НАСЛОВ НА ТРУДОТ

НЕЛИНЕАРНА ДИНАМИКА И ХАОСОТ ВО DUFFING РАВЕНКАТА

Апстракт

Традиционалната математика базирана на Њутновите принципи е способна да ги разбере и делумно да ги моделира динамичките системи и не дава целосна слика за однесувањето на системот. Потребно е да се моделираат системите со користење на нелинеарни равенки.

За разлика од линеарните, нелинеарните динамички системи можат да покажат целосно непредвидливо однесување. Таквото, навидум, непредвидливо однесување, се нарекува хаос.

Еден од централните концепти во теоријата на хаосот е дека доколку е потребно точно да се предвиди состојбата на системот, потребно е да се изработи модел на целото однесување на системот ([6],[9]).

Мал број нелинеарни проблеми можат да се решат директно. Развиени се различни методи, техники и процедури за одредување на приближни аналитички решенија, нумерички решенија како и графички методи со кои се испитуваат својствата на нелинеарните системи.

Од посебен интерес се методите за одредување на приближни аналитички решенија на нелинеарните равенки ([1],[4],[5],[8]).

Развиени се и методи за решавање на инверзниот проблем, како на пример предвидување на структурата на нелинеарната равенка што вклучува одредување на одреден број на непознати параметри според познат дел од временскиот ред [11], или, пак, методи за идентификување и предвидување на резултантното однесување на нелинеарниот систем [2].

Една од равенките која е модел на нелинеарен систем е Duffing равенката (Georg Duffing 1861-1944). Duffing равенката е енигматична. Во својата оригинална форма, споредено со линеарна диференцијална равенка од втор ред, суштината е во членот за нелинеарна крутост, што ја отвора вратата кон цел нов свет од интересни феномени [5].

Технологијата за детекција на слаби сигнали доживеа преродба со воведување на теоријата на хаос во нејзин домен. Методот за детектирање на сигнали преку хаос

е различен од постоечките методи, високо е осетлив, има низок детекциски праг, висока инертност на шум и е врв во полето на детекција на слаб сигнал [10] . Во негова основа е транзицијата од периодично во хаотично движење. Постојат неколку методи за идентификување на хаотичниот карактер. Општа теоретска индикација на состојбата на еден систем се Љапунов (Lyapunov) коефициентите чија пресметка бара многу долга сигнална низа и се осетливи на влијание на шум. Но развиени се веројатностни и статистички методи кои со нивно користење ги опишуваат својствата на системот кој го детектира слабиот сигнал [7]. Заради овој недостаток се бараат нови критериуми: набљудување на фазна рамнина, Фуриев (Fourier) спектар [3], Поинкаре (Poincare) мапи и сл.

o **Клучни зборови:**

теорија на хаос, рамнотежна состојба, фазен портрет, детекција на слаб сигнал.

TITLE

NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS IN DUFFING EQUITATION

Abstract

Traditional math based on Newton's principles is able to understand and model the dynamic systems in part, does not give full picture of the system. It is necessary to model the systems using the nonlinear equations.

Unlike the linear, nonlinear dynamic systems can show completely unpredictable behavior. Such seemingly unpredictable behavior is called chaos. One of the central concepts in chaos theory is that if it is necessary to accurately predict the state of the system, it is necessary to develop a model of the whole behavior of the system ([6], [9]).

A small number of nonlinear problems can be solved directly. Developed various methods, techniques and procedures for determining the approximate analytical solutions, numerical solutions and graphical methods that examine the properties of nonlinear systems.

Of particular interest are methods for determining the approximate analytical solutions of nonlinear equations ([1], [4], [5], [8]). Developed methods for solution of inverse problems such as predicting the structure of the nonlinear equation that includes determining a number of unknown parameters by a familiar part of the time-order [11] or methods for identifying and predicting the resulting behavior nonlinear system [2]. One of the equations which model the nonlinear system is the Duffing equation (Georg Duffing 1861-1944). Duffing equation is enigmatic. In its original form, compared with the linear differential equation of second order, the point is member of nonlinear stiffness, which opens the door to a whole new world of interesting phenomena [5]. Technology for the detection of weak signals has experienced a revival with the introduction of chaos theory in its domain. The method for detecting signals through chaos is different from existing methods, is highly sensitive, has a low detection threshold, high inertia of the noise and peak field detection of weak signals [10]. At its base is the transition from periodic to chaotic motion. There are several methods for identifying chaotic character. General theoretical indication of the state of a system Lyapunov coefficients whose calculation requires a long signal sequence and are

susceptible to the influence of noise but developed probability and statistical methods by using them to describe the properties of the system which detects weak signals [7]. Because of this lack seek new criteria and some of them observing the phase plane, Fourier spectrum [3], Poincare maps etc..

Key Words

theory of chaos, steady state, phase portrait, detection of weak signal.

Содржина

1 Вовед ... 7

1.1 Теорија на хаос ... 7

2 Цел на истражување ... 10

2.1 Duffing равенка ... 10

2.2 Користење на Duffing осцилатор за детекција на слаб сигнал ... 11

3 Методи на истражување ... 12

3.1.1 Методи за одредување приближни аналитички решенија ... 12

3.1.2 Нумерички методи ... 15

3.1.3 Метод на фазен дијаграм ... 16

3.1.4 Поинкаре секција (Poincare section) ... 16

3.1.5 Спектар на моќ (Power spectra) ... 16

4 Резултати ... 17

4.1 Линеарни осцилации ... 17

4.1.1 Слободни линеарни осцилации без придушување ... 17

4.1.2 Слободни линеарни осцилации со линеарно придушување ... 18

4.1.3 Присилени линеарни осцилации без придушување ... 19

4.1.4 Присилени линеарни осцилации со линеарно придушување ... 21

4.2 Слободни осцилации на Duffing осцилатор со нелинеарно придушување 25

4.2.1 Фиксни точки и нивна стабилност ... 25

4.2.2 Варијации на фазниот портрет зависно од линеарната крутост и линеарното придушување ... 32

4.3 Присилени хармонични осцилации на Duffing осцилатор со линеарно придушување ... 34

4.3.1 Примарна резонанца ... 35

4.3.2 Секундарни резонанци ... 42

4.4 Основни принципи за користење на Duffing осцилатор за детекција на слаб сигнал 49
4.4.1 Duffing осцилатор како систем за детекција на слаб сигнал 50
5 Дискусија и заклучок 58
5.1 Споредба на слободен линеарен осцилатор без придушување со слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување 58
5.2 Споредба на принуден линеарен осцилатор без придушување со принуден линеарен осцилатор со линеарно придушување 58
5.3 Споредба на слободен нелинеарен осцилатор со нелинеарно придушување со слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување 59
5.4 Споредба на Duffing осцилатор со линеарно придушување со присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување 59
5.5 Можности за примена на Duffing осцилатор при детекција на слаби сигнали 60
6 Прилози 61
6.1 Код од Matematica користен за анализа на однесување на слободен линеарен осцилатор без придушување 61
6.2 Код од Matematica користен за анализа на однесување на присилен линеарен осцилатор без придушување 61
6.3 Код од Matematica користен за анализа на однесување на присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување 62
6.4 Код од Matematica користен за анализа на влијание на Gauss шум на Duffing осцилатор 62
6.5 Код од Matematica користен за анализа на влијание на Gauss шум и сигнал на Duffing осцилатор 63
7 Користена литература 64

1 Вовед

1.1 Теорија на хаос

Динамички систем е концепт во кој одредено правило ја опишува состојбата на точката во просторот зависно од времето. Динамичките системи се променливи во времето. Примери се: екосистеми, временска состојба, човечко тело, сончевиот систем итн. Правилото за еволуција на динамичкиот систем е дадено имплицитно со релација која ни овозможува да ја одредиме состојбата на системот која следува по дадена состојба. Таа релација е или равенка на разлики, или диференцијална равенка, или, пак, друг вид на временско скалирање. За одредување на сите следни состојби на системот потребно е да вршиме итеракции повеќепати напредувајќи чекор по чекор. Ако еднаш го решиме системот за дадена почетна состојба можеме да ги одредиме сите негови следни состојби.

Линеарните динамички системи се вид динамички системи кај кои равенката која ја опишува состојбата на системот е линеарна. Линеарните динамички системи имаат за решение едноставна функција и анализата на линеарните системи е можна бидејќи нивните решенија задоволуваат множество на математички својства меѓу кои и правилото на суперпозиција.

Но линеарните равенки не ни даваат целосна слика за однесувањето на системот. Потребно е да ги моделираме системите со користење на нелинеарни равенки кои во најголем дел се нерешливи. За разлика од линеарните, нелинеарните динамички системи можат да покажат целосно непредвидливо однесување. Таквото, навидум, непредвидливо однесување се нарекува хаос. Дури и едноставно математичко нишало може да биде хаотично под одредени услови.

Хаосот, спротивно на сфаќањата, не значи отсуство на шаблон, но е проучување на засекогаш променливи комплексни системи базирани на математичките концепти на рекурзија, или во форма на рекурзивни процеси или множество на диференцијални равенки кои моделираат физички систем.

Теоријата на хаос е поглед на нештата кои се случуваат околу нас различно од традиционалниот строго детерминистички поглед кој доминира од времето на Њутн. Теорија на хаос е квалитативно проучување на нестабилно апериодично однесување во детерминистички нелинеарен систем. Теоријата на хаос, помеѓу најмладите во науката, е трета револуција во дваесеттиот век во физиката, после Теоријата на релативност и Квантната физика. Таа обезбедува рамка во која ќе се развива науката. Еден од централните концепти во теоријата на хаос е дека доколку е потребно точно да се предвиди состојбата на системот, потребно е да се изработи модел на целото однесување на системот. Теоријата на хаос дава акцент не на нередот, туку на редот својствен за самиот систем.

Техники од Теоријата на хаос се користат за моделирање на:

- биолошки системи - системи од динамички равенки се користат за моделирање на раст на популација па сѐ до срцеви аритмии;
- економија - моделирање на трендови на продажба;
- воени операции - за емитување на воени сигнали со хаотични системи кои тешко можат да се детектираат и
- фрактална компресија на слики - техника која ветува графичка компресија со однос 600:1. Специјалните ефекти во филмската индустрија ќе бидат пореални со фракталната графичка технологија итн.

Хаосот е присутен насекаде. Да го разбереме хаосот, значи да го разбереме животот околу нас. Со светот на правила управува хаосот.

Познати динамички системи кои покажуваат хаотично однесување се:

- Ван дер Пол (Van der Pol) осцилатор - осцилатор со нелинеарно придушување применуван во биологијата како модел за потенцијална акција на невроните како и во сеизмологијата. Равенката на Ван дер Пол осцилатор е

$$\ddot{x}-\zeta\left(1-x^2\right)\dot{x}+x=0$$ каде $x=x(t)$ и $\zeta>0$ е параметар;

- Лоренцов (Lorenz) осцилатор кој е опишан со систем од три нелинеарни равенки $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sigma(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt}=x(\rho-z)-y \\ \dfrac{dz}{dt}=xy-\beta z \end{cases}$ каде $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ и σ,ρ,β се параметри на системот и овој систем има важни импликации во климатските и временските предвидувања;
- Rössler систем - систем од три нелинеарни равенки $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y-z \\ \dfrac{dy}{dt}=x+ay \\ \dfrac{dz}{dt}=b+z(x-c) \end{cases}$ каде $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ и a,b,c се параметри. Користен во моделирање на рамнотежни состојби на хемиски реакции;
- Duffing равенката

$$y''+2\xi y'+\mu y'^3+\alpha y+\gamma y^3=F\cos\Omega t \qquad (*)$$

каде $y=y(t)$, ξ-коефициент на придушување, μ-коефициент на нелинерно придушување, α-линеарна крутост, γ-нелинеарна крутост, F-амплитуда на сила на принудување, Ω-фреквенција на сила на принудување.

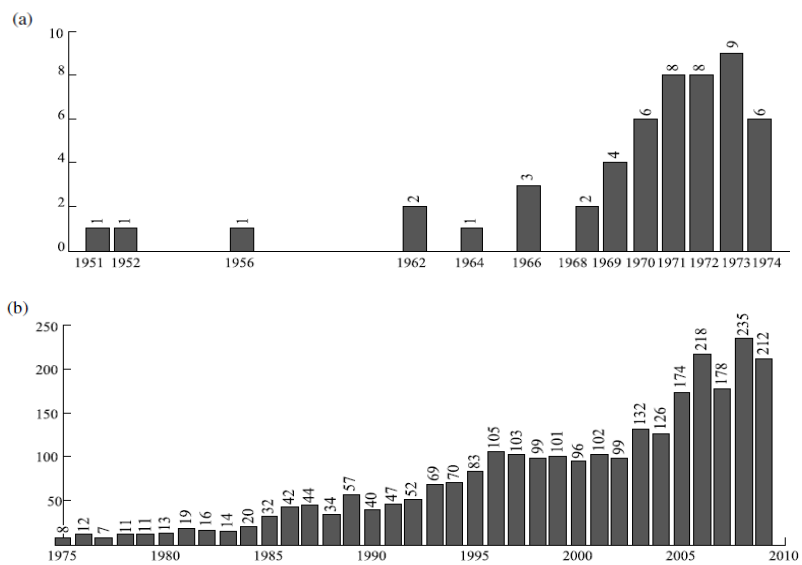
(*) е нелинеарна диференцијална равенка од втор ред како модел на придушен и принуден осцилатор чиј потенцијал е многу покомплициран во однос на едноставно хармонично движење.

2 Цел на истражување

2.1 Duffing равенка

Една од равенките која е модел на нелинеарен систем е Duffing равенката (*). Duffing равенката е енигматична. Во својата оригинална форма, споредено со линеарна диференцијална равенка од втор ред, суштината е во членот за нелинеарна крутост, што ја отвора вратата кон цел нов свет од интересни феномени.

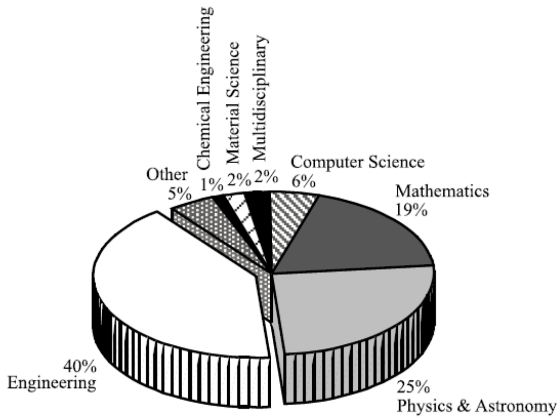
Од 1960год. до денес објавени се голем број публикации кои се поврзани со Duffing равенката. Направено е истражување на SCOPUS за бројот на публикации кои го содржат зборот ‘Duffing’ во наслов, апстракт или како клучен збор кое е прикажано на следниве дијаграми.



Слика 1. *Бројот на публикации кои го содржат зборот ‘Duffing’ во наслов, апстрактат или како клучен збор. а) за период 1950–1974; b) за период 1975–2009. (Source: Elsevier ScopusTM, accessed 9 August 2008 and updated 30 March 2010).*

Figure 1. *Number of publications referring to theword ‘Duffing’ in the title, abstract or keywords per year; a) for the period 1950–1974; b) for the period 1975–2009 (Source: Elsevier ScopusTM, accessed 9 August 2008 and updated 30 March 2010).*

Разновидноста на дисциплини во кои се јавува Duffing равенката е дадена на следнава слика (2).



Слика 2. *Процент на публикации кои го содржат зборот 'Duffing' во наслов, апстрактат или како клучен збор по дисциплини (Source: Elsevier ScopusTM, accessed 9 August 2008 and updated 30 March 2010).*

Figure 2. *Percentage of publications referring to the word 'Duffing' in the title, abstract or keywords for the period 1950–2009 per disciplines (Source: Elsevier ScopusTM, accessed 9 August 2008 and updated 30 March 2010).*

Duffing равенката во своите различни форми, зависно од вредностите на нејзините коефициенти, е користена за опис на голем број нелинеарни системи.

Заради спецификите на нелинеарните динамички системи во овој труд се проучува Duffing со слаба нелинеарност, како форма на премин од линеарен кон нелинеарен систем.

2.2 Користење на Duffing осцилатор за детекција на слаб сигнал

Детекција на слаби сигнали е техничка дисциплина, која ги истражува принципите и методите за детекција на слаби сигнали во шум. Главно ги користи достигањата во модерната електроника, теоријата на информации и физичките методи за да ги анализира причината и правилата за настанување на шум, да ја проучи статистичката природа и разликата во детектирање на сигнал, шум и слично. Технологијата за детекција на слаби сигнали доживеа преродба со воведување на теоријата на хаос во нејзин домен.

Методот за детектирање на сигнали преку хаос е различен од многу постоечки методи, високо е осетлив и има низок детекциски праг, висока инертност на шум и е врв во полето на детекција на слаб сигнал.

Заради ова хаосот има потенцијална примена во детекција на слаб сигнал.

Основна идеја на шемата за детекција на сигнал базирана на хаотичен осцилатор е тоа што мал периодичен сигнал може да биде детектиран со Duffing осцилатор преку транзиција од хаотично во периодично движење како класичен нелинеарен систем.

3 Методи на истражување

За линеарните равенки лесно се одредува решение во затворена аналитичка форма. Мал број на нелинеарни проблеми можат да се решат директно така што ќе се добие решение во затворена аналитичка форма. За нелинеарните равенки развиени се различни методи, техники и процедури за одредување на приближни аналитички решенија, нумерички решенија како и графички методи со кои се испитуваат својствата на нелинеарните системи.

3.1.1 Методи за одредување приближни аналитички решенија

Постојат повеќе методи за одредување на приближни аналитички решенија на нелинеарните равенки. Аналитичките процедури главно се поделени во две групи во зависност од тоа дали бараат постоење на мали вредности на параметрите (вредности блиски до нула) или не. Некои од тие методи се општ елиптичен метод на средна вредност (the general elliptic averaging method), елиптичен метод на Крилов-Боголубов (the elliptic Krylov–Bogolubov method), елиптичен метод со хармониски баланс (elliptic harmonic balance method), метод на Гарлекин (the Galerkin method), метод на хомотописка пертурбација (the homotopy perturbation) и метод на хомотописка анализа (the homotopy analysis method). Секој од методите има одредени предности, но и недостатоци. Методите кои користат елиптични функции даваат резултати со добра точност за подолг временски интервал, но заради комплексноста на елиптичните функции нивната примена во споредба со стандардните методи е покомплицирана. Претпоставките за мал физички параметар ја ограничуваат примената на методите од една страна, но во соодветните случаи даваат идеални резултати, едноставни се за примена и не бараат дополнителен софтвер и слично.

3.1.1.1 Метод на повеќекратно скалирање

Една група методи за одредување решенија на нелинеарните равенки се т.н. пертурбациски методи при кои се врши апроксимација и се применува пертурбациска анализа за да се открие однесувањето на нелинеарниот систем. Пертурбациските методи се состојат од примена на мала нелинеарна пертурбација на познати линеаризирани решенија. Нивната точна примена е рестриктирана на слаби нелинеарни системи, односно системи кај кои нелинеарните членови се мали во споредба со линеарните.

Причината поради која се применуваат пертурбациски методи за одредување на решенијата на диференцијалните равенки, наспроти постоењето на моќните компјутери кои симулираат нумерички решенија, е тоа што дури и најмоќната и најбрза нумеричка интеграција никогаш нема да може да одговори што се случува во системот, односно нумеричките методи не ја прикажуваат комплексната интеракција на системот. Компјутерите ни даваат специфични одговори на специфични прашања. Но ни даваат решение на системот за одредено множество параметри и за одреден временски интервал. За нелинеарните системи не е доволно интерполирање или екстраполирање на дискретни вредности. Затоа за нелинеарните системи потребно е огромната количина на компјутерски генерирани информации да се преобразат во корисно разбирање на природата на проблемот.

