нема да има ниту еден клиент во систем
Figure 28. Probability that the system will not have any customer



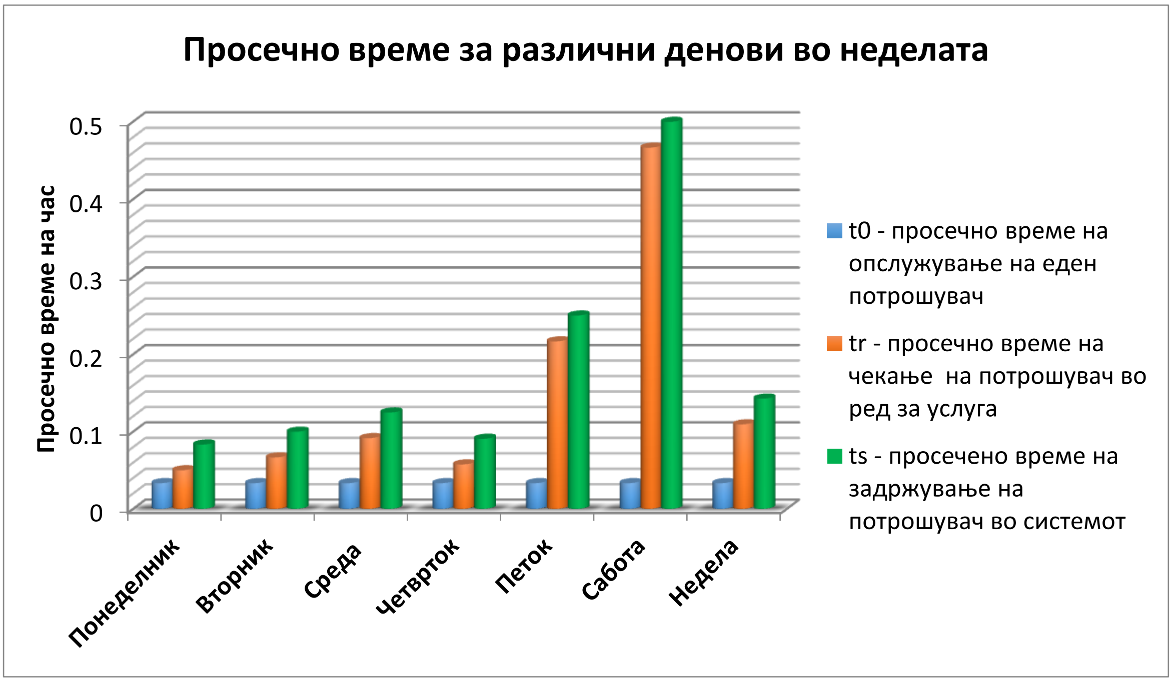
Слика 29. Веројатност дека нема да има ниту еден клиент во систем (изразена во проценти)
Figure 29. Probability that the system will not have any customer (expressed in percentage)

Како што може да се воочи од графичиот приказ на Слика 28 и Слика 29 веројатноста дека касата ќе биде слободна е најголема во понеделник и четврток, затоа што според нашето истражување беше утврдено дека тие денови од неделата пристигнуваат најмалку клиенти, додека веројатноста дека касата ќе биде слободна односно нема да има клиенти е најмала во сабота, па во петок бидејќи за време на викендот овие два дена во супермаркетот има најмногу клиенти.



Слика 30. Просечен број клиенти на час за период од една недела
Figure 30. Average number of customers per hour for period of one week

На Слика 30 е прикажан график кој го покажува просечниот број на клиенти во текот на една недела, период кој е земен во нашата анализа. Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат, кои се наоѓаат во редот на чекање за услуга и кои се наоѓаат во супермаркетот приближно е на исто ниво, сè додека не се појави отскокнување во петок и сабота. Ова е од причина што во просек поголемиот дел од клиентите најмногу во супермаркетот најмногу купуваат за време на викендот, особено во попладневните часови.



Слика 31. Просечно време за моделот M/M/1 во текот на една недела
Figure 31. Average time for the model M/M/1 for one week

Графичкиот приказ на Слика 31 се однесува на просечното време за моделот M/M/1 кога работи една каса анализирано за цела недела. Исто како и претходно за просечниот број на купувачи, и овде исто така просечното време на опслужување на еден клиент, на чекање во ред за услуга, како и на задржување на еден клиент во супермаркетот е најдолго во петок и сабота, што е нормално, бидејќи има поголем број на клиенти за разлика од останатите денови преку неделата.

8.6 Резултати од примена на повеќеканален систем на масовно опслужување

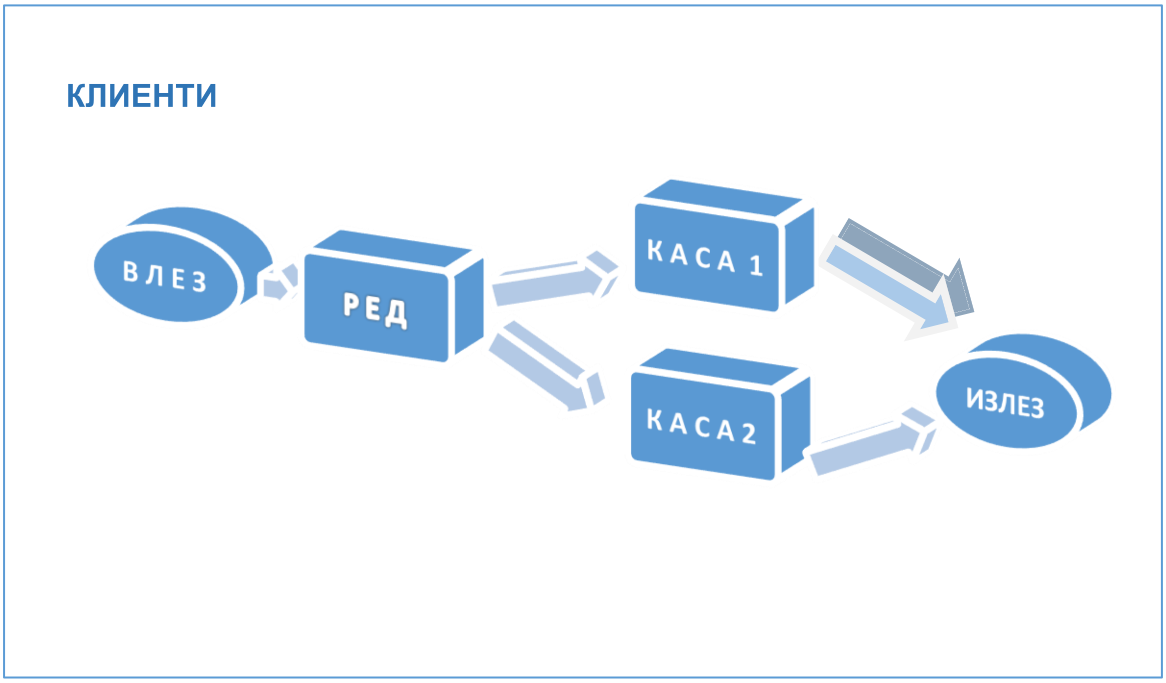
Модел со еден ред и два сервери (каси) M/M/2

Во анализата при примената на овој модел беа поставени следните претпоставки:

Работат два сервери т.е. две каси $s(k) = 2$ и има еден ред на чекање

λ – просечен број на доаѓања (различен за секој ден од неделата)

Интензитетот на опслужување е еднаков во текот на цела недела $\mu = 30$ (понеделник - недела)



Слика 32. Повеќеканален СМО со еден ред и две каси **M/M/2**
Figure 32. Multiple Stage Queuing system with Single- Queue and Multiple – Server **M/M/2**

Овој модел е означен како **M/M/2**, каде првата ознака **M** претставува Марков процес или Маркова експоненцијална распределба на времето помеѓу пристигнувањата, втората ознака **M** претставува Маркова експоненцијална распределба на времето на опслужување, а ознаката **2** (во општ облик позната како s (е позитивен цел број)) го означува бројот на сервери, во нашиот случај бројот на каси.

▪ НЕДЕЛНА АНАЛИЗА НА РЕДОВИТЕ НА ЧЕКАЊЕ

Предмет на оваа анализа беше случај во кој работат двете каси во супермаркетот и каде бројот на пристигнувања на клиентите е поголем при непроменет интензитет на опслужување. Беше направено истражување за 7 дена и добиените резултати дневно се прикажани и интерпретирани.

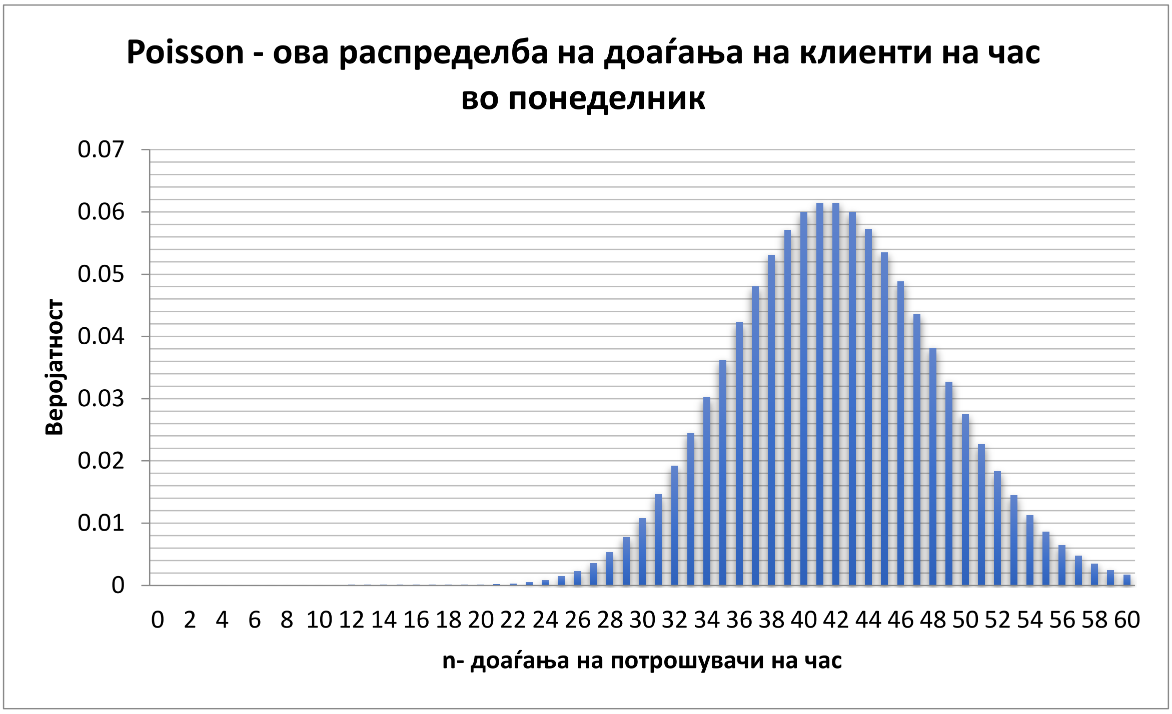
Во **понеделник** во супермаркетот просечно доаѓаат 42 клиенти на час ($\lambda = 42$) кои пристигнуваат според Пуасонова распределба. Интензитетот на опслужување изнесува 30 клиенти на час ($\mu = 30$).

Табела 19. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 42$)
Table 19. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 42$)

n	P_n
0	5.74952E-19
1	2.4148E-17
2	5.07108E-16
3	7.09951E-15
4	7.45449E-14
5	6.26177E-13
6	4.38324E-12
7	2.62994E-11
8	1.38072E-10
9	6.44336E-10
10	2.70621E-09
11	1.03328E-08
12	3.61648E-08
13	1.1684E-07
14	3.50521E-07
15	9.81458E-07
16	2.57633E-06
17	6.36504E-06
18	1.48518E-05
19	3.28302E-05
20	6.89434E-05

ПРОДОЛЖУВА	
21	0.000137887
22	0.000263239
23	0.000480697
24	0.000841219
25	0.001413248
26	0.002282939
27	0.003551238
28	0.005326857
29	0.007714759
30	0.010800663
31	0.014633156
32	0.019206017
33	0.024444021
34	0.030195556
35	0.036234667
36	0.042273778
37	0.047986451
38	0.053037656
39	0.057117476
40	0.05997335

ПРОДОЛЖУВА	
41	0.061436115
42	0.061436115
43	0.060007368
44	0.05727976
45	0.053461109
46	0.048812317
47	0.043619518
48	0.038167078
49	0.032714638
50	0.027480296
51	0.022630832
52	0.018278749
53	0.014485046
54	0.011266147
55	0.00860324
56	0.00645243
57	0.004754422
58	0.003442857
59	0.002450848
60	0.001715593



Слика 33. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 42$

Figure 33. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 42$

Во Табела 19 се дадени веројатностите за n доаѓања на клиентите. На пример, веројатноста да дојадат 40 клиенти во супермаркетот изнесува 0.05997335.

Графичкиот приказ на Пуасоновиот тек на доаѓања покажува дека најголема е веројатноста во супермаркетот просечниот број на доаѓања да изнесува 42. Затоа што Пуасоновата распределба на доаѓања е искривена на десно, просечниот број на доаѓања на час може да биде многу поголем, во овој случај дури и до 60 клиенти (сл.33).

Треба да се нагласи дека клиентите кои пристигнуваат според Пуасоновата распределба најчесто сите не пристигнувааат во исто време, туку меѓу нив постои некој случаен временски период. Овој период се нарекува време помеѓу две пристигнувања и се карактеризира со експоненцијална распределба.

Ако во нашиот случај според Пуасоновиот тек просечно доаѓаат 42 клиенти $\lambda = 42$, времето помеѓу две пристигнувања е проследено со експоненцијална распределба и во просек изнесува $\frac{1}{42} = 0.024$ часа. Тоа значи дка пристигнувањето на секој клиент просечно ќе се одвива на 1.43 мин. $(0.024 \times 60\ min = 1.43)$.

Табела 20. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 20. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.032**	0.617107114
0.032	до	**0.064**	0.236285924
0.064	до	**0.096**	0.090472199
0.096	до	**0.128**	0.034641161
0.128	до	**0.16**	0.013263854
0.16	до	**0.192**	0.005078635
0.192	**до**	**0.224**	0.001944573
0.224	до	**0.256**	0.000744563
0.256	до	**0.288**	0.000285088
0.288	до	**0.32**	0.000109158
0.32	до	**0.352**	4.17959E-05
0.352	до	**0.384**	1.60033E-05
0.384	до	**0.416**	6.12757E-06
0.416	до	**0.448**	2.3462E-06
0.448	до	**0.48**	8.98344E-07
0.48	до	**0.512**	3.4397E-07

ПРОДОЛЖУВА			
0.512	до	**0.544**	1.31703E-07
0.544	до	**0.576**	5.04283E-08
0.576	до	**0.608**	1.93086E-08
0.608	до	**0.64**	7.39314E-09
0.64	**до**	**0.672**	2.83078E-09
0.672	**до**	**0.704**	1.08389E-09
0.704	**до**	**0.736**	4.15012E-10
0.736	**до**	**0.768**	1.58905E-10
0.768	**до**	**0.8**	6.08437E-11
0.8	**до**	**0.832**	2.32966E-11
0.832	**до**	**0.864**	8.92011E-12
0.864	**до**	**0.896**	3.41545E-12
0.896	**до**	**0.928**	1.30775E-12
0.928	**до**	**0.96**	5.00728E-13
0.96	**до**	**0.992**	1.91725E-13

Во Табела 20 се прикажани веројатностите на времето на опслужување кое опаѓа во различни временски интервали. Набљудуваниот период во кој се одвива истражувањето е еден час. Во колоната во која се прикажани веројатностите, првата вредност укажува дека 0.617107114 постои веројатност дека клиентот ќе биде опслужен во интервалот меѓу 0 и 0.32 часа. Следната вредност покажува дека 0.236285924 постои веројатност дека опслужувањето ќе се изврши во временскиот интервал меѓу 0.32 и 0.64 часа.

