ЕМПИРИСКА АНАЛИЗА НА SOLOW-SWAN МОДЕЛОТ НА РАСТ

м-р Дарко Лазаров д-р Ристо Фотов м-р Душко Јошески

Краток извадок

За да видиме како Solow-Swan моделот на раст функционира, односно како една економија го достигнува steady-state нивото ќе користиме една емпириска анализа. Основна претпоставка што ќе биде направена во нашата анализа се однесува на производната функција

Клучни зборови: економски раст, животен стандард, технолошки прогрес

EMIRICAL ANALAYSIS OF SOLOW-SWAN GROWTH MODEL

Darko Lazarov, Risto Fotov, Dushko Josheski

Abstract

Long-term rate of economic growth in the Solow-Swan model is determined by exogenous (previously given) variables, and as a result, in the model, per capita variables k, c and y grow only to a point where the economy reaches the steady-state level. From this we can conclude that the Solow-Swan model provides an opportunity to grow the economy, but in the long run. To explain this fact we will use one example. Suppose that the economy is in a state where capital per worker k is below the value in the steady-state condition, in which case capital and output per worker will grow, but only along the transition path to steady-state. On the other hand, when the goods on physical capital per worker exceeds the value of capital per worker in steady-state condition, then the economy has seen a decline in capital and output per worker along the transition path to steady-state level.

Key words: economic growth, living of standard, technological progress.

Вовед

Долгорочната стапка на економски раст во Solow-Swan моделот е детерминиран од егзогени (однапред дадени) варијабли, па како резултат на тоа, во моделот, per capita варијаблите *k*, *c* и *y* растат само до точката каде економијата го достигнува steady-state нивото. Од ова може да заклучиме дека Solow-Swan моделот дава можност економијата да расте, но не на долг рок. За да го објасниме овој факт ќе се послужиме со еден пример. Да претпоставиме дека економијата се наоѓа во состојба кога *k* капиталот по работник е под вредноста во steady-state состојба, во таков случај капиталот и аутпутот по работник ќе растат, но само долж транзиционата патека до steady-state. Од друга страна, кога стокот на физичкиот капитал по работник ја надминува вредноста на капиталот по работник во steady-state состојба, тогаш економијата бележи пад на капиталот и аутпутот по работник долж транзициониот пат до steady-state нивото.

Емпириска анализа на steady-state

За да видиме како Solow-Swan моделот на раст функционира, односно како една економија го достигнува steady-state нивото ќе користиме една емпириска анализа. Основна претпоставка што ќе биде направена во нашата анализа се однесува на производната функција. Равенката на производната функција во нашата анализа го има следниот облик:[1]

$$Y = K^{1/2}L^{1/2} \tag{1.1}$$

За да ја дериваме производната функција по работник, потребно е равенката (1.28) да ја поделиме од двете страни со работната сила, *L:*

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/2}L^{1/2}}{L} \tag{1.2}$$

Ако математички ја преструктурираме равенката (1.29), ќе добиеме:

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Фактот што $y = Y/L$ и $k = K/L$, равенката (1.30) можеме да ја напишеме како:

$$y = k^{1/2} \tag{1.4}$$

Истата равенка може да биде напишана и на следниот начин:

$$y = \sqrt{k} \tag{1.5}$$

Оваа форма на производна функција ни покажува дека аутпутот по работник е еднаков на квадратниот корен од износот на капиталот по работник.

За да ја направиме целосната анализа на емпирискиот пример, ќе претпоставиме дека 30 проценти од аутпутот се штеди $s = 0.3$, дека 10 проценти од стокот на физичкиот капитал се амортизира секоја година $\delta = 0.1$, и дека економијата почнува со 4 единици на капитал по работник $k = 4$. Врз основа на овие податоци, можеме да анализираме што ќе се случи во економијата низ текот на времето.