Постојат неколку пертурбациски методи за решавање на слабо нелинеарни равенки, како на пример, метод на хармониска рамнотежа (the method of harmonic balance), методи на средни вредности (several methods of averaging), метод на форсирани координати (the method of strained coordinates), метод на означени композитни решенија (the method of matched and composite solutions), метод на повеќекратни скалирања (the method of multiple scales). Изборот на конкретен пертурбациски метод е прашање на личен избор. Ниту еден од пертурбациските методи не е супериорен во однос на останатите. Во потешките случаи можно е да се модифицира одреден пертурбациски метод или да се комбинира со некој друг метод. Доколку еден метод не дава решение, друг можеби ќе биде во ред, но генерално приодот е пробен и во голема мера важна е и интуицијата за да се добие саканиот резултат.

Методот на повеќекратни скалирања (the method of Multiple Scales) решението го разгледува како функција од повеќе независни променливи или скали. Се применува кај голем број на проблеми кои се опишуваат со слабо нелинеарни равенки.

Основната суштина на овој метод е што единствената независна променлива - времето t се дели на неколку нови независни променливи $T_1, T_2, ..., T_M$ каде $T_i = \varepsilon^i t$, каде ε е пертурбациски параметар . Зависната променлива y се претпоставува во форма $y(t,\varepsilon) = \sum_{i=o}^{M} \varepsilon^i y_i(T_1, T_2, ..., T_M) + \mathrm{O}(\varepsilon T_M)$ каде грешката на претставувањето е $\mathrm{O}(\varepsilon T_M)$.

Изводите во однос на времето се

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + ...$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2} + 2\varepsilon \frac{\frac{\partial}{\partial T_0}\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial {T_1}^2} + \frac{\partial}{\partial T_0}\partial\right)}{\partial T_2} + ...$$

Заменувајќи ги овие формули во почетната диференцијална равенка и изедначувајќи ги коефициентите по степените на ε добиваме равенки од кои ги одредуваме функциите y_i. Решенијата содржат функции од $T_1, T_2, ..., T_M$. За да ги одредиме тие функции претпоставуваме одредени дополнителни услови. Бараме

$\frac{y_i}{y_{i-1}} < \infty$ за секое $T_1, T_2, ..., T_M$. Овој услов е еднаков на елиминирање на секуларните членови (членовите $\varepsilon^i y_i$ кои даваат мала корекција на решението во споредба со $\varepsilon^{i-1} y_{i-1}$). Со тоа се добиваат потребните равенки за одредување на решението.

3.1.2 Нумерички методи

Аналитичките методи за одредување на приближни аналитички решенија бараат комплексни пресметки, наспроти нумеричките методи за кои денес постои широк ранг на одлични софтверски пакети.

Еден таков софтверски пакет е Matematica кој се користи за научни, инженерски, математички и други видови на технички пресметувања.

Функцијата NDSolve одредува нумеричко решение на диференцијалните равенки (систем диференцијални равенки, парцијални диференцијални равенки како и систем од диференцијални и алгебарски равенки).

NDSolve го претставува решението како InterpolatingFunction објект. InterpolatingFunction обезбедува вредности за функцијата за вредности на независната променлива од t_{min} до t_{max}. NDSolve го одредува решението итеративно почнувајќи од одредена вредност преку низа од чекори сѐ додека не го покрие целиот ранг од t_{min} до t_{max} но со дадени гранични вредности. NDSolve користи различни методи за решавање на равенките, но важно за сите нив е што користат адаптивна процедура за одредување на големината на чекорот. Ако решението значително варира во одреден регион, тогаш NDSolve го редуцира чекорот или менува методот за да даде подобро решение, но постои и можност сами да ја одредиме големината на чекорот. NDSolve користи различни методи преобразени во компјутерски решенија како и механизми за додавање на дополнителен метод. Во општ случај не е можно да се одреди природата на решението на диференцијалната равенка без претходно да ја решиме. Но, сепак, NDSolve нуди можност да избереме метод и уште повеќе да поставиме наши услови.

3.1.3 Метод на фазен дијаграм

Методот на фазен дијаграм е техника за конструирање и анализирање на решенијата на динамичките системи. Методот се состои од трансформирање на равенката во систем од диференцијални равенки од прв ред, со воведување на нови променливи. Променливите формираат вектор во фазниот простор (простор во кој се претставени сите можни состојби на системот). Во фазниот простор секоја можна состојба на системот е претставена со единствена точка. Сите точки формираат фазен дијаграм кој ги прикажува областите на стабилност на системот. Секоја променлива на системот е претставена како оска од повеќедимензионален простор.

Фазниот дијаграм го претставува сѐ она што системот може да биде и од неговата форма лесно се согледуваат карактеристиките на нелинеарниот систем.

3.1.4 Поинкаре секција (Poincare section)

Поинкаре секција е една од основните алатки за нелинеарната динамика. За осцилатор принуден од периодична сила со период T, Поинкаре секција може да се дефинира со рамнините iT $(i = 1,2, ..)$. Почнувајќи од почетно време $t = t_0$ стробоскопски се забележуваат вредностите за променливите на системот во интервали со период T. Поинкаре секција може да се интерпретира како дискретен динамички систем во простор со една димензија помалку од соодветниот непрекинат динамички систем. Бидејќи дискретниот систем задржува голем број од својствата на оригиналниот систем, често се користи за негова анализа.

3.1.5 Спектар на моќ (Power spectra)

Спектар на моќ е моќна алатка за анализирање и разбирање на хаотичното однесување на динамичките системи. За даден сигнал Спектар на моќ ни дава цртеж за моќта на сигналот (енергијата во единица време) во даден фреквентен опсег. Најчесто користен начин за добивање на Спектар на моќ е со користење на Фуриева трансформација.

4 Резултати

4.1 Линеарни осцилации

4.1.1 Слободни линеарни осцилации без придушување

Слободни осцилации се појавуваат кај систем кој е ставен во почетна состојба и оставен слободно да осцилира. За да го започнеме истражувањето разгледуваме бездимензионален систем без придушување кој слободно осцилира. Таков систем е опишан со равенка $y'' + \omega_{\mathrm{n}}^2 y = 0$, $y(0) = y_0, y'(0) = y_0'$ (1)

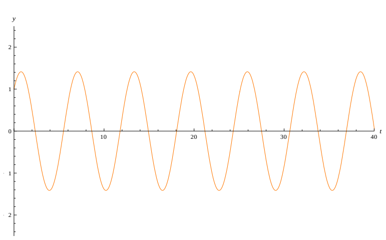
каде ω_n е непридушена природна фреквенција на системот.

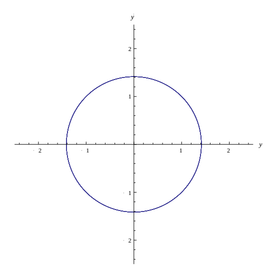
Решението на оваа равенка е $y(t) = C\sin(\omega_n t + \varphi)$ (2а,б)

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0'}{\omega_n}\right)^2}, \varphi = arctg\left(\frac{y_0}{\frac{y_0'}{\omega_n}}\right)$$

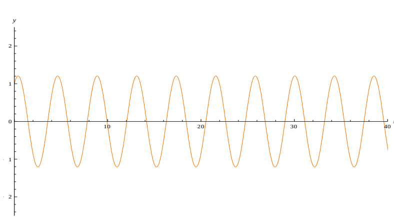
кое вели дека системот ќе осцилира со слободно хармонично движење со амплитуда која зависи од почетната состојба и фреквенција која зависи од крутоста $k = \omega_n$.

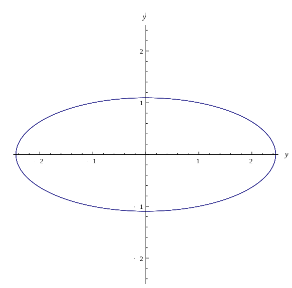
а)



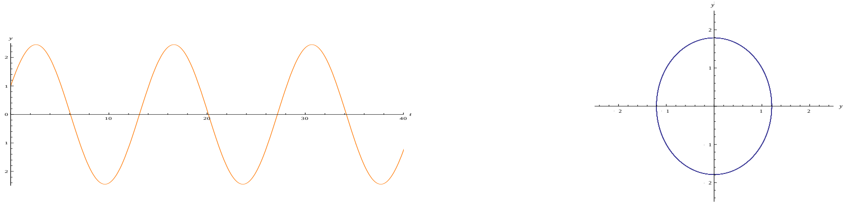


б)





в)



Слика 3. *Временски ред и фазен дијаграм на слободен линеарен осцилатор без придушување со различна крутост $k = \omega_n$ и почетна состојба $(y', y) = (1,1)$*

а) $k = 0.2$; б) $k = 1$; в) $k = 2.2$

Figure 3. *Time series and phase diagram of free linear oscillator without damping with different stiffness $k = \omega_n$ and initial state $(y', y) = (1,1)$*

а) $k = 0.2$; б) $k = 1$; в) $k = 2.2$

Стабилноста на решението не зависи ниту од крутоста, ниту од почетните услови.

4.1.2 Слободни линеарни осцилации со линеарно придушување

Доколку во системот кој слободно осцилира постои придушување тогаш неговата равенка е

$$y'' + 2\xi\omega_n y' + \omega_n^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \qquad (3)$$

каде ξ е коефициент на придушување а ω_n непридушена природна фреквенција на системот.

Решението на равенката зависи од степенот на придушување. Ако придушувањето е мало ($|\xi| < 1$), системот ќе продолжи да вибрира, но со тек на време ќе престане. Таквото придушување се нарекува ниско придушување. Ако го зголемиме придушувањето до степен така што системот не вибрира повеќе, ја достигнуваме точката на така наречено критично придушување.

Решението на ниско придушен систем ($|\xi| < 1$) е

$$y(t) = Ce^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t + \varphi) \qquad (4а,б)$$

$$C = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{y_0' + \xi\omega_n y_0}{\omega_d}\right)} \quad \varphi = Arctg\left(\frac{y_0\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{y_0' + \xi\omega_n y_0}\right)$$

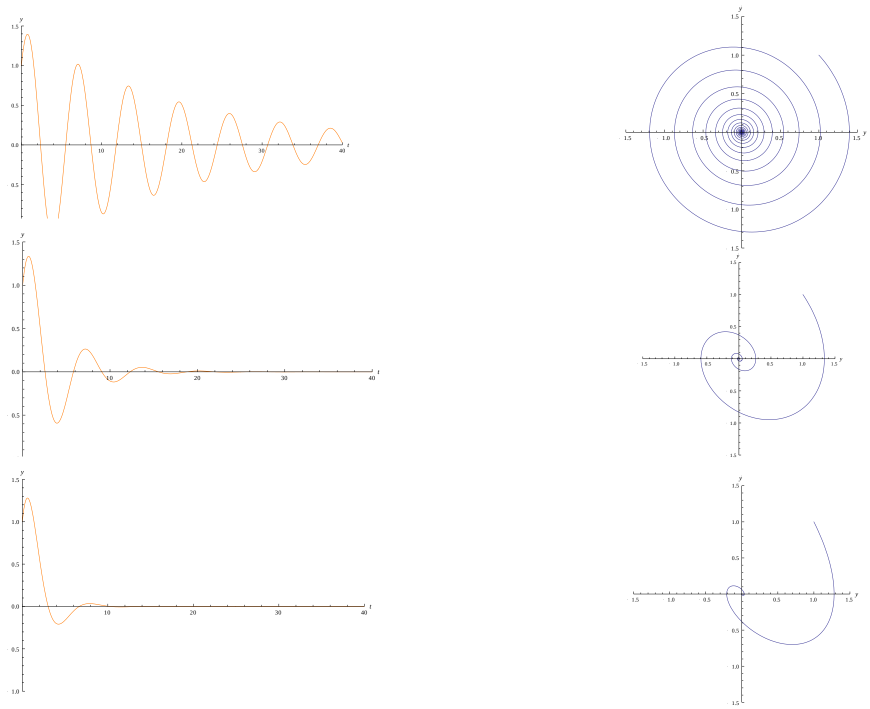
е фазната разлика а $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ е придушена природна фреквенција на системот.

Ова решение е хармонично движење со променлива амплитуда $Ce^{-\xi\omega_n t}$ во тек на време т.е. осцилации кои со тек на време се распаѓаат.

а)

б)

в)



Слика 4. *Временски ред и фазен дијаграм на слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување, линеарна крутост $k=1$ и почетна состојба $(y', y)=(1{,}1)$ за вредности на придушувањето*
а) $\xi=0.1$; б) $\xi=0.5$; в) $\xi=1$

Figure 4. *Time series and phase diagram of free linear oscillator with linear damping, linear stiffness $k=1$and initial state $(y', y)=(1{,}1)$ and values of damping*
а) $\xi=0.1$; б) $\xi=0.5$; в) $\xi=1$

Стабилноста на решението не зависи ниту од придушувањето, ниту од почетните услови.

4.1.3 Присилени линеарни осцилации без придушување

Ако претпоставиме дека на системот кој осцилира без придушување му дејствува периодична сила која можеме да ја запишеме како косинусна функција, тогаш неговата равенка е

$$y'' + \omega_n^2 y = F\cos\Omega t\,,\; y(0)=y_0,\, y'(0)=y_0' \qquad (5)$$

Решението на оваа равенка зависи од тоа дали природната фреквенција на системот е еднаква или различна од фреквенцијата на периодичната сила.

- За $\omega_n \neq \Omega$ решението е

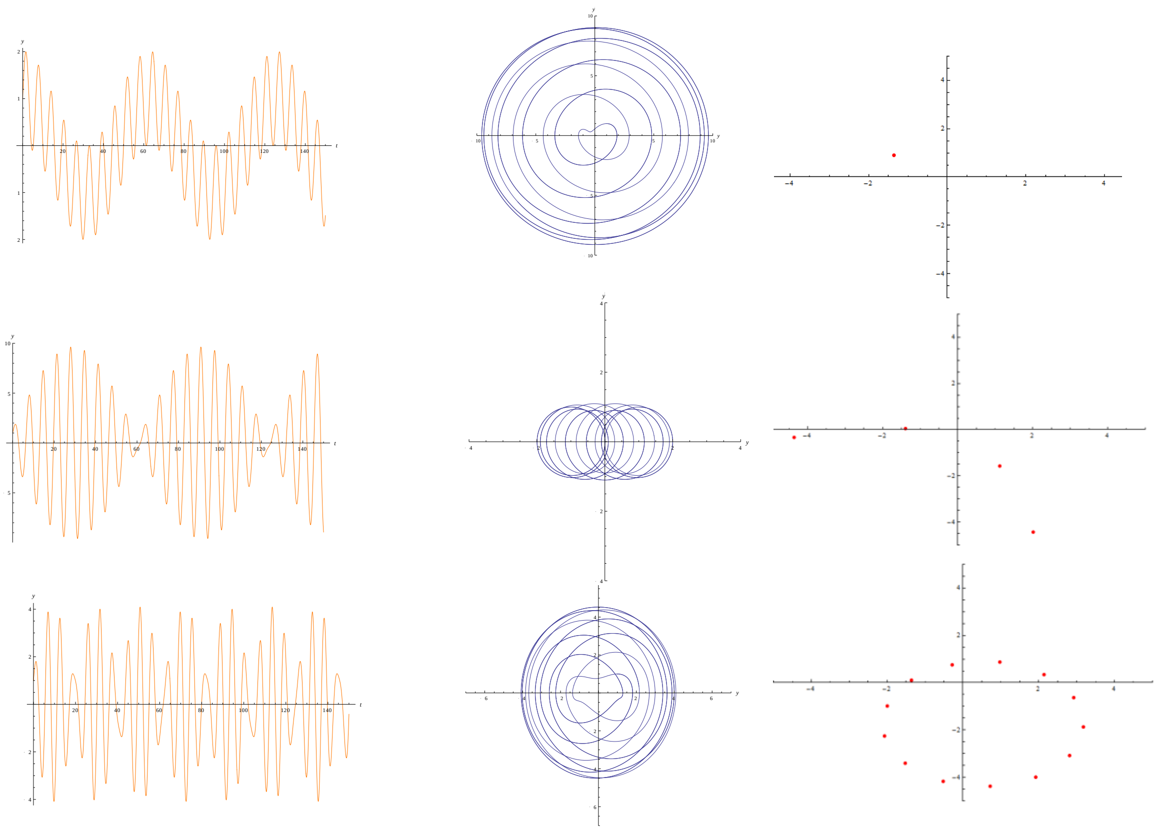
$$y(t) = C\sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F}{\omega_n^2 - \Omega^2}\cos\Omega t \quad (6)$$

каде C, φ се дадени со равенките (2б).

а)

б)

в)



Слика 5. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен линеарен осцилатор без придушување со крутост $k = 1$ и почетна состојба $(y', y) = (1,1)$ и амплитуда на периодичната сила $F = 1$ за вредности на фреквенција на периодичната сила $\Omega \neq \omega_n$*

а) $\Omega = 0.1$; *б)* $\Omega = 0.9$; *в)* $\Omega = 1.3$

Figure 5. *Time series, phase diagram and Poincare section of force linear oscillator without dumping with stiffness $k = 1$ and initial state $(y', y) = (1,1)$ amplitude of periodic force $F = 1$ and values of frequency of periodic force $\Omega \neq \omega_n$*

а) $\Omega = 0.1$; *б)* $\Omega = 0.9$; *в)* $\Omega = 1.3$

Амплитудата не е константна, но е периодично променлива во времето. Таквата промена на амплитудата се нарекува амплитудна модулација

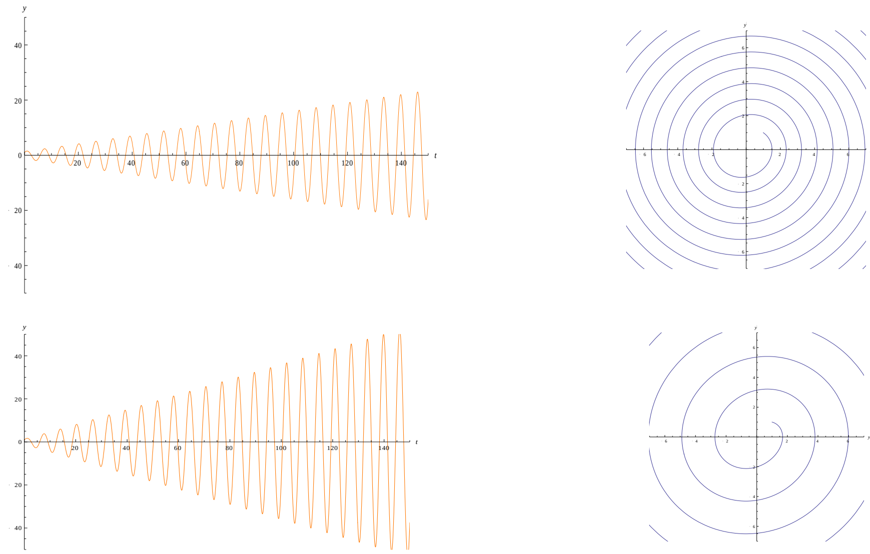
- За $\omega_n = \Omega$ решението е

$$y(t) = C\sin(\omega_n t + \varphi) + \frac{F}{2\omega_n} t \sin \omega_n t \qquad (7)$$

каде C, φ се дадени со равенките (2б).

а)

б)



Слика 6. *Временски ред и фазен дијаграм на присилен линеарен осцилатор без придушување со крутост $k = 1$ и почетна состојба $(y', y) = (1,1)$ за вредности на фреквенција на периодичната сила $\Omega = \omega_n$ и амплитуда на периодичната сила а) $F = 0.3$; б) $F = 0.7$*

Figure 6. *Time series and phase diagram of force linear oscillator without dumping with stiffness $k = 1$, initial state $(y', y) = (1,1)$ for values of frequency $\Omega = \omega_n$ and amplitude of periodic force а) $F = 0.3$; б) $F = 0.7$*

Амплитудата не е периодична, но линеарно тежи кон бесконечност - осцилаторот е во резонанса.