Слика 34.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 34.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Како што може да се забележи од графикот на Слика 34 за експоненцијалната распределба, како што се зголемува временскиот интервал на опслужување, така веројатноста за да се опслужи клиентот опаѓа. Тоа значи дека експоненцијалната распределба на времето на опслужување покажува дека најголема е веројатноста опслужувањето на клиентите да биде направено во првиот односно најмалиот временски интервал.

Резултати од примена на моделот:

$\lambda = 42$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ сервери (каси)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{42}{30} = 1.4$$

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.4}{2} = 0.7$ *просечна искористеност на системот на час (кога работат 2 каси)*

$\rho_s = 70\%$

Веројатноста дека серверите се слободни, односно дека во ситсемот ќе нема клиенти е добиена со следниов израз:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1} = (1 + 1.4 + \frac{1.4^2}{2} + \frac{1.4^2}{2} \cdot \frac{0.7}{1-\ 0.7})^{-1}$$
$$= \ (2.4 + 0.98 + 0.98 \cdot 2.3333)^{-1} = \ (3.38 + 2.2866)^{-1} = \ 5.6666^{-1}$$
$$= \ \frac{1}{5.6666} = 0.1765 = 17.65\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.4 \cdot 0.1765 = 0.2471$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.7 \cdot 0.2471 = 0.1729$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.7 \cdot 0.1729 = 0.1210$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.7 \cdot 0.1210 = 0.0847$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.7 \cdot 0.0847 = 0.0593$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.7 \cdot 0.0593 = 0.0415$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.7 \cdot 0.0415 = 0.0291$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.7 \cdot 0.0291 = 0.0203$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.7 \cdot 0.0203 = 0.0142$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.7 \cdot 0.0142 = 0.0099$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.7 \cdot 0.0099 = 0.0069$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} = 0.7 \cdot 0.0069 = 0.0048$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.7 \cdot 0.0048 = 0.0034$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.7 \cdot 0.0034 = 0.0024$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.7 \cdot 0.0024 = 0.0017$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.7 \cdot 0.0017 = 0.0012$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.7 \cdot 0.0012 = 0.0008$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.7 \cdot 0.0008 = 0.0006$

$$p_n = 1 -\ p_0 = \ 1 - 0.1765 = 0.8235 = 82.35\%$$

Веројатноста во системот да има 18 клиенти е 17.65% , а 82.35% дека во системот ќе има повеќе од 18 клиенти.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга изнесува:

$$n_r = \ \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.1765 \cdot \frac{1.4^2}{2} \cdot \frac{0.7}{(1-\ 0.7)^2} = 0.1765 \cdot 0.98 \cdot \frac{0.7}{0.09}$$
$$n_r = 0.1729 \cdot 7.7778 = 1.345$$

Просечниот број на клиенти во системот е:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s}\right)\right] = 2.5725$$

Просечен број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = n_s - n_r = 2.5725 - 1.345 = 1.2275$$

Просечното време на опслужување на клиент изнесува:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 1{,}998\, min$$

Просечното време на чекање на клиентот во ред за услуга е:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{1.345}{42} = 0.0320 = 1.92\, min$$

Просечното време на задржување на клиентот во системот изнесува:

$$t_s = t_0 + t_r = 0.0333 + 0.032 = 3{,}918\, min$$

Интерпретација на резултатите за понеделник за моделот M/M/2

Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.7$ односно $\rho_s = 70\%$. *Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е* 1.345 *клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е* $1.92\, min$ *што е нормално време поминато во редот.*

Во **<u>вторник</u>** просечно пристигнуваат 45 клиенти на час $(\lambda = 45)$ и пристигнувањето е проследено со Пуасоновиот закон за распределба на веројатностите.Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат изнесува 30 $(\mu = 30)$.

Табела 21. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 45$)
Table. 21. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 45$)

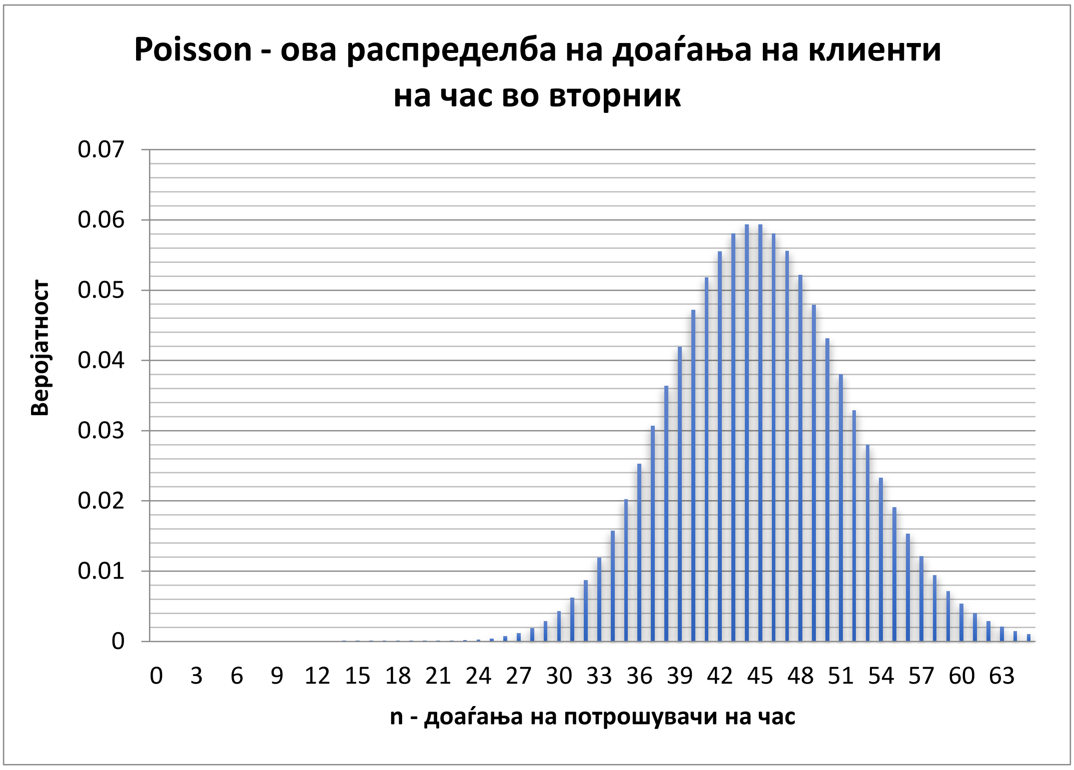
n	**P_n**
0	2.39297E-76
1	1.28813E-18
2	2.8983E-17
3	4.34745E-16
4	4.89088E-15
5	4.40179E-14
6	3.30134E-13
7	2.12229E-12
8	1.19379E-11
9	5.96895E-11
10	2.68603E-10
11	1.09883E-09
12	4.12061E-09
13	1.42637E-08
14	4.58474E-08
15	1.37542E-07
16	3.86838E-07
17	1.02398E-06
18	2.55996E-06
19	6.06305E-06

ПРОДОЛЖУВА	
20	1.36419E-05
21	2.92326E-05
22	5.97939E-05
23	0.000116988
24	0.000219353
25	0.000394835
26	0.000683368
27	0.001138947
28	0.00183045
29	0.002840353
30	0.00426053
31	0.006184641
32	0.008697151
33	0.011859751
34	0.01569673
35	0.02018151
36	0.025226887
37	0.030681349
38	0.036333176
39	0.041922896
40	0.047163258
41	0.051764551

ПРОДОЛЖУВА	
42	0.055462019
43	0.058041648
44	0.059360776
45	0.059360776
46	0.058070325
47	0.055599247
48	0.052124294
49	0.04786925
50	0.043082325
51	0.038013816
52	0.032896572
53	0.027931051
54	0.023275876
55	0.019043899
56	0.015303133
57	0.012081421
58	0.009373516
59	0.007149292
60	0.005361969
61	0.003955551
62	0.002870964
63	0.002050689
64	0.001441891
65	0.000998232

Во Табела 21 во дадени се веројатностите кои се поврзани со вредностите од првата колона, кои претставуваат просечен број на доаѓања на клиентите. Можеме да забележиме дека за различен број на доаѓања, веројатноста за да се случат варира.

Податоците внесени во оваа табела се прикажани графички.



Слика 35. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 45$
Figure 35. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 45$

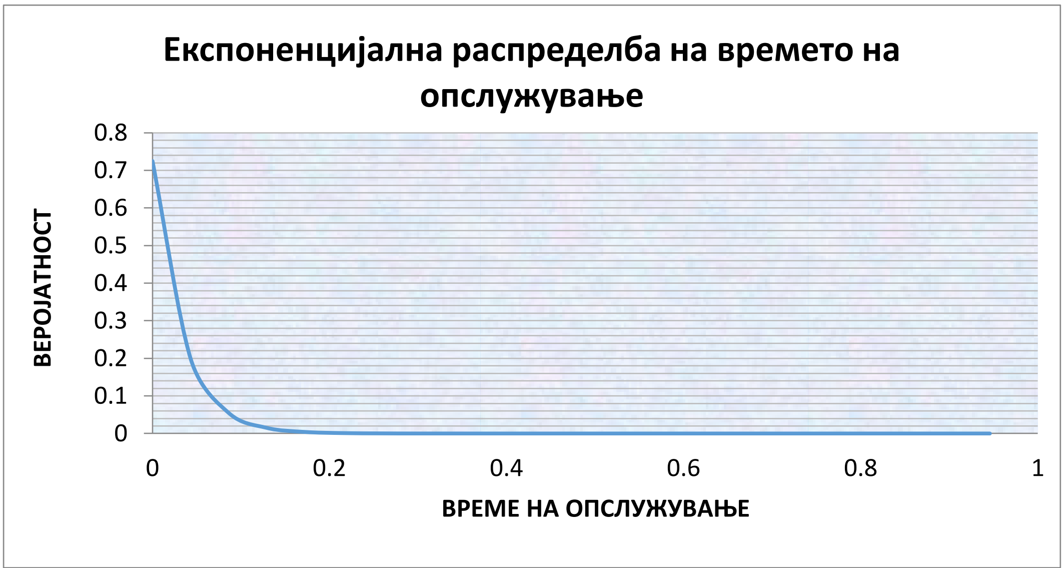
Графичкиот приказ на Слика 35 покажува дека најголема е веројатноста просечно да пристигнат 45 клиенти на час, но постојат и веројатности кои укажуваат и дека може да се појават повеќе клиенти, при што нивниот број може да надмине и 63.

Просечното време помеѓу две пристигнувања изнесува $\frac{1}{45} = 0.022$ часа, односно се очекува пристигнувањето на еден клиент да се случува на 1.33 мин.

Табела 22. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 22. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			ВЕРОЈАТНОСТ
0	до	**0.043**	0.724729217
0.043	до	**0.086**	0.199496779
0.086	до	**0.129**	0.054915635
0.129	до	**0.172**	0.01511667
0.172	до	**0.215**	0.004161178
0.215	до	**0.258**	0.001145451
0.258	до	**0.301**	0.000315309
0.301	до	**0.344**	8.67954E-05
0.344	до	**0.387**	2.38922E-05
0.387	до	**0.43**	6.57683E-06
0.43	до	**0.473**	1.81041E-06
0.473	до	**0.516**	4.98353E-07
ПРОДОЛЖУВА			
0.516	до	**0.559**	1.37182E-07
0.559	до	**0.602**	3.77622E-08
0.602	до	**0.645**	1.03948E-08
0.645	до	**0.688**	2.86139E-09
0.688	до	**0.731**	7.87658E-10
0.731	до	**0.774**	2.16819E-10
0.774	до	**0.817**	5.9684E-11
0.817	до	**0.86**	1.64293E-11
0.86	до	**0.903**	4.5225E-12
0.903	до	**0.946**	1.24491E-12
0.946	до	**0.989**	3.42688E-13



Слика 36.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 36.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Табела 22 и Слика 36 даваат приказ на времето на опслужување во вторник кое се карактеризира со експоненцијална рапределба при што опслужувањето на клиентите се врши низ повеќе временски интервали. Веројатностите кои се дадени и кои се прикажани графички, се однесуваат за различните временски интервали и бидејќи најголема е веројатноста опслужувањето да се изврши во првиот временски интервал, во следните интервали истата опаѓа, што може да се забележи од графичкиот приказ на експоненцијалната распределба.

Од примена на моделот добиваме:

$\lambda = 45$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ сервери (каси)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{30} = 1.5$ - фактор на опслужување по каса

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.5}{2} = 0.75$ - фактор на опслужување на системот (супермаркетот)

$\rho_s = 75\%$ - просечна искористеност на системот во проценти

Веројатноста дека системот (супермаркетот) нема да има клиенти е:

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s}\right)^{-1} = \left(\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s}\right)^{-1}$$

$$= \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s}\right)^{-1} = \left(1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2} + \frac{1.5^2}{2} \cdot \frac{0.75}{1-0.75}\right)^{-1}$$

$$= (2.5 + 1.125 + 1.125 \cdot 3)^{-1} = (3.625 + 3.375)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

$p_0 = 0.1429 = 14.29\%$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.5 \cdot 0.1429 = 0.2143$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.75 \cdot 0.2143 = 0.1607$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.75 \cdot 0.1607 = 0.1205$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.75 \cdot 0.1205 = 0.0904$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.75 \cdot 0.0904 = 0.0678$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.75 \cdot 0.0678 = 0.0508$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.75 \cdot 0.0508 = 0.0381$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.75 \cdot 0.0381 = 0.0286$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.75 \cdot 0.0286 = 0.0214$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.75 \cdot 0.0214 = 0.0161$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.75 \cdot 0.0161 = 0.0121$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} = 0.75 \cdot 0.0121 = 0.0091$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.75 \cdot 0.0091 = 0.0068$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.75 \cdot 0.0068 = 0.0051$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.75 \cdot 0.0051 = 0.0038$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.75 \cdot 0.0038 = 0.0028$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.75 \cdot 0.0028 = 0.0021$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.75 \cdot 0.0021 = 0.001$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.1429 = 0.8571 = 85.71\%$$

Веројатноста дека во системот ќе има 18 клиенти во проценти е 14.29%, а дека ќе има повеќе од 18 е 87.71%.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга изнесува:

$$n_r = \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.1429 \cdot \frac{1.5^2}{2} \cdot \frac{0.75}{(1-\ 0.75)^2} = 0.1429 \cdot 1.125 \cdot \frac{0.75}{0.0625}$$
$$= 0.1608 \cdot 12 = 1.9296$$

Просечниот број на клиенти во системот е:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s}\right)\right] = 3.2688$$

Просечен број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \ n_s - n_r = 3.2688 - 1.9296 = 1.3392$$

Просечното време на опслужување клиент е:

$$t_0 = \ \frac{1}{\mu} = \ \frac{1}{30} = 1{,}998\, min$$

Просечно време на чекање на клиентот во ред за услуга е:

$$t_r = \ \frac{n_r}{\lambda} = \ \frac{1.9296}{45} = 0.0429 = 2.574 min$$

Просечно време на задржување на клиентот во системот изнесува:

$$t_s = \ t_0 + t_r = 0.0333 + 0.0429 = 4.572\ min$$

Интерпретација на резултатите за моделот М/М/2

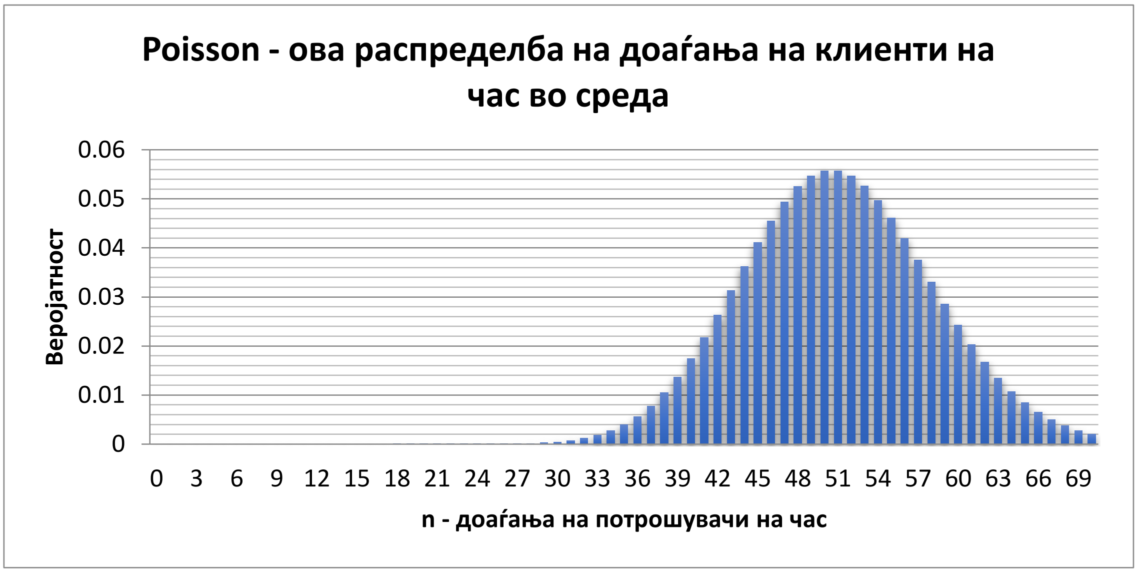
Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.75$ односно $\rho_s = 75\%$. Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е 1.9296 клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е $2.574 min$ што е нормално време поминато во редот.