Ќе почнеме со анализа на производството и дистрибуцијата на аутпутот во првата година. Според производната функција што претходно ја интерпретиравме 4 единици на капитал по работник произведуваат 2 единици на аутпут по работник. Ако 30 проценти од аутпутот економијата го штеди и инвестира, а 70 проценти го троши, тогаш во нашиот пример, $i = 0.6$ и $c = 1.4$. Бидејќи 10 проценти од стокот на физичкиот

[1] Од самата равенка може да видиме дека се работи за Коб - Дагласова производна функција, во која параметарот, a, е еднаков на $1/2$.

капитал секоја година се амортизира, $\delta = 0.4$. Со инвестиции од 0.6 и амортизација од 0.4, промената во стокот на физичкиот капитал е $\Delta k = 0.2$. Економијата во втората година започнува со 4.2 единици на капитал по работник.

Емпириските резултати покажуваат дека секоја година новиот капитал по работник го зголемува стокот на физичкиот капитал по работник, и на тој начин генерира раст на аутпутот по работник. После повеќе години, економијата го достигнува своето steady-state ниво, во нашиот пример тоа е 9 единици капитал по работник. Во оваа steady-state состојба, инвестициите по работник од 0.9 во целост го ја покриваат амортизацијата на капиталот по работник од 0.9, што значи, стокот на физичкиот капитал по работник и аутпутот по работник повеќе не бележат тенденција на раст.

Постои друга начин со помош на кој можеме да го анализираме прогресот на економијата кон достигнување на steady-state нивото низ текот на времето. За таа цел ќе ги интерпретираме следнава математички пресметки:

$$\Delta k = sf(k) - \delta k \qquad (1.6)$$

Со помош на оваа равенка можеме да ја анализираме промената на капиталот по работник низ текот на времето. Фактот што во steady-state состојба (по дефиниција), $\Delta k = 0$, претходната равенка може да ја напишеме

$$0 = sf(k^*) - \delta k^* \qquad (1.7)$$

или, еквивалентно на тоа,

$$\frac{k^*}{f(k^*)} = \frac{s}{\delta} \qquad (1.8)$$

Оваа равенка создава можност за утврдување на steady-state нивото на капитал по работник, k^*. Ако ги замениме податоците и производната функција од нашиот пример, ќе добиеме

$$\frac{k^*}{\sqrt{k^*}} = \frac{0.3}{0.1}$$

каде

$$k^* = 0.9$$

Стокот на физичкиот капитал по работник во steady-state состојба е 9 единици.

1.1 Транзициона динамика (Економски раст во Solow-Swan моделот без технолошки прогрес)

Долгорочната стапка на економски раст во Solow-Swan моделот е детерминиран од егзогени (однапред дадени) варијабли, па како резултат на тоа, во моделот, per capita варијаблите *k*, *c* и *y* растат само до точката каде економијата го достигнува steady-state нивото. Од ова може да заклучиме дека Solow-Swan моделот дава можност економијата да расте, но не на долг рок. За да го објасниме овој факт ќе се послужиме со еден пример. Да претпоставиме дека економијата се наоѓа во состојба кога *k* капиталот по работник е под вредноста во steady-state состојба, во таков случај капиталот и аутпутот по работник ќе растат, но само долж транзиционата патека до steady-state. Од друга страна, кога стокот на физичкиот капитал по работник ја надминува вредноста на капиталот по работник во steady-state состојба, тогаш економијата бележи пад на капиталот и аутпутот по работник долж транзициониот пат до steady-state нивото.