4.1.4 Присилени линеарни осцилации со линеарно придушување

Во присуство на надворешно принудување на линеарниот осцилатор (без губење од општост претпоставуваме $\omega_n = 1$) со придушување равенката е со форма

$$y'' + 2\xi y' + y = F\cos\Omega t, \quad y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \qquad (8)$$

Решението на нехомогениот систем е збир од решението на хомогениот систем и партикуларното решение на нехомогената равенка.

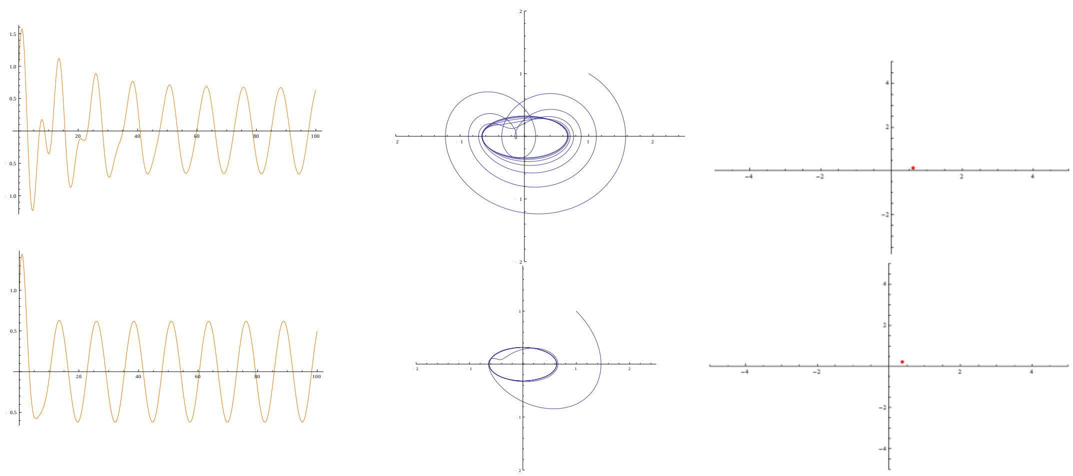
Во физичка смисла, движењето на системот е линеарна суперпозиција од слободна осцилација и присилена осцилација од надворешна сила. За слабо придушен систем ($\xi < 1$) и нерезонантно принудување $\Omega \neq 1$ (односно принудување чија фреквенција не е еднаква на природната фреквенција), решението е во форма

$$y(t) = Ce^{-\xi t}\cos(\omega_d t + \varphi) + a\cos(\Omega t + \phi) \qquad (9)$$

каде константата C и фазата φ се определени со почетните услови.

а)

б)



Слика 7. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување, со крутост $k = 1$ и почетна состојба $(y', y) = (1,1)$ за вредности на фреквенција на принудување $\Omega = 0.5$, амплитуда на периодичната сила на принудување $F = 0.5$ и придушување а) $\xi = 0.1$; б) $\xi = 0.5$*

Figure 7. *Time series, phase diagram and Poincare section of force linear oscillator with linear dumping, with stiffness $k = 1$ and initial state $(y', y) = (1,1)$, values for frequency of periodic force $\Omega = 0.5$, amplitude of periodic force $F = 0.5$ and values of damping а) $\xi = 0.1$; б) $\xi = 0.5$*

Константата ϕ во равенката (9) е фазна разлика зависна од фазата на надворешната сила и ја задоволува релацијата

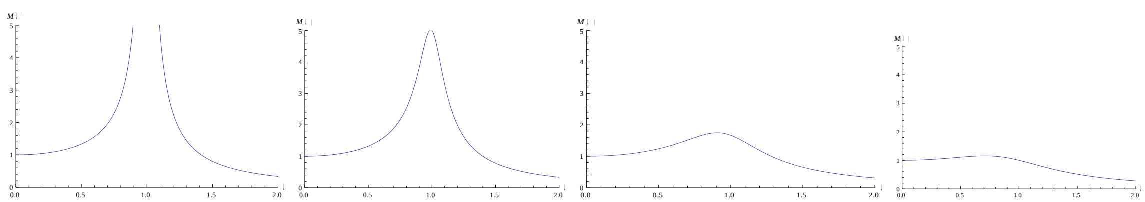
$$\phi(\Omega)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{2\xi\Omega}{1-\Omega^2}\right), \Omega\le 1 \\ -\left(\pi - arctg\left(\dfrac{2\xi\Omega}{\Omega^2-1}\right)\right), \Omega>1 \end{cases} \qquad (10)$$

Нехомогениот дел ја опишува рамнотежната состојба, состојбата постигната за $t \to \infty$. Амплитудата на рамнотежната состојба во равенката (9) е $a = M|F|$

каде
$$M|\Omega| = \frac{a}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \qquad (11)$$

се нарекува фактор на зголемување и е мера за зголемување на поместувањето за секоја фреквенција споредено со статичкото поместување. (Графички се прикажува како крива на амплитудна реакција за различни вредности на придушувањето ξ).

а) б) в) г)



Слика 8. *Крива на амплитудна реакција:* $M|\Omega|$ *за различни вредности на придушувањето* ξ

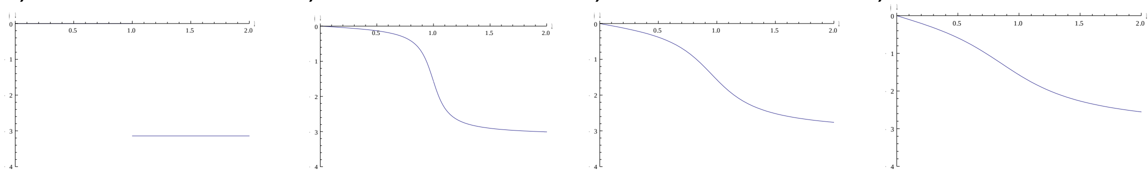
а) $\xi = 0$, *б)* $\xi = 0.1$, *в)* $\xi = 0.3$, *г)* $\xi = 0.5$

Figure 8. *Amplitude-response curves:* $M|\Omega|$ *for different values of the damping* ξ

а) $\xi = 0$, *б)* $\xi = 0.1$, *в)* $\xi = 0.3$, *г)* $\xi = 0.5$

За дадено придушување, фреквенцијата на принудување за која се постигнува најголема вредност на $M|\Omega|$ е $\Omega = \sqrt{1-2\xi^2}$ (малку помала од природната фреквенција на системот но блиска до неа за мало придушување ξ).

а) б) в) г)



Слика 9. *Крива на фазна реакција: ϕ(Ω) за вредности на придушувањето* ξ
а) $\xi = 0$, *б)* $\xi = 0.1$, *в)* $\xi = 0.3$, *г)* $\xi = 0.5$

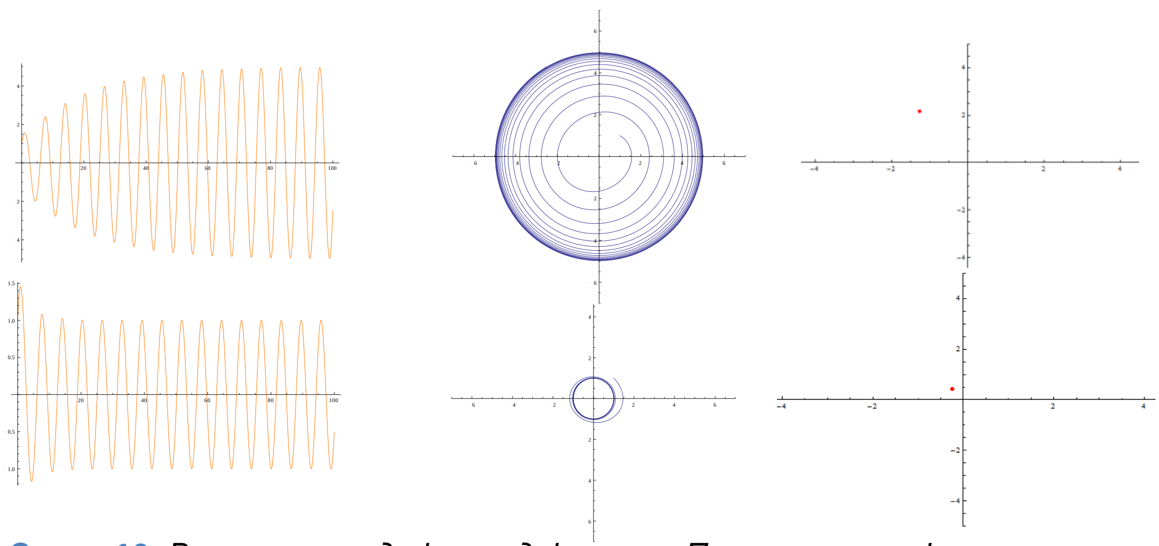
Figure 9. *Phase-response curves: ϕ(Ω) for different values of the damping* ξ
а) $\xi = 0$, *б)* $\xi = 0.1$, *в)* $\xi = 0.3$, *г)* $\xi = 0.5$

Случајот $\Omega = 1$ те. кога фреквенцијата на принудување е еднаква на природната фреквенција е од посебен интерес. Овој специјален однос помеѓу фреквенцијата на принудување и природната фреквенција се нарекува резонанца. За непридушен систем ($\xi = 0$), партикуларното решение за $\Omega = 1$е во облик

$$y(t) = c_1 \cos(t + \phi) + c_2 t \sin t \qquad (12)$$

а)

б)



Слика 10. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување со крутост* $k = 1$ *и почетна состојба* $(y', y) = (1,1)$ *за вредности на фреквенција на принудување* $\Omega = 1$ *амплитуда на периодичната сила* $F = 0.5$ *и придушување*
а) $\xi = 0.1$, *б)* $\xi = 0.5$

Figure 10. *Time series, phase diagram and Poincare section of force linear oscillator with linear dumping, with stiffness* $k = 1$ *and initial state* $(y', y) = (1,1)$, *values for frequency of periodic force* $\Omega = 1$, *amplitude of periodic force* $F = 0.5$ *and values of damping*
а) $\xi = 0.1$; *б)* $\xi = 0.5$

Состојбата на линеарните системи е јасна и целосно определена. Поинкаре секција и Спектар на моќ не покажуваат ништо интересно кај линеарните системи независно дали се слободни или присилени, придушени или непридушени.

4.2 Слободни осцилации на Duffing осцилатор со нелинеарно придушување

Слободните осцилации на Duffing осцилатор опишан со следнава недимензионална равенка

$$y'' + 2\xi y' + \mu y'^3 + \alpha y + \gamma y^3 = 0 \qquad (13)$$

каде ξ-коефициент на линеарно придушување, μ-коефициент на нелинеарно придушување, α-линеарна крутост, γ-нелинеарна крутост.

Системот покажува многу различни феномени зависно од линеарните и нелинеарните параметри.

4.2.1 Фиксни точки и нивна стабилност

Ги одредуваме фиксните точки (основна рамнотежна состојба кај нелинеарните системи) и ќе ја испитуваме нивната стабилност преку локална анализа.

Равенката ја запишуваме како

$$y_1' = y_2,\, y_2' = -\alpha y_1 - 2\xi y_2 - \gamma y_1^3 - \mu y_2^3 \qquad (14)$$

што можеме да го запишеме и како $\dfrac{dy}{dt} = G(y)$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, G(y) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad (15а,б)$$

каде $g_1(y_1, y_2) = y_2, g_1(y_1, y_2) = -\alpha y_1 - 2\xi y_2 - \gamma y_1^3 - \mu y_2^3$.

За $y_1' = y_2' = 0$ ги добиваме рамнотежните равенки $0 = y_{2ft}, 0 = -\alpha y_{1ft} - 2\zeta y_{2ft} - \gamma y_{1ft}^3 - \mu y_{2ft}^3$ каде (y_{1ft}, y_{2ft}) означува фиксна точка.

Значи за $y_{2ft}=0, y_{1ft}$ задоволува $\alpha y_{1ft}+\gamma y_{1ft}^3=0 \Leftrightarrow y_{1ft}\left(\alpha+\gamma y_{1ft}^2\right)=0$.

За $\alpha\gamma>0$ постои само тривијална фиксна точка $\left(y_{1ft}, y_{2ft}\right)=(0,0)$

За $\alpha\gamma<0$ постојат две нетривијални фиксни точки $\left(y_{1ft}, y_{2ft}\right)=\left(y_{1ft+},0\right)$ и $\left(y_{1ft}, y_{2ft}\right)=\left(y_{1ft-},0\right)$ каде $y_{1ft+}=\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$, $y_{1ft-}=-\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$.

Ја испитуваме локалната стабилност на фиксните точки.

Заменуваме $y_1(t)=y_{1ft}+\Delta y_1(t),\left(\left|\Delta y_1\right|<1\right)$ и $y_2(t)=y_{2ft}+\Delta y_2(t),\left(\left|\Delta y_2\right|<1\right)$ во равенките (14) при што добиваме

$$\Delta y_1{}'=\Delta y_2, \Delta y_2{}'=-\left(\alpha+3\gamma y_{1ft}^2\right)\Delta y_1-2\xi\Delta y_2 \quad \text{(16а, б, в)}$$

Равенките (16а) може да се запишат како диференцијална равенка од втор ред со променлива Δy_1

$$\Delta y_1{}''+2\xi\Delta y_1{}'+\left(\alpha+3\gamma y_{1ft}^2\right)\Delta y_1=0 \quad (17)$$

чија карактеристична равенка е

$$\lambda^2+2\xi\lambda+\alpha+3\gamma y_{1ft}^2=0 \quad (18)$$

Решенијата на оваа равенка ги даваат карактеристичните вредности λ_1, λ_2 кои ја одредуваат стабилноста на фиксните точки.

4.2.1.1 Случај кога не постојат нетривијални фиксни точки $\alpha\gamma>0$

Во овој случај единствена е тривијалната фиксна точка $\left(y_{1ft}, y_{2ft}\right)=(0,0)$ и карактеристичната равенка е

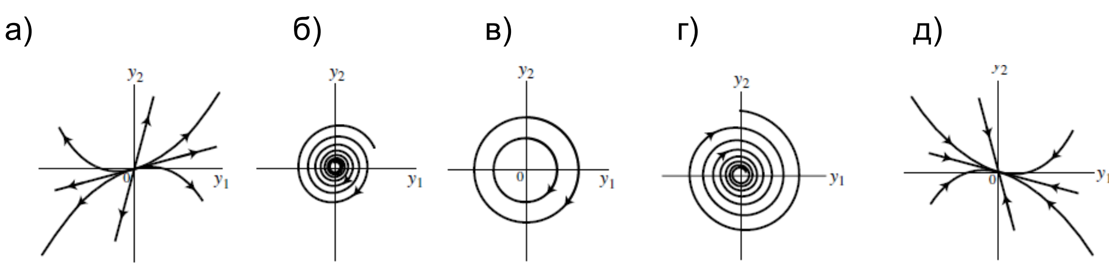
$$\lambda^2+2\xi\lambda+\alpha=0 \quad (19)$$

Дискриминантата на оваа равенка е $D=4\xi^2-4\alpha$.

Стабилност на тривијалната фиксна точка во случај на позитивна линеарна и позитивна нелинеарна крутост $\alpha>0$, $\gamma>0$

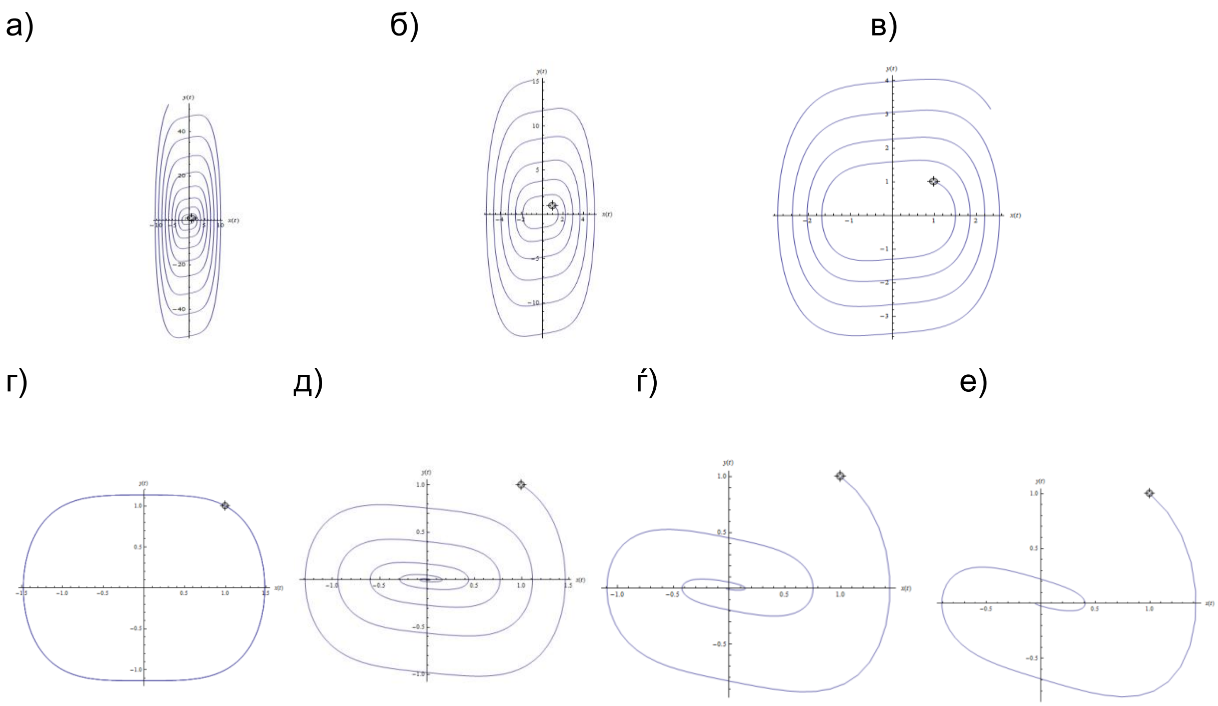
Со промена на коефициентот на придушување ξ се менуваат и карактеристичните вредности на карактеристичната равенка. Поставуваме $\alpha=\omega_0^2$ па зависноста на стабилноста од ξ е следна:

1. $\xi<-\omega_0$ постојат две позитивни карактеристични вредности и тривијалната фиксна точка е нестабилен јазол;
2. $\xi=-\omega_0$ постојат две повеќекратни позитивни карактеристични вредности и тривијалната фиксна точка е нестабилен инфлектиран јазол;
3. $-\omega_0<\xi<0$ постојат комплексно конјугирани карактеристични вредности со позитивен реален дел и тривијалната фиксна точка е нестабилен фокус, при што се јавуваат само водечки осцилации;
4. $\xi=0$ постојат чисто имагинарни комплексно конјугирани карактеристични вредности и тривијалната фиксна точка е центар, односно осцилациите се без придушување;
5. $0<\xi<\omega_0$ постојат комплексно конјугирани карактеристични вредности со негативен реален дел и тривијалната фиксна точка е стабилен фокус;
6. $\xi=\omega_0$ постојат две повеќекратни негативни карактеристични вредности и тривијалната фиксна точка е стабилен инфлектиран јазол;
7. $\xi>\omega_0$ постојат две негативни карактеристични вредности и тривијалната фиксна точка е стабилен јазол;



Слика 11. *Фазни портрети за* $\alpha>0$, $\gamma>0$*:*
а) $\xi<-\omega_0$; *б)* $-\omega_0<\xi<0$; *в)* $\xi=0$; *г)* $0<\xi<\omega_0$; *д)* $\xi>\omega_0$.