Според нашето истражување може да заклучиме дека во првите два дена од неделата бројот на потрошувачи кои доаѓаат на час е приближно ист од каде произлегува дека стапката на искористеност на системот се наоѓа приближно на исто ниво при ист интензитет на опслужување.

Следниот ден кој го анализиравме беше **<u>среда</u>**, каде просечниот број на пристигнувања на клиенти изнесува 51 $(\lambda = 51)$ и истите ја следат Пуасоновата распределба. Интензитетот на опслужување во супермаркетот е 30 клиенти на час.

Табела 23. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба $(\lambda = 51)$
Table 23. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution $(\lambda = 51)$

n	**P_n**
0	7.0955E-23
1	3.6187E-21
2	9.2277E-20
3	1.5687E-18
4	2.0001E-17
5	2.0401E-16
6	1.7341E-15
7	1.2634E-14
8	8.0542E-14
9	4.564E-13
10	2.3277E-12
11	1.0792E-11
12	4.5866E-11
13	1.7993E-10
14	6.5547E-10
15	2.2286E-09
16	7.1037E-09
17	2.1311E-08
18	6.0381E-08
19	1.6208E-07
20	4.133E-07
21	1.0037E-06
22	2.3268E-06
23	5.1594E-06
24	1.0964E-05
25	2.2366E-05
ПРОДОЛЖУВА	
26	4.3872E-05
27	8.2869E-05
28	0.00015094
29	0.00026545
30	0.00045126
31	0.0007424
32	0.00118319
33	0.00182857
34	0.00274285
35	0.00399673
36	0.00566204
37	0.00780443
38	0.01047436
39	0.01369724
40	0.01746399
41	0.0217235
42	0.02637853
43	0.03128616
44	0.03626351
45	0.04109864
46	0.04556589
47	0.04944384
48	0.05253407
49	0.05467832
50	0.05577189
51	0.05577189
ПРОДОЛЖУВА	
52	0.05469935
53	0.05263523
54	0.04971105
55	0.0460957
56	0.04198001
57	0.03756106
58	0.03302783
59	0.02854948
60	0.02426706
61	0.02028885
62	0.01668922
63	0.01351032
64	0.01076604
65	0.0084472
66	0.00652738
67	0.0049686
68	0.00372645
69	0.00275433
70	0.00200673



Слика 37. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 51$
Figure 37. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 51$

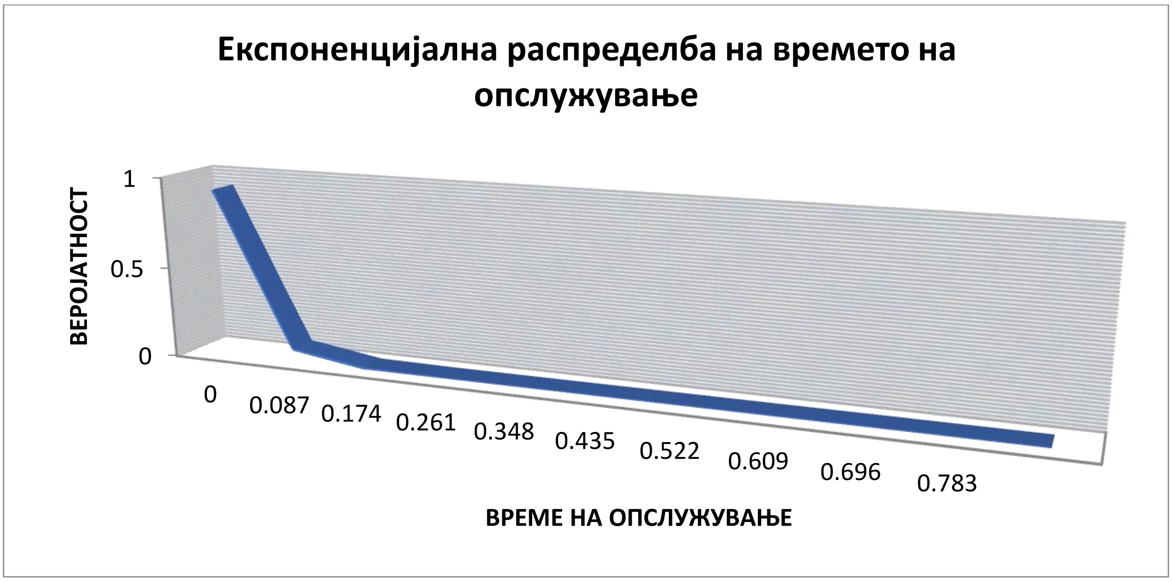
Во горедадената Табела 23 дадени се веројатностите за n доаѓања на клиенти во среда. Истите се графички прикажани и притоа може да се забележи дека просечно треба да се очекува да пристигне 51 клиент на час, бидејќи постои најголема веројатност според Пуасоновиот закон за распределба на веројатностите (сл.37).

Бидејќи во среда просечниот број на пристигнувања по Пуасоновиот тек е 51 $\lambda = 51$, тогаш времето меѓу две пристигнувања кое се карактеризира со експоненцијална распределба е $\frac{1}{51} = 0.02$ часа, односно секој клиент просечно ќе пристигнува на 1.2 мин.

Табела 24. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 24. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			ВЕРОЈАТНОСТ
0	до	**0.087**	0.926465456
0.087	до	**0.174**	0.068127215
0.174	до	**0.261**	0.005009704
0.261	до	**0.348**	0.000368386
0.348	до	**0.435**	2.70891E-05
0.435	до	**0.522**	1.99199E-06

ПРОДОЛЖУВА			
0.522	до	**0.609**	1.4648E-07
0.609	до	**0.696**	1.07713E-08
0.696	до	**0.783**	7.92064E-10
0.783	до	**0.87**	5.82441E-11
0.87	до	**0.957**	4.28295E-12



Слика 38.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 38.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Времето на опслужување е проследено со експоненцијална распределба и притоа исто како и другите денови така и во среда времето на опслужувањето на клиентите не се одвива во исто време туку во различни временски интервали. Тие временски интервали помеѓу кои се одвива опслужувањето се дадени погоре во Табела 24 и заедно со нив се прикажани и веројатностите за да се случи опслужувањето во тие дадени интервали. Експоненцијалната распределба на времето на опслужување е дадена графички и има тренд на опаѓање поради тоа што најголема е веројатноста клиентот да се опслужи во првиот временски интервал.

Резултати добиени со креирање на моделот:

$\lambda = 51$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ *сервери (каси)*

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{51}{30} = 1.7$

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.7}{2} = 0.85$ - *просечна искористеност на системот (фактор на опслужување)*

$\rho_s = 85\%$ - просечна искористеност на системот во проценти

Веројатност дека серверите (касите) ќе бидат слободни:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$

$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1} = (1 + 1.7 + \frac{1.7^2}{2} + \frac{1.7^2}{2} \cdot \frac{0.85}{1-\ 0.85})^{-1}$$

$$= \ (2.7 + 1.445 + 1.445 \cdot 5.667)^{-1} = \ (4.145 + 8.189)^{-1} = \ 12.334^{-1}$$

$$= \ \frac{1}{12.334} = 0.0811 = 8.11\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.7 \cdot 0.0811 = 0.1379$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.85 \cdot 0.1379 = 0.1172$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.85 \cdot 0.1172 = 0.0996$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.85 \cdot 0.0996 = 0.0847$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.85 \cdot 0.0847 = 0.0719$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.85 \cdot 0.0719 = 0.0612$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.85 \cdot 0.0612 = 0.0520$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.85 \cdot 0.0520 = 0.0442$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.85 \cdot 0.0442 = 0.0376$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.85 \cdot 0.0376 = 0.0319$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.85 \cdot 0.0319 = 0.0271$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} = 0.85 \cdot 0.0271 = 0.0231$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.85 \cdot 0.0231 = 0.0196$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.85 \cdot 0.0196 = 0.0167$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.85 \cdot 0.0167 = 0.0142$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.85 \cdot 0.0142 = 0.0120$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.85 \cdot 0.0120 = 0.0102$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.85 \cdot 0.0102 = 0.0087$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.0811 = 0.9189 = 91.89\%$$

Резултатите покажуваат дека 8.11% е веројатност да има 18 клиенти во системот, а додека 91.89% веројатност да има повеќе од 18 клиенти.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга е:

$$n_r = \ \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.0811 \cdot \frac{1.7^2}{2} \cdot \frac{0.85}{(1-0.85)^2} = 0.0811 \cdot 1.445 \cdot \frac{0.85}{0.0225}$$

$$= 0.1172 \cdot 37.7778 = 4.4275$$

Просечен број на клиенти во супермаркетот (системот):

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s} \right) \right] \ = 6.0109$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат изнесува:

$$n_0 = n_s - n_r = 6.0109 - 4.4275 = 1.5834$$

Просечно време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 1{,}998\, min$$

Просечното време на чекање на клиентот во ред за услуга е:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{4.4275}{51} = 0.0868 = 5.21 min$$

Просечно време на задржување на клиентот во системот е:

$$t_s = t_0 + t_r = 0.0333 + 0.0868 = 7.206\, min$$

Интерпретација на резултатите за моделот М/М/2

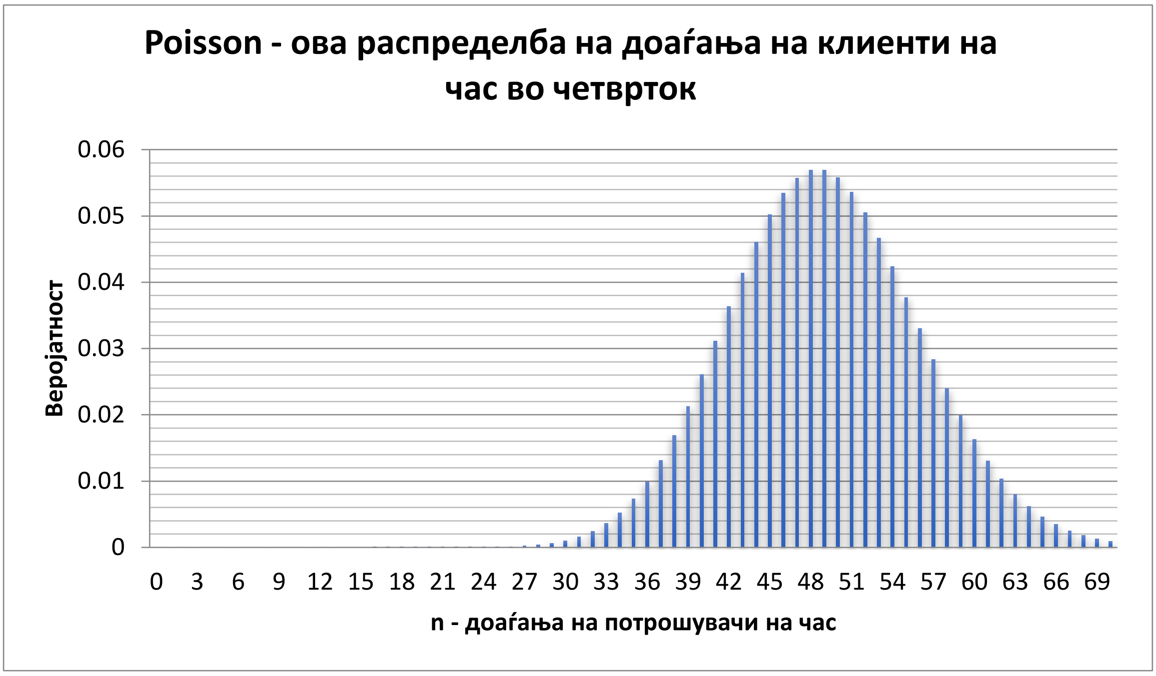
Ефикасноста на системот кое произлегува од работењето на серверите е доволно добра.Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.85$ односно $\rho_s = 85\%$. *Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е* 4.4275 *клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е* $5.21 min$ *што е нормално време поминато во редот.*

Во **<u>четврток</u>** просечно пристигнуваат 49 клиенти на час $(\lambda = 49)$ и притоа пристигнувањата се одвиваат според Пуасоновиот поток. Средниот број на клиенти кои се опслужуваат е 30 клиенти на час $(\mu = 30)$.

Табела 25. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 49$)
Table. 25. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 49$)

n	P_n
0	5.24289E-22
1	2.56901E-20
2	6.29408E-19
3	1.02803E-17
4	1.25934E-16
5	1.23415E-15
6	1.00789E-14
7	7.05525E-14
8	4.32134E-13
9	2.35273E-12
10	1.15284E-11
11	5.13537E-11
12	2.09694E-10
13	7.90386E-10
14	2.76635E-09
15	9.03674E-09
16	2.7675E-08
17	7.97692E-08
18	2.17149E-07
19	5.60017E-07
20	1.37204E-06
21	3.20143E-06
22	7.13046E-06
23	1.5191E-05
24	3.10149E-05
25	6.07892E-05
26	0.000114564
27	0.000207913
28	0.000363848
29	0.000614777
30	0.001004136
31	0.001587183
32	0.002430375
33	0.003608738
34	0.005200828

ПРОДОЛЖУВА	
36	0.009910467
37	0.013124672
38	0.01692392
39	0.021263386
40	0.026047648
41	0.031130116
42	0.036318469
43	0.041386162
44	0.046089135
45	0.050185947
46	0.053458944
47	0.055733793
48	0.056894913
49	0.056894913
50	0.055757015
51	0.053570465
52	0.050479862
53	0.046670061
54	0.042348759
55	0.037728894
56	0.033012782
57	0.028379409
58	0.023975708
59	0.019912029
60	0.01626149
61	0.013062508
62	0.010323595
63	0.008029463
64	0.006147558
65	0.004634313
66	0.003440626
67	0.002516279
68	0.001813201
69	0.001287635
70	0.000901345



Слика 39. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 49$
Figure 39. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 49$

Според Табела 25 и Слика 39 воочуваме дека постои најголема веројатност дека средниот број на клиенти ќе биде 49. Знаеме дека времето на пристигнување е проследено со Пуасонова распределба, а времето меѓу две доаѓања со експоненцијална распределба. Според тоа утврдуваме дека во четврток кога се очекуваат просечно на час 49 клиенти, средно време помеѓу секое пристигнување ќе биде $\frac{1}{49} = 0.0204$ часа, односно секој клиент ќе пристигнува на 1.224 мин.

