



**УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ - ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА**

ISSN:1857-8691

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014**

ГОДИНА 3

VOLUME III

**GOCE DELCEV UNIVERSITY - STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

УНИВЕРЗИТЕТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА



ГОДИШЕН ЗБОРНИК
2014
YEARBOOK
2014

ГОДИНА 3

ЈУНИ, 2015

VOLUME III

GOCE DELCEV UNIVERSITY – STIP
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE

**ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ФАКУЛТЕТ ЗА ИНФОРМАТИКА
YEARBOOK
FACULTY OF COMPUTER SCIENCE**

За издавачот:

Проф д-р Владо Гичев

Издавачки совет

Проф. д-р Саша Митрев
Проф. д-р Лилјана Колева - Гудева
Проф. д-р Владо Гичев
Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Зоран Здравев
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Сашо Коцески
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Благој Делипетров

Редакциски одбор

Проф. д-р Цвета Мартиновска
Проф. д-р Татајана Атанасова - Пачемска
Доц. д-р Наташа Коцеска
Доц. д-р Зоран Утковски
Доц. д-р Игор Стојановиќ
Доц. д-р Александра Милева
Доц. д-р Зоран Здравев

Главен и одговорен уредник

Доц. д-р Зоран Здравев

Јазично уредување

Даница Гавриловска - Атанасовска
(македонски јазик)
Павлинка Павлова-Митева
(англиски јазик)

Техничко уредување

Славе Димитров
Благој Михов

Редакција и администрација
Универзитет „Гоце Делчев“ - Штип
Факултет за информатика
ул. „Крсте Мисирков“ 10-А
п. фах 201, 2000 Штип
Р. Македонија

Editorial board

Prof. Saša Mitrev, Ph.D.
Prof. Liljana Koleva - Gudeva, Ph.D.
Prof. Vlado Gicev, Ph.D.
Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Saso Koceski, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Blagoj Delipetrov, Ph.D.

Editorial staff

Prof. Cveta Martinovska, Ph.D.
Prof. Tatjana Atanasova - Pacemska, Ph.D.
Ass. Prof. Natasa Koceska, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Utkovski, Ph.D.
Ass. Prof. Igor Stojanovik, Ph.D.
Ass. Prof. Aleksandra Mileva, Ph.D.
Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Managing/ Editor in chief

Ass. Prof. Zoran Zdravev, Ph.D.

Language editor

Danica Gavrilovska-Atanasovska
(macedonian language)
Pavlinka Pavlova-Miteva
(english language)

Technical editor

Slave Dimitrov
Blagoj Mihov

Address of the editorial office

Goce Delcev University – Stip
Faculty of Computer Science
Krstе Misirkov 10-A
PO box 201, 2000 Stip,
R. of Macedonia

**СОДРЖИНА
CONTENT**

АНАЛИЗА НА ТОЧНОСТА НА МЕТОДОТ НА CRANK-NICOLSON ВО ЗАВИСНОСТ ОД ПАРАМЕТАРОТ НА МЕТОДОТ r Весна Гунова, Владо Гичев	5
MULTIMEDIA TECHNOLOGIES IN ENGINEERING EDUCATION D.Minkovska, L.Stoyanova	15
МОДЕЛ НА ПРИФАЌАЊЕ И УПОТРЕБА НА РЕПОЗИТОРИУМОТ НАМЕНЕТ ЗА НАСТАВНИЧКИОТ КАДАР НА УНИВЕРЗИТЕТОТ „ГОЦЕ ДЕЛЧЕВ“ – ШТИП Мирјана Коцалева , Игор Стојановиќ , Зоран Здравев	21
РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКА РАВЕНКА СО NEUMANN ГРАНИЧНИ УСЛОВИ СО УПОТРЕБА НА CRANK NICOLSON МЕТОДОТ Мирјана Коцалева , Владо Гичев	33
ГОЛЕМИ ПОДАТОЦИ ЗА ЕДИКАТИВНО ПОДАТОЧНО РУДАРЕЊЕ, АНАЛИТИКА НА ПОДАТОЦИ И ВЕБ РАБОТНИ ТАБЛИ Зоран Милевски, Елена Гелова, Зоран Здравев	39
АЛАТКИ ЗА ВИЗУАЛИЗАЦИЈА НА СОФТВЕР Александра Стојанова, Наташа Стојковиќ, Душан Биков	47
VALUATION OF FACTORS AFFECTING THE UNEMPLOYMENT RATE OF YOUNG PEOPLE IN REPUBLIC OF MACEDONIA Tatjana Atanasova Pacemska ¹ , Elena Mitreva	56
NUMERICAL ANALYSIS OF BEHAVIOR FOR LORENZ SYSTEM WITH MATHEMATICA Biljana Zlatanovska	63
ДИГИТАЛЕН ВОДЕН ЖИГ ВО СЛИКА ВО ФРЕКВЕНТЕН ДОМЕН СО ДИСКРЕТНА КОСИНУСНА ТРАНСФОРМАЦИЈА Ана Љуботенска, Александра Милева	73
COMPARING OF THE BINOMIAL MODEL AND THE BLACK-SCHOLES MODEL FOR OPTIONS PRICING Limonka, Lazarova, Biljana, Jolevska-Tuneska , Tatjana, Atanasova-Pacemska	83