Figure 11. Phase portraits for $\alpha>0$, $\gamma>0$:
а) $\xi<-\omega_0$; *б)* $-\omega_0<\xi<0$; *в)* $\xi=0$; *г)* $0<\xi<\omega_0$; *д)* $\xi>\omega_0$.

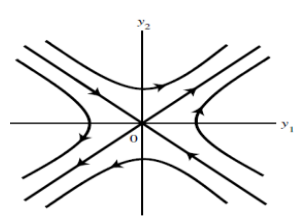


Слика 12. *Фазни портрети за* $\alpha = 0.04, \gamma = 0.5$*:*
а) $\xi = -0.3$*; б)* $\xi = -0.2$*; в)* $\xi = -0.1$*; г)* $\xi = 0$*; д)* $\xi = 0.1$*; ѓ)* $\xi = 0.2$*; е)* $\xi = 0.3$

Figure 12. Phase portraits for $\alpha = 0.04, \gamma = 0.5$*:*
а) $\xi = -0.3$*; б)* $\xi = -0.2$*; в)* $\xi = -0.1$*; г)* $\xi = 0$*; д)* $\xi = 0.1$*; ѓ)* $\xi = 0.2$*; е)* $\xi = 0.3$

Стабилност на тривијалната фиксна точка во случај на негативна линеарна и негативна нелинеарна крутост $\alpha < 0, \gamma < 0$

Во овој случај карактеристичната равенка има една позитивна и една негативна карактеристична вредност кои не зависат од ξ, па нетривијалната фиксна точка е нестабилно седло.



Слика 13. *Фазен портрет за* $\alpha < 0, \gamma < 0$

Figure 13. Phase portrait for $\alpha < 0, \gamma < 0$

4.2.1.2 Случај кога постојат нетривијални фиксни точки $\alpha\gamma < 0$

Во овој случај постојат тривијалната фиксна точка и две нетривијални фиксни точки. Зависно од знакот на α стабилноста на нетривијалната и тривијалните точки се менува.

Случај на позитивна линеарна и негативна нелинеарна крутост $\alpha > 0$, $\gamma < 0$

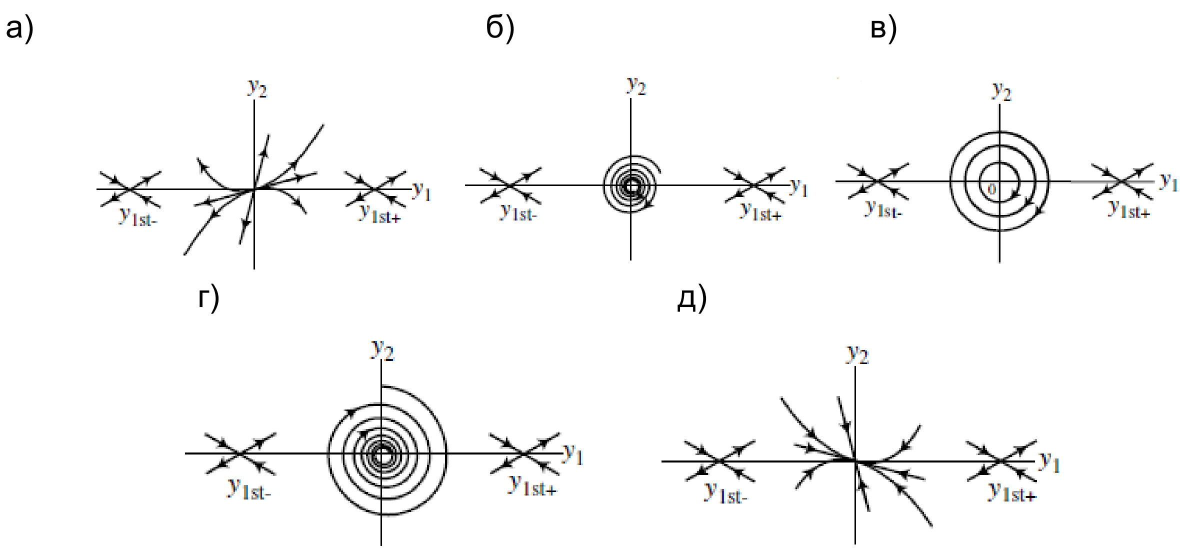
Стабилноста на тривијалната фиксна точка зависи слично како и во случајот $\alpha\gamma > 0$, додека за нетривијалните фиксни точки $(y_{1ft}, y_{2ft}) = (y_{1ft-}, 0)$ каде $y_{1ft+} = \sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$, $y_{1ft-} = -\sqrt{-\frac{\alpha}{\gamma}}$ равенката добива облик $\Delta y_1'' + 2\xi\Delta y_1' - 2\alpha\Delta y_1 = 0$

и карактеристичната равенка е

$$\lambda^2 + 2\xi\lambda - 2\alpha = 0 \quad (20)$$

Дискриминантата на оваа равенка е $D = 4\xi^2 + 8\alpha$.

односно стабилноста на нетривијалните точки не зависи од ξ и тие се седла независно од придушувањето.



Слика 14. *Фазни портрети за $\alpha > 0$, $\gamma < 0$:*
а) $\xi < -\omega_0$; б) $-\omega_0 < \xi < 0$; в) $\xi = 0$; г) $0 < \xi < \omega_0$; д) $\xi > \omega_0$.

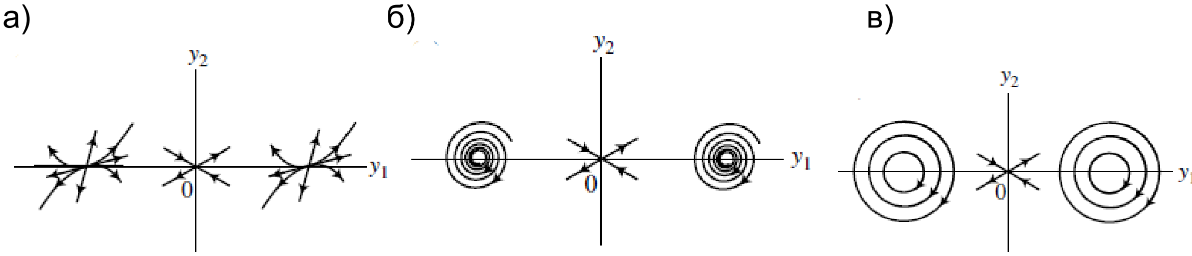
Figure 14. Phase portraits for $\alpha > 0$, $\gamma < 0$:
а) $\xi < -\omega_0$; б) $-\omega_0 < \xi < 0$; в) $\xi = 0$; г) $0 < \xi < \omega_0$; д) $\xi > \omega_0$.

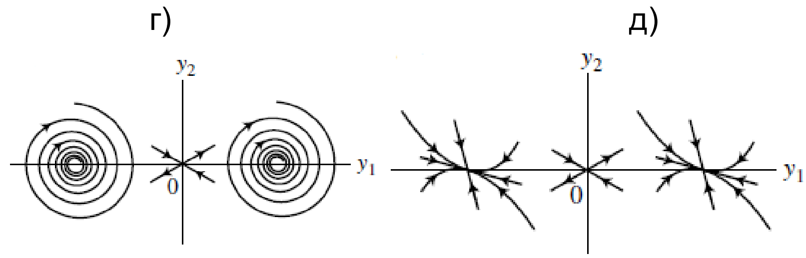
Случај на негативна линеарна и позитивна нелинеарна крутост $\alpha < 0, \gamma > 0$

Во овој случај тривијалната фиксна точка е седло независно од ξ. Поставуваме $\alpha = -\omega_0^2$, па зависноста на стабилноста на нетривијалните фиксни точки од ξ е следна:

1. $\xi < -\sqrt{2}\omega_0$ постојат две позитивни карактеристични вредности и нетривијалните фиксни точки се нестабилен јазол;
2. $\xi = -\sqrt{2}\omega_0$ постојат две повеќекратни позитивни карактеристични вредности и нетривијалните фиксни точки се нестабилен инфлектиран јазол;
3. $-\sqrt{2}\omega_0 < \xi < 0$ постојат комплексно конјугирани карактеристични вредности со позитивен реален дел и нетривијалните фиксни точки се нестабилен фокус, при што се јавуваат само водечки осцилации;
4. $\xi = 0$ постојат чисто имагинарни комплексно конјугирани карактеристични вредности и нетривијалните фиксни точки се центар, односно осцилациите се без придушување;
5. $0 < \xi < \sqrt{2}\omega_0$ постојат комплексно конјугирани карактеристични вредности со негативен реален дел и нетривијалните фиксни точки се стабилен фокус;
6. $\xi = \sqrt{2}\omega_0$ постојат две повеќекратни негативни карактеристични вредности и нетривијалните фиксни точки се стабилен инфлектиран јазол;
7. $\xi > \sqrt{2}\omega_0$ постојат две негативни карактеристични вредности и нетривијалните фиксни точки се стабилен јазол;

а) б) в)



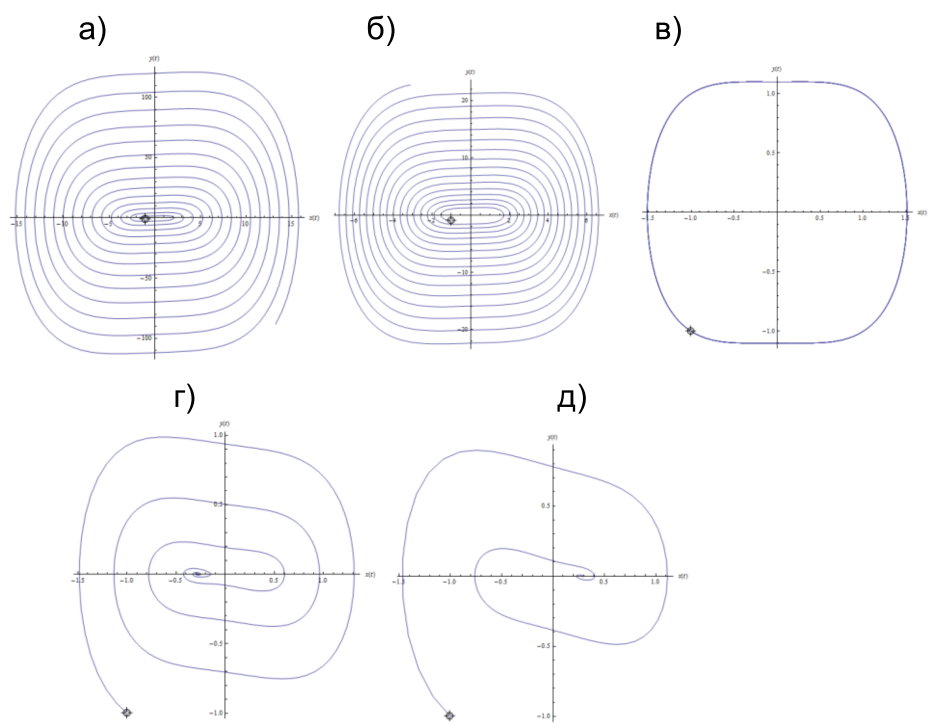


Слика 15. *Фазни портрети за* $\alpha < 0, \gamma > 0$:

а) $\xi < -\sqrt{2}\omega_0$; *б)* $\xi = -\sqrt{2}\omega_0$; *в)* $\xi = 0$; *г)* $0 < \xi < \sqrt{2}\omega_0$; *д)* $\xi > \sqrt{2}\omega_0$.

Figure 15. Phase portraits for $\alpha < 0, \gamma > 0$:

а) $\xi < -\sqrt{2}\omega_0$; *б)* $\xi = -\sqrt{2}\omega_0$; *в)* $\xi = 0$; *г)* $0 < \xi < \sqrt{2}\omega_0$; *д)* $\xi > \sqrt{2}\omega_0$.



Слика 16. *Фазни портрети за* $\alpha = -0.04, \gamma = 0.05$

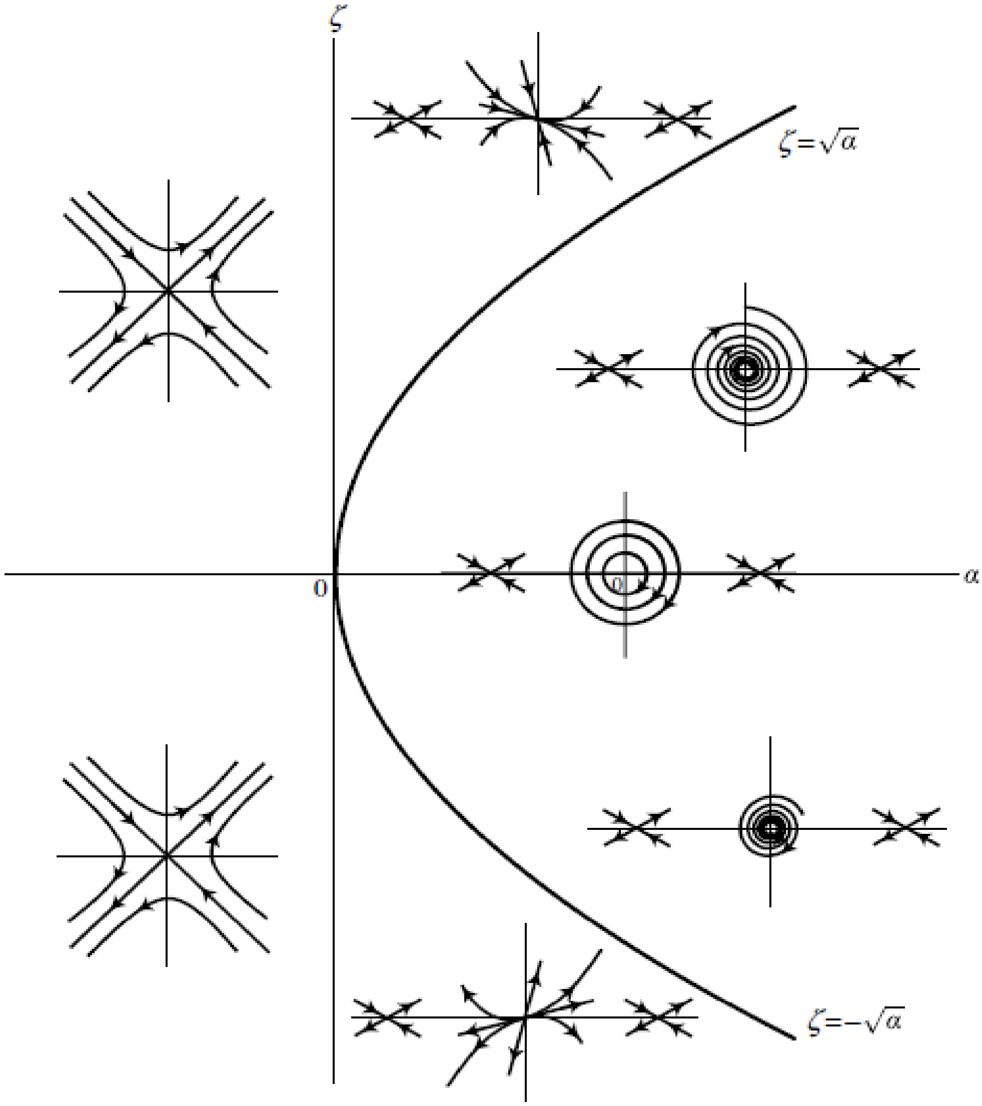
а) $\xi = -0.3$; *б)* $\xi = -0.1$; *в)* $\xi = 0$; *г)* $\xi = 0.1$; *д)* $\xi = 0.2$;

Figure 16. Phase portraits for $\alpha = -0.04, \gamma = 0.05$

а) $\xi = -0.3$; *б)* $\xi = -0.1$; *в)* $\xi = 0$; *г)* $\xi = 0.1$; *д)* $\xi = 0.2$;

4.2.2 Варијации на фазниот портрет зависно од линеарната крутост и линеарното придушување

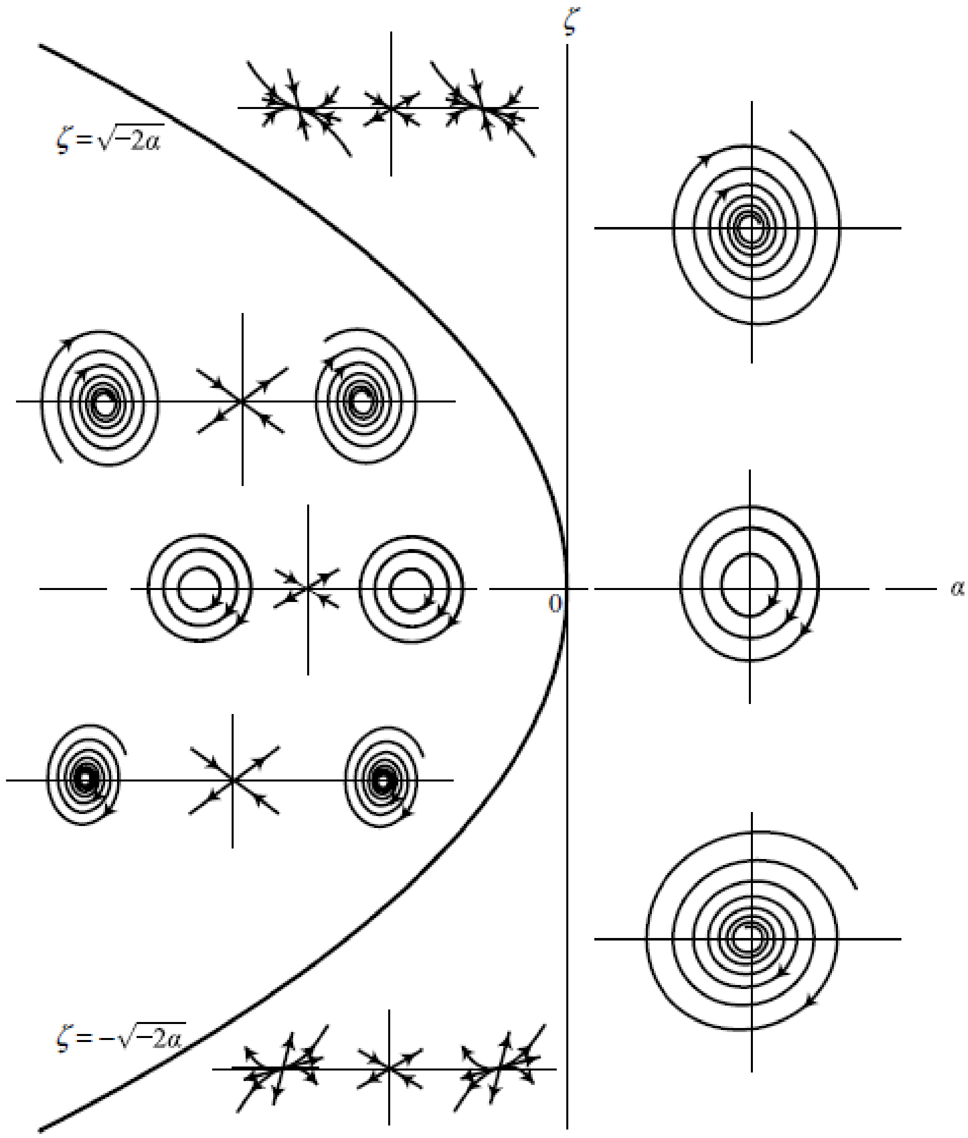
Со користење на резултатите добиени со претходната линеарна анализа може да добиеме општ преглед на фазниот портрет, зависно од линеарната крутост и линеарното придушување.