Табела 26. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 26. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			ВЕРОЈАТНОСТ
0	до	**0.063**	0.848928191
0.063	до	**0.126**	0.128249117
0.126	до	**0.189**	0.019374826
0.189	до	**0.252**	0.00292699
0.252	до	**0.315**	0.000442186
0.315	до	**0.378**	6.68018E-05
0.378	до	**0.441**	1.00919E-05
0.441	до	**0.504**	1.5246E-06

ПРОДОЛЖУВА			
0.504	до	**0.567**	2.30324E-07
0.567	до	**0.63**	3.47954E-08
0.63	до	**0.693**	5.2566E-09
0.693	до	**0.756**	7.94125E-10
0.756	до	**0.819**	1.1997E-10
0.819	до	**0.882**	1.81241E-11
0.882	до	**0.945**	2.73803E-12

Слика 40.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 40.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Табела 26 ги покажува различните временски интервали во кои се врши опслужувањето заедно со веројатностите тоа да се оствари во тие интервали. Вредноста 0.848928191 покажува дека постои веројатност опслужувањето да се изврши во интервалот помеѓу 0 и 0.063 часа, која истовремено е и најголема во однос на останатите кои опаѓаат. Истото може да се забележи и графички прикажано на Слика 40.

Резултати од примена на моделот:

$\lambda = 49$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ *сервери (каси)*

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{49}{30} = 1.6333$ - *фактор на опслужување по сервер (каса)*

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.6333}{2} = 0.8166$ - *фактор на опслужување на системот*

$\rho_s = 81.66\%$ - просечна искористеност на системот изразена во проценти

Веројатноста дека во системот (супермаркетот) нема да има клиенти, односно дека серверите (касите) ќе бидат слободни е:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$

$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$

$$= (1 + 1.6333 + \frac{1.6333^2}{2} + \frac{1.6333^2}{2} \cdot \frac{0.8166}{1-\ 0.8166})^{-1}$$

$$= \ (2.6333 + 1.3338 + 1.3338 \cdot 4.4526)^{-1} = \ (3.9671 + 5.9389)^{-1}$$

$$= \ 9.906^{-1} = \ \frac{1}{9.906} = 0.1009 = 10.09\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.6333 \cdot 0.1009 = 0.1648$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.8166 \cdot 0.1648 = 0.134$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.8116 \cdot 0.1346 = 0.1092$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.8116 \cdot 0.1092 = 0.0886$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.8116 \cdot 0.0886 = 0.0719$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.8116 \cdot 0.0719 = 0.0583$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.8116 \cdot 0.0583 = 0.0473$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.8116 \cdot 0.0473 = 0.0384$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.8116 \cdot 0.0384 = 0.0312$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.8116 \cdot 0.0312 = 0.0253$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.8116 \cdot 0.0253 = 0.0205$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} = 0.8116 \cdot 0.0205 = 0.0166$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.8116 \cdot 0.0166 = 0.0135$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.8116 \cdot 0.0135 = 0.0109$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.8116 \cdot 0.0109 = 0.0088$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.8116 \cdot 0.0088 = 0.0071$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.8116 \cdot 0.0071 = 0.0058$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.8116 \cdot 0.0058 = 0.0047$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.1009 = 0.8991 = 89.91\%$$

Добиените резултати ни покажуваат дека во веројатноста во системот да има 18 клиенти е 10.09% , а 89.91% е веројатност во системот да има повеќе од 18 клиенти.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга изнесува:

$$n_r = \ \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.1009 \cdot \frac{1.6333^2}{2} \cdot \frac{0.8116}{(1-\ 0.8116)^2}$$

$$= 0.1009 \cdot 1.3338 \cdot \frac{0.8116}{0.0355} = 0.1346 \cdot 22.8619 = 3.0772$$

Просечен број на клиенти во системот:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s}\right)\right] = 4.1659$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат на час е:

$$n_0 = n_s - n_r = 4.1659 - 3.0772 = 1.0887$$

Просечно време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} = 1{,}998\, min$$

Просечно време на чекање на клиентот во ред за услуга:

$$t_r = \frac{n_r}{\lambda} = \frac{3.0772}{49} = 0.0628 = 3.768\, min$$

Просечно време на клиентот во системот:

$$t_s = t_0 + t_r = 0.0333 + 0.0628 = 5.766\, min$$

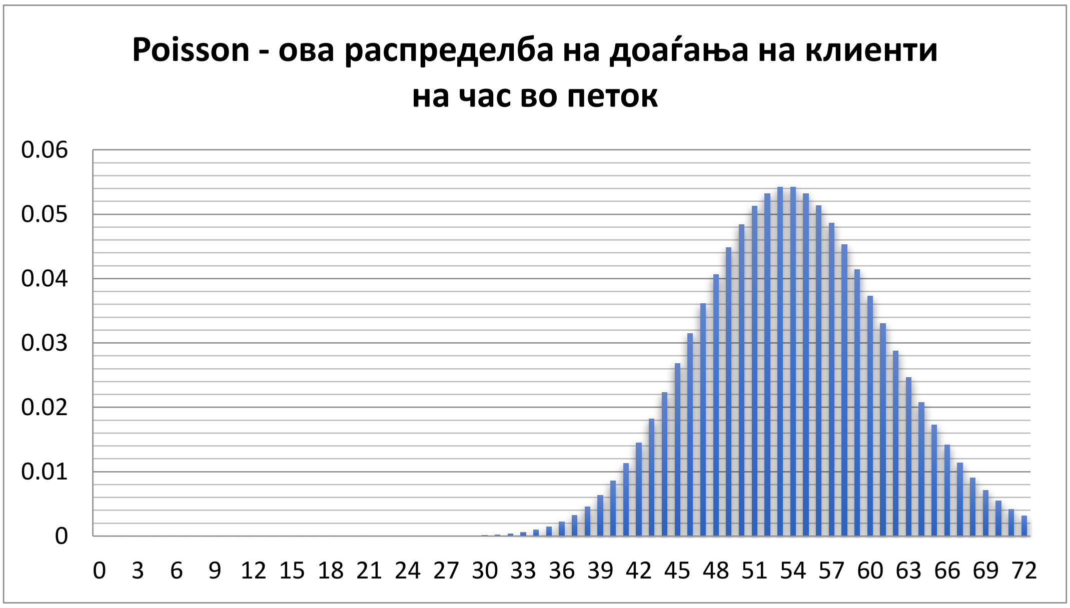
Интерпретација на резултатите за четврток за моделот М/М/2

Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.8166$ односно $\rho_s = 81.66\%$. *Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е* 3.0772 *клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е* $3.768\ min$ *што е нормално време поминато во редот.*

<u>Петок</u> е следниот ден кој беше опфатен во нашата анализа. Пристигнувањата на клиентите се карактеризираат со Пуасоновиот тек на доаѓања и тој ден просечниот број на клиенти кои доаѓаат во супермаркетот е 54 $(\lambda = 54)$. Интензитетот на опслужување изнесува 30 клиенти на час $(\mu = 30)$.

Табела 27. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 54$)
Table. 27. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 54$)

n	P_n
0	3.53263E-24
1	1.90762E-22
2	5.15057E-21
3	9.27103E-20
4	1.25159E-18
5	1.35172E-17
6	1.21654E-16
7	9.38477E-16
8	6.33472E-15
9	3.80083E-14
10	2.05245E-13
11	1.00757E-12
12	4.53405E-12
13	1.88337E-11
14	7.26444E-11
15	2.6152E-10
16	8.8263E-10
17	2.80365E-09
18	8.41094E-09
19	2.39048E-08
20	6.45429E-08
21	1.65967E-07
22	4.07375E-07
23	9.56445E-07
ПРОДОЛЖУВА	
24	2.152E-06
25	4.64832E-06
26	9.65421E-06
27	1.93084E-05
28	3.72377E-05
29	6.93391E-05
30	0.00012481
31	0.000217412
32	0.000366882
33	0.000600353
34	0.000953501
35	0.001471116
36	0.002206674
37	0.003220551
38	0.004576573
39	0.006336793
40	0.008554671
41	0.011267127
42	0.014486307
43	0.018192106
44	0.022326676
45	0.026792011
46	0.031451491
47	0.036135755
ПРОДОЛЖУВА	
48	0.040652725
49	0.044800962
50	0.048385039
51	0.051231218
52	0.053201649
53	0.054205454
54	0.054205454
55	0.0532199
56	0.05131919
57	0.04861818
58	0.045265202
59	0.041429168
60	0.037286251
61	0.033007501
62	0.028748468
63	0.024641544
64	0.020791303
65	0.017272775
66	0.01413227
67	0.011390188
68	0.009045149
69	0.007078813
70	0.005460798
71	0.004153283
72	0.003114962



Слика 41. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 54$
Figure 41. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 54$

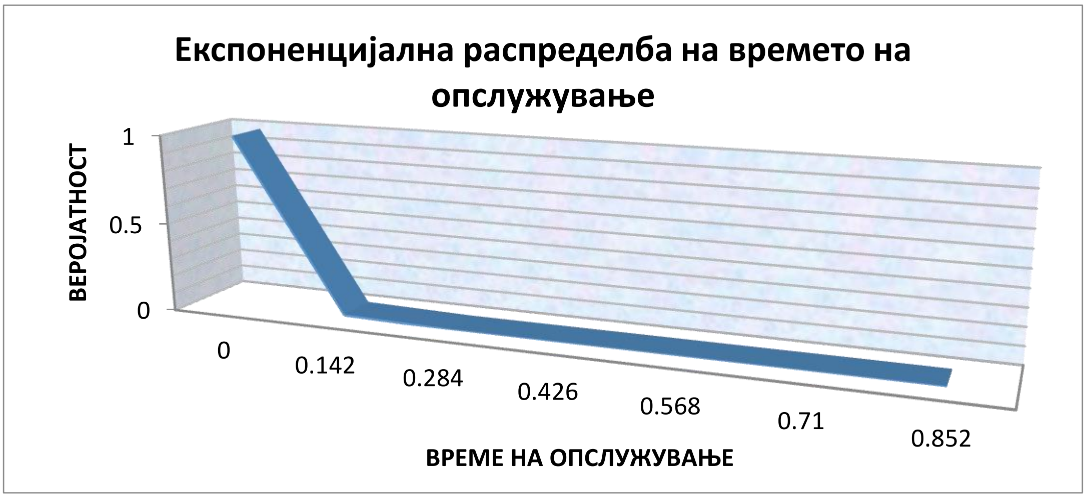
Исто како и останатите денови, во петок клиентите пристигнуваат според Пуасоновиот тек на доаѓања. Веројатноста да има n доаѓања на клиенти е дадена во Табела 27. Согласно на тие податоци на Слика 41 е даден графички приказ на Пуасоновата распределба кој ни покажува дека во просек ќе доаѓаат 54 клиенти на час.

Ако во петок пристигнувањето на клиенти се одвива според Пуасоновиот закон на распределба на веројатностите и просечниот број на клиенти е 54 $(\lambda = 54)$, тогаш времето помеѓу две пристигнувања проследено со експоненцијална распределба ќе биде $\frac{1}{54} = 0.018$ часа, т.е. клиентите ќе пристигнуваат на 1.08 мин.

Табела 28. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали

Table 28. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	**до**	**0.142**	0.985877698
0.142	**до**	**0.284**	0.013922863
0.284	**до**	**0.426**	0.000196623
0.426	**до**	**0.568**	2.77677E-06
0.568	**до**	**0.71**	3.92144E-08
0.71	**до**	**0.852**	5.53797E-10
0.852	**до**	**0.994**	7.82089E-12



Слика 42.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$

Figure 42.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Исто како и другите денови од неделата, во петок времето на опслужување е проследено со експоненцијална распределба. Тоа значи дека опслужувањето во супермаркетот минува низ различни временски интервали (таб.28). Меѓутоа, веројатноста за извршувањето на опслужувањето е различна за секој временски интервал. Таа обично е најголема за помалите временски интервали, додека понатаму се повеќе опаѓа (сл.42).

Од примена на моделот добиени се резултатите:

$\lambda = 54$ *клиенти на час*

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ сервери (каси)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{54}{30} = 1.8$

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.8}{2} = 0.9$- *просечна искористеност на системот*

$\rho_s = 90\%$ - просечна искористеност на системот изразена во проценти

Веројатност дека серверите (касите) се слободни:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1} = (1 + 1.8 + \frac{1.8^2}{2} + \frac{1.8^2}{2} \cdot \frac{0.9}{1-\ 0.9})^{-1}$$
$$= \ (2.8 + 1.62 + 1.62 \cdot 9)^{-1} = \ (4.42 + 14.58)^{-1} = \ 19^{-1} = \ \frac{1}{19}$$
$$= 0.0526 = 5.26\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.8 \cdot 0.0526 = 0.0947$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.9 \cdot 0.0947 = 0.0853$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.9 \cdot 0.0853 = 0.0768$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.9 \cdot 0.0768 = 0.0691$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.9 \cdot 0.0691 = 0.0622$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.9 \cdot 0.0622 = 0.0559$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.9 \cdot 0.0559 = 0.0504$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.9 \cdot 0.0504 = 0.0454$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} = 0.9 \cdot 0.0331 = 0.0298$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.9 \cdot 0.0298 = 0.0268$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.9 \cdot 0.0268 = 0.0241$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.9 \cdot 0.0241 = 0.0217$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.9 \cdot 0.0217 = 0.0196$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.9 \cdot 0.0196 = 0.0176$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.9 \cdot 0.0176 = 0.0159$

$p_{19} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.9 \cdot 0.0159 = 0.0143$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.9 \cdot 0.0454 = 0.0409$ $p_{20} = \rho_s \cdot p_{19} = 0.9 \cdot 0.0143 = 0.0129$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.9 \cdot 0.0409 = 0.0368$ $p_{21} = \rho_s \cdot p_{20} = 0.9 \cdot 0.0129 = 0.0116$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.9 \cdot 0.0368 = 0.0331$ $p_{22} = \rho_s \cdot p_{21} = 0.9 \cdot 0.0116 = 0.0105$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.0526 = 0.9474 = 94.47\%$$

Веројатноста во петок да има 22 клиенти во системот процентуално изнесува 5.26%, а 94.47% е веројатноста да има повеќе од 22 клиенти во системот.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга изнесува:

$$n_r = \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.0526 \cdot \frac{1.8^2}{2} \cdot \frac{0.9}{(1-\ 0.9)^2} = 0.0526 \cdot 1.62 \cdot \frac{0.9}{0.01} = 0.0852 \cdot 90 = 7.668$$

Просечниот број на клиенти во системот е:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s}\right) \right] = 9.383$$

Просечен број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \ n_s - n_r = 9.383 - 7.668 = 1.715$$

Просечно време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \ \frac{1}{\mu} = \ \frac{1}{30} = 1{,}998 \, min$$

Просечно време на чекање на клиентот во ред за услуга:

$$t_r = \ \frac{n_r}{\lambda} = \ \frac{7.668}{54} = 0.142 = 8.52 \, min$$

Просечно време на задржување на клиентот во системот:

$$t_s = \ t_0 + t_r = 0.0333 + 0.0142 = 10{,}518 \, min$$

Интерпретација на резултатите за моделот M/M/2

Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.9$ односно $\rho_s = 90\%$. Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е 7.668 клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е $8.52 \, min$.Беше направено испитување дали постои оправданост од воведување на уште една каса и притоа беа добиени следните резултати :

- Трошоците за едно касиерско место се $C_1 = 16 \text{ ден./час}$. Поради можност за губење на купувачи, оценети се трошоци од $C_2 = 10 \text{ ден./час}$ што купувачи го поминуваат додека чекаат пред касите.
- Просечниот трошок што настанува поради чекање на клиентитте е:

$$C = n_r \cdot t_r \cdot C_2 = 7.668 \cdot 0.142 \cdot 10 = 10.89 \text{ ден./час}$$

Според тоа може да заклучиме дека нема потреба од воведување на уште една каса, бидејќи трошоците од чекање се 10,89 денари на час што е помалку од трошокот за воведување на каса што е 16 денари на час, што значи $8.52\ min$ е доволно време поминато во редот.