РЕШАВАЊЕ НА ТОПЛИНСКА РАВЕНКА СО NEUMANN ГРАНИЧНИ УСЛОВИ СО УПОТРЕБА НА CRANK NICOLSON МЕТОДОТ

Мирјана Коцалева¹, Владо Гичев¹

¹ Факултет за Информатика, Универзитет „Гоце Делчев“, Штип
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Апстракт. Во овој труд разгледуваме решавање на Neumann проблемот при трансфер на топлина низ прачка. Иницијално прачката е загреана по должина, а на краевите температурата се менува во тек на време. Проблемот се опишува со парцијална диференцијална равенка која ја решаваме нумерички со Crank - Nicolson методот, во случај кога имаме Neumann гранични услови и амбиентна температура $u_A = 500$.

Од решението може да се види како прачката се лади во тек на времето, така што на почетокот десните краеве се ладат побрзо бидејќи се применети радијациските (radiation) гранични услови. Но со времето, со дистрибуција на температурата низ прачката, температурата на прачката станува сè повеќе и повеќе иста со асимптотската вредност $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x) = u_A = 500$.

Клучни зборови: парцијални диференцијални равенки, Crank - Nicolson метод, Neumann гранични услови

SOLVING THE HEAT EQUATION WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS USING THE CRANK NICOLSON METHOD

Mirjana Kocaleva¹, Vlado Gicev¹

¹ Faculty of Computer Science, Goce Delcev University, Stip, Macedonia
mirjana.kocaleva@ugd.edu.mk
vlado.gicev@ugd.edu.mk

Abstract. In this paper we consider the solution of Neumann problem of the heat transfer through the rod. Initially the rod is heated longitudinally, and at the ends the temperature changes over time. The problem is governed by a partial differential equation which is solved numerically by Crank - Nicolson method, when we have Neumann boundary conditions and ambient temperature $u_A = 500$.

From the solution it can be seen that as time elapsing the rod is cooling, so that at the beginning right oriented ends are cooled faster because there radiation boundary conditions have been applied. With time elapsing, with distribution of temperature through the rod, the rod temperature becomes more and more equal with the asymptotic value $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x) = u_A = 500$.

Keywords: partial differential equations, Crank - Nicolson method, Neumann boundary conditions

1. Вовед

Поголем дел од природните и инженерски феномени се опишуваат со парцијални диференцијални равенки. Парцијалната равенка уште се нарекува и квазилинеарна, ако е линеарна во повисоки изводи. Оттука квазилинеарната равенка од втор ред со две независни променливи x, y може да се претстави со формулата:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (0)$$

каде што u е непозната функција.

Оваа равенка може да биде од три типа

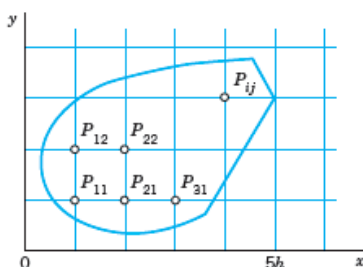
елиптичен тип ако $ac - b^2 > 0$ (Пример: Лапласова равенка)

параболичен тип ако $ac - b^2 = 0$ (Пример: Топлинска равенка)

хиперболичен тип ако $ac - b^2 < 0$ (Пример: Бранова равенка)

(во топлинската и брановата равенка, y е времето t). Овде коефициентите a, b, c може да се функции од x, y , така што тип (1) може да биде различен во различни региони на xy - рамнината. Оваа класификација е од големо практично значење, бидејќи општите решенија се разликуваат од тип до тип и затоа се разгледуваат дополнителни услови (гранични и почетни услови) кои мора да бидат земени предвид.