Оваа констатација можеме математички да ја докажеме со помош на равенката за акумулација на капитал по работник

$$\Delta k = s \cdot f(k) - (n+\delta)k \qquad (1.9)$$

Со цел да ја добиеме стапката на раст на капиталот по работник, равенката (1.36) ќе ја поделиме од двете страни со *к*, капиталот по работник

$$\Delta k / k = s \cdot f(k)/k - (n+\delta) \qquad (1.10)$$

Оваа равенка можеме да ја напишеме во следната форма[2]

$$\Delta k / k = s \cdot k^{a} / k - (n+\delta) \qquad (1.11)$$

односно

$$\Delta k / k = s \cdot k^{a-1} - (n+\delta) \qquad (1.12)$$

Бидејќи a е вредност помала од еден, кога k бележи пораст, стапката на раст на k очигледно опаѓа. Фактот што стапката на раст на аутпутот по работник y, е детерминирана од стапката на раст на капиталот по работник k,[3] покажува дека тогаш кога стокот на физичкиот капитал по работник ја надминува вредноста на капиталот по работник во steady-state состојба, тогаш економијата бележи пад на капиталот и аутпутот по работник долж транзициониот пат до steady-state нивото.

---

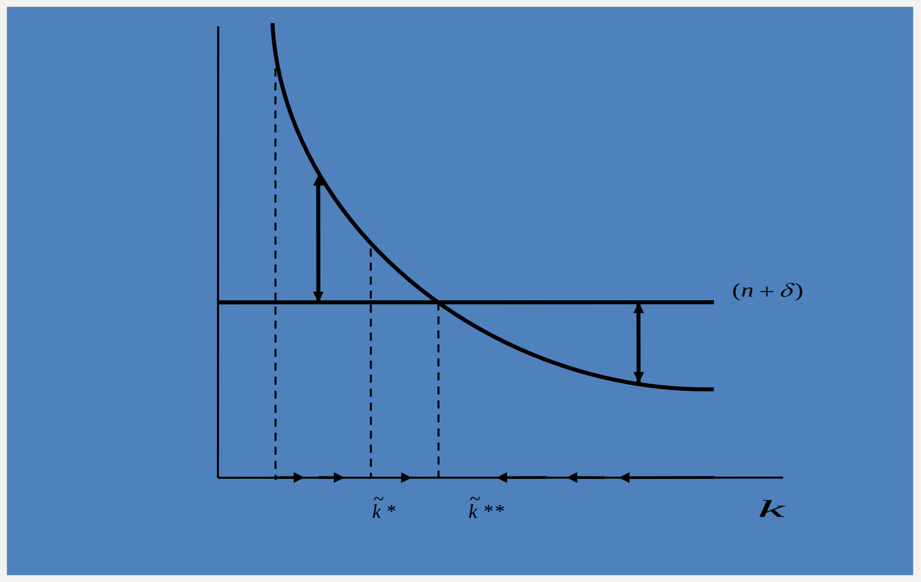
[2] Претходно знаеме дека аутпутот по работник $y = f \cdot (k) = k^{a}$

[3] Аутпутот по работник $y = k^{a}$, ако оваа равенка ја логаритмираме и диференцираме по времето *t:*

$\log y = a \log k \Rightarrow \dfrac{d \log y}{dt} = a \dfrac{d \log k}{dt} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{y} = a \dfrac{\Delta k}{k}$, што покажува дека стапката на раст на аутпутот по работник е детерминирана од стапката на раст на капиталот по работник.

Со цел графичко претставување на транзиционата динамика која беше интерпретирана во равенката (1.39), ќе се послужиме со една алтернативна верзија на Solow-Swan дијаграмот на сликата1.2. Првиот дел од десната страна на равенката, $s \cdot k^{a-1}$, што можеме да го напишеме во повеќе форми, $s \cdot k^{a-1} = s \cdot f(k)/k = s \cdot y/k$. Ова недвосмислено ни покажува дека повисоко ниво на капитал по работник го намалува просечниот производ на капитал, y/k, како резултата на својството за опаѓачки принос на капиталот. Поради тоа, оваа крива на дијаграмот има опаѓачки наклон. Вториот дел од десната страна на равенката (1.39) е $(n+\delta)$, фактот што овој израз не зависи од k, на дијаграмот има форма на хоризонтална линија. Разликата помеѓу двете криви на дијаграмот, $s \cdot y/k = s \cdot k^{a-1}$ и $(n+\delta)$, ја покажува стапката на раст на капиталот по работник $\Delta k/k$.