Во **сабота** просечниот број на пристигнувања е најголем и истиот изнесува 55 клиенти на час ($\lambda = 55$). Доаѓањето на клиентите се одвива според Пуасоновата распределба и во супермаркетот просечно се опслужуваат 30 клиенти на час ($\mu = 30$).

Табела 29. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба ($\lambda = 55$)

Table. 29. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution ($\lambda = 55$)

n	P_n
0	1.29958E-24
1	7.1477E-23
2	1.96562E-21
3	3.60363E-20
4	4.95499E-19
5	5.45049E-18
6	4.99628E-17
7	3.92565E-16
8	2.69889E-15
9	1.64932E-14
10	9.07125E-14
11	4.53563E-13
12	2.07883E-12
13	8.79505E-12
14	3.4552E-11
15	1.26691E-10
16	4.35499E-10
17	1.40897E-09
18	4.30518E-09
19	1.24624E-08
20	3.42715E-08
21	8.97586E-08
22	2.24396E-07
23	5.366E-07
24	1.22971E-06
25	2.70536E-06
ПРОДОЛЖУВА	
26	5.72288E-06
27	1.16577E-05
28	2.28991E-05
29	4.34293E-05
30	7.96204E-05
31	0.000141262
32	0.000242794
33	0.000404657
34	0.000654591
35	0.001028644
36	0.001571539
37	0.002336072
38	0.003381156
39	0.004768297
40	0.006556409
41	0.008795182
42	0.0115175
43	0.014731687
44	0.018414608
45	0.022506743
46	0.026910237
47	0.031490703
48	0.036083097
49	0.040501435
50	0.044551579
ПРОДОЛЖУВА	
51	0.04804582
52	0.050817694
53	0.052735343
54	0.053711924
55	0.053711924
56	0.052752782
57	0.050901807
58	0.048268955
59	0.044996484
60	0.041246777
61	0.037189717
62	0.032990878
63	0.02880156
64	0.024751341
65	0.020943442
66	0.017452868
67	0.014326981
68	0.011588
69	0.009236811
70	0.007257495
71	0.005622003
72	0.004294586
73	0.003235647
74	0.002404873
75	0.001763573

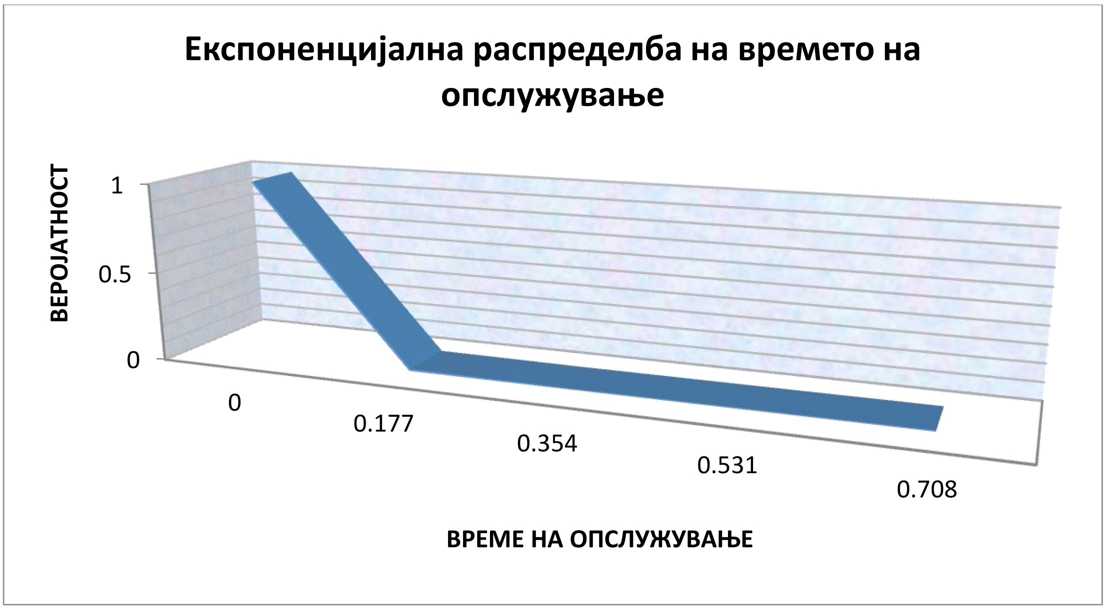
Слика 43. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 55$

Figure 43. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 55$

Во Табела 29 вредностите кои се дадени во првата колона се поврзани со веројатностите за истите. Тоа значи дека на пример за да пристигнуваат 50 клиенти на час постои веројатност од 0.044551579. Резултатите од табелата се прикажани графички и како што може да се забележи најголема е веројатноста во супермаркетот просечно да пристигнуваат 55 клиенти на час. Времето помеѓу две пристигнувања во сабота во тој случај ќе биде $\frac{1}{55} = 0.18$ часа, односно интервалот помеѓу кој ќе се одвиваат две пристигнувања ќе биде 10.8 мин.

Табела 30. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 30. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	**до**	**0.177**	0.995058073
0.177	**до**	**0.354**	0.004917504
0.354	**до**	**0.531**	2.43019E-05
0.531	**до**	**0.708**	1.20098E-07
0.708	**до**	**0.885**	5.93518E-10



Слика 44.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 44.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Во сабота просечниот број на клиенти е најголем, меѓутоа истите не се опслужуваат во исто време. Времето на опслужување се карактеризира со експоненцијална распределба и опслужувањето минува низ повеќе интервали. Според податоците добиени за сабота најголема е веројатноста клиентите да се опслужуваат во периодот помеѓу 0 и 0.177 часа.

Од примената на моделот ги добивме следните резултати:

$\lambda = 55$ *клиенти на час*

$\mu = 30$ *клиенти на час*

$s = k = 2$ сервери (каси)

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{55}{30} = 1.8333$

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.8333}{2} = 0.9167$ - *просечна искористеност на системот*

$\rho_s = 91.67\%$ - просечна искористеност на системот изразена во проценти

Веројатноста дека во супермаркетот (системот) нема да има ниту еден клиент е одредена со изразот:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= (1 + 1.8333 + \frac{1.8333^2}{2} + \frac{1.8333^2}{2} \cdot \frac{0.9167}{1-\ 0.9167})^{-1}$$
$$= \ (2.8333 + 1.6805 + 1.6805 \cdot 11.0048)^{-1} = \ (4.5138 + 18.4936)^{-1}$$
$$= \ 23.0074^{-1} = \ \frac{1}{23.0074} = 0.0435 = 4.35\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.8333 \cdot 0.0435 = 0.0797$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.9167 \cdot 0.0797 = 0.0731$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.9167 \cdot 0.0731 = 0.0671$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.9167 \cdot 0.0671 = 0.0615$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.9167 \cdot 0.0615 = 0.0564$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.9167 \cdot 0.0564 = 0.0542$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.9167 \cdot 0.0542 = 0.0497$

$p_{13} = \frac{\rho}{2} \cdot p_{12} = 0.9167 \cdot 0.0322 = 0.0295$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.9167 \cdot 0.0295 = 0.0271$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.9167 \cdot 0.0271 = 0.0248$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.9167 \cdot 0.0248 = 0.0228$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{16} = 0.9167 \cdot 0.0228 = 0.0209$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.9167 \cdot 0.0209 = 0.0192$

$p_{19} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.9167 \cdot 0.0192 = 0.0176$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.9167 \cdot 0.0497 = 0.0456$ $\quad p_{20} = \rho_s \cdot p_{19} = 0.9167 \cdot 0.0176 = 0.0161$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.9167 \cdot 0.0456 = 0.0418$ $\quad p_{21} = \rho_s \cdot p_{20} = 0.9167 \cdot 0.0161 = 0.0148$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.9167 \cdot 0.0418 = 0.0383$ $\quad p_{22} = \rho_s \cdot p_{21} = 0.9167 \cdot 0.0148 = 0.0136$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.9167 \cdot 0.0383 = 0.0351$ $\quad p_{23} = \rho_s \cdot p_{22} = 0.9167 \cdot 0.0136 = 0.0125$

$p_{12} = \frac{\rho}{1} \cdot p_{11} = 0.9167 \cdot 0.0351 = 0.0322$ $\quad p_{24} = \rho_s \cdot p_{23} = 0.9167 \cdot 0.0125 = 0.0115$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.0435 = 0.9565 = 95.65\%$$

Веројатноста во сабота да има 24 клиенти изразено во проценти е 4.35%, додека 95.65% е веројатност во системот да има повеќе од 24 клиенти.

Просечниот број на клиенти во ред на чекање за услуга изнесува:

$$n_r = \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.0435 \cdot \frac{1.8333^2}{2} \cdot \frac{0.9167}{(1-\ 0.9167)^2}$$
$$= 0.0435 \cdot 1.6805 \cdot \frac{0.9167}{0.0069} = 0.0731 \cdot 132.85507 = 9.712$$

Просечниот број на клиенти во системот е:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s} \right) \right] = 11.4193$$

Просечен број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \ n_s - n_r = 11.4193 - 9.712 = 1.7073$$

Просечно време на опслужување на еден клиент е:

$$t_0 = \ \frac{1}{\mu} = \ \frac{1}{30} = 0.0333 \text{ часа}$$

Просечно време на чекање на клиентот во ред за услуга

$$t_r = \ \frac{n_r}{\lambda} = \ \frac{9.712}{55} = 0.1766 = 10.596\, min$$

Просечно време на задржување на клиент во системот:

$$t_s = t_0 + t_r = 0.0333 + 0.1766 = 0.2099 \text{ часа}$$

Интерпретација на резултатите за моделот M/M/2

Можеме да видиме дека веројатноста за касата да биде зафатена е $\rho_s = 0.9167$ односно $\rho_s = 91.67\%$. Просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е 9.712 клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е $10.596\, min$.Беше направено испитување дали постои оправданост од воведување на уште една каса и притоа беа добиени следните резултати :

Трошоците за едно касиерско место се $C_1 = 16$ ден./час. Поради можност за губење на купувачи, оценети се трошоци од $C_2 = 10$ ден./час што купуваќи го поминуваат додека чекаат пред касите. Просечниот трошок што настанува поради чекање на клиентите е:

$$C = n_r \cdot t_r \cdot C_2 = 9.712 \cdot 0.1766 \cdot 10 = 17.15 \text{ ден./час}$$

Според тоа заклучуваме дека има потреба од воведување на уште една каса, бидејќи трошоците на чекање се 17,15 ден на час што е повеќе од трошокот од воведување на каса што е 16 ден на час.

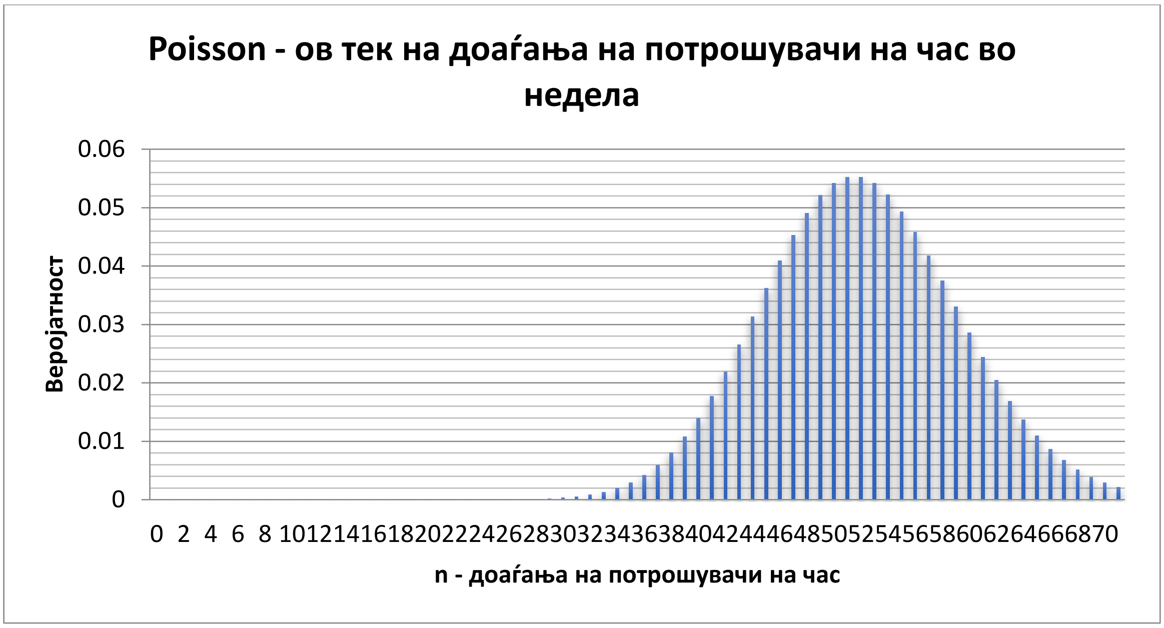
Во **недела** просечниот број на доаѓања на клиенти изнесува 52 клиенти на час $(\lambda = 52)$. Пристигнувањата се одвиваат според Пуасоновиот поток, а интензитетот на опслужување е 30 клиенти на час $(\mu = 30)$.