$$P_{ij} = (ih, jh), \quad u_{ij} = u(ih, jh).$$



Слика 1. Регион во xy - рамнината покриен со мрежа и мрежни точки $P_{11} = (h, h), \dots, P_{ij} = (ih, jh) \dots$
Figure 1. The region in the xy - plane covered by the network and network points $P_{11} = (h, h), \dots, P_{ij} = (ih, jh) \dots$

Апликациите кои вклучуваат елиптични равенства обично доведуваат до гранични вредносни проблеми во регионот R наречен прв граничен вредносен проблем или Dirichlet проблем, ако u е предвиден на граничната кривина S на R , вториот вредносен проблем е Neumann проблем ако $u_n = \delta u / \delta n$ (нормален извод од u) и е предвиден на S или mixed проблем ако u е предвиден на дел од S и u_n е на останатиот дел. S најчесто е затворена крива линија (или нешто што се состои од две или повеќе криви).

Бидејќи во општ случај не постојат затворени аналитички решенија на овие равенки, тие се решаваат нумерички. Така, истражувачите решавајќи конкретни проблеми предлагаат различни нумерички шеми за решавање на елиптични (Bayliss et al., 1980), параболични (Chupa, 1998; Reimer et al., 2012) и хиперболични (Gicev & Trifunac, 2006) парцијални диференцијални равенки. Овој труд е логичен продолжеток на нашиот претходен труд (Kocaleva & Gicev, 2014).

Равенката што го опишува нашиот проблем е еднодимензионалната топлинска равенка

$$u_t = c^2 u_{xx} \quad (c \text{ е константа}). \quad (1)$$

Оваа равенка обично се користи за x во фиксни интервали $0 \leq x \leq L$ и време $t \geq 0$, пропишана почетна температура $u(x, 0) = f(x)$ (f е дадено) и гранични услови во $x=0$ и $x=L$ за сите $t \geq 0$. Претпоставуваме дека $c=1$ и $L=1$; ова секогаш може да се оствари со линеарна трансформација на x и t . Тогаш топлинската равенка и условите се

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad t \geq 0 \quad (2)$$

во внатрешноста на доменот

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (4)$$

каде што (3) се почетни услови, а (4) се гранични услови.

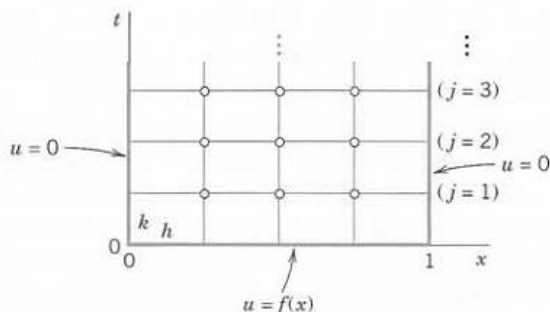
Апроксимацијата на (2) со конечни разлики е

$$\frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \quad (5)$$

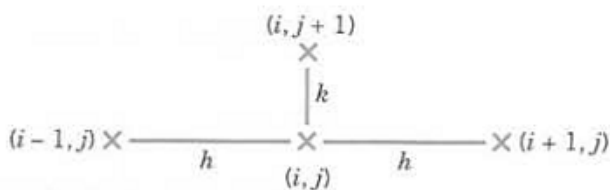
Слика 2 ја покажува соодветната мрежа и мрежните точки. Просторните инкременти се h во x -праец и k во t -праец. Формулата (5) ги вклучува четирите точки прикажани на слика 3. На лево користиме конечна разлика напред, бидејќи немаме информација за негативно x на почетокот. Од (5) го пресметуваме $u_{i,j+1}$ кој одговара на временскиот ред $j+1$, во однос на другите три кои одговараат на временскиот ред j ; решавајќи го (5) за $u_{i,j+1}$ добиваме

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (6)$$

каде што $r = \frac{k}{h^2}$.



Слика 2. Мрежа и мрежни точки кои одговараат на равенките (5) и (6)
Figure 2. Network and networked points corresponding to equations (5) and (6)



Слика 3. Четирите точки во равенките (5) и (6)
Figure 3. The four points in equations (5) and (6)

Пресметките со овој експлицитен метод базирани на (6) се едноставни. Сепак, може да се покаже дека клучно за конвергенција на овој метод е условот

$$r = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \quad (7)$$

тоа е бидејќи u_{ij} има позитивен коефициент во (6) или (за $r = \frac{1}{2}$) ќе биде отсутен од (6). Интуитивно (7) значи дека не треба да одиме брзо во t -насоката.