Слика 17. *Фазен портрет со локална анализа за* $\gamma < 0$

Figure 17. Phase portraits by local analysis for $\gamma < 0$

(Source: *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour,* First Edition. Edited by I. Kovacic and M. J. Brennan.© 2011 John Wiley & Sons, Ltd. Published 2011 by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-71549-9)



Слика 18. *Фазен портрет со локална анализа за* $\gamma > 0$

Figure 18. Phase portraits by local analysis for $\gamma > 0$

(Source: *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour,* First Edition. Edited by I. Kovacic and M. J. Brennan.© 2011 John Wiley & Sons, Ltd. Published 2011 by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-71549-9)

4.3 Присилени хармонични осцилации на Duffing осцилатор со линеарно придушување

Додавањето на нелинеарен член y^3 на едноставен хармоничен осцилатор ја менува сликата на Duffing осцилаторот. Принципот на линеарна суперпозиција повеќе не може да се користи за да се добие решението на линеарниот систем. Рамнотежната состојба зависи од почетните услови за разлика од линеарниот систем каде решението е независно од почетните услови. Максималното решение не се појавува блиску до природната фреквенција како кај линеарниот систем. Заради кубната нелинеарност системот може да е во резонанса дури и кога фреквенцијата на принудување не е блиску до природната фреквенција.

Бидејќи не постои решение во затворена форма за равенката (1), се користи пертурбациска анализа за да се одреди аналитичка апроксимација за присилената реакција претпоставувајќи дека системот има слаба нелинеарност и слабо придушување.

Целта е да се разбере влијанието на нелинеарноста и да се спореди однесувањето на принуден нелинеарен систем со она на принуден линеарен систем.

За да се олесни нелинеарната анализа се воведува параметар ε ($\varepsilon \to 0^+$) како асимптотски параметар и придушувањето и нелинеарниот член се запишани соодветно $\xi = \varepsilon\bar{\xi}, \gamma = \varepsilon\bar{\gamma}$ каде $\bar{\xi}, \bar{\gamma}$ се величини од ред $O(1)$. Равенката за неприсилен осцилатор сега е од облик

$$y'' + y + \varepsilon\left(2\bar{\xi}y' + \bar{\gamma}y^3\right) = 0 \qquad (21)$$

Со цел да се фокусираме на реакција на системот за време на резонантно принудување претпоставуваме слаба $F = \varepsilon\bar{F}$ сила.

$$y'' + y + \varepsilon\left(2\bar{\xi}y' + \bar{\gamma}y^3\right) = \varepsilon\bar{F}\cos\Omega t \quad (22)$$

За да се најдат можните различни резонанци претпоставуваме

$$y(t) = \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots \qquad (23)$$

Со замена на (23) во (22), собирање на членовите од ист ред и решавање на диференцијалниот систем кој одговара на редовите $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ се јавува мал делител во партикуларната реакција за $O(\varepsilon)$ кога $\Omega \approx 1$ и за $O(\varepsilon^2)$ кога $\Omega \approx 1/3$ или $\Omega \approx 3$. Според редот во кој се јавува малиот член се вели дека првата равенка е примарна, а вторите секундарна-нелинеарна резонанса.

4.3.1 Примарна резонанца

Ја разгледуваме состојбата на системот во тек на резонантно принудување $\Omega \approx 1$. Приближувањето на фреквенцијата на принудување на системот до природната фреквенција на системот го изразуваме како

$$\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \qquad (24)$$

каде σ е наречен параметар на подесување и е мерка за колку фреквенцијата на принудување е блиску до природната фреквенција на системот.

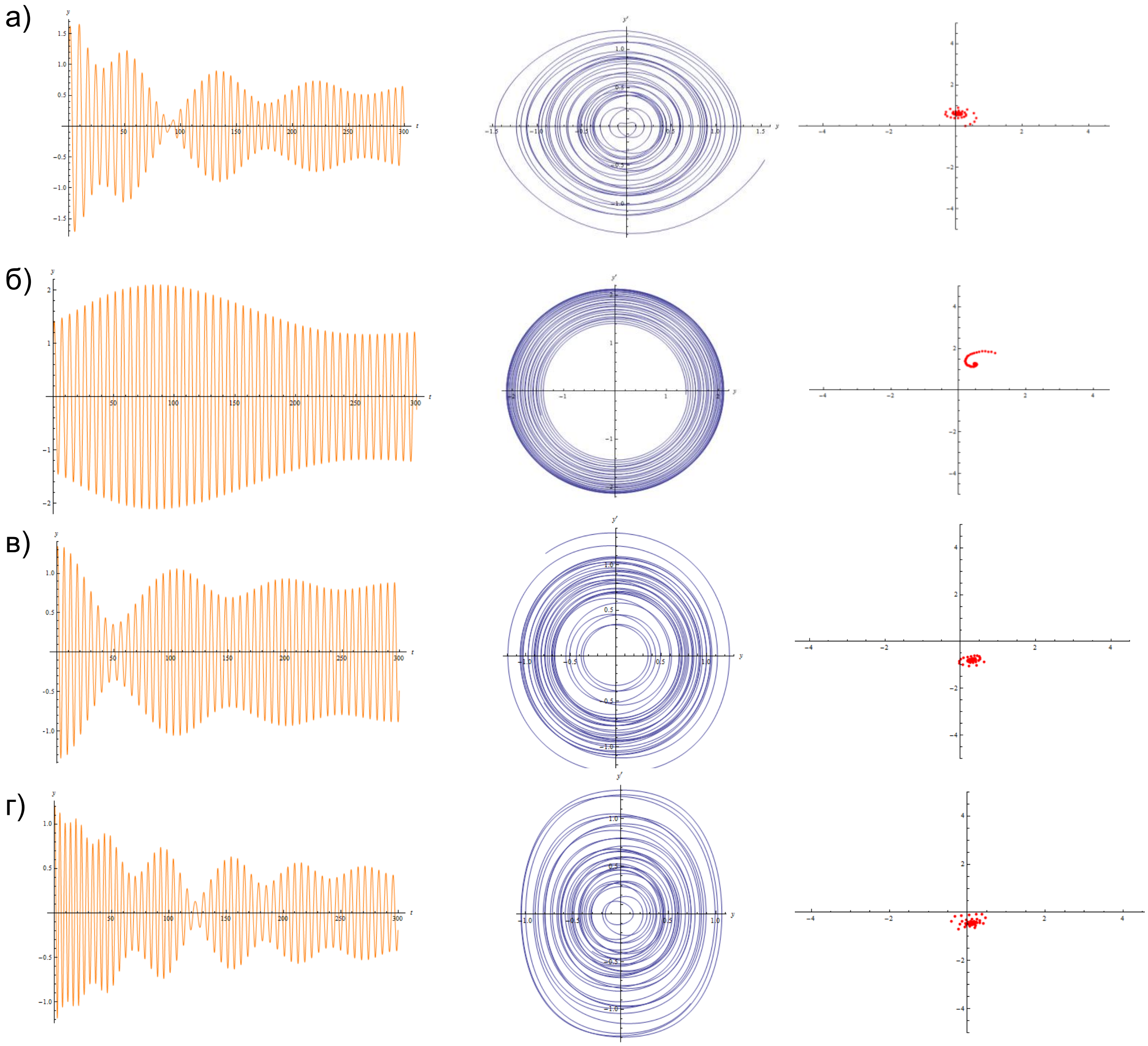
Под претпоставка за слабо придушување, слаба нелинеарност и слаба сила на принудување со фреквенција блиска до природната фреквенција на системот равенката (22) се запишува како

$$y'' + y + \varepsilon\left(2\bar{\xi}y' + \bar{\gamma}y^3\right) = \varepsilon\bar{F}\cos(1 + \varepsilon\sigma)t \qquad (25)$$

Рамнотежното решение на равенката (25), за мало ε сега како аналитичка апроксимација е во форма

$$y(t) = a(t)\cos(\Omega t + \phi(t)) + O(\varepsilon) \qquad (26)$$

каде амплитудата a и фаза ϕ се величини кои бавно се менуваат.



Слика 19. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен нелинеарен осцилатор со линеарно придушување со крутост* $k=1$ *и почетна состојба* $(y', y)=(1{,}1)$ *за* $\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \sigma=0.2, \varepsilon=0.2$ *за различни вредности на нелинеарност*

а) $\overline{\gamma}=-1$, *б)* $\overline{\gamma}=0$, *в)* $\overline{\gamma}=1$, *г)* $\overline{\gamma}=5$

Figure 19. *Time series, Phase diagram and Poincare section of force nonlinear oscillator with linear dumping, with stiffness* $k=1$, *initial state* $(y', y)=(1{,}1)$ *for*

$\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \sigma=0.2, \varepsilon=0.2$ and *different values of dumping*

а) $\overline{\gamma}=-1$, *б)* $\overline{\gamma}=0$, *в)* $\overline{\gamma}=1$, *г)* $\overline{\gamma}=5$

Аналитичката апроксимација (26) е пример на асимптотски ред, каде што коефициентите се исто така функции од асимптотски подреден параметар ε. Го користиме методот на повеќекратно скалирање. Нека

$$y(t,\varepsilon) = y_0(T_0,T_1) + \varepsilon y_1(T_0,T_1) + \ldots \qquad (27)$$

каде T_0 е брза временска скала а T_1 е бавна временска скала. Нека

$$T_0 = t, T_1 = \varepsilon t \qquad (28а,б)$$

Со воведување на временските скали, нивниот извод во однос на време го трансформираме како

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + D_1 \qquad (29)$$

По замена на (27) и (25) и со равенките (28а,б) и (29) се добива следниот систем од равенки за $O(1)$ и $O(\varepsilon)$

$$D_0^2 y_0 + y_0 = 0 \qquad (30\ а,б)$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0D_1y_0 - 2\xi D_0 y_0 - \bar{\gamma} y_0^3 + \bar{F}\cos(T_0 + \sigma T_1)$$

Решението за првата компонента на редот (27) може да се запише како

$$y_0(T_0,T_1) = A(T_1)e^{jT_0} + A^*(T_1)e^{-jT_0} \qquad (31)$$

каде $j = \sqrt{-1}$, $A(T_1)$е амплитудна функција со комплексна вредност и A^* означува комплексно конјугирана вредност. Со замена на (31) во (30б) добиваме

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2j\left(A' + \bar{\xi}A\right)e^{jT_0} - 3\bar{\gamma}A^2A^*e^{jT_0} - \bar{\gamma}A^3e^{j3T_0} + \frac{\bar{F}}{2}e^{jT_0}e^{j\sigma T_1} + c.c \qquad (32)$$

каде ‘ значи извод во однос на бавната временска скала T_1 а $c.c$ е знак за комплексно коњугирање на претходниот член.

Изедначувајќи ги членовите со секуларни елементи на нула добиваме

$$-2j\left(A' + \bar{\xi}A\right) - 3\bar{\gamma}A^2A^* + \frac{\bar{F}}{2}e^{j\sigma T_1} = 0 \qquad (33)$$

Воведуваме поларна форма на комплексната амплитуда

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{j\beta T_1} \qquad (34)$$

во равенката (33) каде амплитудата $a(T_1)$ и аголот βT_1 се големини со реална вредност. По делење на реалниот и имагинарниот дел и воведување на фаза $\phi(T_1) = -(\sigma T_1 - \beta)$ добиваме

$$a' = -\bar{\xi} a - \frac{\bar{F}}{2} \sin\phi \qquad \text{(35а,б)}$$

$$a\phi' = -\left(\sigma a - \frac{3}{8} \bar{\gamma} a^3 = \frac{\bar{F}}{2} \cos\phi \right)$$

Овие равенки кои ја опишуваат бавната промена на амплитудата и фазата се наречени модулациски или средни равенки. Фиксните точки на равенките (35 а,б) одговараат на решенија со константна амплитуда и фаза.

$$\bar{\xi} a + \frac{\bar{F}}{2} \sin\phi = 0 \qquad \text{(36 а,б)}$$

$$\sigma a - \frac{3}{8} \bar{\gamma} a^3 + \frac{\bar{F}}{2} \cos\phi = 0$$

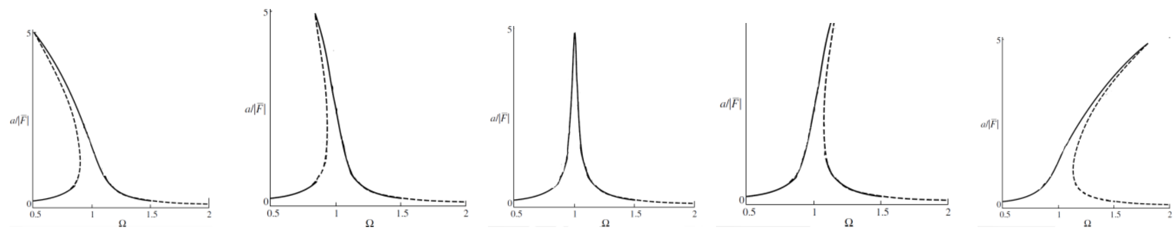
Со квадрирање и собирање на овие равенки добиваме

$$\bar{F}^2 = 4a^2 \left(\bar{\xi}^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8} \bar{\gamma} a^3 \right)^2 \right) \qquad (37)$$

Од овде амплитудниот одговор т.е. фактор на зголемување се добива како

$$M(\Omega) = \frac{a}{|F|} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\xi}^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8} \bar{\gamma} a^2 \right)^2}} \qquad (38)$$

а) б) в) г) д)



Слика 20. *Крива на амплитудна реакција за* $\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \varepsilon=0.2$ *за различни вредности на нелинеарност а)* $\overline{\gamma}=-3$*, б)* $\overline{\gamma}=-1$*, в)* $\overline{\gamma}=0$*, г)* $\overline{\gamma}=1$*, д)* $\overline{\gamma}=5$

Figure 20. Amplitude-response curves for $\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \varepsilon=0.2$ *and values for nonlinearity а)* $\overline{\gamma}=-3$*, б)* $\overline{\gamma}=-1$*, в)* $\overline{\gamma}=0$*, г)* $\overline{\gamma}=1$*, д)* $\overline{\gamma}=5$

Според кривата на амплитудна реакција во случај на нелинеарност амплитудната реакција е повеќе вредносна. За негативни вредности на $\overline{\gamma}$ кривата на амплитудна реакција се наклонува кон помалите фреквенции. За поголеми вредности на нелинеарноста, пак, поголема е разликата на максималната вредност на факторот на зголемување од оној за $\Omega = 1$ и се наклонува кон поголемите фреквенции.

Според репрезентативна крива на амплитудна реакција, периодичната реакција на принуден Duffing осцилатор губи стабилност за одредени вредности на Ω (интервал на бистабилност во кој имаме две или три решенија за Ω).

Ако контролираниот параметар-фреквенцијата на принудување постепено се зголемува $\Omega < \Omega_1$ амплитудниот одговор ќе ја има горната гранка, односно поголемата вредност. Штом ќе ја достигне вредноста Ω_2 се јавува скок од гранката со големи амплитуди кон гранката со мала амплитуда. Сличен феномен се јавува кога Ω постепено се намалува од Ω_2 кон Ω_1. Значи, во зависност од тоа како се стигнува до одредена фреквенција во ранг на $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$, решението е различно и зависи од почетните услови.

За да се одреди интервалот на бистабилност, поаѓаме од фактот што тие точки одговараат на вертикални тангенти на кривата на реакција ($\frac{dM}{d\Omega} = \infty$), односно се

$$\Omega_{1/2} = \frac{1}{8}\left(8 + 6\bar{\gamma}\varepsilon a^2 \pm \varepsilon\sqrt{9a^4\bar{\gamma}^2 - 64\bar{\xi}^2}\right) \qquad (39)$$

Условот за постоење на реално решение е $a \geq \sqrt{\frac{8\bar{\xi}}{3\bar{\gamma}}}$

Бистабилноста е карактеризирана со граничниот случај $a = \sqrt{\frac{8\bar{\xi}}{3\bar{\gamma}}}$

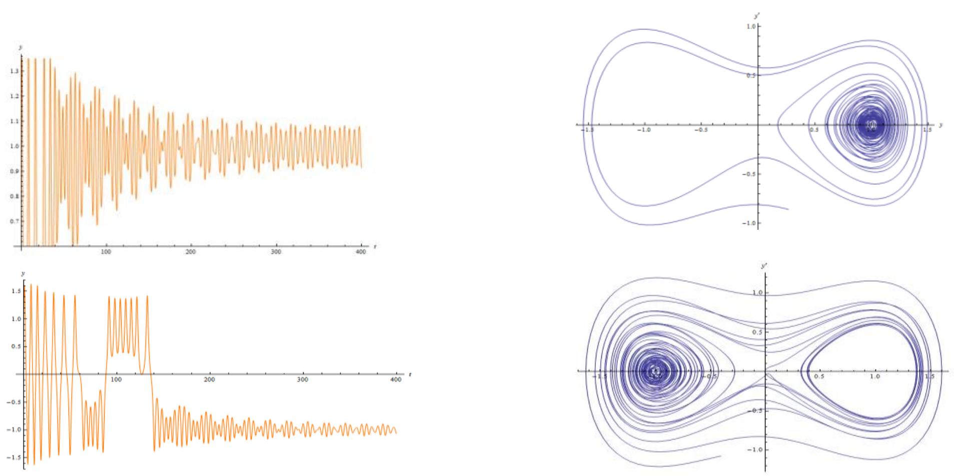
што одговара на $\Omega_1 = \Omega_2 = 1 + 2\varepsilon\bar{\xi}$ и критична амплитуда на присилување

$$\bar{F} = 8\sqrt{\frac{\bar{\xi}\left(\bar{\xi}^2 + 2\bar{\xi}\bar{\gamma} + 2\bar{\gamma}^2\right)}{3\bar{\gamma}}} \qquad (40)$$

За $\bar{F} = 0.3, \bar{\xi} = 0.1, \varepsilon = 0.2, \bar{\gamma} = 1$ интервалот на бистабилност е $(1.0549; 1.14743)$. Однесувањето на системот во овој интервал за различни почетни вредности е прикажано на слика 21 и слика 22.

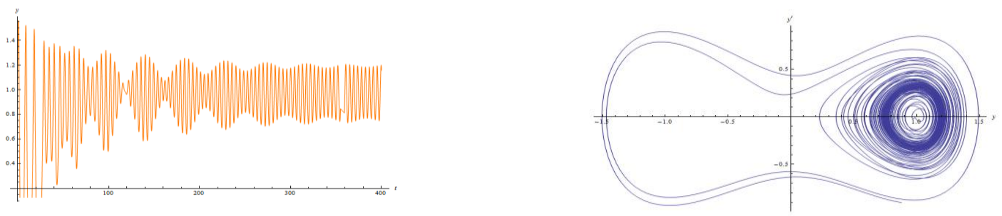
а)

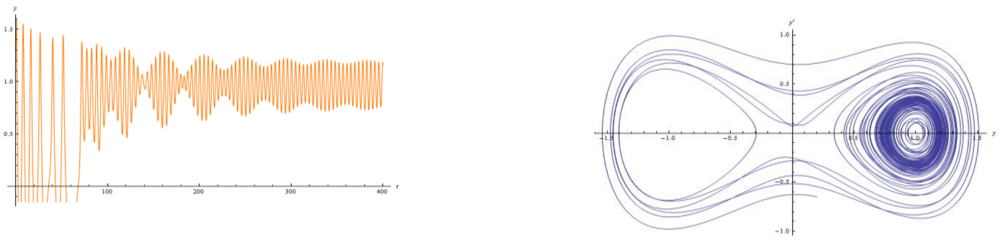
б)



Слика 21. *Временски ред и фазен дијаграм на Duffing осцилатор за* $\bar{F} = 0.3, \bar{\xi} = 0.1, \varepsilon = 0.2, \bar{\gamma} = 1, \Omega = 1.092$ *и од интервалот на бистабилност за различни вредности на почетна состојба*
а) $(y', y) = (1,1)$ *б)* $(y', y) = (1,1.1)$

Figure 21. *Time series and phase diagram for Duffing oscillator for* $\bar{F} = 0.3, \bar{\xi} = 0.1, \varepsilon = 0.2, \bar{\gamma} = 1, \Omega = 1.092$ *from interval of bistability for initial state*
a) $(y', y) = (1,1)$ *б)* $(y', y) = (1,1.1)$

а)


б)


Слика 22. *Временски ред и фазен дијаграм на Duffing осцилатор за* $\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \varepsilon=0.2, \overline{\gamma}=1, \Omega=1.454$ *надвор од интервалот на бистабилност за различни вредности на почетна состојба*
а) $(y', y)=(1,1)$ *б)* $(y', y)=(1,1.1)$

Figure 22. *Time series and phase diagram for Duffing oscillator for* $\overline{F}=0.3, \overline{\xi}=0.1, \varepsilon=0.2, \overline{\gamma}=1, \Omega=1.454$ *out of interval of bistability for initial state*
а) $(y', y)=(1,1)$ *б)* $(y', y)=(1,1.1)$

Слично како кај линеарен осцилатор добиваме за максимална амплитуда и за максимум факторот на зголемување

$$a_p = \frac{\overline{F}}{2\overline{\xi}}, M_p = \frac{a_p}{\left|\overline{F}\right|} = \frac{1}{2\overline{\xi}} \qquad (42)$$

кои се независни од нелинеарноста $\overline{\gamma}$ (само кај слабо нелинеарни системи).