Табела 31. Веројатност за појавување на n доаѓања според Пуасоновиот закон за распределба $(\lambda = 52)$
Table. 31. Probability of occurrence of n arrivals following Poisson distribution $(\lambda = 52)$

n	P_n
0	2.61028E-23
1	1.35735E-21
2	3.5291E-20
3	6.1171E-19
4	7.95223E-18
5	8.27032E-17
6	7.16761E-16
7	5.32451E-15
8	3.46093E-14
9	1.99965E-13
10	1.03982E-12
11	4.9155E-12
12	2.13005E-11
13	8.52021E-11
14	3.16465E-10
15	1.09708E-09
16	3.5655E-09
17	1.09062E-08
18	3.15069E-08
19	8.62295E-08
20	2.24197E-07
21	5.55154E-07
22	1.31218E-06

ПРОДОЛЖУВА	
23	2.96667E-06
24	6.42779E-06
25	1.33698E-05
26	2.67396E-05
27	5.14985E-05
28	9.564E-05
29	0.000171492
30	0.000297254
31	0.000498619
32	0.000810256
33	0.001276767
34	0.001952702
35	0.002901158
36	0.004190561
37	0.005889437
38	0.00805923
39	0.010745639
40	0.013969331
41	0.017717201
42	0.021935582
43	0.02652675
44	0.031349796
45	0.03622643
46	0.040951617

ПРОДОЛЖУВА	
47	0.045308172
48	0.049083853
49	0.052088987
50	0.054172546
51	0.055234753
52	0.055234753
53	0.054192588
54	0.052185455
55	0.049338976
56	0.045814763
57	0.041795924
58	0.037472208
59	0.033026353
60	0.028622839
61	0.024399797
62	0.020464346
63	0.016891206
64	0.013724105
65	0.010979284
66	0.008650345
67	0.006713701
68	0.005134006
69	0.003869106
70	0.002874193
71	0.002105043

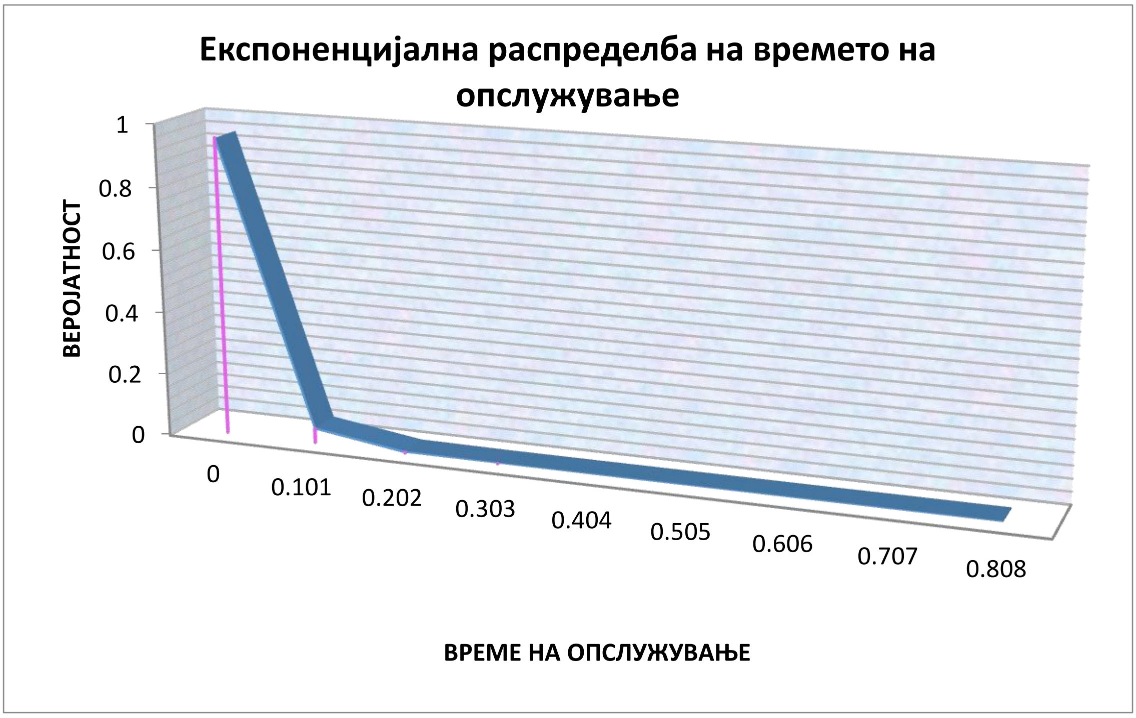


Слика 45. Пуасонова распределба на доаѓањата со средна вредност $\lambda = 52$
Figure 45. Poisson distribution of arrivals with mean $\lambda = 52$

Табела 31 и Слика 45 ги прикажуваат веројатностите за пристигнување на n клиенти според Пуасоновата распределба. Од графикот се гледа дека можеме да очекуваме во супермаркетот да пристигнуваат 52 клиенти на час. Времето помеѓу две пристигнувања е со средна вредност $\frac{1}{52} = 0.019$ часа, а тоа значи дека клиентите ќе доаѓаат на секои 11.4 мин.

Табела 32. Веројатност за времето на опслужување во различни временски интервали
Table 32. Probability of service time in different ime intervals

ВРЕМЕ НА ОПСЛУЖУВАЊЕ			**ВЕРОЈАТНОСТ**
0	до	**0.101**	0.951684362
0.101	до	**0.202**	0.045981237
0.202	до	**0.303**	0.002221613
0.303	до	**0.404**	0.000107339
0.404	до	**0.505**	5.18613E-06
0.505	до	**0.606**	2.50571E-07
0.606	до	**0.707**	1.21065E-08
0.707	до	**0.808**	5.84934E-10
0.808	до	**0.909**	2.82615E-11



Слика 46.Експоненцијална распределба на времето на опслужување со $\mu = 30$
Figure 46.Exponential distribution of service time with $\mu = 30$

Времето на опслужување на клиентите е распределено на повеќе временски интервали бидејќи е опишано преку експоненцијалната распределба (таб.32). Во недела најголема е веројатноста опслужувањето да се изврши во интервалот помеѓу 0 и 0.101 часа, а во следните временски интервали (дадени во таб.32) таа опаѓа. Тоа го потврдува графичкиот приказ на експоненцијалната распределба на времето на опслужување кој е даден на Слика 46.

Резултати од примена на моделот:

$\lambda = 52$ клиенти на час

$\mu = 30$ клиенти на час

$s = k = 2$ сервери (каси)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{52}{30} = 1.7333$$

$\rho_s = \frac{\rho}{k} = \frac{1.7333}{2} = 0.8667$ - *просечна искористеност на системот*

$\rho_s = 86.67\%$ - просечна искористеност на системот изразена во проценти

Веројатноста дека серверите (каситe) ќе бидат слободни е одредена со изразот:

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{k} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s})^{-1} = (\frac{\rho^0}{0!} + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= \ (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{\rho_s}{1-\ \rho_s})^{-1}$$
$$= (1 + 1.7333 + \frac{1.7333^2}{2} + \frac{1.7333^2}{2} \cdot \frac{0.8667}{1-\ 0.8667})^{-1}$$
$$= \ (2.7333 + 1.5022 + 1.5022 \cdot 6.5019)^{-1} = \ (4.2355 + 9.7671)^{-1}$$
$$= \ 14.0027^{-1} = \ \frac{1}{14.0027} = 0.0714 = 7.14\%$$

$p_1 = \frac{\rho}{1} \cdot p_0 = 1.7333 \cdot 0.0714 = 0.1238$

$p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot p_1 = 0.8667 \cdot 0.1238 = 0.1073$

$p_3 = \rho_s \cdot p_2 = 0.8667 \cdot 0.1073 = 0.0929$

$p_4 = \rho_s \cdot p_3 = 0.8667 \cdot 0.0929 = 0.0806$

$p_5 = \rho_s \cdot p_4 = 0.8667 \cdot 0.0806 = 0.0698$

$p_6 = \rho_s \cdot p_5 = 0.8667 \cdot 0.0698 = 0.0605$

$p_7 = \rho_s \cdot p_6 = 0.8667 \cdot 0.0605 = 0.0525$

$p_8 = \rho_s \cdot p_7 = 0.8667 \cdot 0.0525 = 0.0455$

$p_9 = \rho_s \cdot p_8 = 0.8667 \cdot 0.0455 = 0.0394$

$p_{10} = \rho_s \cdot p_9 = 0.8667 \cdot 0.0394 = 0.0342$

$p_{11} = \rho_s \cdot p_{10} = 0.8667 \cdot 0.0342 = 0.0296$

$p_{12} = \rho_s \cdot p_{11} 0.8667 \cdot 0.0296 = 0.0257$

$p_{13} = \rho_s \cdot p_{12} = 0.8667 \cdot 0.0257 = 0.0223$

$p_{14} = \rho_s \cdot p_{13} = 0.8667 \cdot 0.0223 = 0.0193$

$p_{15} = \rho_s \cdot p_{14} = 0.8667 \cdot 0.0193 = 0.0168$

$p_{16} = \rho_s \cdot p_{15} = 0.8667 \cdot 0.0168 = 0.0146$

$p_{17} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.8667 \cdot 0.0146 = 0.0127$

$p_{18} = \rho_s \cdot p_{17} = 0.8667 \cdot 0.0127 = 0.0110$

$p_{19} = \rho_s \cdot p_{18} = 0.8667 \cdot 0.0110 = 0.0095$

$p_{20} = \rho_s \cdot p_{19} = 0.8667 \cdot 0.0095 = 0.0083$

$p_{21} = \rho_s \cdot p_{20} = 0.8667 \cdot 0.0083 = 0.0072$

$p_{22} = \rho_s \cdot p_{21} = 0.8667 \cdot 0.0072 = 0.0062$

$$p_n = 1 - p_o = 1 - 0.0714 = 0.9286 = 92.86\%$$

Веројатност во системот да има 22 клиенти во недела изразено во проценти е 7.14%, а 92.86% е веројатност во системот да има повеќе од 22 клиенти.

Просечен број на клиенти во ред на чекање за услуга:

$$n_r = \ p_0 \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{(1-\rho_s)^2} = 0.0714 \cdot \frac{1.7333^2}{2} \cdot \frac{0.8667}{(1-\ 0.8667)^2}$$
$$= 0.0714 \cdot 1.5022 \cdot \frac{0.8667}{0.0177} = 0.1073 \cdot 48.9661 = 5.2541$$

Просечен број на клиенти во системот:

$$n_s = p_0 \cdot \left[\sum_{n=0}^{k} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho_s}{1-\rho_s} \cdot \left(k + \frac{1}{1-\rho_s}\right)\right] = 6.8574$$

Просечниот број на клиенти кои се опслужуваат:

$$n_0 = \ n_s - n_r = 6.8574 - 5.2541 = 1.6033$$

Просечното време за опслужување на клиент изнесува:

$$t_0 = \ \frac{1}{\mu} = \ \frac{1}{30} = 0.0333 \text{ часа}$$

Просечно време на чекање на клиентот во ред за услуга е:

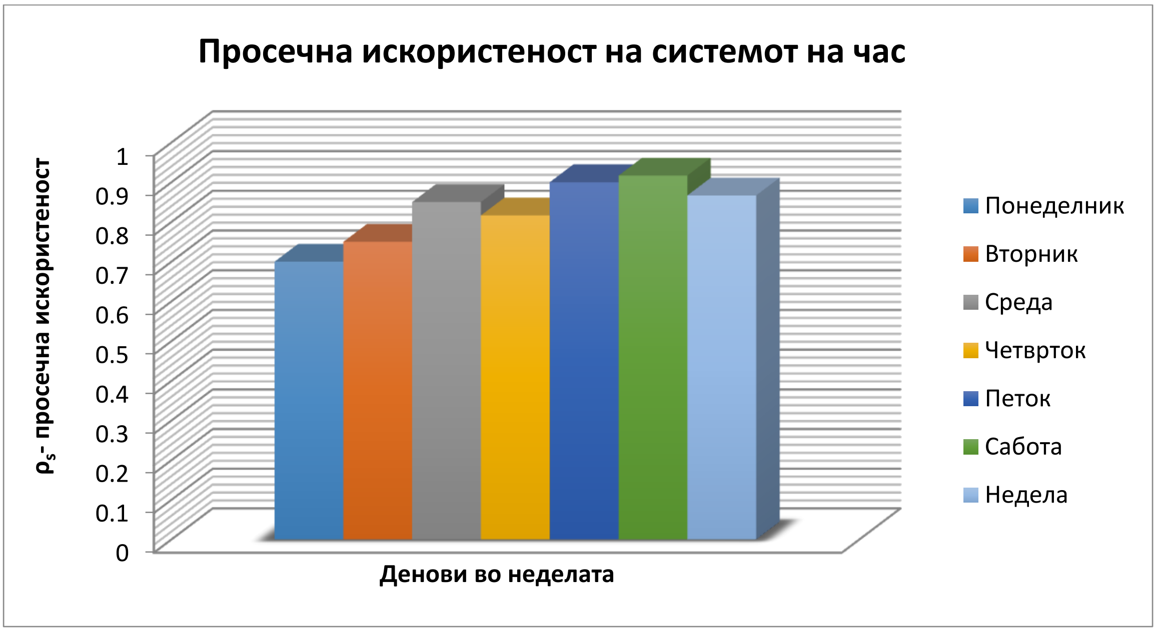
$$t_r = \ \frac{n_r}{\lambda} = \ \frac{5.2541}{52} = 0.1010 = 6.06 min$$

Просечно време на задржување на клиент во системот:

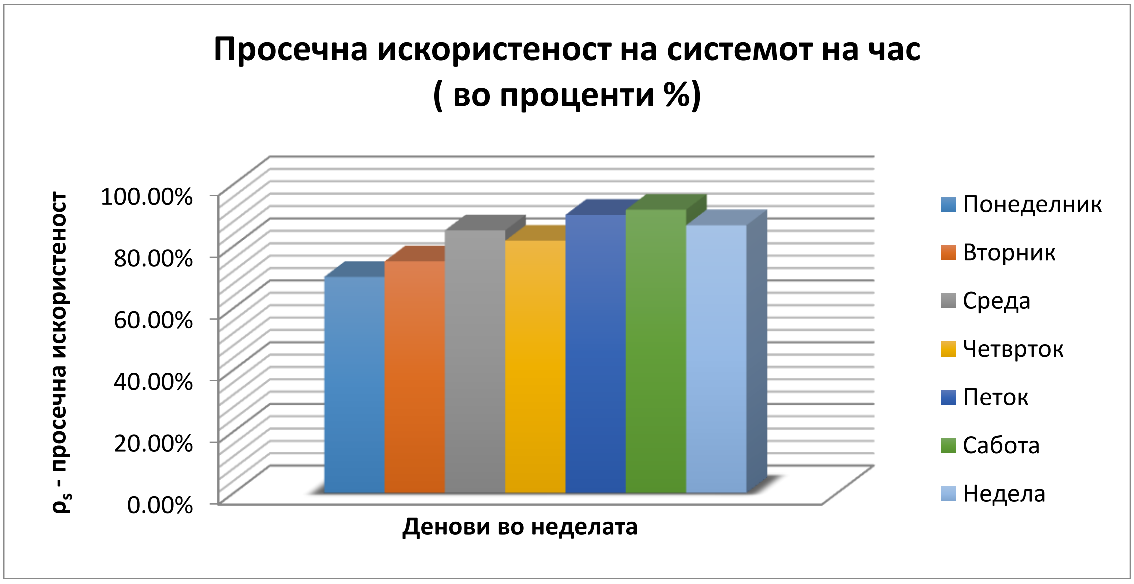
$$t_s = \ t_0 + t_r = 0.0333 + 0.1010 = 0.1343 \text{ часа}$$

Интерпретација на резултатите од моделот M/M/2

Во недела веројатноста дека серверите ќе бидат слободни е мала и изнесува 13.33% притоа просечниот број на клиенти кои чекаат во редот е 5.52541 клиенти на час при функционирање на двете каси, а времето на чекање е $6.06\ min$.Тоа значи дека во овој случај кога постои висока искористеност на системот времето на чекање кое клиентот го поминува во редот не е многу долго и доколку бројот на сервери биде намален можно е да дојде до зголемување на должината редот.