2. Crank - Nicolson метод

Метод кој не наметнува ограничувања на $r = \frac{k}{h^2}$ е Crank-Nicolson методот кој користи вредности на u во шест точки на слика 4. Идејата на методот е замена на разликата количник на десната странана (5) со $\frac{1}{2}$ пати од збирот на двата различни количници во двата временски реда. Наместо (5) имаме

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{ij}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \quad (8)$$

Со множење со $2k$ и запишување на $r = \frac{k}{h^2}$, ги собираме условите кои одговараат на временскиот ред $j+1$ од лево и условите кои одговараат на временскиот ред j од десно:

$$(2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (9)$$

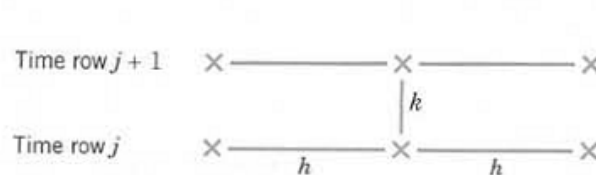
Генерално, трите вредности на лево се непознати, додека трите вредности на десно се познати.

Ако го поделиме x - интервалот $0 < x < 1$ во (2) на n еднакви интервали, имаме $n-1$ внатрешни мрежни точки за временски ред. Тогаш за $j=0$ и $i=1, \dots, n-1$, формулата (9) дава линеарен систем од $n-1$ равенки за $n-1$ непознати вредности $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n-1,1}$ во првиот временски ред во однос на привичните вредности $u_{00}, u_{10}, \dots, u_{n0}$ и граничните вредности $u_{01}, u_{n1} (=0)$.

Слично за $j=1, j=2, \dots$ односно за секој временски ред треба да решиме систем од $n-1$ линеарни равенки кои произлегуваат од (9).

Иако $r = \frac{k}{h^2}$ не наметнува ограничувања, помал r ќе дава подобар резултат. Во пракса, се избира k со која може да се зачува значителна сума на работа, без правење на r многу големо. Често добар избор за r е $r=1$. Тогаш (9) станува поедноставен.

$$4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} \quad (10)$$



Слика 4. Шесте точки во Crank - Nicolson формулите (9) и (10)
Figure 4. Six points in the Crank - Nicolson formula (9) and (10)

3. Neumann проблем

Продолжуваме со дискусијата за нумеричко решение на проблемите со гранични вредности за елиптичните равенки во регион R во x, y - рамнината. Во Neumann проблемот се соочуваме со нова ситуација, бидејќи постојат гранични точки во кои нормалниот извод $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ од решението е даден, но u е непозната бидејќи не е дадена. За да се справиме со таквите точки е потребна нова идеја. Ова е идејата зад Neumann проблемот. Ќе разгледаме соодветен пример.

Нашiot проблем е со употреба на Crank Nicolson методот, да се реши еднодимензионалната топлинска диференцијална равенка $u_t = u_{xx}$ за $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$ под услов ако имаме Neumann гранични услови: $u_x(0,t) = 0$, гранични услови на изолирана површина, $u_x(1,t) = E(u_A^4 - u^4(1,t))$, радијациски (radiation) гранични услови и почетни услови $u(x,0) = 600$, каде $E = 1.73e^{-9}$ (Boltzmann's константа) и $u_A = 500$ (амбиентна температура). Времето T е 5 секунди, $T=5$ го наоѓаме решението во $t=0(0.25)5$.

Целта е да се реши Neumann проблемот со употреба на Crank Nicolson методот. Овој проблем нема точно теоретско решение, па затоа мора да го решаваме нумерички. Кај Neumann проблемот не ги знаеме вредностите на зависните варијабли во граничните услови. Ова значи дека е потребно да ги вклучиме и граничните точки во мрежата, па така бројот на просторни точки ќе биде $N=(1+h)/h$.

Од равенката за Crank Nicolson методот (9), можеме да забележиме дека за внатрешните точки ($2 \leq i \leq N-1$) равенката е иста како (9), но за $i=0$, N таа треба да се модификува со цел да ги вклучи и граничните услови. За таа цел мрежата се проширува со две помошни просторни точки $i=-1$ и $i=N+1$ и од овде имаме:

Граничниот услов $u_x(0,t) = 0$ може да се поистовети со изразот на централната разлика: $u_x(0,t) = 0 \approx \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} \rightarrow u_{-1} \approx u_1$. Знакот \approx означува приближување на диференцијацијата со диференцирање. Овде користиме $u_{-1} = u_1$ и првата равенка на системот е

$$(2 + 2\lambda)u_{0,j+1} - 2\lambda u_{1,j+1} = (2 - 2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j}, \quad j \in \text{NU} \setminus \{0\}.$$