<u>Слика1.1 Транзициона динамика</u>



Од дијаграмот на трнзиционата динамика може да заклучиме дека, колку повеќе една економија се наоѓа под вредноста на k во steady-state, толку побрзо таа економијата бележи раст. Од друга страна, колку повеќе економијата се наоѓа над вредноста на k во steady-state, толку побрзо економијата опаѓа.

1.2 <u>Solow -Swan модел на раст со технолошки прогрес</u>

При анализата на базичниот Solow-Swan модел на раст претпоставивме дека нивото на технологија е константно низ текот на времето. Како резултат на тоа, погоре можевме да видиме дека економијата на долг рок со дадено ниво на технологија не е во состојба да генерира раст на per capita варијаблите. Оваа претпоставка на моделот е целосно нереална, поради фактот што многу економии во светот бележат позитивни стапки на раст на аутпутот per capita во подолг временски период. Со отсуство на технолошки прогрес, опаѓачките приноси го прават невозможен растот на аутпутот per capita единствено преку акумулација на капитал per capita.[4] Видовме дека капиталот и аутпутот по работник растат единствено по транзициониот пат до steady-state. Кога економијата се наоѓа во steady-state состојба, агрегатните варијабли Y, K, C растат по стапка на раст на населението n, што значи дека per capita варијабли y, k, c остануваат константни низ текот на времето. Со цел Solow-Swan моделот на раст да генерира одржлив раст (долгорочен раст) на аутпутот per capita потребно е моделот да го имплементира технолошкиот прогрес. Тоа значи дека моделот треба да ги земе во предвид постојаните подобрувања на технологијата, кои подобрувања создаваат можност приносот од капиталот да не се намалува низ текот на времето, а аутпутот per capita да расте на долг рок.

И покрај тоа што некои откритија во општеството се случајни и неочекувани, сепак, најголем дел од технолошките подобрувања се резултат на претходни планирани и долгорочни активности, како што се истражувачките и развојните (R&D) активности, кои се спроведуваат на универзитетите, државните институти, или секторите за истражување на корпорациите. Овие истражувања можат да бидат финансирани од корпорациите или од државните агенции, како што е случај со National Science Foundation во Америка. Прашањата поврзани со технологијата, технолошкиот прогрес и нивното влијание врз растот на економијата посуптилно ќе бидат предмет на наша анализа во делот на Ендогените модели на раст, каде технологијата се третира како ендогена варијабла. Кога го анализираме Solow-Swan моделот на раст треба да знаеме дека технологијата претставува егзогена варијабла, што значи дека технолошките подобрувања (технолошкиот прогрес) е егзоген.

Фактот што при анализата на фундаменталниот Solow-Swan модел, технологијата и технолошкиот прогрес не беа земени во предвид, наша задача во овој дел ќе биде прашањето за имплементирање на технолошкиот прогрес во моделот. Овој технолошки прогрес (технолошко подобрување) може да се појави во повеќе форми. Иновациите може да создадат можности за производство на исто количество аутпут со помало количество на капитал или труд, па според тоа, технолошкиот прогрес може да биде капитално-штедлив или трудо-штедлив технолошки прогрес. Технолошкиот прогрес може да го дефинираме како можност економијата да произведе поголемо количество аутпут со исто количество на фактори на производство (труд и капитал), овој технолошки прогрес се нарекува неутрален технолошки прогрес.

Во продолжение ќе ја презентираме производната функција со имплементирање на технолошкиот прогрес

$$Y = F(K, AL) = K^{a}(AL)^{1-a} \tag{1.13}$$

[4] Забелешка: per capita формата или по глава на жител, се добива кога агрегатната варијабла ќе ја поделиме со бројот на жители на економијата. Често пати може да ја сретнеме како per worker, односно форма по работник, која се добива кога агрегатната варијабла ќе ја поделиме со бројот на работници во економијата. Економистите овие термини најчесто ги третираат како синоними.