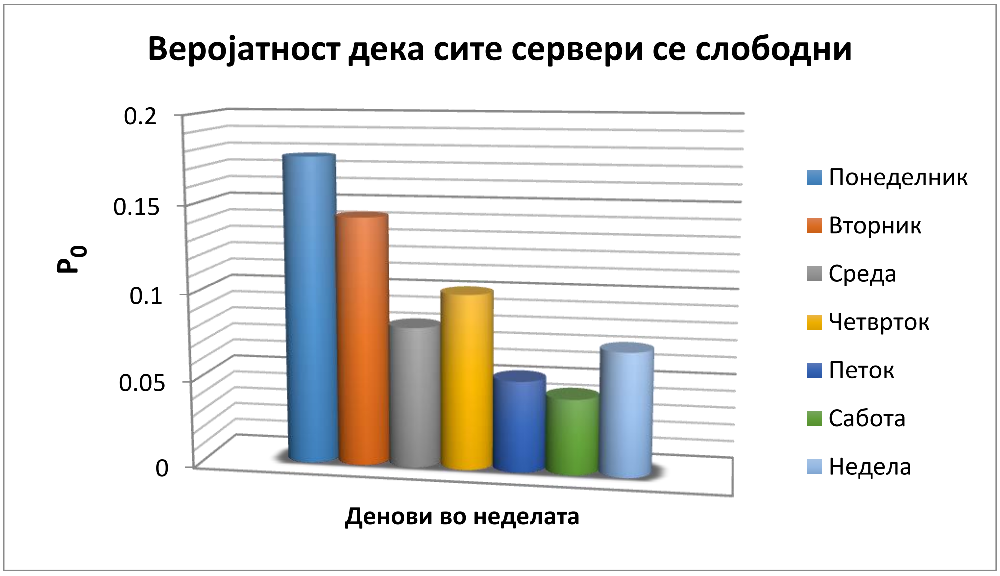


Слика 47. Просечна искористеност на системот за една недела
Figure 47. Average utilization of the system for one week



Слика 48. Просечна искористеност на системот за една недела (изразено во проценти)
Figure 48. Average utilization of the system for one week (expressed in percentage)

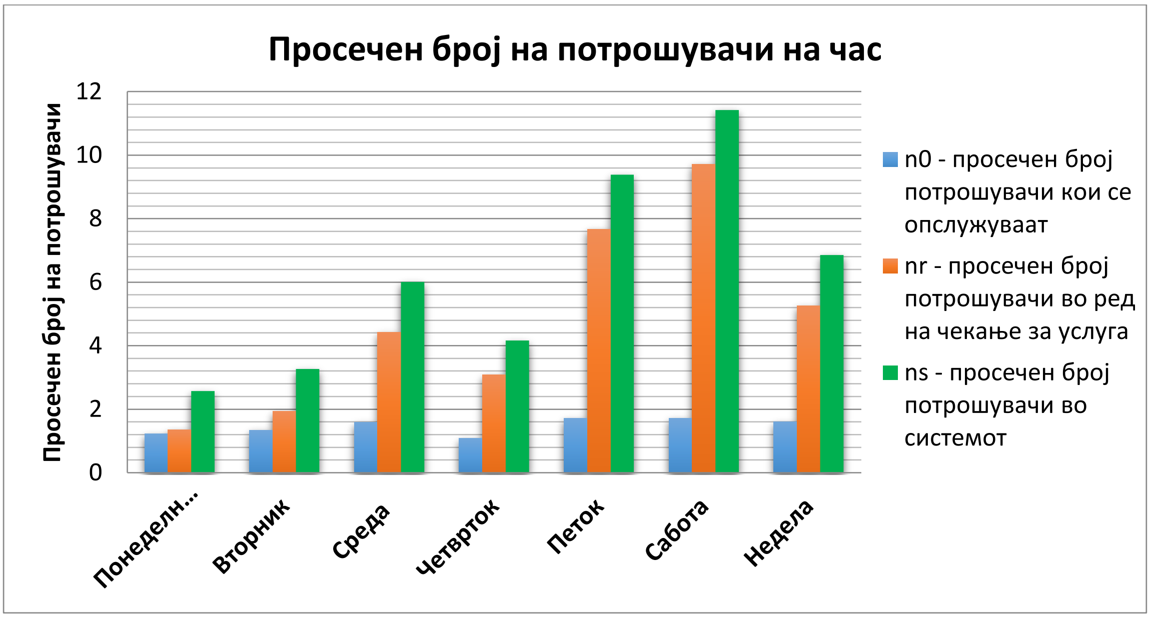
Бидејќи кај системот на масовно олсужување со еден ред и две каси интензитетот на опслужување е ист како и кај претходниот едноканален СМО ($\mu = 30$), просечната искористеност на час овде е многу поголема бидејќи се зема претпоставка дека просечно ќе пристигнуваат повеќе клиенти. Како што се гледа од графиците на Слика 47 и Слика 48 просечната искористеност за секој ден е приближно иста, но сепак најголема е во сабота, па во петок кога супермаркетот има најмногу клиенти.



Слика 49. Веројатност дека нема да има ниту еден клиент во системот
Figure 49. Probability that the system will not have any customer

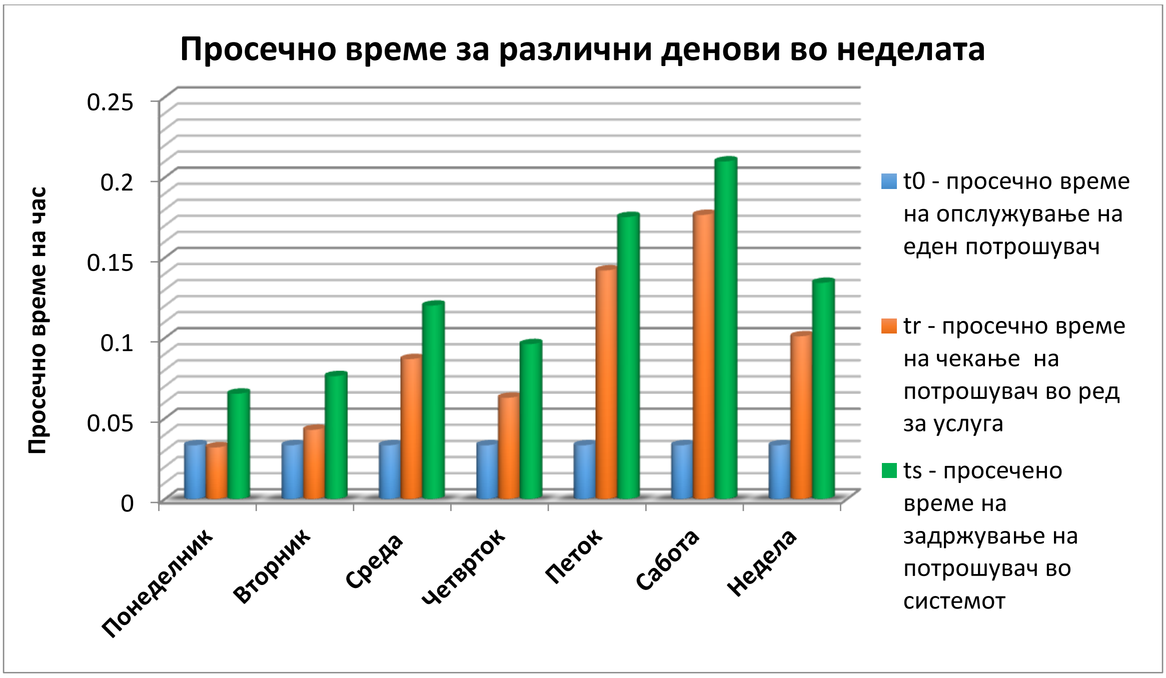
Слика 50. Веројатност дека нема да има ниту еден клиент во системот (изразена во проценти)
Figure 50. Probability that the system will not have any customer (expressed in percentage)

Според претходното, деновите кога просечната искористеност на супермаркетот е најмала тогаш веројатноста дека серверите се слободни е најголем. Графиците покажуваат дека најголема веројатност дека серверите (касите ќе бидат слободни) постои во понеделник, бидејќи просечниот број на клиенти кои доаѓаат во супермаркетот е помал за разлика од останатите денови во неделата.



Слика 51. Просечен број клиенти на час за период од една недела
Figure 51. Average number of customers per hour for period of one week

На Слика 51 е даден просечниот број на клиенти од каде може да се забележи дека супермаркетот има најголема посетеност во сабота, па во петок односно за време на викендот. Во овие денови најголем е бројот на клиентите кои чекаат во ред и покрај тоа што има две каси, бидејќи тогаш доаѓаат многу повеќе клиенти. Може да се согледа дека во сабота просечниот број на клиенти кои се опслужуваат е многу помал од просечниот број на клиенти во системот и оние кои чекаат во ред, па поради тоа беше направено истражување дали постои оправданост супермаркетот да воведе уште една каса.



Слика 52. Просечно време за моделот M/M/2 во текот на една недела
Figure 52. Average time for the model M/M/2 for one week

На Слика 52 е дадено просечното време на опслужување на еден клиент, на чекање во ред за услуга како и просечно време на задржување во супермаркетот. Во деновите преку неделата просечното време е приближно исто, но за време на викендот значително се зголемува просечното време на задржување на клиентот во супермакетот како и во редот на чекање за услуга. Од таа причина во сабота, согласно направените испитувања неопходно е супермаркетот да воведе уште една каса со оглед на тоа што има повеќе пристигнувања на клиенти на час и поголемо просечно време на чекање.

8.7 Резултати од примена на повеќеканален модел на масовно опслужување

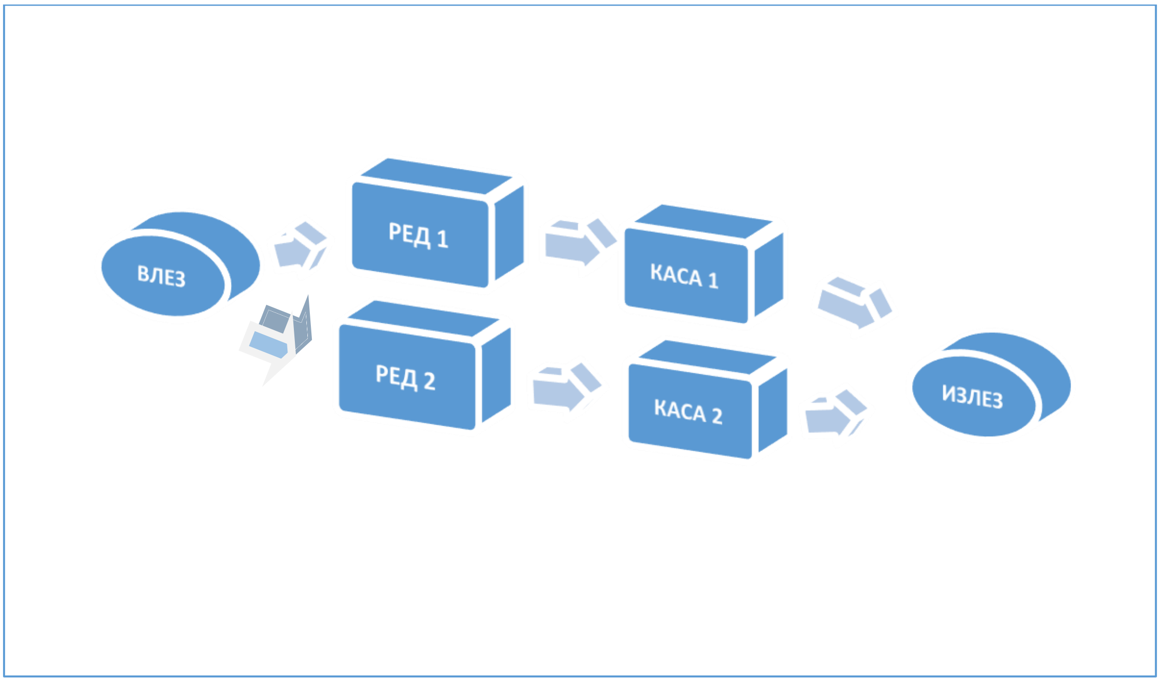
Модел со два реда и два сервери M/M/2

Во нашето истражување при примената на овој модел беа поставени следните претпоставки:

Работат два сервери т.е. две каси $s(k) = 2$ и има два редови на чекање

λ – просечен број на доаѓања (различен за секој ден од неделата)

Интензитетот на опслужување е еднаков во текот на цела недела $\mu = 30$ (понеделник - недела)



Слика 53. Повеќеканален СМО со еден ред и две каси **M/M/2**
Figure 53. Multiple Stage Queuing system with Single- Queue and Multiple – Server **M/M/2**

Дадениот модел е означен како **M/M/2**, каде првата ознака **M** претставува Марков процес или Маркова експоненцијална распределба на времето помеѓу пристигнувањата, втората ознака **M** претставува Маркова експоненцијална распределба на времето на опслужување, а ознаката **2** (во општ облик позната како s (е позитивен цел број)) го означува бројот на сервери, во нашиот случај бројот на каси.

- ### НЕДЕЛНА АНАЛИЗА НА РЕДОВИТЕ НА ЧЕКАЊЕ

Во оваа анлиза разгледуваме случај кога во супермаркетот работат две каси и има два реда на чекање. Клиентите пристигнуваат според Пуасоновата распределба, а интензитетот на опслужување во супермаркетот останува непроменет. Поради тоа што овој модел со редови на чекање е доста сложен и тешко може да се дојде до решение со примена на математички формули, во нашето истражување беше извршена симулација за расположливите податоци кои ги имаме за моделот, со користење на софтверката апликација **WinQSB**. Добиените резултати дневно за цела недела се прикажани и интерпретирани. При вршењето на симулацијата средното време помеѓу две пристигнувања и средното време на опслужувањето се земени исти и за двата сервери (каси).

Понеделник

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.428 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 5.8356

просечно време на клиентот = 7.3936 мин.

<u>Сервер 2</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.428 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 14.2843

просечно време на клиентот = 14,2250 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 20.1198

просечно време на клиентот = 10.8093 мин.

Вторник

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.333 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 7.4335

просечно време на клиентот = 8.5032 мин.

<u>Сервер 2</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.333 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 15.2508

просечно време на клиентот = 14.8776 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 22.6843

просечно време на клиентот = 11.6904 мин.

Среда

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.176 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 9.3316

просечно време на клиентот = 10.3256 мин.

<u>Сервер 2</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.176 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 19.1917

просечно време на клиентот = 15.9492 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 28.5233

просечно време на клиентот = 13.1374 мин.

Четврток

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.224 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 8.5578

просечно време на клиентот = 5.8402 мин.

<u>Сервер 2</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.224 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 18.0181

просечно време на клиентот = 25.6216 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 26.5758

просечно време на клиентот = 12.6950 мин.

Петок

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.333 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 11.0645

просечно време на клиентот = 11.0801 мин.

Сервер 2

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.333 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 20.3109

просечно време на клиентот = 16.3928 мин.

Вкупно за двата сервери

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 31.3754

просечно време на клиентот = 13.7365 мин.

Сабота

Сервер 1

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.091 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 11.1554

просечно време на клиентот = 11.2078 мин.

Сервер 2

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.091 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 20.2285

просечно време на клиентот = 16.4679 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 31.3839

просечно време на клиентот = 13.8378 мин.

Недела

<u>Сервер 1</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.154 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 99.90%

просечен број на клиенти во редот = 10.4285

просечно време на клиентот = 11.0574 мин.

<u>Сервер 2</u>

средно време помеѓу две пристигнувања = 1.154 мин.

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 95.90%

просечен број на клиенти во редот = 19.0508

просечно време на клиентот = 16.1062 мин.

<u>Вкупно за двата сервери</u>

средно време на опслужување = 1.998 мин.

просечна искористеност на серверот = ρ = 97.90%

просечен број на клиенти во редот = 29.4792

просечно време на клиентот = 13.5323 мин.

Интерпретација на резултатите за моделот М/М/2 со два редови на чекање и два сервери

Процесот на симулација јасно ги покажува перформансите на двата сервери вклучувајќи ги нивните соодветни редови. Симулацијата беше извршена од 0 до 50 часа, што е приближно време на работење на супермаркетот за период од 1 месец. Од неделната анализа за сите денови добивме дека просечната искористеност на северите е многу голема, односно се движи дури до 99%. Просечната должина на редот се движи од 22 до 31,8 клиенти каде просечното време на чекање во ред за услуга вкупно за двата сервери се движи од 10 до 13 минути, што претставува нормално време на чекање во редот во услови на преголема зафатеност на серверите, како што е во нашиот случај дури до 99%. *Должината на редот може да биде намалена доколку се намали просечното време на опслужување, односно просечната искористеност на серверите. Како што спомнавме погоре, просечното време помеѓу две пристигнувања и просечното време на опслужување е исто и за двата сервери, меѓутоа постои мала разлика помеѓу вредностите за должината на редовите и просечното време на чекање во редовите.*[13] *Тоа е возможно кога системот има два редови на чекање (може и повеќе), бидејќи секој од нив има карактеристично однесување. Со други зборови, тоа значи дека клиентите може да преминат од еден во друг ред со цел да го намалат нивното време на чекање во редот за услуга.*

[13] Во софтверската апликација WinQSB тие се означени како L_q и W_q.