Но, локацијата на максималната амплитуда може да се одреди со

$$\sigma_p = \frac{3}{8}\overline{\gamma}\left(\frac{\overline{F}}{2\overline{\xi}}\right)^2 \qquad (43)$$

во зависност од од големината на нелинеарноста.

4.3.2 Секундарни резонанци

Заради кубната нелинеарност на системот постојат резонанци и за други фреквенции. Тие т.н. секундарни резонанци се јавуваат за $\Omega \approx \frac{1}{3}$ или $\Omega \approx 3$ што е случај на резонантна релација $\Omega \approx \frac{1-m}{n}$ каде m,n се цели броеви такви што $|m|+|n|=3$.

Пак користиме анализа со слаба нелинеарност за да ја одредиме реакцијата на системот. Го користиме системот

$$y'' + \varepsilon 2\bar{\xi} y + y' + \varepsilon \bar{\gamma} y^3 = F\cos\Omega t \quad (44)$$

со слаба нелинеарност и слабо придушување, но принудувањето не е слабо. На сличен начин за $O(1)$ и $O(\varepsilon)$ добиваме

$$D_0^2 y_0 + y_0 = F\cos\Omega T_0 \qquad (45а,б)$$

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -2D_0 D_1 y_0 - 2\bar{\xi} D_0 y_0 - \bar{\gamma} y_0^3$$

Решението на равенката (45 а) може да се запише како

$$y_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{jT_0} + A^*(T_1)e^{-jT_0} + \Lambda\left(e^{jT_0} + e^{-jT_0}\right) \quad (46)$$

каде $\Lambda = \frac{1}{2}\frac{F}{1-\Omega^2}$ (38)

Со замена во втората равенка резултатот е

$$D_0^2 y_1 + y_1 = -\left(2j\left(A' + \bar{\xi}A\right) + 3\bar{\gamma}A^2A^* + 6\bar{\gamma}A\Omega^2\right)e^{jT_0} - \bar{\gamma}\left(A^3 e^{j3T_0} + \Lambda^3 e^{j3\Omega T_0}\right) - 3\bar{\gamma}\left(A^2 e^{j(\Omega+2)T_0} A^* e^{j(\Omega-2)T_0}\right)$$
$$-3\bar{\gamma}A\Lambda^2\left(e^{j(2\Omega+1)T_0} e^{j(1-2\Omega)T_0}\right) - \Lambda\left(2j\Omega + 3\bar{\gamma}\Lambda^2 + 6\bar{\gamma}AA^*\right)e^{j\Omega T_0} + c.c \qquad (47)$$

Разгледувајќи ја десната страна на оваа равенка, членовите со $e^{\pm jT_0}$ даваат секуларни членови. Секуларни членови се јавуваат за $\Omega \approx \frac{1}{3}$ или $\Omega \approx 3$

Кога фреквенцијата на принудување е далеку од овие фреквенции, принудувањето е нерезонантно. Ги разгледуваме следниве три случаи:

4.3.2.1 Нерезонантно принудување: Ω е далеку од $1/3$ и 3

Во овој случај од равенката (47) со нулирање на секуларните членови добиваме

$$2j\left(A' + \bar{\xi}A\right) + 3\bar{\gamma}A^2A^* + 6\bar{\gamma}A\Lambda^2 = 0 \quad (47\text{ а})$$

Или по воведување на поларна форма и изедначување на реалниот и имагинарниот дел

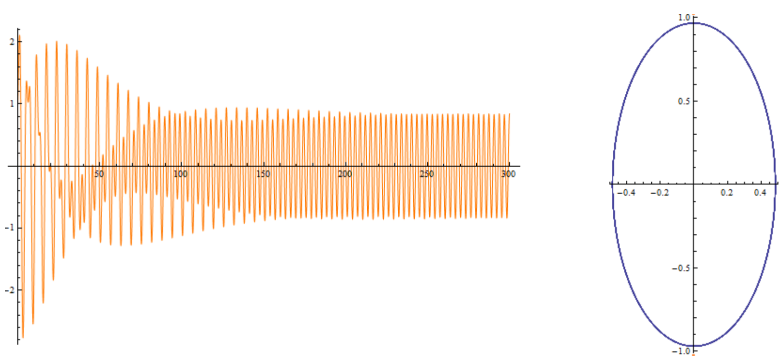
$$a' = -\bar{\xi}a \qquad (48\text{а,б})$$

$$a\beta' = 3\bar{\gamma}\left(\frac{1}{8}\sigma a^3 + \Lambda^2 a\right)$$

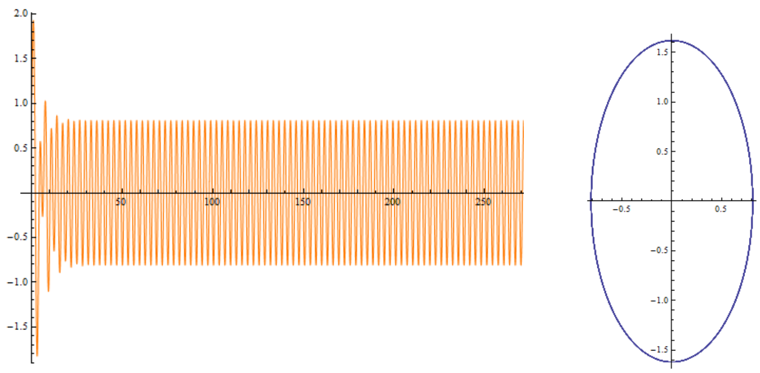
Реакцијата на осцилаторот принуден од јака нерезонантна сила може да се запише како

$$y(t) = a(t)\cos\left(t + \beta(t)\right) + \frac{F}{1-\Omega^2}\cos\Omega t + \mathrm{O}(\varepsilon) \quad (49)$$

каде $a(t)$ и $\beta(t)$ се дадени со равенките (48 а,б). За позитивно придушување, компонентата од слободната осцилација се губи со текот на времето и долготрајна реакција е осцилација со фреквенција на присилување како кај линеарен систем.



а)

б) 

Слика 23. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен нелинеарен осцилатор со линеарно придушување со крутост* $k=1$ *и почетна состојба* $(y', y)=(1{,}1)$ *за* $\bar{\xi}=0.1, \Omega=2, \bar{\gamma}=2, \varepsilon=0.2$ *за различни вредности на нелинеарност*
а) $F=1.5$, *б)* $F=2.5$

Figure 23. *Time series, Phase diagram and Poincare section of force nonlinear oscillator with linear dumping, with stiffness* $k=1$, *initial state* $(y', y)=(1{,}1)$ *for* $\bar{\xi}=0.1, \Omega=2, \bar{\gamma}=2, \varepsilon=0.2$ and *different values of dumping*
а) $F=1.5$, *б)* $F=2.5$

4.3.2.2 Резонантно принудување: $\Omega \approx 1/3$

Во овој случај воведуваме параметар за подесување за да ја изразиме фреквенцијата на принудување како третина од природната фреквенција како

$$3\Omega = 1 + \varepsilon\sigma \qquad \text{(50а,б)}$$

и $$3\Omega T_0 = (1+\varepsilon\sigma)T_0 = T_0 + \sigma T_1$$

со процедура иста како претходните, конечно со изедначување на секуларните членови на 0 добиваме

$$2j\left(A' + \bar{\xi}A\right) + 3\bar{\gamma}A^2 - \Omega^2 + 6\bar{\gamma}A\Lambda^2 + \bar{\gamma}\Lambda^3 e^{j\sigma T_1} = 0 \qquad (51)$$

Повторно, со користење на поларна форма на комплексната амплитуда во последната равенка и воведување на фазна разлика $\phi(\mathrm{T}_1) = -(\sigma \mathrm{T}_1 - \beta)$ ги добиваме следниве модулациски равенки

$$a' = -\bar{\xi}a + \bar{\gamma}\Lambda^3 \sin\phi \qquad \text{(52а,б)}$$

$$a\phi' = -\left(\sigma a - 3\bar{\gamma}\Lambda^2 a - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 - \bar{\gamma}\Lambda^3 \cos\phi\right)$$

Тогаш, реакцијата на осцилаторот со суперхармонично резонантно принудување може да се изрази како

$$y(t) = a(t)\cos(3\Omega t + \phi(t)) + \frac{F}{1-\Omega^2}\cos\Omega t + \mathrm{O}(\varepsilon) \quad \text{(53)}$$

каде $a(t)$ и $\phi(t)$ се дадени со равенките (52а,б). Заради присуството на 3Ω компонентата велиме дека системот се наоѓа во суперхармонична резонанца.

Ги одредуваме фиксните точки кои се решенија на равенките

$$\bar{\xi}a = \bar{\gamma}\Lambda^3 \sin\phi \qquad \text{(54а,б)}$$

$$\sigma a - 3\bar{\gamma}\Lambda^2 a - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 = \bar{\gamma}\Lambda^3 \cos\phi$$

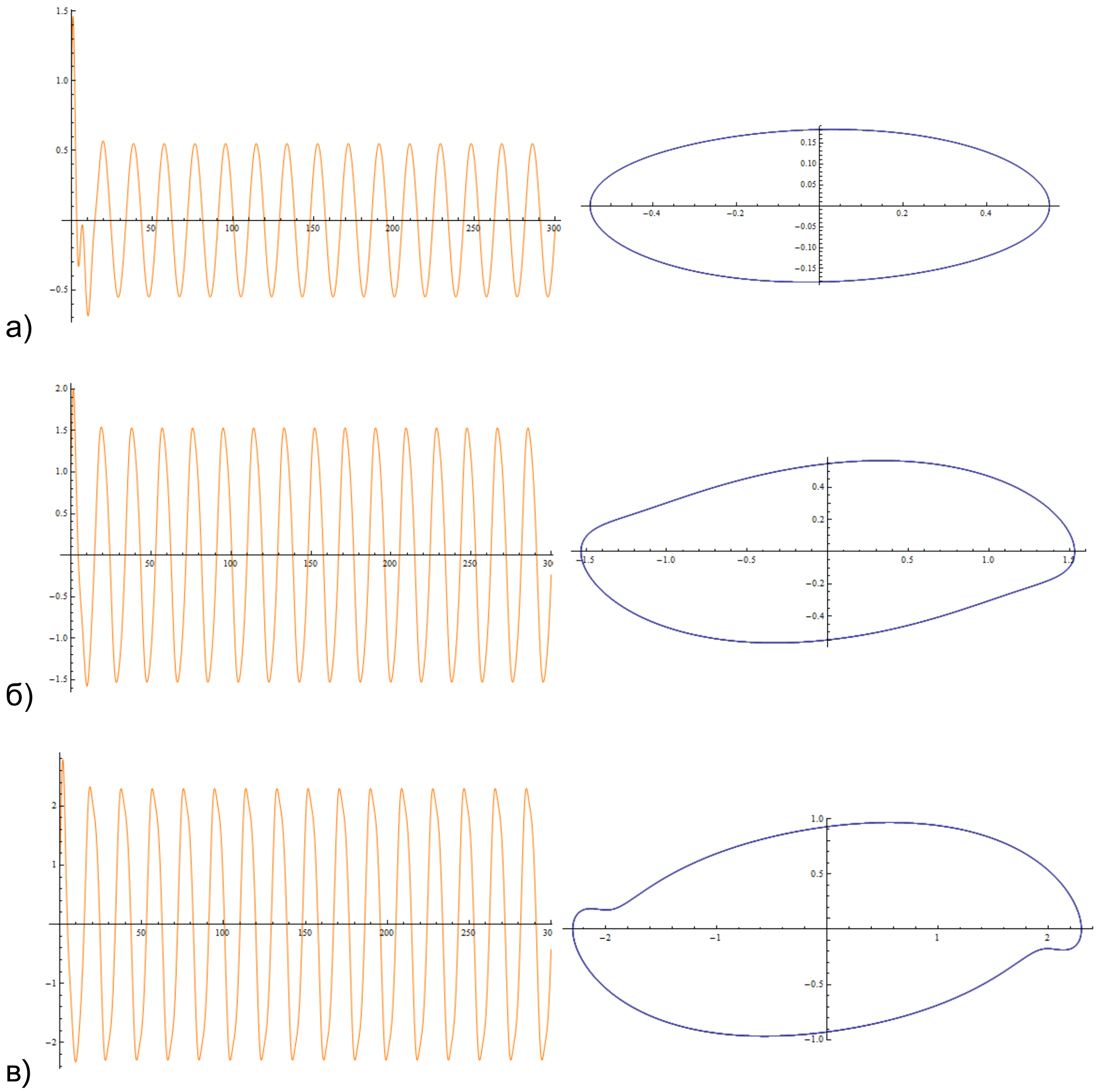
Од овие равенки за параметарот на подесување добиваме

$$\sigma = 3\bar{\gamma}\Lambda^2 + \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 \pm \frac{\bar{\gamma}^2\Lambda^3}{a^2} \quad \text{(55)}$$

Максималната амплитуда и соодветната фреквентна локација се одредени со

$$a_p = \frac{\bar{\gamma}\Lambda^3}{\bar{\xi}} \quad \text{(56)}$$

$$\sigma_p = \bar{\gamma}\Lambda^2 + \frac{3}{8}\bar{\gamma}\left(\frac{\bar{\gamma}\Lambda^3}{\bar{\xi}}\right)^2 \qquad \text{(57)}$$



Слика 24. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен нелинеарен осцилатор со линеарно придушување со крутост* $k = 1$ *и почетна состојба* $(y', y) = (1,1)$ *за* $\bar{\xi} = 0.1, \Omega = 0.33, \bar{\gamma} = 2, \varepsilon = 0.2$ *за различни вредности на нелинеарност*

а) $F = 0.5$ *б)* $F = 1.5$, *в)* $F = 2.5$

Figure 24. *Time series, Phase diagram and Poincare section of force nonlinear oscillator with linear dumping, with stiffness* $k = 1$, *initial state* $(y', y) = (1,1)$ *for*

$\bar{\xi} = 0.1, \Omega = 0.33, \bar{\gamma} = 2, \varepsilon = 0.2$ and *different values of dumping*

а) $F = 0.5$ *б)* $F = 1.5$, *в)* $F = 2.5$

4.3.2.3 Резонантно принудување: Субхармонична резонанца $\Omega \approx 3$

Во овој случај воведуваме параметар за подесување за да ја изразиме фреквенцијата на принудување како третина од природната фреквенција како

$$\Omega = 3 + \varepsilon\sigma \qquad (58а,б)$$

$$\text{и } \Omega T_0 = (3+\varepsilon\sigma)T_0 = 3T_0 + \sigma T_1$$

со процедура иста како претходните, конечно со изедначување на секуларните членови на 0 добиваме

$$2j\left(A' + \bar{\xi}A\right) + 3\bar{\gamma}A^2A^* + 6\bar{\gamma}A\Lambda^2 + 3\bar{\gamma}\Lambda A^{*3}e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (59)$$

Повторно, со користење на поларна форма на комплексната амплитуда во последната равенка и воведување на фазна разлика $\phi(T_1) = -(\sigma T_1 - \beta)$ ги добиваме следниве модулациски равенки

$$a' = -\bar{\xi}a + \frac{3}{4}\bar{\gamma}\Lambda\sin\phi \qquad (60а,б)$$

$$a\phi' = -\left(\sigma a - 9\bar{\gamma}\Lambda^2 a - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^3 - \frac{9}{4}\bar{\gamma}\Lambda a^2\cos\phi\right)$$

Тогаш, реакцијата на осцилаторот со суперхармонично резонантно принудување може да се изрази како

$$y(t) = a(t)\cos\frac{1}{3}\left(\Omega t + \phi(t)\right) + \frac{F}{1-\Omega^2}\cos\Omega t + \mathrm{O}(\varepsilon) \quad (61)$$

каде $a(t)$ и $\phi(t)$ се дадени со равенките (60 а, б). Заради присуството на $\frac{1}{3}\Omega$ компонентата велиме дека системот се наоѓа во субхармонична резонанца.

Ги одредуваме фиксните точки кои се решенија на равенките

$$\bar{\xi}a = \frac{3}{4}\bar{\gamma}\Lambda\sin\phi \qquad (62а,б)$$

$$\sigma a - 9\bar{\gamma}\Lambda^2 a - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^3 = \frac{9}{4}\bar{\gamma}\Lambda a^2\cos\phi$$

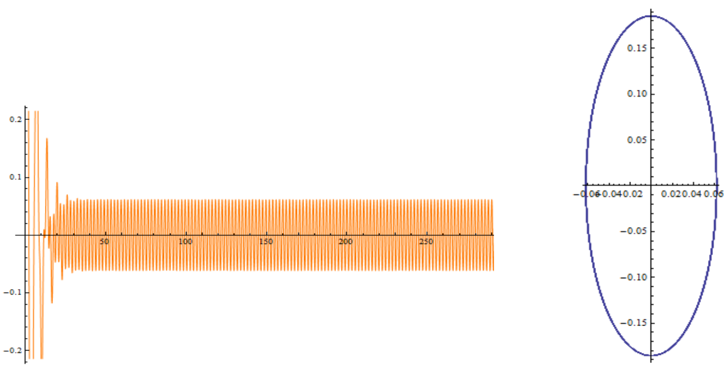
Од овие равенки за параметарот на подесување добиваме

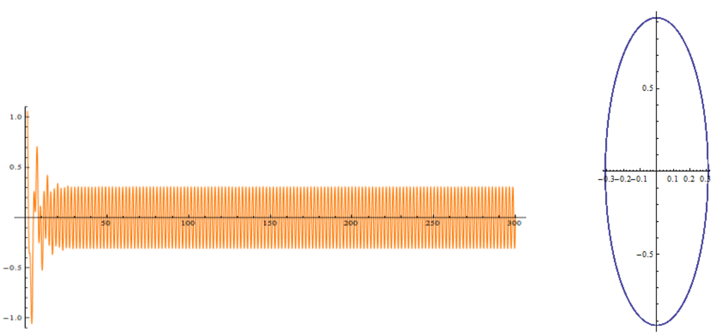
$$\sigma = 3\bar{\gamma}\Lambda^2 + \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2 \pm \frac{\bar{\gamma}^2\Lambda^6}{a^2} \quad (63)$$

Максималната амплитуда и соодветна фреквентна локација се одредени со

$$a_p = \frac{\bar{\gamma}\Lambda^3}{\bar{\xi}} \quad (64)$$

$$\sigma_p = \bar{\gamma}\Lambda^2 + \frac{3}{8}\bar{\gamma}\left(\frac{\bar{\gamma}\Lambda^3}{\bar{\xi}}\right)^2 \quad (65)$$

а) 

б) 

Слика 25. *Временски ред, фазен дијаграм и Поинкаре секција на присилен нелинеарен осцилатор со линеарно придушување со крутост* $k=1$ *и почетна состојба* $(y', y) = (1,1)$ *за* $\bar{\xi} = 0.1, \Omega = 3, \bar{\gamma} = 2, \varepsilon = 0.2$ *за различни вредности на нелинеарност*

а) $F = 0.5$ *б)* $F = 2.5$

Figure 25. *Time series, Phase diagram and Poincare section of force nonlinear oscillator with linear dumping, with stiffness* $k=1$*, initial state* $(y', y) = (1,1)$ *for* $\bar{\xi} = 0.1, \Omega = 3, \bar{\gamma} = 2, \varepsilon = 0.2$ and *different values of dumping*

а) $F = 0.5$ *б)* $F = 2.5$

4.4 Основни принципи за користење на Duffing осцилатор за детекција на слаб сигнал

Детекција на слаби сигнали е техничка дисциплина која ги истражува принципите и методите за детекција на слаби сигнали во шум. Главно ги користи достигањата во модерната електроника, теоријата на информации и физичките методи за да ја анализира причината и правилата за настанување на шум, да ја проучи разликата во детектирање на сигнал и шум и слично, со цел успешно детектирање на слаб сигнал во со шум позадина.