Како што може да видиме од равенката, технолошкиот прогрес е од типот (*labor-augmenting*), што значи дека подобрувањето на технологијата е насочено кон облагодарување на трудот т.е. зголемување на квалитетот на трудот.[5] Технолошкиот прогрес во суштина подразбира зголемување на постојаното ниво на технологија во економијата, кога *A* бележи пораст низ текот на времето. На пример, една единица труд ќе има поголема продуктивност кога нивото на технологија бележи раст.

Како што можевме да видиме претходно, една од најзначајните претпоставки во Solow-Swan модел е тоа што технолошкиот прогрес се третира како егзоген. Фактот што технолошкиот прогрес е егзоген, покажува дека економијата не е во состојба да влијае врз технолошките подобрувања, наспроти тоа, технолошкиот прогрес расте по некоја константна, однапред дадена стапка:

$$\frac{\Delta A}{A} = g_A \Leftrightarrow A = A_0 e^{gt} \tag{1.14}$$

каде, g_A претставува параметар кој ја покажува стапката на раст на технологијата. Фактот што економијата денес произведува со многу поголема ефикасност од претходно, што de facto произлегува од технолошките подобрувања кои се случуваат во континуитет во развиените економии, ни покажува дека претходната претпоставка е нереална. И покрај тоа што егзогеноста на технолошкиот прогрес е нереална претпоставка, таа постои како таква во Solow-Swan моделот на раст поради поедноставување на самиот модел. Голем број економисти преку подобрување на самиот модел се обиделе да го надминат тој недостаток на базичниот Solow-Swan моделот на раст. Еден прилично успешен обид за подобрување на Solow-Swan моделот, бил обидот на Mankiw, Romer и Weil. Овој модел подетално ќе го анализираме подолу во трудот.

За да го анализираме Solow-Swan моделот на раст со технолошки прогрес производната функција во агрегатна форма претставена преку равенката (1.40), ќе ја трансформираме во форма по работник.

$$y = k^a A^{1-a} \tag{1.15}$$

Наша основна задача овде е анализа на стапката на економски раст во per capita форма во моделот со технолошки прогрес. За таа цел, равенката (1.42) најпрво ќе ја логаритмираме, а потоа ќе ја диференцираме:

$$\begin{aligned} &\log y = a\log k + (1-a)\log A \\ &\Rightarrow \frac{d\log y}{dt} = a\frac{d\log k}{dt} + (1-a)\frac{d\log A}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = a\frac{\Delta k}{k} + (1-a)\frac{\Delta A}{A} \end{aligned} \tag{1.16}$$

---

[5] Во литературата освен можноста за “labor-augmenting” технолошки прогрес, $F(K, AL)$, постојат “capital augmenting” или “Solow неутрален” технолошки прогрес, $F(AK, L)$, и, “Hicks неутрален” технолошки прогрес, $AF(K, L)$.