9. ПРИЛОЗИ

Резултати од неделната анализа за моделот M/M/2

Понеделник

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	38	51	89
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	6.8087	15.2718	22.0805
4	Maximum Number in the System	14	27	41
5	Current Number in the System	14	27	41
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	7.0641	13.7115	10.3878
10	Std. Dev. of Waiting Time	4.3174	7.4421	6.9325
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	9.0621	15.7095	12.3858
14	Std. Dev. of Flow Time	4.3174	7.4421	6.9325
15	Maximum Flow Time	17.8594	27.2520	27.2520
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.7800		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7800

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	5.8356	13	13	7.3936	4.5276	15.8614
2	Ред 2	14.2843	26	26	14.2250	7.7135	26.5491
	Overall	20.1198	39	26	10.8093	7.1879	26.5491
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7800

Вторник

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	41	55	96
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	8.4276	16.2140	24.6416
4	Maximum Number in the System	17	31	48
5	Current Number in the System	17	31	48
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	8.1290	14.3316	11.2303
10	Std. Dev. of Waiting Time	4.8892	7.8648	7.2455
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	10.1270	16.3296	13.2283
14	Std. Dev. of Flow Time	4.8892	7.8648	7.2455
15	Maximum Flow Time	19.8731	28.6372	28.6372
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.7480		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0009	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0012	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7480

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	7.4335	16	16	8.5032	5.1293	17.8751
2	Ред 2	15.2508	30	30	14.8776	8.1569	27.9814
	Overall	22.6843	46	30	11.6904	7.5220	27.9814
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7480

Среда

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	42	60	102
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	10.2907	20.1793	30.4700
4	Maximum Number in the System	20	36	56
5	Current Number in the System	18	36	54
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	9.8778	15.3498	12.6138
10	Std. Dev. of Waiting Time	5.8743	8.5614	7.8351
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	11.8758	17.3478	14.6118
14	Std. Dev. of Flow Time	5.8743	8.5614	7.8351
15	Maximum Flow Time	23.1802	30.9121	30.9121
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.7790		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7790

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	9.3316	17	19	10.3256	6.1595	21.1822
2	Ред 2	19.1917	35	35	15.9492	8.8875	30.3335
	Overall	28.5233	52	35	13.1374	8.1467	30.3335
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7790

Четврток

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	42	58	100
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	9.5168	19.0020	28.5188
4	Maximum Number in the System	19	34	53
5	Current Number in the System	18	34	52
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	9.3431	15.0385	12.1908
10	Std. Dev. of Waiting Time	5.5684	8.3481	7.6458
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	11.3411	17.0365	14.1888
14	Std. Dev. of Flow Time	5.5684	8.3481	7.6458
15	Maximum Flow Time	22.1692	30.2166	30.2166
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.7950		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0012	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7950

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	8.5578	17	18	9.7684	5.8402	20.1712
2	Ред 2	18.0181	33	33	15.6216	8.6638	29.6144
	Overall	26.5758	50	33	12.6950	7.9467	29.6144
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.7950

Петок

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	46	61	107
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	12.0568	21.2874	33.3441
4	Maximum Number in the System	22	37	59
5	Current Number in the System	22	37	59
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	10.6018	15.7714	13.1866
10	Std. Dev. of Waiting Time	6.2935	8.8506	8.1026
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	12.5998	17.7694	15.1846
14	Std. Dev. of Flow Time	6.2935	8.8506	8.1026
15	Maximum Flow Time	24.5494	31.8539	31.8539
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.8270		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8270

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	11.0645	21	21	11.0801	6.5965	22.5585
2	Ред 2	20.3109	36	36	16.3928	9.1906	31.3073
	Overall	31.3754	57	36	13.7365	8.4289	31.3073
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8270

Сабота

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	47	61	108
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	12.1417	21.1953	33.3370
4	Maximum Number in the System	23	37	60
5	Current Number in the System	23	37	60
6	Number Finished	24	24	48
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	10.7243	15.8427	13.2835
10	Std. Dev. of Waiting Time	6.3650	8.8995	8.1490
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	12.7223	17.8407	15.2815
14	Std. Dev. of Flow Time	6.3650	8.8995	8.1490
15	Maximum Flow Time	24.7811	32.0133	32.0133
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.8420		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	95.90%	1.9980	0.0012	1.9980	0.00%	24
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0009	1.9980	0.00%	24
	Overall	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	48
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8420

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	11.1554	22	22	11.2078	6.6709	22.8100
2	Ред 2	20.2285	36	36	16.4679	9.2420	31.4721
	Overall	31.3839	58	36	13.8378	8.4779	31.4721
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8420

Недела

Вкупни резултати од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Result	Потрошувач 1	Потрошувач 2	Overall
1	Total Number of Arrival	44	60	104
2	Total Number of Balking	0	0	0
3	Average Number in the System (L)	11.4132	20.0247	31.4379
4	Maximum Number in the System	20	36	56
5	Current Number in the System	19	36	55
6	Number Finished	25	24	49
7	Average Process Time	1.9980	1.9980	1.9980
8	Std. Dev. of Process Time	0	0	0
9	Average Waiting Time (Wq)	10.5833	15.4938	12.9884
10	Std. Dev. of Waiting Time	6.3082	8.6601	7.9412
11	Average Transfer Time	0	0	0
12	Std. Dev. of Transfer Time	0	0	0
13	Average Flow Time (W)	12.5813	17.4918	14.9864
14	Std. Dev. of Flow Time	6.3082	8.6601	7.9412
15	Maximum Flow Time	23.6479	31.2338	31.2338
	Data Collection: 0 to	50 hours		
	CPU Seconds =	0.8100		

Резултати за серверите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Server Name	Server Utilization	Average Process Time	Std. Dev. Process Time	Maximum Process Time	Blocked Percentage	# Customers Processed
1	Сервер 1	99.90%	1.9980	0.0009	1.9980	0.00%	25
2	Сервер 2	95.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	24
	Overall	97.90%	1.9980	0.0010	1.9980	0.00%	49
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8100

Резултати за редовите од симулацијата за 0 до 50 часа

06-20-2014	Queue Name	Average Q. Length (Lq)	Current Q. Length	Maximum Q. Length	Average Waiting (Wq)	Std. Dev. of Wq	Maximum of Wq
1	Ред 1	10.4142	18	19	11.0478	6.6073	22.6600
2	Ред 2	19.0557	35	35	16.1007	8.9910	30.6661
	Overall	29.4699	53	35	13.5247	8.2621	30.6661
Data	Collection:	0 to	50	hours	CPU	Seconds =	0.8100

10. ЗАКЛУЧОК

Како резултат на високата конкурентност како и динамичните услови на деловното работење, денес сè повеќе се јавува потребата од користење на квантитативните методи, особено на математичките модели. За жал компаниите во современото деловно работење сè помалку или воопшто не користат квантитативни модели во решавање на проблемските ситуации со кои се соочуваат. Тие не ги ги користат математичките модели, туку во процесот на одлучување акцент ставаат на интуицијата и искуството што тие го поседуваат.

Улогата на математичките модели во процесот на донесување на одлуки се согледува од повеќе аспекти и тоа: со нивна помош се согледуваат одлуките кои имаат значајно влијание врз остварувањето на целите, овозможуваат идентификација на квантитативните променливи, да се проучи односот меѓу тие променливи, обезбедуваат помош во препознавање и појаснување на ограничувањата кои постојат кај процесите и сл.

Во нашиот магистерски труд преку нашето истражување ние ја потенциравме важноста на креирање на модели на залиха, системи на масовно опслужување како и примена на симулациски методи во процесот на деловно одлучување.

Преку изградените математички модели на залиха заклучивме дека многу полесно може да се дојде до едноставни решенија кои ќе дадат максимални резултати при сложените проблеми со залихите во компаниите. Со помош на математичките модели многу полесно може да се одредат трошоците во однос на елементите на пазарот (понудата и побарувачката), како и добивката што компанијата ја остварува. Дојдовме до ***заклучок*** дека со математичкото моделирање многу полесно може да се утврди оптималниот обем на залихи кои треба да ги поседува претпријатието во даден временски период, која е оптималната количина на набавка, како и колкава треба да биде оптималната должина на еден набавен циклус сè со цел да бидат задоволени клиентите во секој момент.

Согледавме дека разбирањето на системите на масовно опслужување како и начинот на којшто истите треба да бидат управувани е важна *област во процесот на деловното одлучување, поради тоа што редовите на чекање се феномен којшто сè повеќе е присутен во реалниот живот.* Со градењето на моделите кои ги проучуваат редовите на чекање и проблемите кои произлегуваат од нив овозможивме да се пронајде оптимално ниво на услуга каде истовремено ќе постои прифатлива рамнотежа помеѓу трошоците за обезбедување на услуга и задоволство на клиентите.

Исто така беше согледано и значењето на симулациските методи со чија примена полесно ќе се дојде до решенија за сложените системи на масовно опслужување. Преку симулацијата беше овозможено да се добијат решенија за овие модели со употреба на софтверска апликација, а со тоа да се симулира физичката реалност. Одовде можеме да заклучиме дека понекогаш при процесот на градење на математички модели неопходно е да се примени симулација која ќе ги олесни макотрпните пресметки кои треба да бидат направени за да се добијат решенија за проблемите.

Од изработката на магистерскиот труд како и од добиените резултати при истражувањето доаѓаме до главен заклучок дека преку конструкцијата на едноставни модели се добиваат голем број на егзактни податоци за проблемите кои се дел од секојдневното работење на компаниите. Во денешни услови многу тешко е да се дојде до реални податоци за залихите како и за редовите на чекање поради тоа што тешко може да се детерминира однесувањето на еден економски систем.

Наша сугестија која произлегува од проучувањето на квантитативните методи во овој труд е во иднина доносителите на одлуки при решавањето на проблемите со кои се соочуваат во раководењето на операциите, да не се базираат само на интуиција и искуство, туку сè повеќе да применуваат и сознанија од науката. *Без примена на квантитативните методи одлуките би биле непотполни и неиздржливи односно нема да ги инкорпорираат сите фактори кои можат негативно да влијаат на ефикасноста на работењето и постигнувањето на максимални резултати.*

11. КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

[1] Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T.A. (2004). Quantitative Methods for Business. Thomson Edition, Ohio, 181- 200.

[2] Barkovič, D. (1997). Operacijska istraživanja. Ekonomski fakultet Osijek, Osijek, 379-383.

[3] Bonini, C. P., Hausman, W.H., & Bierman, H.Jr. (1997). Quantitative Analysis for Management, (9th edition). Irwin/McGraw- Hill, Boston, 344-358.

[4] Carrejo, J., & Marshall, J. (2007). What is Mathematical Modeling? Mathematics Education Research Journal, 19(1), 45-76.

[5] Chhajed, D., & Timothy, L. J. (2008). Building Intuition (Insights From Basic Operations Management Models and Principles). University of Illinois, University of Iowa, USA, 51-78.

[6] Choudhury, D. K., Saha, S., & Das, M. (2011). An inventory model with Lot Size Dependent carrying / holding cost. Assam University Journal of Science & Technology: Psychical Sciences and Technology, 7(2), 133-136.

[7] Deterministic Inventory Models (DIM). Преземено на 15 март 2014 г. http://flash.lakeheadu.ca/~avantuyl/courses/oldcourses/OR_Lecture10a_Asampana.pdf

[8] Dharmawirya, M., & Adi, E. (2011). Case study for Restaurant Queuing Model. International Conference on Management and Artificial Intelligence, Bali, Indonesia, Proceedings, 52-55.

[9] Dukič, G., Dukić, D., & Sesar, M. (2007). A model with storage limitation and simulated demand as fresh meat inventory management support. Poljoprivreda (Agriculture) Osijek, 13(1), 222-225.

[10] Felea, M. (2008). The role of inventory in the supply chain. Amfiteatru Economic, 10(24), 109-121.

[11] Jie, Y. (2010). The Optimal Supermarket Service. International Journal of Business and Management, 5(2), 128-131.

[12] Jordan, D. W., & Smith, P. (2002), *MathematicalTechniques*. Oxford University Press, 775-785.

[13] Lefebvre M. (2006). *Applied Stochastic Processes*. Thomson Edition,Belmont, 231-346.

[14] Montero Valverde, J.A., & Sucar Succar, L.E. (2010). Controlling the supermarket service. Computer Science Department, Mexico, 1-33.

[15] Moore, J., & Weatherford, L. (1998). Management Science, Prentice Hall Intern, USA, 375.

[16] Mortom, T. (1999). Production and Operations Management. Cincinnati, Ohio, 15-16.

[17] Pupavac, D. (2011). Modern approaches to inventory management. 14-th Scientific Conference Business Logistics in Modern Management, Osijek, Croatia, Proceedings, 47-58.

[18] Ragsdale, C.T. (2007). Spreadsheet Modeling & Decision Analysis. Virginia Polytechnic Institute and State University, USA, 641-663.

[19] Ravindran, R. A. (2008), Operation research and management science. New York, 300-336.

[20] Reyes, M. P. (2005). A mathematical example of the two-echelon inventory model with asymmetric market information. Applied Mathematics and Computation, 162(1), 257-264.

[21] Roumiantsev, S., & Netessine, S. (2007). What can be learned from classical inventory models: a cross – industry empirical investigation. Manufacturing & Service Operations Management, 9(4), 409-429.

[22] Sayyad, M.B., Chatterjee, A., Nalbalwar, S.L., & Subramanian, K.T. (2010). Novel Approach to Improve QoS of a Multiple Server Queue. International Journal of Communications, Network and System Sciences, 3(1), 83-86.

[23] Sharma, K.A., Kumar, R., & Sharma, K.G. (2013). Queuing theory Approach with Queuing Model: A Study, International Journal of Engineering Science Invention, 2(2), 1-11.

[24] Singh, Y. (2013). Optimal production policy for multi-product with inventory-level-dependent demand in segmented market. Yugoslav Journal of Operations Research, 23(2), 237-247.

[25] Su, S. M., & Lin, S. D. (2013). The Optimal Inventory Policy of Production Management. Engineering, 5(5A), 9-13.

[26] Sztrick, J. (2010). Queuing Theory and its Applications, A Personal View. 8th International Conference of Applied Informatics, Eger, Hungary, Proceedings, 9-30.

[27] Taha, H. A. (1995), Operations Research, (5th edition). Prentice Hall

International, Singapore, 491- 494.

[28] Wang, Y., & Ruhe, G. (2007). The Cognitive Process of Decision Making. International Journal of Cognitive Informatics and Natural Intelligence, 1(2), 73-85.

[29] Waters, D. (2008). Quantitative methods for business (4th edition). London, 555-559.

[30] Waters, C. D. J. (1949), Inventory control and management (2nd edition). London, 128-135.

[31] Wessels, H. (2014). Levels in mathematical creativity in model- eliciting activities. Journal of Mathematical Modeling and Application, 1(9), 22-40.

[32] Will, J., Bertrand, M., & Fransoo, C. J. (2002). Operations management research methodologies using quantitative modeling. International Journal of Operations & Production Management, 22(2), 241-264.

[33] William, S. (1996). Production/Operations Management, IRWING, Chicago, 545.

[34] Ѓорѓијовски, Б. (2002). Теорија на одлучување (Донесување на одлуки). Економски факултет, Скопје, 98.

[35] Тодосиоска, Б. (2001). Наука за менаџмент. Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 161-163.