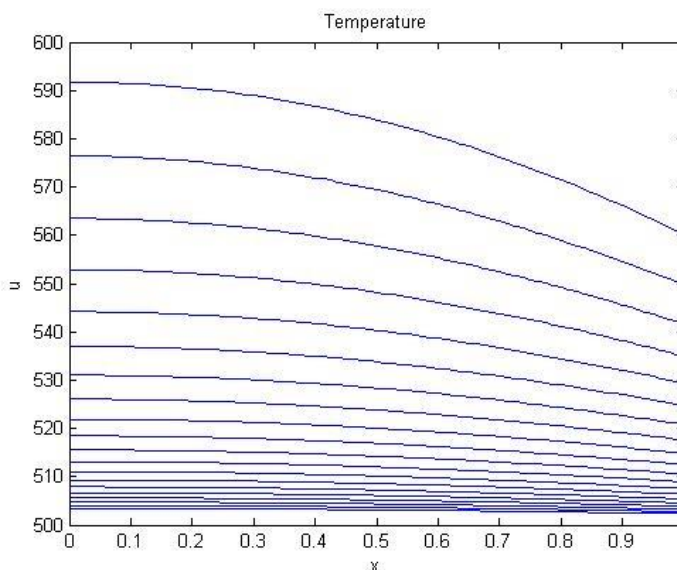
Вториот граничен услов $u_x(1,t) = E(u_A^4 - u^4(1,t))$ се пресметува со равенката:

$$-2\lambda u_{N-1,j+1} + (2 + 2\lambda)u_{N,j+1} = 2\lambda u_{N-1,j} + (2 - 2\lambda)u_{N,j} + 4hE\lambda u_A^4 - 2hE\lambda u_{N,j}^4 - 2hE\lambda u_{N,j+1}^4$$

Ова е само во случаите кога $A(1,2)$ и $A(N,N-1)$ кога на десната страна на равенството имаме дополнителни изрази. Првите два дополнителни изрази се познати (пресметани се во претходниот временски чекор), додека пак последниот израз се добива со повторување на системот сè додека

$|u_{N,j+1}^{l+1} - u_{N,j+1}^l| \leq \tau$ каде што l е бројот на итерации и τ е толеранцијата¹. Вредноста на толеранцијата при решавање на проблемот земаме да е еднаква на 10^{-5} .

Овој проблем го решаваме програмски со употреба на Matlab програмскиот јазик. И како решение го добиваме следниот графички приказ (слика 5):



Слика 5. Графички приказ на проблемот со употреба на Matlab
Figure 5. Graphical representation of the problem by using Matlab

4. Заклучок

Параметарот r ($r = \frac{k}{h^2}$) се зема да биде 1, бидејќи гарантира стабилно решение за секое h , односно за секоја точка во мрежата. Од слика 5 можеме да забележиме дека прачката се лади со времето бидејќи нејзината почетна температура ($u_0 = 600$) е поголема од амбиентната температура ($u_A = 500$). На почетокот десните краеве се ладат побрзо, бидејќи се применети радијациските (radiation) гранични услови, но со времето, со дистрибуција на температурата низ прачката, температурата на прачката станува сè повеќе и повеќе иста со асимптотската вредност $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x) = u_A = 500$ што е логичкиот физички резултат.

Користена литература

- [1] Kocaleva, M and Gicev, V (2014) *Примена на Crank-Nicolson методот за решавање на топлински равенки*. Yearbook 2013 - Faculty of Computer Science, 2 (2). pp. 35-45. ISSN 1857- 8691
- [2] Chupa, M.A. *Numerical Techniques for Solving the One-Dimensional Heat Equation Numerical Analysis*, 2, 1998.
- [3] Gicev, V. and Trifunac, M.D. (2006) *Non-linear earthquake waves in seven-storey reinforced concrete hotel*, NISEE, Pacific Earthquake Engineering (PEER) Center, Univ. of California, Berkeley.
- [4] Ashton S. R. and F. Cheviakov, A (2012) *A Matlab-Based Finite Difference Solver for the Poisson Problem with Mixed Dirichlet-Neumann Boundary Conditions*.
- [5] Baylis. A, Gunzburger, M., Turkel, E. (1980) *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, Report No. 80-1, NASA-CR-153185.

¹ Толеранцијата претставува најмалата разлика помеѓу два последователни броја.