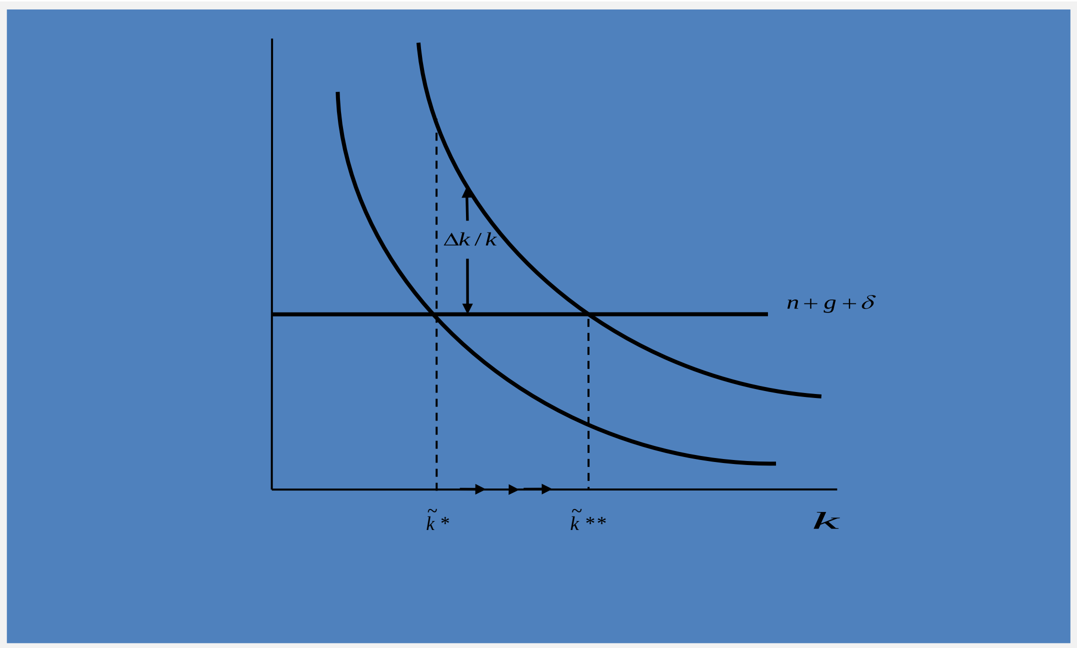
За да го анализираме моделот со технолошки прогрес потребно е варијаблите да ги изразиме во ефективна форма. Во продолжение ќе ја интерпретираме равенката за капиталот по ефективна единица труд, што уште се нарекува капитал/технологија коефициент

$$\hat{k} = \frac{K}{AL}$$

За да ја пресметаме стапката по која расте оваа варијабла, повторно ќе се послужиме со математичките операции (логаритмирање и диференцирање):

$$\frac{\Delta y}{y} = a\frac{\Delta k}{k} + (1-a)\frac{\Delta A}{A}$$

Слика1.1 Инвестициска функција



Заклучок

Емпириските резултати покажуваат дека секоја година новиот капитал по работник го зголемува стокот на физичкиот капитал по работник, и на тој начин генерира раст на аутпутот по работник. После повеќе години, економијата го достигнува своето steady-state ниво, во нашиот пример тоа е 9 единици капитал по работник. Во оваа steady-state состојба, инвестициите по работник од 0.9 во целост го ја покриваат амортизацијата на капиталот по работник од 0.9, што значи, стокот на физичкиот капитал по работник и аутпутот по работник повеќе не бележат тенденција на раст.

Литература

1. Mankiw, N. Gregory, David Romer, and David N. Weil (1992) “A Contribution to the Empirics of Economic Growth.” Quarterly Journal of Economics, 107, pp. 407-37.
2. Mankiw N.,Gregory,(2003) Macroeconomics, fifth edition, Worth Publishers
3. Prescott, Edward (1998) “Needed: A Theory of Total Factor Productivity.” International Economic Review, 39, pp. 525-553.
4. Romer, D., “Advanced Macroeconomics”, McGraw-Hill, 1996.
5. Romer, P.M. (1989) “Capital Accumulation in the Theory of Long Run Growth” in *Modern Business Cycle Theory*, ed. by R.J. Barro, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
6. Jones, C, I. (1998), Introduction to Economic Growth, New Tork: Norton.
7. Solow, Robert M. (1956) “A Contribution to the Theory of Economic Growth.” Quarterly Journal of Economics, 70, pp. 65-94.
8. Solow, Robert M. (1957) “Technical Change and the Aggregate Production Function.”Review of Economics and Statistics, 39, pp. 312-320.