Главно при детекција на слаб сигнал, сигналот што треба да се детектира е периодичен. Најчесто користени методи за детекција на слаб сигнал се следниве:

- Метод на детекција на сигнал со соодветен период;
- Интегрален метод со избирање на точки од периодичниот сигнал и
- Метод за детекција на фреквенција.

Со континуираниот развој на интегралните кола и компјутерската технологија се истражуваат нови методи за детекција на слаби сигнали базирани на пример, на трансформација на бран, вештачка невронска мрежа и сл.

Претходно споменатите традиционални методи често не можат да го добијат сигналот кога во позадина има голем шум или сигналот е многу слаб и не можат да ги надминат ограничувањата на опремата.

Во новите проучувања, иако новите методи имаат очигледен ефект и висока адаптибилност, сепак имаат комплексна структура и тешко се исполнуваат и промовираат.

Технологијата за детекција на слаби сигнали доживеа преродба со воведување на теоријата на хаос во нејзин домен. Методот за детектирање на сигнали преку хаос е различен од мноштвото постоечки методи, високо е осетлив и има низок детекциски праг, висока инертност на шум и е врв во полето на детекција на слаб сигнал.

Детекцијата на сигнали базирана на хаос почнува да се развива од 1990 година.

Генерално, нелинеарните системи имаат четири состојби: фиксна точка, периодично движење со мал период, хаотично движење и квази-периодично движење (периодично движење со долг период). Кога системот е во критична состојба, мала петурбација на параметар од системот може да доведе до квалитативни промени на состојбата на системот.

Хаосот има потенцијална примена во детекција на слаб сигнал заради неговите својства на осетливост на сигнал и инертност на шум во исто време.

Основна идеја на шемата за детекција на сигнал базирана на хаотичен осцилатор е мал периодичен сигнал да може да биде детектиран со Duffing осцилатор преку транзиција од хаотично во периодично движење како класичен нелинеарен систем.

Постојат неколку методи за идентификување на хаотичниот карактер. Општа теоретска индикација на состојбата на еден систем се Љапунов коефициентите, но не се практично применливи бидејќи нивната пресметка бара многу долга сигнална низа, а уште повеќе и се осетливи на влијание на шум. Заради овој недостаток се бараат нови критериуми. Некои од нив се: набљудување на фазна рамнина, Фуриевиот спектар и самокорелација, Поинкаре мапи и сл. Некои од нив бараат комплексни пресметки, или не се погодни за автоматска детекција со компјутер, или не може да се користат кога во системот е вклучен шум.

4.4.1 Duffing осцилатор како систем за детекција на слаб сигнал

Системот со помош на кој ќе детектираме е конструиран како Duffing осцилатор. Нормалнта форма на Duffing равенката е

$$y'' + \xi y' - y + y^3 = F\cos\Omega t \qquad (66)$$

каде ξ е коефициент на придушување, $F\cos\Omega t$ е периодична сила на принудување, $-y + y^3$ е нелинеарна сила на враќање.

Ако ξ е фиксно, тогаш, како што F расте, состојбата на системот се менува од кратко периодично движење, до хаотично движење и на крајот до долго периодично движење.

Ако фиксираме $F = F_c$ (F_c е критична вредност) така што системот се наоѓа во критична состојба (хаос но, на работ кон премин во периодично движење или периодично движење, но на премин кон хаос). Сигналот којшто треба да се детектира го разгледуваме како пертурбација на главната синусоидна водечка сила $F\cos\Omega t$.

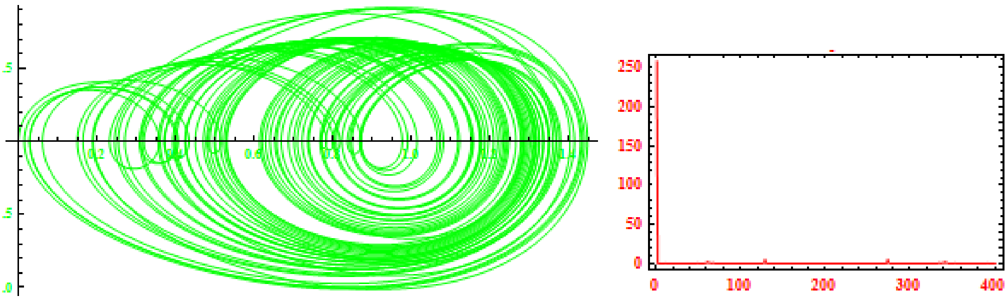
Состојбата на Duffing осцилаторот ја опишуваме со набљудување на фазниот дијаграм (што не е многу погодно за автоматско препознавање). Затоа ни е потребен и алтернативен квалитативен критериум за утврдување на состојбата на осцилаторот базирана на спектарот на фреквенции. Анализирајќи го спектарот на фреквенции на излезот на Duffing системот, откриваме дека периодичното движење вклучува само основен бран кој е хармоничен, додека кај хаотичното движење во спектарот се содржат различни компоненти, посебно компоненти со фреквенции пониски од основните. Значи, информација за состојбата на системот може да се добие од спектарот на фреквенции на излезот.

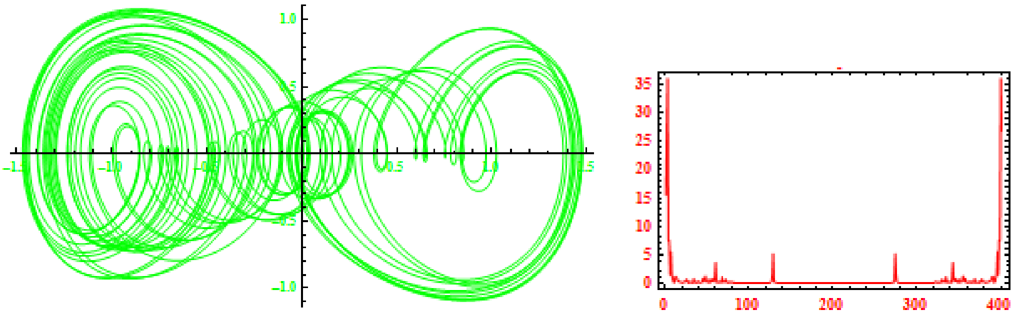
Во следниот дел се прикажани резултати од компјутерските симулации во програмата Matematica со Duffing равенката

$$y'' + 0.5y' - y + y^3 = 0.9\cos 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0 \qquad (67)$$

и можноста за детектирање на сигнал базиран на карактеристики на фазниот дијаграм и спектарот на моќ.

Амплитудата на силата на принудување е избрана како критична вредност $F_c = 0.9$ за која осцилаторот е во рамнотежна состојба на периодично движење на премин кон хаотично движење (слика 23).

а) 

б) 

Слика 26. *Фазен дијаграм и Спектар на моќ на Duffing осцилатор со фреквенција на сила на принудување* $\Omega = 2$, *линеарна крутост -1, нелинеарна крутост 1 и придушување* $\xi = 0.5$

а) со амплитуда на принудување $F = 0.9$

б) со амплитуда на принудување $F = 0.94$

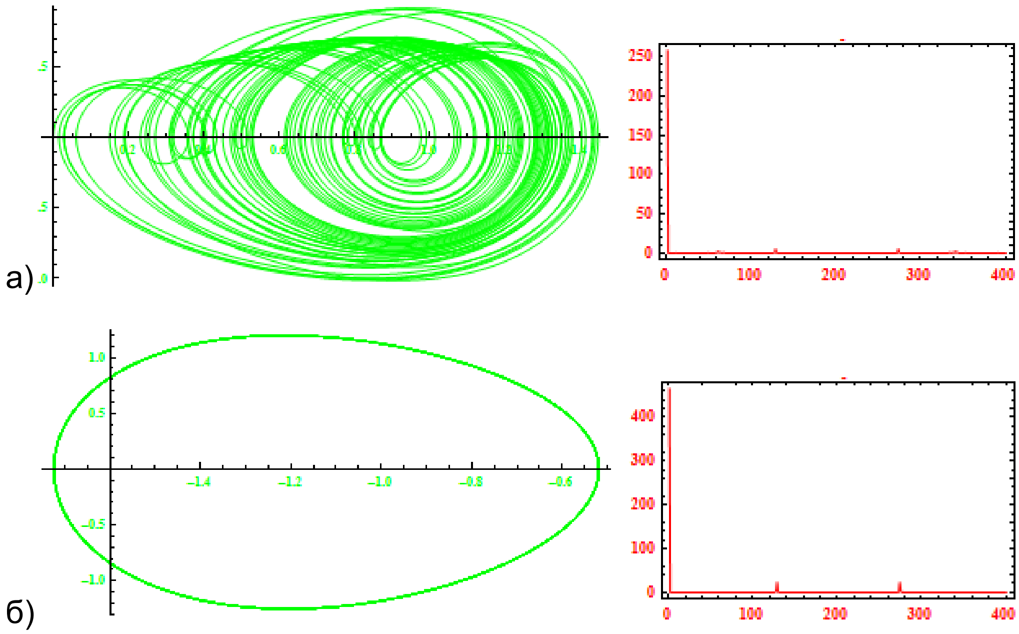
Figure 26. *Phase diagram and Power spectra of Duffing oscillator with forcing frequency* $\Omega = 2$, *linear stiffness -1, nonlinear stiffnes 1 and dumping* $\xi = 0.5$

a) with forcing amplitude $F = 0.9$

b) with forcing amplitude $F = 0.94$

4.4.1.1 Влијание на шум

Ако надворешниот сигнал е Gauss шум (статистички шум кој има функција на густина еднаква на густината на нормалната дистрибуција), односно $Input(t) = \varepsilon(t) = N(0,1)$, шумот не влијае на стабилноста на осцилаторот, односно останува во состојба на рамнотежно движење под влијание на шум (слика 24).



Слика 27. Фазен дијаграм и Спектар на моќ на Duffing осцилатор со амплитуда на принудување $F = 0.9$, фреквенција на сила на принудување $\Omega = 2$, линеарна крутост -1, нелинеарна крутост 1 и придушување $\xi = 0.5$

а) без Гаус шум

б) со Гаус шум

Figure 27. Phase diagram and Power spectra of Duffing oscillator with forcing amplitude $F = 0.9$, forcing frequency $\Omega = 2$, linear stiffness -1, nonlinear stiffnes 1 and dumping $\xi = 0.5$

a) without Gauss noise

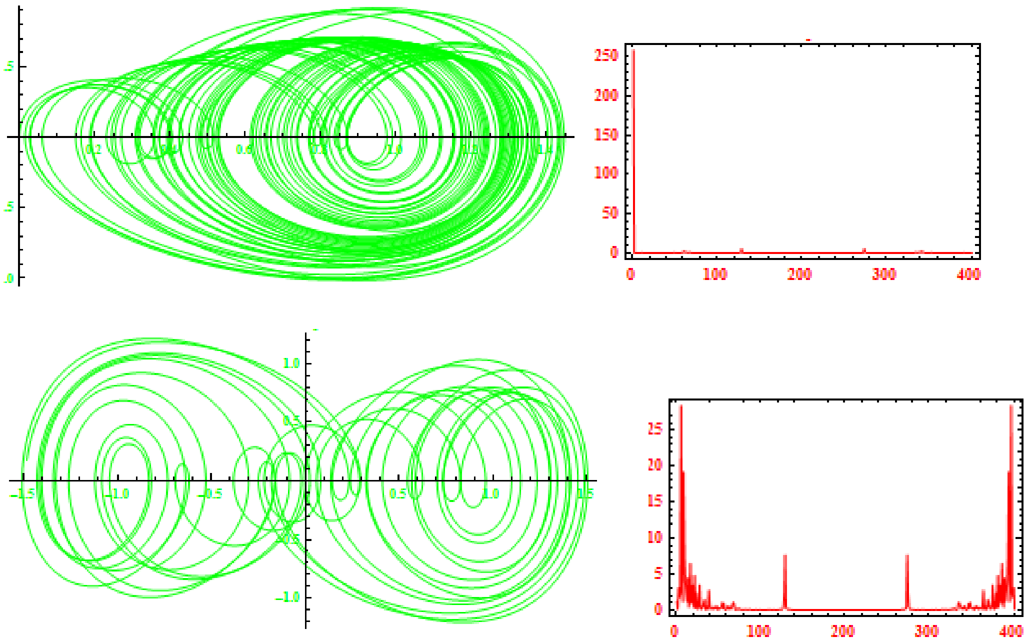
b) with Gauss noise

4.4.1.2 Влијание на сигнал кој треба да се детектира

Претпоставуваме дека сигналот се состои од сигнал со иста фреквенција како и референтниот сигнал, односно

$$Input(t) = 0.2\cos 2t$$

За критична вредност на силата на принудување $F_c = 0.9$ Duffing осцилаторот ја менува својата состојба од периодично во хаотично движење (слика 25).

а)
б)


Слика 28. *Фазен дијаграм и Спектар на моќ на Duffing осцилатор со амплитуда на принудување $F = 0.9$, фреквенција на сила на принудување $\Omega = 2$, линеарна крутост -1, нелинеарна крутост 1 и придушување $\xi = 0.5$*

а) без сигнал кој треба да се детектира

б) со сигнал кој треба да се детектира

Figure 28. *Phase diagram and Power spectra of Duffing oscillator with forcing amplitude $F = 0.9$, forcing frequency $\Omega = 2$, linear stiffness -1, nonlinear stiffnes 1 and dumping $\xi = 0.5$*

a) without signal signal to be detected

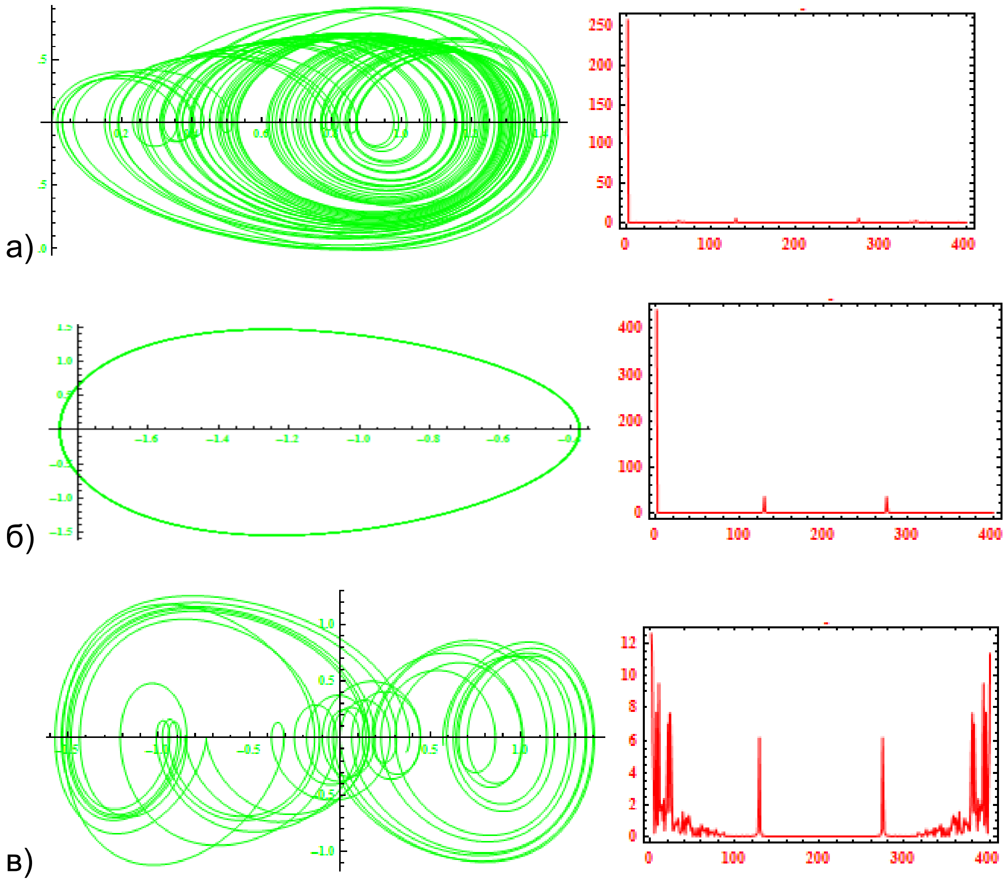
b) with signal signal to be detected

4.4.1.3 Влијание на сигнал кој треба да се детектира со бучава

Претпоставуваме дека сигналот се состои од сигнал со иста фреквенција како и референтниот сигнал и бучава односно

$Input(t) = 0.2\cos 2t + \varepsilon(t)$ каде $\varepsilon(t) = N(0,1)$

За критична вредност на силата на принудување $F_c = 0.9$ Duffing осцилаторот ја менува својата состојба од периодично во хаотично движење во зависност од големината на бучавата (слика 26).



Слика 29. *Фазен дијаграм и Спектар на моќ на Duffing осцилатор со амплитуда на принудување $F = 0.9$, фреквенција на сила на принудување $\Omega = 2$, линеарна крутост -1, нелинеарна крутост 1 и придушување $\xi = 0.5$*

а) без сигнал кој треба да се детектира

б) со сигнал кој треба да се детектира и Гаус бучава $\varepsilon(t) = N(0{,}1)$

в) со сигнал кој треба да се детектира и Гаус бучава $\varepsilon(t) = 0.2N(0{,}1)$

Figure 29. *Phase diagram and Power spectra of Duffing oscillator with forcing amplitude $F = 0.9$, forcing frequency $\Omega = 2$, linear stiffness -1, nonlinear stiffnes 1 and dumping $\xi = 0.5$*

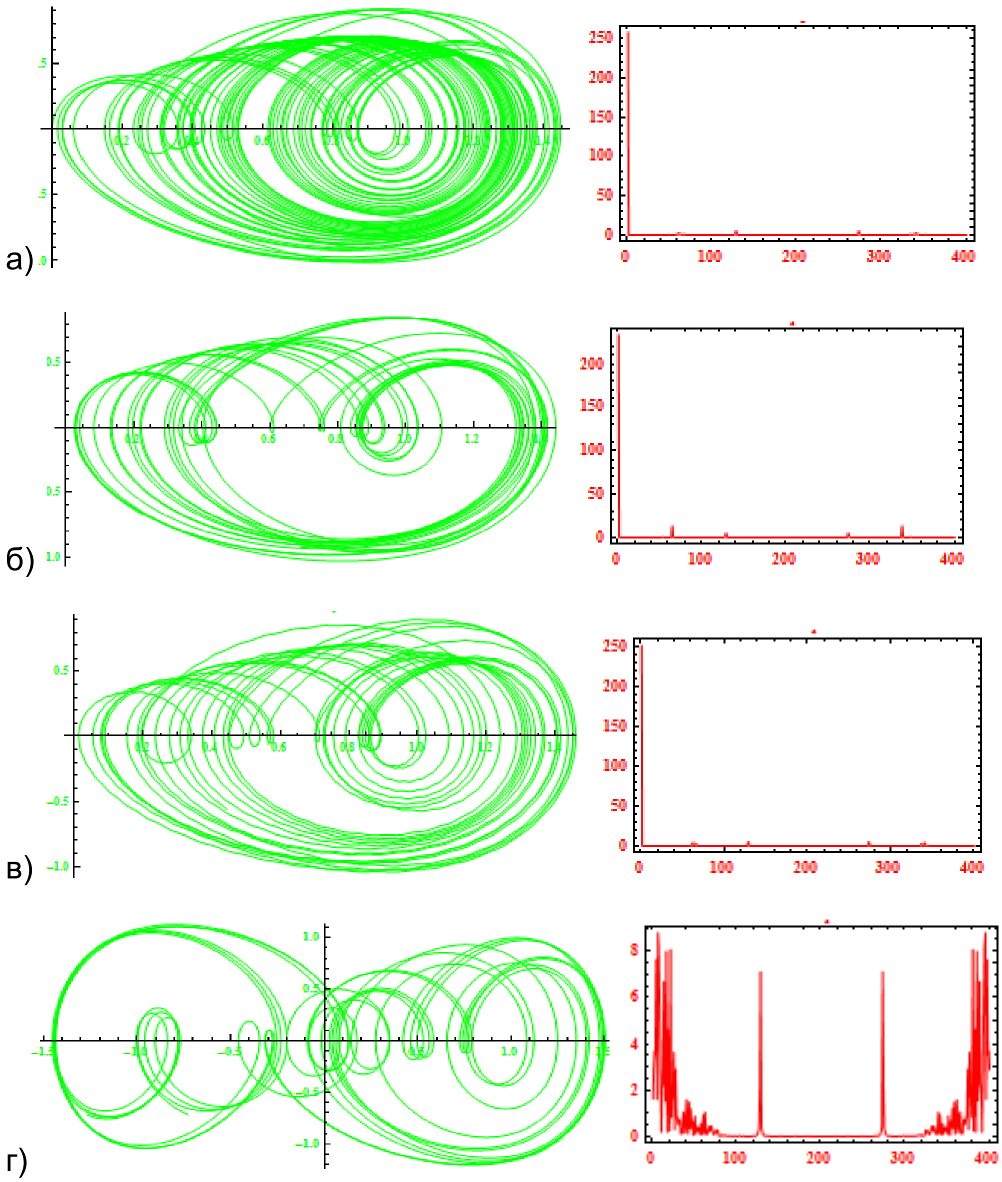
a) without signal signal to be detected

b) with signal signal to be detected and Gauss noise $\varepsilon(t) = N(0{,}1)$

c) with signal signal to be detected and Gauss noise $\varepsilon(t) = 0.2N(0{,}1)$

4.4.1.4 Влијание на сигнал со различна фреквенција

Кога фреквенцијата на надворешниот сигнал е различна од онаа на референтниот сигнал, орбитите остануваат хаотични и не се поместени, освен за екстремно мали разлики помеѓу фреквенцијата на сигналот кој треба да се детектира и фреквенцијата на референтната сила на принудување (слика 28 и слика 29).



Слика 30. *Фазен дијаграм и Спектар на моќ на Duffing осцилатор со амплитуда на принудување* $F = 0.9$, *фреквенција на сила на принудување* $\Omega = 2$, *линеарна крутост -1, нелинеарна крутост 1 и придушување* $\xi = 0.5$

а) без сигнал кој треба да се детектира

б) со сигнал кој треба да се детектира со фреквенција 3

в) со сигнал кој треба да се детектира со фреквенција 60

г) со сигнал кој треба да се детектира со фреквенција 2.001

Figure 30. *Phase diagram and Power spectra of Duffing oscillator with forcing amplitude* $F = 0.9$, *forcing frequency* $\Omega = 2$, *linear stiffness -1, nonlinear stiffnes 1 and dumping* $\xi = 0.5$

a) without signal signal to be detected

b) with signal to be detected with frequency 3

c) with signal to be detected with frequency 60

d) with signal to be detected with frequency 2.001

Експериментирањата покажуваат дека системот ќе генерира повремен (нерамномерен) хаос на хаотична состојба и периодична состојба, ако постојат екстремно мали разлики помеѓу фреквенцијата на сигналот кој треба да се детектира и фреквенцијата на силата на принудување.

5 Дискусија и заклучок

5.1 Споредба на слободен линеарен осцилатор без придушување со слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување

Состојбата на слободен линеарен осцилатор без придушување како и на слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување е опишана со хомогена линеарна диференцијална равенка од втор ред со константни коефициенти (равенка (1) односно равенка (3) соодветно) за коишто е одредено решение во аналитичка форма ((2а,б) односно (4а,б) соодветно).

Решението (2а,б) на равенката на слободен линеарен осцилатор без придушување покажува дека осцилаторот ќе осцилира со постојана амплитуда и фреквенција кои зависат од почетната состојба како и природната фреквенција на осцилаторот.

Решението (4а,б) на равенката на слободен линеарен осцилатор со придушување покажува дека осцилаторот ќе осцилира со променлива амплитуда, односно амплитуда која во текот на времето се намалува, односно осцилациите се распаѓаат зависно од големината на придушувањето.

5.2 Споредба на принуден линеарен осцилатор без придушување со принуден линеарен осцилатор со линеарно придушување

Состојбата на принуден линеарен осцилатор без придушување како и на принуден линеарен осцилатор со линеарно придушување е опишана со нехомогена линеарна диференцијална равенка од втор ред со константни коефициенти ((5) односно (8) соодветно) чие решение е збир од општото решение на скратената хомогена равенка и партикуларното решение на нехомогената равенка ((6) и (7), односно (9) соодветно). Партикуларното решение на нехомогената равенка ја претставува рамнотежната состојба на осцилаторот.

Особено интересна е резонантната реакција на осцилаторот која кај осцилатор без придушување се јавува за фреквенции на силата на принудување блиска до природната фреквенција на осцилаторот (равенка (7)) и тогаш амплитудата на осцилаторот не е периодична, но тежи кон бесконечност. Кај принуден осцилатор со придушување вредноста на фреквенцијата на принудување за која се добива најголема амплитудна реакција зависи од придушувањето. За мали придушувања максимална амплитудна реакција се добива за фреквенција на принудување блиска до природната фреквенција на самиот систем.

5.3 Споредба на слободен нелинеарен осцилатор со нелинеарно придушување со слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување

За разлика од слободен линеарен осцилатор со линеарно придушување кој е опишан со хомогена линеарна диференцијална равенка, диференцијалната равенка на слободен нелинеарен осцилатор со нелинеарно придушување (равенка (13)) е нелинеарна хомогена диференцијална равенка од втор ред и нема решение во затворена аналитичка форма и покажува различни рамнотежни реакции и нивна стабилност зависно од вредностите на параметрите. За да се определи состојбата на системот за дадени вредности на параметрите, потребно е да се познава фазниот портрет на целиот систем.

5.4 Споредба на Duffing осцилатор со линеарно придушување со присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување

Duffing осцилаторот со слабо линеарно придушување, слаба нелинеарност и слаба сила на водење (коефициенти блиски до 0) е опишан со нехомогена нелинеарна диференцијална равенка за која се одредува аналитичка апроксимација на решението. За разлика од присилениот линеарен осцилатор со линеарно придушување кај кој резонанса за мали вредности на придушувањето се јавува за фреквенции на силата на принудување блиску до природната фреквенција на системот, кај Duffing осцилаторот за мали вредности на придушувањето и нелинеарноста резонанси се јавуваат за три вредности на фреквенцијата на силата на принудување. Максималната рамнотежна реакција на системот за време на резонантно принудување се одредува со помош на аналитичката апроксимација на решението. Кривата на амплитудна реакција за Duffing осцилатор за одредени фреквенции на принудување е повеќевредносна што ни дава интервал на бистабилност во кој, пак, за различни почетни вредности се добиваат различни рамнотежни реакции на системот.

5.5 Можности за примена на Duffing осцилатор при детекција на слаби сигнали

Duffing осцилаторот (67) кој заради присуството на нелинеарниот член покажува различни реакции зависно од вредностите на параметрите, но и почетната состојба, но и специфични однесувања во присуство на Гаус шум или слаб сигнал.

За одредени вредности на амплитудата на принудување:

- останува во состојба на периодично или хаотично движење независно од присуството на Гаус шум;
- ја менува состојбата од периодично во хаотично движење и обратно во присуство на слаб сигнал со иста фреквенција и Гаус шум и
- ја менува состојбата од периодично во хаотично движење и обратно во присуство на слаб сигнал со фреквенција блиска на неговата фреквенција на принудување.

6 Прилози

6.1 Код од Matematica користен за анализа на однесување на слободен линеарен осцилатор без придушување

```
Manipulate[
 Module[{sol1, tbl, sol2},
  sol1 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + k x[t] == 0, xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]}, {t, 0, 200}, MaxSteps → Infinity];
  If[selection == "Поинкаре секција",
   sol2 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + k x[t] == 0, xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]}, {t, 0, 200}, MaxSteps → Infinity];
   tbl = Table[Evaluate[{First[x[t] /. sol2], First[xs[t] /. sol2]}], {t, 100, 200}]];
  Which[
   selection == "временски ред", Plot[Evaluate[x[t] /. sol1], {t, 0, 100}, PlotStyle → RGBColor[1, 0.47, 0],
    PlotRange → {{0, 40}, {-2.5, 2.5}}, AxesLabel → {t, y}, ImageSize → {550, 375}],
   selection == "фазен простор", ParametricPlot[Evaluate[{First[x[t] /. sol1], First[xs[t] /. sol1]}], {t, 0, 100},
    PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {-2.5, 2.5}}, AxesLabel → {y, y'}, ImageSize → {550, 375}, PlotPoints → 200],
   selection == "Поинкаре секција", ListPlot[tbl, ImageSize → {550, 375}, PlotStyle → {PointSize[0.0075], RGBColor[1, 0, 0]},
    AxesLabel → {y, y'}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}]]], {{k, 0.2, "крутост к"}, 0, 2.5, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 {{selection, "временски ред"}, {"временски ред", "фазен простор", "Поинкаре секција"}}, TrackedSymbols :→ {k, selection}]
```

6.2 Код од Matematica користен за анализа на однесување на присилен линеарен осцилатор без придушување

```
Manipulate[
 Module[{sol1, tbl, sol2}, ω = 1;
  sol1 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + ω^2 x[t] == Γ Cos[Ω t], xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]},
    {t, 0, 400}, MaxSteps → Infinity];
  If[selection == "Поинкаре секција",
   sol2 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + ω^2 x[t] == Γ Cos[Ω t], xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]},
     {t, 0, 400}, MaxSteps → Infinity];
   tbl = Table[Evaluate[{First[x[t] /. sol2], First[xs[t] /. sol2]}], {t, 100, 400, ControlActive[8 Pi / Ω, 2 Pi / Ω]}]];
  Which[
   selection == "временски ред", Plot[Evaluate[x[t] /. sol1], {t, 0, 150}, PlotStyle → RGBColor[1, 0.47, 0], AxesLabel → {t, y},
    PlotRange → {{0, 150}, {-5, 5}}, ImageSize → {550, 375}],
   selection == "фазен простор", ParametricPlot[Evaluate[{First[x[t] /. sol1], First[xs[t] /. sol1]}], {t, 0, 100},
    ImageSize → {550, 475}, AxesLabel → {y, y'}, PlotPoints → 100, PlotRange → {{-7, 7}, {-7, 7}}],
   selection == "Поинкаре секција", ListPlot[tbl, ImageSize → {550, 375}, PlotStyle → {PointSize[0.0075], RGBColor[1, 0, 0]},
    PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}]]], {{Γ, 0.2, "амплитуда на водење"}, 0, 2.5, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 {{Ω, 0.2, "фреквенција на водење"}, 0, 2, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 {{selection, "временски ред"}, {"временски ред", "фазен простор", "Поинкаре секција"}}, TrackedSymbols :→ {Γ, Ω, selection}]
```

6.3 Код од Matematica користен за анализа на однесување на присилен линеарен осцилатор со линеарно придушување

```
Manipulate[
 Module[{sol1, tbl, sol2}, ω = 1;
  sol1 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + 2 ϵ xs[t] + ω^2 x[t] == Γ Cos[Ω t], xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]},
    {t, 0, 400}, MaxSteps → Infinity];
  If[selection == "Поинкаре секција",
   sol2 = NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + 2 ϵ xs[t] + ω^2 x[t] == Γ Cos[Ω t], xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 1, xs[0] == 1}, {x[t], xs[t]},
     {t, 0, 4000}, MaxSteps → Infinity];
   tbl = Table[Evaluate[{First[x[t] /. sol2], First[xs[t] /. sol2]}], {t, 100, 4000, ControlActive[8 Pi / Ω, 2 Pi / Ω]}]];
  Which[
   selection == "временски ред", Plot[Evaluate[x[t] /. sol1], {t, 0, 100}, PlotStyle → RGBColor[1, 0.47, 0], AxesLabel → {t, y},
    ImageSize → {550, 375}],
   selection == "фазен простор", ParametricPlot[Evaluate[{First[x[t] /. sol1], First[xs[t] /. sol1]}], {t, 0, 100},
    AxesLabel → {y, y'}, ImageSize → {550, 475}, PlotPoints → 100, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}],
   selection == "Поинкаре секција", ListPlot[tbl, ImageSize → {550, 375}, PlotStyle → {PointSize[0.0075], RGBColor[1, 0, 0]},
    AxesLabel → {y, y'}, PlotRange → {{-5, 5}, {-5, 5}}]]], {{Γ, 0.2, "амплитуда на водење"}, 0, 2.5, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 {{Ω, 0.2, "фреквенција на водење"}, 0, 1.5, 0.1, Appearance → "Labeled"}, {{ϵ, 0.2, "придушување"}, 0, 2, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 {{selection, "временски ред"}, {"временски ред", "фазен простор", "Поинкаре секција"}}, TrackedSymbols :→ {Γ, Ω, ϵ, selection}]
```

6.4 Код од Matematica користен за анализа на влијание на Gauss шум на Duffing осцилатор

```
Manipulate[
 Module[{sol1, tbl}, γ = 0.5; ϵ = 1; Ω = 2; ω = 1;
  sol1 =
   NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + γ xs[t] - x[t] + ϵ x[t]^3 ==
       0.2 RandomReal[NormalDistribution[0, 1]] + Γ Cos[Ω t], xs[t] == D[x[t], {t, 1}],
     x[0] == 0, xs[0] == 0}, {x[t], xs[t]}, {t, 0, 800}, MaxSteps → Infinity];
  g1 = ListLinePlot[Abs[Fourier[Flatten[Table[Evaluate[x[t] /. sol1], {t, 100, 500}]]]]^2,
    PlotRange → All, ImageSize → {300, 180}, PlotStyle → {Red}, Frame → True,
    PlotLabel → "Power Spectra", LabelStyle → Directive[Bold, Red]];
  g2 = ParametricPlot[Evaluate[{First[x[t] /. sol1], First[xs[t] /. sol1]}],
    {t, 100, 200}, PlotStyle → {Green}, PlotPoints → 1000, PlotLabel → "Phase Space",
    LabelStyle → Directive[Bold, Green], ImageSize → {500, 250} , AspectRatio → 1 / 2];
  Column[{Row[{g1}], g2}, Alignment → Center]],
 {{Γ, 0.9, "амплитуда на водење F"}, 0.2, 3, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 SynchronousUpdating → False, TrackedSymbols → True]
```

6.5 Код од Matematica користен за анализа на влијание на Gauss шум и сигнал на Duffing осцилатор

```
Manipulate[
 Module[{sol1, tbl}, γ = 0.5; ϵ = 1; Ω = 2; ω = 1;
  sol1 =
   NDSolve[{D[xs[t], {t, 1}] + γ xs[t] - ω^2 x[t] + ϵ x[t]^3 ==
       0.2 RandomReal[NormalDistribution[0, 1]] + Γ Cos[2 t] + 0.2 Cos[2 t],
     xs[t] == D[x[t], {t, 1}], x[0] == 0, xs[0] == 0}, {x[t], xs[t]}, {t, 0, 1800},
    MaxSteps → Infinity];
  g1 = ListLinePlot[Abs[Fourier[Flatten[Table[Evaluate[x[t] /. sol1], {t, 100, 500}]]]]^2,
    PlotRange → All, ImageSize → {300, 180}, PlotStyle → {Red}, Frame → True,
    PlotLabel → "Power spectra", LabelStyle → Directive[Bold, Red]];
  g2 = ParametricPlot[Evaluate[{First[x[t] /. sol1], First[xs[t] /. sol1]}], {t, 100, 200},
    PlotStyle → {Green}, PlotPoints → 1000, PlotLabel → "Phase Space",
    LabelStyle → Directive[Bold, Green], ImageSize → {500, 250} , AspectRatio → 1/2];
  Column[{Row[{g1}], g2}, Alignment → Center]],
 {{Γ, 0.9, "амплитуда на водење Γ"}, 0, 2.5, 0.1, Appearance → "Labeled"},
 SynchronousUpdating → False, TrackedSymbols → True]
```

7 Користена литература

[1] Bel´endez, C. Pascual, M. Ortu˜no, T. Bel´endez, S. Gallego (2009). Application of a modified He's homotopy perturbation method to obtain higher-order approximations to a nonlinear oscillator with discontinuities.

[2] E. Gandino and S. Marchesiello (2010). Identification of a Duffing Oscillator under Different Types of Excitation. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2010, Article ID 695025

[3] GOONG CHEN, SZE-BI HSU, YU HUANG, MARCO A. ROQUE-SOL. (2010) THE SPECTRUM OF CHAOTIC TIME SERIES (I):FOURIER ANALYSIS. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 21, No. 5

[4] Haiwu Rong,, XiangdongWang, WeiXu, TongFang (2009). Subharmonic response of a single-degree-of-freedom nonlinear vibroimpact system to a randomly disordered periodic excitation. Journal of Sound and Vibration

[5] I.Kovacic and M. J. Brennan. (2011) The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour First Edition. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-71549-9

[6] Javier Montenegro Joo (2009). A Pragmatic Introduction to Chaos Theory for Engineers. Revista de la Facultad de Ingeniería Industrial Vol. 12(2): pp 89-94 (2009) UNMSM

[7] JIN Tian, ZHANG Hua. Statistical approach to weak signal detection and estimation using Duffing chaotic oscillators. Information Sciences. November 2011 Vol. 54 No. 11: 2324–2337

[8] M. Gorji-Bandpy, M. Azimi, M. Mostofi. Analytical Methods to a Generalized Duffing Oscillator. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 5(11): 788-796, 2011. ISSN 1991-8178

[9] Michael Strevens (2004). Chaos. Macmillan Encyclopedia of Philosophy, second edition

[10] Pengda Huang, Yiming Pi, and Zhiqin Zhao. (2009) Weak GPS Signal Acquisition Algorithm Based on Chaotic Oscillator. EURASIP Journal on Advances in Signal ProcessingVolume Article ID 862618

[11] XiaoLi Yang, Zhong Kui Sun (2011). Recovering unknown model parameters contained in a class of time-variant chaotic dynamical systems. Applied Mathematics and Computation 217 (2011) 7311–7317.

[12] Xuanchao Liu, Xiaolong Liu. (2011) Weak Signal Detection Research Based on Duffing Oscillator Used for Downhole Communication. JOURNAL OF COMPUTERS, VOL. 6, NO. 2, FEBRUARY 2011